7. Anhang zu Existenz und Eindeutigkeit

7.1 Technische Details

7.1.1 Ohne Beschränkung seien $t_0 = 0$ und $x_{\text{links}} = 0$

Statt ein partielles Differentialgleichungssystem

$$\partial_t \mathfrak{u} + \mathbf{A}(\mathfrak{u}) \cdot \partial_x \mathfrak{u} = \mathfrak{b}(\mathfrak{u}) \tag{7.1}$$

auf $G := [t_0, t_0 + T] \times [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$ zu lösen, kann man auch die Lösung $\mathfrak{u}^*$ von

$$\partial_{t^*} \mathfrak{u}^* + \mathbf{A}^*(\mathfrak{u}^*) \cdot \partial_{x^*} \mathfrak{u}^* = \mathfrak{b}^*(\mathfrak{u}^*) \tag{7.2}$$

auf $G^* := [0, T] \times [0, x^*_{\text{rechts}}]$ suchen, wobei die Transformation $t^* = t - t_0,\ x^* = x - x_{\text{links}}$ (und $x^*_{\text{rechts}} = x_{\text{rechts}} - x_{\text{links}}$) benutzt wurde. Man setzt dabei

$$\mathbf{A}^* : G^* \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K, \quad (t^*, x^*, \mathfrak{u}^*) \mapsto \mathbf{A}(t^* + t_0, x^* + x_{\text{links}}, \mathfrak{u}^*)$$

und analog $\mathfrak{b}^*$.

Hat man eine Lösung $\mathfrak{u}^*$ von (7.2), so ist

$$\mathfrak{u} : G \to \mathbb{R}^K, \quad (t, x) \mapsto \mathfrak{u}^*(t - t_0, x - x_{\text{links}})$$

eine Lösung von (7.1). Also kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $\quad t_0 = 0$ und $x_{\text{links}} = 0 \quad$ voraussetzen.

7.2 Beweise zum Lösen von IVP und CBVP

Zur Approximation einer Lösung einer quasilinearen Aufgabe

$$\partial_t u_k + \lambda_k(\mathfrak{u}) \cdot \partial_x u_k = g_k(\mathfrak{u}) \tag{7.3}$$

betrachtet man eine Familie von linearen Aufgaben

$$\partial_t u_k + \lambda_k(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x u_k = g_k(\mathfrak{w}) \tag{7.4}$$

und versucht zu zeigen, daß eine Abbildung $\mathcal{T}$, die ein $\mathfrak{w}$ auf eine Lösung von (7.4) wirft, einen Fixpunkt hat, der dann eine Lösung der quasilinearen Aufgabe (7.3) ist. Dabei sucht man die Lösung $\mathfrak{u} = (u_k)$ auf

$$G(T) := \{(t,x); \quad 0 \leq t - t_0(x) \leq T,\ 0 \leq x \leq x_{\text{rechts}}\},$$

wobei für T im Laufe der weiteren Arbeit obere Schranken angegeben werden. Damit $\mathcal{T}$ einen Fixpunkt hat, muß T klein genug sein, was in Bedingungen an $\|\mathfrak{w}\|$, $\|\partial_t\mathfrak{w}\|$, $\|\partial_x\mathfrak{w}\|$, Lipschitz-Konstanten von $\partial_t\mathfrak{w}$ und $\partial_x\mathfrak{w}$ sowie entsprechenden Normen der Anfangsdaten, der rechten Seiten und der λ_k ausgedrückt werden wird.

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung linearer Probleme (7.4) gewinnt man hier infolge der Diagonalisierung so einfach, daß ich keine eigenen Sätze für diese Fälle formuliere, sondern auf das allgemeine Problem 7.2.14 bzw. den daran anschließenden Satz 7.2.15 verweise, der ab Seite 226 bewiesen wird. In dessen Beweis wird für den linearen Fall auf Satz 7.2.2 zurückgegriffen, der im Mittelpunkt des folgenden Abschnitts 7.2.1 steht.

In Vorbereitung des weiteren Beweises von Satz 7.2.15 stelle ich anschließend in Abschnitt 7.2.2 a-priori-Abschätzungen bereit, nämlich die Lemmata 7.2.3, 7.2.10, 7.2.13 mit den Hilfslemmata 7.2.7, 7.2.8, 7.2.11 und 7.2.12. Diese sind so aufgebaut, daß man aus dem Beweis von Satz 7.2.3 Sätze der Art

„C_L^0-Data liefern eine eindeutige C_L^0-Lösung (des zu (7.3) äquivalenten Integralgleichungssystems)“ und „C^1-Data liefern eine eindeutige C^1-Lösung“ extrahieren[1] kann.

Das allgemeine quasilineare Problem (Abschnitt 7.2.3) umfaßt zwar alle direkten Anwendungen der a-priori Abschätzungen, löst aber ein Problem nicht, nämlich das Auffinden des maximalen Abhängigkeitsgebietes eines quasilinearen Anfangswertproblems (IVP). Diesem Thema ist darum Abschnitt 7.2.4 gewidmet.

7.2.1 Lösung einer linearen Gleichung

Integralgleichung für die Charakteristiken

Definition 7.2.1 *Sei $T > 0$. Sei $\tilde{\lambda} \in C_L^1(G(T) \to \mathbb{R})$. Sei $z = (t, x) \in G(T)$. Dann bezeichne $\tilde{\gamma}(\cdot, z)$ den in $G(T)$ laufenden Teil*[2] *der Lösung der gewöhnlichen Anfangswertaufgabe*

$$y'(\hat{\tau}) = \tilde{\lambda}(\hat{\tau}, y(\hat{\tau})) \quad \mathit{mit} \quad y(t) = x \tag{7.5}$$

bzw. der Integralgleichung

$$\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, t, x) = x + \int_t^{\hat{\tau}} \tilde{\lambda}(s, \tilde{\gamma}(s, z))\, \mathrm{d}s \quad . \tag{7.6}$$

$\tilde{\gamma}(\cdot, z)$ *heißt* **die zu $\tilde{\lambda}$ gehörige Charakterististik durch** z.

Integralgleichung für u und Eindeutigkeit der Lösung

Satz 7.2.2 *Sei $T_0 > 0$. Sei $x_{\text{rechts}} > 0$. Sei t_0 eine Hilfsfunktion aus $C_L^1([0, x_{\text{rechts}}] \to [0, T_0])$ mit $t_0(0) = 0$. Sei x_0 eine*

[1] Will man eine C_L^1-Lösung gewinnen, muß man allerdings anders als in Lemma 7.2.16 die Differenzierbarkeit des C^0-Grenzwertes der Iterationsfolge aus den Beweisen der Sätze des quasilinearen Falles beweisen.

[2] d.h. $\gamma(\cdot, z) \subset G(T)$

Hilfsfunktion aus $C^{\infty}([0,T_0] \to [0,x_{\text{rechts}}])$ *mit* $x_0(0)=0$*. Sei* $\tilde{\lambda} \in C_L^1(G(T) \to \mathbb{R})$ *mit*

$$t_0'(x) \cdot \tilde{\lambda}(t_0(x), x_0(x)) \neq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in [0, x_{\text{rechts}}]$$

gegeben, d.h. $[t = t_0(x)]$ *ist nicht-charakteristisch bezüglich* $\tilde{\lambda}$*. Für jedes* $z=(t,x) \in G(T)$ *sei* $\tilde{\gamma}(\cdot,z)$ *die zu* $\tilde{\lambda}$ *gehörige Charakteristik durch* z*. Sei schließlich* $\tilde{g} \in C_L^1(G(T) \to \mathbb{R})$*.*

i) *Es gelte* $x_0' \equiv 1$*, d.h.* $x_0(x) = x$ *für alle* $x \in [0, x_{\text{rechts}}]$*. Sei* u_0 *aus* $C_L^1([0, x_{rechts}] \to \mathbb{R})$ *eine Funktion*[3]*. Für*

$$z \in G(T) \;\; \text{mit } \tilde{\gamma}(\cdot, z) \cap [t = t_0(x)] \neq \emptyset \tag{7.7}$$

definiere den Startzeitpunkt von $\tilde{\gamma}(\cdot,z)$ *durch*

$$\tau_0(z) := (s \mapsto t_0(\tilde{\gamma}(s,z)) - x_0(s))^{-1}(0). \tag{7.8}$$

Wegen $\tau_0(z) = t_0(\tilde{\gamma}(\tau_0(z), z))$ *ist dann*

$$(\tau_0(z), \tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)) \in [t = t_0(x)],$$

und

$$u(t,x) := u_0(\tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)) + \int_{\tau_0(z)}^{t} \tilde{g}(s, \tilde{\gamma}(s,z)) \, \mathrm{d}s \tag{7.9}$$

ist wohldefiniert für $z = (t,x)$ *aus (7.7), insbesondere also für alle* $z \in G_{\text{linIVP}}$*. Außerdem gelten dann*

$$\partial_t u + \tilde{\lambda}(t,x)\, \partial_x u = \tilde{g}(t,x) \;\; \text{und } u(t_0(x),x) = u_0(x). \tag{7.10}$$

ii) *Es gelte* $x_0 \equiv 0$[4]*. Seien außerdem* $t_0(x) = x$ *und* $\tilde{\lambda} > 0$*. Sei* $u_0 \in C_L^1([0,T_0] \to \mathbb{R})$ *eine (Randdaten-)Funktion. Für*

$$z \in G(T) \;\; \text{mit } \tilde{\gamma}(\cdot, z) \cap [x = 0] \neq \emptyset \tag{7.11}$$

[3] dient in (7.9) zur Vorgabe von **Anfangswerten** auf $[t = t_0(x)]$

[4] Dieser Fall eröffnet die Möglichkeit, das Lemma auch anzuwenden auf Randdaten, die $\gamma(\cdot, z)$ aus $(\tau_0(z), 0) \in [x = 0]$ in z transportiert.

ist $\tau_0(z)$ aus (7.8) wohldefiniert. Dann liegt der Punkt $(\tau_0(z), \tilde{\gamma}(\tau_0(z), z))$ auf dem Rand $[x = 0]$, und

$$u(t, x) := u_0(\tau_0(z)) + \int_{\tau_0(z)}^{t} \tilde{g}(s, \tilde{\gamma}(s, z))\, \mathrm{d}s \qquad (7.12)$$

ist wohldefiniert für alle $z = (t, x)$ aus (7.11). Außerdem gelten dann

$$\partial_t u + \tilde{\lambda}(t, x)\, \partial_x u = \tilde{g}(t, x) \;\; \textit{und}\; u(t, 0) = u_0(t). \qquad (7.13)$$

Dabei ist u aus (7.9) (bzw. (7.12)) in z stetig differenzierbar. Es gibt keine weitere Lösung der Anfangswertaufgabe (7.10) (bzw. (7.13)).

Für die Größe $\tau_0(z)$ haben wir drei Anwendungsfälle im Auge. Im Falle $t_0 \equiv 0$ verschwindet auch τ_0 identisch.

Im Falle **ii)** $t_0(x) = x$ und $x_0 \equiv 0$ werden Randdaten aus $(\tau_0(z), 0)$ transportiert. In diesem Fall (7.12) gelten dieselben a-priori-Abschätzungen[5] wie für (7.9), sofern die Schranken für die Lipschitz-Konstanten und die Normen von $\tilde{\gamma}, \partial_{i+1}\tilde{\gamma}$ größer oder gleich 1 gewählt werden.

Schließlich wird man diesen Satz auch anwenden, wenn die Anfangsdatenfläche $[t = t_0(x)] = \tilde{\gamma}_{\text{links}}$ die Grenz-Charakteristik zu einem überall von $\tilde{\lambda}$ verschiedenen Eigenwert $\tilde{\lambda}_+$ ist. Dann ist $t_0(x) = (\tilde{\gamma}_{\text{links}})^{-1}(x)$.

Beweis von Satz 7.2.2 Für jeden Punkt $z^* \in \tilde{\gamma}(\cdot, z)$ gilt

$$\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z) = \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z^*),$$

weil beide Kurven die Lösung derselben Anfangswertaufgabe $y'(\hat{\tau}) = \tilde{\lambda}(\hat{\tau}, y(\hat{\tau}))$ mit $y(t^*) = x^*$ sind. Darum gilt auch Situation **i)** (bzw. **ii)**) für alle $z^* \in \tilde{\gamma}(\cdot, z)$ mit $\tilde{\gamma}(\cdot, z) \cap$

[5] für $\|u\|, \|\partial_i u\|$ und eine Lipschitzkonstante von $\partial_i u$ für beide $i \in \{1, 2\}$

$[t = t_0(x)] \neq \emptyset$ (bzw. $\tilde{\gamma}(\cdot, z) \cap [x = 0] \neq \emptyset$). Aus Stetigkeitsgründen gehören auch alle z^* aus einer (hinreichend kleinen) Umgebung[6] von $\tilde{\gamma}(\cdot, z)$ zum gleichen Fall **i)** „Datum kommt von der Anfangsfäche“ (bzw. **ii)** „Datum kommt vom Rand“). Somit sind $\tilde{\gamma}$ und u Lipschitz-stetig differenzierbar, ersteres etwa nach [Dieu85, 10.8.2], wobei die Existenz einer Lipschitz-Konstante in Lemma 7.2.7 gezeigt wird.

Ferner ist $\left(\partial_t + \tilde{\lambda}\partial_x\right)\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, t, x) = 0$ für jedes $(\hat{\tau}, z) \in G(T)$. Darum kann man z in (7.9) als Parameter auffassen, nach welchem bei Anwendung von $\left(\partial_t + \tilde{\lambda}\partial_x\right)$ nicht differenziert wird. Man erhält

$$\left(\partial_t + \tilde{\lambda}\partial_x\right) u(t, x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t, \tilde{\gamma}(t, z)) = \tilde{g}(t, \tilde{\gamma}(t, z)) = \tilde{g}(t, x)\,.$$

Damit ist die erste Aussage in (7.10) bzw. (7.10) bewiesen. Die zweite Aussage gilt im Fall **i)** wegen $\tau_0(t_0(x), x) = t_0(x)$ bzw. im Fall **ii)** wegen $\tau_0(t, 0) = t$.

Die Eindeutigkeit der Lösung eines linearen Problems (7.10) oder (7.13) ist klar, weil die Differenz zweier Lösungen ein homogenes Anfangswertproblem mit verschwindenden Anfangswerten erfüllt. □

7.2.2 a-priori-Schranken für die Lösung des linearen Problems

a-priori-Schranke für u in der C^0-Norm

Lemma 7.2.3 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.2.2 sei Ω_0 eine Konstante mit $\|u_0\| \leq \frac{\Omega_0}{2}$ und sei K^g eine Konstante*

[6] bezüglich $\overline{G_{\mathrm{linIVP}}(T)}$ bzw. $\overline{G(T) \setminus G_{\mathrm{linIVP}}(T)}$, d.h. auf der Grenze existieren die einseitigen Ableitungen

mit $K^g \geq \|\tilde{g}\|$. *Sei weiter*

$$T \text{ so klein, daß } T \cdot K^g \leq \frac{\Omega_0}{2} \tag{7.14}$$

gilt. Dann folgt $\quad \|u\| \leq \Omega_0$.

Beweis Für $z = (t, x) \in G(T)$ gilt nach (7.9) bzw. (7.12) und (7.14)

$$|u(t,x)| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|\tilde{g}\| \, \mathrm{d}s \leq \frac{\Omega_0}{2} + T \cdot K^g \leq \Omega_0.$$

□

Konvention 7.2.4 *Für* $x \in \mathbb{R}^K$ *bezeichne* $|\cdot|$ *die Summe der komponentenweisen Beträge, also* $|x| := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_K|$.

Konvention 7.2.5 *Sei* $f : X \to Y$ *Lipschitz-stetig differenzierbar. Dann wähle ich das Symbol* K^f *(bzw.* M^f*), um die* C^0*-Norm von* f *(bzw.* f'*) abzuschätzen. Ebenso wird* M^f *(bzw.* L^f*) eine Lipschitz-Konstante von* f *(bzw. von* f'*) symbolisieren:*

$$\|f\| \leq K^f, \; \|f'\| \leq M^f \quad \text{und} \quad |f'(x) - f'(x^*)| \leq L^f \cdot |x - x^*|$$

für $x, x^* \in X$.

Konvention 7.2.6 *Ist* $\tilde{\lambda}$ *mit Hilfe von Funktionen* $\mathfrak{u}$ *und* λ *durch*

$$\tilde{\lambda} : (t, x) \mapsto \lambda(t, x, \mathfrak{u}(t, x))$$

definiert, benutze ich für die Raum-Ableitung von $\tilde{\lambda}$ *das Symbol* ∂_2 *anstelle von* $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}$*, um in* $\quad \partial_2 \tilde{\lambda} = \partial_x \lambda + \partial_{\mathfrak{u}} \lambda \cdot \partial_x \mathfrak{u} \quad$ *die beiden Seiten deutlich voneinander zu unterscheiden.*

Abschätzungen in der C^1-Norm für die Hilfsgrößen

Die Ableitung von $\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, t, x)$ aus (7.6) nach $\hat{\tau}$ ist durch $\left\|\tilde{\lambda}\right\|$ nach oben beschränkt. Das folgende Lemma liefert eine a-priori-Schranke für die Ableitungen nach den Parametern (t, x).

Lemma 7.2.7 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Sei $K^\lambda \in \mathbb{R}$ mit $K^\lambda \geq \left\|\tilde{\lambda}\right\|$. Setze $M^\gamma := 2\left(1 + K^\lambda\right)$. Sei weiter $M^\lambda \in \mathbb{R}$ mit $M^\lambda \geq \max\left\{1, \left\|\partial_1\tilde{\lambda}\right\|, \left\|\partial_2\tilde{\lambda}\right\|\right\}$. Sei*

$$T \text{ so klein, daß } 2T \cdot M^\lambda \leq 1 \tag{7.15}$$

gilt. Dann folgt $\quad \|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\| \leq M^\gamma \quad$ *für* $i = 0, 1, 2$.

Beweis Für $i = 0$ ist wegen (7.6) und $M^\gamma \geq \left\|\tilde{\lambda}\right\|$ nichts zu zeigen. Sei $i \in \{1, 2\}$. Nach (7.6) gilt für alle $(\hat{\tau}, z) = (\hat{\tau}, t, x)$ mit $(\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z)) \in G(T)$

$$\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z) = \delta_i^2 - \delta_i^1 \cdot \tilde{\lambda}(z) + \int_t^{\hat{\tau}} \partial_2\tilde{\lambda}(s, \tilde{\gamma}(s, z)) \cdot \partial_{i+1}\tilde{\gamma}(s, z)\ \mathrm{d}s \tag{7.16}$$

also gilt nach den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} 2\left|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z)\right| &\leq 2\left(1 + \left\|\tilde{\lambda}\right\| + T\left\|\partial_2\tilde{\lambda}\right\| \cdot \|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\cdot, z)\|\right) \\ &\leq M^\gamma + \|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\cdot, z)\|. \end{aligned}$$

Die linke Seite läßt sich zu $2\|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\cdot, z)\|$ vergrößern. Subtraktion von $\|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\cdot, z)\|$ liefert die Behauptung. □

Lemma 7.2.8 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Seien K^λ und M^γ wie in Lemma 7.2.7 definiert. Für τ_0 aus (7.8) und $z = (t, x) \in G(T)$ gilt*

$$x_0(\tau_0(z)) = t_0(\tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)) \quad , \tag{7.17}$$

wobei entweder $x_0' \equiv 1$ *oder* $[x_0 \equiv 0$ *und* $t_0' \equiv 1]$ *gelten. Sei weiter* $M^* \in \mathbb{R}$ *so, daß entweder (im Falle* $x_0' \equiv 1$*)*

$$\left| \frac{1}{1 - t_0'(x) \cdot \tilde{\lambda}(t_0(x), x)} \right| \leq M^* \quad \textit{für alle } x \in [0, x_{\text{rechts}}]$$

oder (im Falle $x_0 \equiv 0$*)*

$$\left\| \frac{1}{\tilde{\lambda}(\cdot, 0)} \right\| \leq M^*$$

gilt. Setze $M^{\tau_0} := \max\{1, \|t_0'\|\} \cdot M^* \cdot M^\gamma$*. Sei ferner* M^λ *wie in Lemma 7.2.7 definiert. Außerdem gelte (7.15). Dann folgt* $\|\partial_i \tau_0\| \leq M^{\tau_0}$*.*

Beweis Aus (7.8), der Definition von $\tau_0(z)$, folgt direkt (7.17). Wegen $\partial_{\tilde{\tau}} \tilde{\gamma} = \tilde{\lambda}$ liefert die Differentiation nach einer z-Komponente mit den Abküzungen $s = \tau_0(z)$ und $\xi = \tilde{\gamma}(s, z)$

$$x_0'(s) \cdot \partial_i \tau_0(z) = t_0'(\xi) \cdot \left(\tilde{\lambda}(s, \xi) \cdot \partial_i \tau_0(z) + \partial_{i+1} \tilde{\gamma}(s, z)\right)$$

oder

$$\partial_i \tau_0(z) = \frac{t_0'(\xi) \cdot \partial_{i+1} \tilde{\gamma}(s, z)}{x_0'(s) - t_0'(\xi) \cdot \tilde{\lambda}(s, \xi)}. \tag{7.18}$$

Daraus folgt die Behauptung nach Definition von M^*, weil

$$(s, \xi) = (\tau_0(z), \tilde{\gamma}(s, z)) \in [t = t_0(x)] \cup [x = 0]$$

auf der Datenfläche liegt. □

Lipschitz-Konstanten

Vor den nächsten a-priori-Abschätzung werden jetzt Regeln zum Kombinieren Lipschitz-stetiger Funktionen bereitgestellt.

Lemma 7.2.9 *Seien E, F, X und Y Banachräume. Ferner sei $f : E \to F$ (bzw. $g : X \to Y$) Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante (LipKon) M^f (bzw. M^g). Dann ist*

$$\begin{array}{ll}
M^f + M^g & \text{eine LipKon von} \quad (f \pm g) : E \to F, \\
 & \text{falls} \quad E = X, F = Y; \\
M^f + M^g & \text{eine LipKon von} \quad (f, g) : E \to F \times Y, \\
 & \text{falls} \quad E = X; \\
M^f \cdot M^g & \text{eine LipKon von} \quad (f \circ g) : X \to F, \\
 & \text{falls} \quad E = Y; \\
M^f \cdot \|g\| + \|f\| \cdot M^g & \text{eine LipKon von} \quad (fg) : E \to F, \\
 & \text{falls} \quad E = X, F = Y; \\
M^f \cdot \left\| \frac{1}{f} \right\|^2 & \text{eine LipKon von} \quad \frac{1}{f} : E \setminus f^{-1}(\{0\}) \to \frac{1}{F} \ .
\end{array}$$

Seien $a, b \in C_L^0(X \to Y)$ mit LipKon M^a, M^b, und sei ferner $f : X \times Y \to Z$ so gegeben, daß $x \mapsto f(x, y)$ Lipschitz-stetig ist mit LipKon M^f für alle $y \in Y$. Dann ist

$$\left(M^a + M^b \right) \|f\| + \|a - b\| \cdot M^f$$

eine LipKon von $F : X \to Z$, $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, \mathrm{d}y$.

Beweis Man erhält die Behauptungen durch direktes Nachrechnen, ggf. mit Einfügen von Zwischengliedern wie etwa in

$$\begin{aligned}
&|(fg)(x) - (fg)(x^*)| \\
&\qquad = |[f(x) - f(x^*)] \, g(x) + f(x^*) \, [g(x) - g(x^*)]| \\
&\qquad \leq \left(M^f \cdot \|g\| + \|f\| \cdot M^g \right) |x - x^*|
\end{aligned}$$

für alle $x, x^* \in X$ oder

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x^*)}\right| = \left|\frac{f(x^*) - f(x)}{f(x^*) \cdot f(x)}\right| \leq M^f \cdot |x^* - x| \cdot \left\|\frac{1}{f}\right\|^2$$

für $x, x^* \in E$. Die letzte Aussage ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
&|F(x) - F(x^*)| \\
&\quad = \left| \int_{a(x)}^{a(x^*)} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{a(x^*)}^{b(x^*)} [f(x,y) - f(x^*,y)]\,\mathrm{d}y \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \quad \int_{b(x^*)}^{b(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| \\
&\quad \leq \left[M^a \cdot \|f\| + \|b-a\| \cdot M^f + M^b \cdot \|f\|\right] \cdot |x - x^*| \quad .
\end{aligned}$$

□

a-priori-Schranke für ∇u in der C^0-Norm

Lemma 7.2.10 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Sei K^g wie in Lemma 7.2.3 definiert. Seien K^λ, M^γ, M^* und M^{τ_0} wie in Lemma 7.2.8 definiert. Sei weiter M^{u_0} eine Konstante mit $M^{u_0} \geq \|u_0'\|$. Sei Ω_1 eine Konstante mit*

$$(M^{u_0} \cdot M^\gamma + K^g) \cdot (M^{\tau_0} + 1) \leq \frac{\Omega_1}{2} \tag{7.19}$$

Sei M^λ wie in Lemma 7.2.7 definiert. Sei M^g eine Konstante mit $M^g \geq \|\partial_2 \tilde{g}\|$, und sei schließlich

$$T \text{ so klein, daß (7.15) und } T \cdot M^g \cdot M^\gamma \leq \frac{\Omega_1}{2} \tag{7.20}$$

gelten. Dann ist u differenzierbar, und es folgt $\|\partial_i u\| \leq \Omega_1$ für beide $i = 1, 2$.

Beweis Nach Definition (7.9) bzw. (7.12) ist u differenzierbar. Sei $s \in [0, T]$. Für jedes $f \in \{u_0, \gamma := \tilde{\gamma}, \tau_0, g := \tilde{g}(s, \cdot)\}$ ist nach Voraussetzung M^f eine Lipschitz-Konstante. Eine Lipschitz-Konstante von u ist daher nach Lemma 7.2.9 und (7.9)

$$M^{u_0} \cdot [M^\gamma \cdot (M^{\tau_0} + 1)] + (M^{\tau_0} + 1) \cdot \|\tilde{g}\| + T \cdot M^g \cdot M^\gamma.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner oder gleich Ω_1, das also seinerseits als Lipschitz-Konstante von u eine obere Schranke für die beiden Komponenten von ∇u ist. □

Abschätzungen für eine Lipschitz-Konstante der Ableitungen der Hilfsgrößen

Lemma 7.2.11 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Seien K^λ, M^γ und M^λ wie in Lemma 7.2.7 definiert. Setze $L^\gamma := \max\left\{1, 2M^\lambda (1 + M^\gamma)\right\}$. Sei weiter L^λ eine Lipschitz-Konstante von $\partial_2 \tilde{\lambda}(\hat{\tau}, \cdot)$ für alle $\hat{\tau} \in [0, T]$. Sei*

$$T \text{ so klein, daß (7.15) und } 2T \cdot \left(M^\lambda + L^\lambda \cdot (M^\gamma)^2\right) \leq 1 \tag{7.21}$$

gelten. Für alle $z = (t, x), z^* = (t^*, x^*) \in G(T)$ und alle $\hat{\tau}$ mit $(\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z)), (\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z^*)) \in G(T)$ gilt dann

$$|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z^*)| \leq L^\gamma \cdot |z - z^*|$$

für alle $i \in \{0, 1, 2\}$.

Beweis Für $z = (t, x) \in G(T)$ und $\hat{\tau}$ mit $(\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z)) \in G(T)$ ist $\partial_{\hat{\tau}}\tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z) = \tilde{\lambda}(\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z))$ und hat $L^\gamma \geq M^\lambda \cdot (1 + 2M^\gamma)$ als Lipschitzkonstante. Sei nun $i \in \{1, 2\}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt für $z^* = (t^*, x^*)$ mit $(\hat{\tau}, \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z^*)) \in G(T)$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t^* > t$ nach (7.16) und wegen $|t - t^*| \leq |z - z^*|$

$$\begin{aligned}
&2\left|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\hat{\tau}, z\right) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\hat{\tau}, z^*\right)\right| \\
&= 2\left|\delta_i^1 \cdot \left[\tilde{\lambda}\left(z\right) - \tilde{\lambda}\left(z^*\right)\right] + \textstyle\int_t^{t^*} \partial_2\tilde{\lambda}\left(s, \tilde{\gamma}\left(s, z\right)\right) \cdot \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(s, z\right)\, \mathrm{d}s\right. \\
&\quad + \textstyle\int_{t^*}^{\hat{\tau}} \partial_2\tilde{\lambda}\left(s, \tilde{\gamma}\left(s, z\right)\right) \cdot \left[\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(s, z\right) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(s, z^*\right)\right]\, \mathrm{d}s \\
&\quad \left. + \textstyle\int_{t^*}^{\hat{\tau}} \left[\partial_2\tilde{\lambda}\left(s, \tilde{\gamma}\left(s, z\right)\right) - \partial_2\tilde{\lambda}\left(s, \tilde{\gamma}\left(s, z^*\right)\right)\right] \cdot \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(s, z^*\right)\, \mathrm{d}s\right| \\
&\leq 2\left(\delta_i^1 M^\lambda + M^\lambda (M^\gamma)^2\right)|z - z^*| \\
&\quad + \underbrace{2T \cdot \left(M^\lambda + L^\lambda \cdot M^\gamma\right)}_{\leq 1} \cdot \left\|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z\right) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z^*\right)\right\| \quad .
\end{aligned}$$

Die linke Seite läßt sich zu $2\left\|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z\right) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z^*\right)\right\|$ vergrößern, wobei das Supremum zu bilden ist über alle $\hat{\tau}$ aus $\left[\max\left\{\tau_0\left(z\right), \tau_0\left(z^*\right)\right\}, T\right]$. Dann folgt die Behauptung durch Subtraktion von $\left\|\partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z\right) - \partial_{i+1}\tilde{\gamma}\left(\cdot, z^*\right)\right\|$. □

Lemma 7.2.12 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Seien K^λ, M^γ, M^* und M^{τ_0} wie in Lemma 7.2.7 definiert. Sei weiter M^λ wie in Lemma 7.2.7 definiert. Seien außerdem L^γ wie in Lemma 7.2.11 definiert. Sei L^{t_0} eine Lipschitzkonstante von t_0'. Setze*

$$L^{\tau_0} := \tilde{M} \cdot \left\|t_0'\right\| \cdot M^\gamma + M^* \cdot \left[L^{t_0} M^\gamma + \left\|t_0'\right\| \cdot L^\gamma\right] \tag{7.22}$$

mit $\tilde{M}$ aus (7.24,7.23). Es gelte (7.21). Dann ist L^{τ_0} eine Lipschitzkonstante von $\partial_i \tau_0$.

Beweis Die Funktion $\xi_\gamma : z \mapsto \tilde{\gamma}\left(\tau_0\left(z\right), z\right)$, welche den Startort der Charakteristik liefert, hat nach Lemma 7.2.9 die Lipschitzkonstante

$$M^{\xi_\gamma} := M^\gamma \cdot \left[M^{\tau_0} + 1\right]. \tag{7.23}$$

Daher ist von

$$z \mapsto \left\{ x_0' \left(\tau_0 \left(z\right)\right) - \left[t_0' \left(\xi_\gamma \left(z\right)\right) \cdot \tilde{\lambda} \left(\tau_0 \left(z\right), \xi_\gamma \left(z\right)\right)\right]\right\}^{-1}$$

vermöge Lemma 7.2.9 eine Lipschitzkonstante durch

$$\tilde{M} := \left[0 + \left\{ L^{t_0} M^{\xi_\gamma} K^\lambda + \left\| t_0' \right\| \cdot M^\lambda \cdot \left(M^{\tau_0} + M^{\xi_\gamma} \right) \right\} \right] \cdot \left(M^*\right)^2 \tag{7.24}$$

gegeben. Wieder nach Lemma 7.2.9 erkennt man nun

$$\tilde{M} \cdot \left(\left\| t_0' \right\| \cdot \left\| \partial_{i+1} \tilde{\gamma} \right\| \right) + M^* \cdot \left(L^{t_0} \cdot \left\| \partial_{i+1} \tilde{\gamma} \right\| + \left\| t_0' \right\| \cdot L^\gamma \right)$$

als Lipschitzkonstante von $\partial_i \tau_0$ aus (7.18) für $i = 1, 2$. □

a-priori-Schranke für eine Lipschitz-Konstante von ∇u

Lemma 7.2.13 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.2.2. Seien K^g, K^λ, M^γ, M^*, M^{τ_0} und M^{u_0} wie in Lemma 7.2.10 defniert. Sei weiter M^λ wie in Lemma 7.2.7 definiert. Sei ferner M^g wie in Lemma 7.2.10 eine Konstante mit $M^g \geq \|\partial_i \tilde{g}\|$ für beide $i = 1, 2$. Seien weiter und L^γ, L^{t_0} und L^{τ_0} wie in Lemma 7.2.12 definiert. Sei L^{u_0} eine Lipschitz-Konstante von u_0'. Seien L und M die reellen Konstanten aus (7.27). Setze*

$$\Omega_2 := 2 \left(L + M + \left(M^{\tau_0} + 1 \right) M^g M^\gamma \right). \tag{7.25}$$

Sei L^λ wie in Lemma 7.2.11 definiert. Sei schließlich L^g eine Lipschitzkonstante von $\partial_2 \tilde{g}$, und sei

$$\begin{aligned} T \textit{ so klein, daß } & \; (7.20), (7.21) \\ \textit{und } & \; 2T \cdot \left(L^g \cdot \left(M^\gamma\right)^2 + M^g L^\gamma \right) \leq \Omega_2 \end{aligned} \tag{7.26}$$

gelten. Dann ist $\partial_i u$ Lipschitz-stetig und Ω_2 ist eine Lipschitzkonstante von $\partial_i u$ für beide $i = 1, 2$.

Beweis Eine Lipschitzkonstante von $\xi_\gamma : z \mapsto \tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)$ ist M^{ξ_γ} aus (7.23). Die Ableitung $\partial_i u$ ist die Summe der drei Funktionen

$$
\begin{aligned}
&z \mapsto u_0'(\xi_\gamma(z)) \cdot \left[\tilde{\lambda}(\tau_0(z), \xi_\gamma(z))\partial_i \tau_0(z) + \partial_{i+1}\tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)\right]\\
&z = (t,x) \mapsto \delta_i^1 \tilde{g}(t,x) - \tilde{g}(\tau_0(z), \xi_\gamma(z)) \cdot \partial_i \tau_0(z)\\
&z = (t,x) \mapsto \textstyle\int_{\tau_0(z)}^t \partial_2 \tilde{g}(s, \tilde{\gamma}(s,z)) \cdot \partial_{i+1}\tilde{\gamma}(s,z)\, \mathrm{d}s\;.
\end{aligned}
$$

Lipschitzkonstanten dieser Funktionen sind nach Lemma 7.2.9

$$
\begin{aligned}
L &:= L^{u_0} \cdot \left[K^\lambda M^{\tau_0} + M^\gamma\right]\\
&\quad + M^{u_0} \cdot \left[M^\lambda \cdot \left(M^{\tau_0} + M^{\xi_\gamma}\right) \cdot M^{\tau_0} + K^\lambda L^{\tau_0} + L^\gamma\right]\\
M &:= M^g + M^g \cdot \left(M^{\tau_0} + M^{\xi_\gamma}\right) \cdot M^{\tau_0} + K^g L^{\tau_0}\\
&\left(M^{\tau_0} + 1\right) \cdot M^g M^\gamma + T \cdot \left(L^g M^\gamma \cdot M^\gamma + M^g \cdot L^\gamma\right).
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

Deren Summe ist nach Voraussetzung nach oben durch Ω_2 beschränkt. Also ist Ω_2 eine Lipschitzkonstante für $\partial_i u$. □

7.2.3 Allgemeines quasilineares CBVP

Problem 7.2.14 (IVP-CBVP) *Gegeben seien $K \in \mathbb{N}$, $\hat{\lambda}$, x_{rechts}, $T_0 > 0$ und $t_0 \in C_L^1\left([0, x_{\text{rechts}}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}\right)$ mit $t_0' \geq 0$ und $t_0(0) = 0$. Zwei Fälle werden unterschieden, die IVP-Fall und CBVP-Fall heißen mögen. Im IVP-Fall ist $t_0 \equiv 0$, und gesucht ist eine Lösung $\underline{\mathfrak{u}} = \left(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_{K+1}\right)$ auf*

$$
G_{\mathrm{P}}(T) := \left\{(t,x)\,;\quad 0 \leq t \leq T, \hat{\lambda} \cdot t \leq x \leq x_{\text{rechts}} - \hat{\lambda} \cdot t\right\},
\tag{7.28}
$$

während im CBVP-Fall eine Lösung $(\underline{\mathfrak{u}}, v_+)$ auf

$$
G_{\mathrm{P}}(T) := \left\{(t,x)\,;\; t_0(x) \leq t \leq T, x \in [0, x_{\text{rechts}}]\right\}
\tag{7.29}
$$

gesucht wird (vgl. Abbildung 7.1 auf Seite 225).

1. (Dgl.-System) *Es gelte auf* $G_{\mathrm{P}}(T)$

$$\begin{aligned}
\partial_t \underline{u}_1 &+ \underline{\lambda}_1(t,x,\underline{\mathfrak{u}}) \cdot \partial_x \underline{u}_1 &&= g_1(t,x,\underline{\mathfrak{u}},v_+) \\
\vdots & \quad \vdots && \quad \vdots \\
\partial_t \underline{u}_{K+1} &+ \underline{\lambda}_{K+1}(t,x,\underline{\mathfrak{u}}) \cdot \partial_x \underline{u}_{K+1} &&= g_{K+1}(t,x,\underline{\mathfrak{u}},v_+) \\
\partial_t v_+ &+ \underline{\lambda}_+(t,x,\underline{\mathfrak{u}}) \cdot \partial_x v_+ &&= g_+(t,x,\underline{\mathfrak{u}},v_+),
\end{aligned} \tag{7.30}$$

wobei die mit + indizierten Größen und Bedingungen nur im CBVP-Fall auftreten.

2. (λ-Bedingungen) *Im IVP-Fall gelten* $-\hat{\lambda} \leq \underline{\lambda}_k \leq \hat{\lambda}$ *und* $t_0 \equiv 0$. *Im CBVP-Fall gelten* $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \ldots, \underline{\lambda}_{K+1} \leq 0 < \underline{\lambda}_+$ *und*

$$\underline{\lambda}_+(t_0(x), x, \underline{\mathfrak{u}}_0(x)) \cdot t_0'(x) = 1 \tag{7.31}$$

für alle $x \in [0, x_{\text{rechts}}]$.

3. (Anfangsdaten) $\underline{\mathfrak{u}}(t_0(x), x) = \underline{\mathfrak{u}}_0(x)$ *für alle* $x \in [0, x_{\text{rechts}}]$.

4. (Randdaten) $v_+(t,0) = \phi_+(t, \underline{\mathfrak{u}}(t,0))$ *für alle* $t \in [0,T]$.

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Größen $\underline{\lambda}_k, \underline{\lambda}_+, g_k$, g_+ und die Daten $\mathfrak{u}_0$, ϕ_+ findet man ein $T > 0$ und eine fast überall stetig differenzierbare Lösung dieses Problems.

Der CBVP-Fall ist Problem 3.2.5, wenn man $t_0 := (\gamma_{\text{links}})^{-1}$ und $\underline{\mathfrak{u}}_0 := \underline{\mathfrak{u}}_{\text{Grenze}}$ setzt, weil dann (7.31) in (3.13) übergeht, d.h. γ_{links} ist (Grenz-)Charakteristik zu $\underline{\lambda}_+$ durch $(0,0)$.

Im IVP-Fall handelt es sich um ein echtes Anfangswertproblem, bei welchem Tangenten an Charakteristiken, die auf $\left[x = \hat{\lambda} \cdot t\right]$ bzw. $\left[x = x_{\text{rechts}} - \hat{\lambda} \cdot t\right]$ starten, aus $G_{\mathrm{P}}(T)$ heraus zeigen.

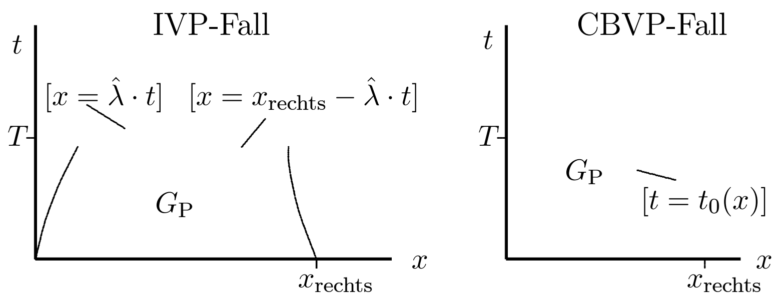

Abb. 7.1: $G_{\mathrm{P}}\,(T)$ in den beiden Fällen IVP-Fall (links) und CBVP-Fall (rechts).

Wie man in der Abbildung sehen kann, wurde $G_{\mathrm{P}}\,(T)$ so definiert, daß für jeden Punkt $z \in G_{\mathrm{P}}\,(T)$ die Integrationslänge des passenden Integrales aus Satz 7.2.2 nicht grösser als T ist.

Satz 7.2.15 (IVP-CBVP) *Seien* $K \in \mathbb{N}$, $\Omega > 0$ *und* $T_0 > 0$ *gegeben. Außer der Lösung* $\underline{\mathfrak{u}}$ *bzw.* $(\underline{\mathfrak{u}}, v_+)$ *seien alle Größen aus Problem 7.2.14 so gegeben, daß die folgenden Bedingungen gelten.*

a) $g_1, g_2, \ldots, g_{K+1}, g_+ \in C_L^1 \left(G\,(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+2} \to \mathbb{R} \right)$ *und*

$$\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \ldots, \underline{\lambda}_K, \underline{\lambda}_+ \in C_L^1 \left(G\,(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+1} \to \mathbb{R} \right)$$

b) $\underline{\mathfrak{u}}_{\text{Grenze}} \in C_L^1\left(\gamma_{\text{links}}\left([0, T_0]\right) \to \mathbb{R}\right)$ *mit*

$$\|\underline{\mathfrak{u}}_{\text{Grenze}}\| \leq \frac{1}{2}\Omega,$$

wobei $\|\cdot\|$ *das Maximum der komponentenweisen Supremumsnormen ist.*

c) $\phi_+ \in C_L^1 \left([0, T_0] \times [-\Omega, \Omega]^{K+1} \to \mathbb{R} \right)$.

Dann findet man ein solches $T \in]0, T_0[$, daß im IVP-Fall (bzw. CBVP-Fall) auf $G_{\mathrm{P}}(T)$ aus (7.28) (bzw. (7.29)) eine C^1_L-Lösung $\underline{\mathfrak{u}}$ (bzw. $(\underline{\mathfrak{u}}, v_+)$) mit $\|\underline{\mathfrak{u}}\| \leq \Omega$ (bzw. $\|(\underline{\mathfrak{u}}, v_+)\| \leq \Omega$) existiert.

Beweis von Satz 7.2.15 Die Aufgabe wird durch iteratives Lösen eines linearen Problems bearbeitet. Sei $T > 0$ zunächst beliebig gegeben. Im Laufe des Beweises wird T verkleinert werden. Mit $\mathbb{U}_{\mathrm{Data}}$ wird die Menge aller

$$\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_{K+1}, w_{K+2}) \in C^1_L \left(G_{\mathrm{P}}(T) \to [-\Omega, \Omega]^{K+2} \right)$$

bezeichnet, welche die Anfangs- und Randdaten annehmen, also

$$(w_1, \ldots, w_{K+1})(t_0(x), x) = \mathfrak{u}_0(x)$$

für $x \in [0, x_{\mathrm{rechts}}]$ und

$$w_{K+2}(t, 0) = \phi_+(t, (w_1, \ldots, w_{K+1})(t, 0))$$

für $t \in [0, T]$ erfüllen. Für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, K+1\}$ definiere

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_k : G_{\mathrm{P}}(T) \to \mathbb{R},\ z \mapsto \underline{\lambda}_k\left(z, (w_1, \ldots, w_{K+1})(z)\right) \\ \text{und} \quad &\tilde{g}_k : G_{\mathrm{P}}(T) \to \mathbb{R},\ z \mapsto g_k\left(z, \mathfrak{w}(z)\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.32}$$

Dann schneidet jede durch $z \in G_{\mathrm{P}}(T)$ laufende Charakteristik zu $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_k$ die Anfangsdatenfläche $[t = t_0(x)]$. Also gilt der Fall **i)** von Satz 7.2.2, und jedes

$$u_k := \left[u \text{ aus (7.9) mit } \left(\tilde{\lambda}, \tilde{g}, u_0\right) = \left(\tilde{\lambda}_k, \tilde{g}_k, (\underline{\mathfrak{u}}_0)_k\right) \right] \tag{7.33}$$

ist somit von $\partial_t \underline{u}_k + \underline{\lambda}_k(t, x, (w_1, \ldots, w_{K+1})) \cdot \partial_x \underline{u}_k = g_k(t, x, \mathfrak{w})$ die Lösung zum Anfangswert $\underline{u}_k(t_0(\xi), \xi) = (\underline{\mathfrak{u}}_0)_k(\xi)$, wobei

$\xi := \tilde{\gamma}\left(\tilde{\tau}_0\left(t,x\right),t,x\right)$ gesetzt wurde. Im CBVP-Fall definiere

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{K+2} : G_{\mathrm{P}}\left(T\right) \to \mathbb{R},\ z \mapsto \underline{\lambda}_{+}\left(z,\left(w_1,\ldots,w_{K+1}\right)\left(z\right)\right) \\ \text{und}\quad &\tilde{g}_{K+2} : G_{\mathrm{P}}\left(T\right) \to \mathbb{R},\ z \mapsto g_{+}\left(z,\mathfrak{w}\left(z\right)\right) \quad . \end{aligned} \tag{7.34}$$

Dann schneidet jede durch $z \in G_{\mathrm{P}}\left(T\right)$ laufende Charakteristik zu $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{K+2}$ den linken Rand $[x = 0]$. Also gilt der Fall **ii)** von Satz 7.2.2, und

$$\begin{aligned} v_+ := \Big\{ &u \text{ aus (7.12) mit } (\tilde{\lambda},\tilde{g}) = \left(\tilde{\lambda}_{K+2},\tilde{g}_{K+2}\right) \\ &\text{und } u_0 = \left[t \mapsto \phi_+\left(t,\left(w_1,\ldots,w_{K+1}\right)\left(t,0\right)\right)\right] \Big\} \end{aligned} \tag{7.35}$$

ist von $\partial_t v_+ + \underline{\lambda}_+\left(t,x,\left(w_1,\ldots,w_{K+1}\right)\right)\cdot\partial_x v_+ = g_+\left(t,x,\mathfrak{w}\right)$ die Lösung zum Randwert

$$v_+\left(\tilde{\tau}_0\left(t,x\right),0\right) = \phi_+\left(\tilde{\tau}_0\left(t,x\right),\left(w_1,\ldots,w_{K+1}\right)\left(\tilde{\tau}_0\left(t,x\right),0\right)\right).$$

Definiere

$$\mathcal{T} : C^1_L\left(G_{\mathrm{P}}\left(T\right) \to \left[-\Omega,\Omega\right]^{K+2}\right) \to C^1_L\left(G_{\mathrm{P}}\left(T\right) \to \mathbb{R}^{K+2}\right)$$

durch

$$\mathcal{T} : \mathfrak{w} \mapsto \left(\underline{\mathrm{u}},v_+\right) = \left(u_1,\ldots,u_{K+1},v_+\right) \text{ aus (7.33) und (7.35)} \ ,$$

wobei hier und im folgenden alle mit + gekennzeichneten Größen für den IVP-Fall zu ignorieren sind. Unser Ziel ist es, durch Verkleinern von T und Einschränkungen des Definitionsgebietes $\mathcal{T}$ zu einem kontrahierenden Operator zu machen. Dieser hat dann genau einen Fixpunkt, der die eindeutige Lösung unseres Problems 7.2.14 sein wird.

Setze $\Omega_0 := \Omega$. Sei K^g eine Konstante mit

$$K^g \geq \max_k \left\{\left\|g_k\right\|,\left\|g_+\right\|\right\} \quad ,$$

wobei immer $k = 1, 2, \ldots, K, K+1$ gemeint ist, wenn nichts anderes gesagt wird. Sei $T > 0$ mit (7.14). Dann sind alle Voraussetzungen von Lemma 7.2.3 erfüllt. Demzufolge gilt $\|u\| \leq \Omega_0$ für jedes $u = u_k$ und $u = v_+$, d.h. Ω_0 **ist eine a-priori-Schranke für** $\|u_k\|$ **und** $\|v_+\|$. Für $T > 0$ mit (7.14) und

$$\mathbb{U}_0 := C_L^1 \left(G_\mathrm{P}(T) \to [-\Omega_0, \Omega_0]^{K+2} \right) \cap \mathbb{U}_\mathrm{Data}$$

gilt also $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_0} \subseteq \mathbb{U}_0$. Sei $K^\lambda \in \mathbb{R}$ mit $K^\lambda \geq \max_k \left\{ \|\underline{\lambda}_k\|, \left\|\underline{\lambda}_+\right\| \right\}$. Wie in Lemma 7.2.7 setze $M^\gamma := 2\left(1 + K^\lambda\right)$. Sei M^* eine obere Schranke von

$$\left\| x \mapsto \frac{1}{1 - t_0'(x) \cdot \underline{\lambda}_k\left(t_0(x), x, \underline{\mathfrak{u}}_0(x)\right)} \right\|$$

und von

$$\left\| (t, \underline{\mathfrak{u}}_\mathrm{Rand}) \mapsto \frac{1}{\underline{\lambda}_+\left(t, 0, \underline{\mathfrak{u}}_\mathrm{Rand}\right)} \right\|,$$

wobei der erste Ausdruck nach Bedingung **2.** aus Problem 7.2.14 endlich ist. Setze $M^{\tau_0} := \max\{\|t_0'\|\} \cdot M^* \cdot M^\gamma$ wie in Lemma 7.2.8. Sei $M_\mathrm{expl}^{u_0}$ eine Konstante mit

$$M_\mathrm{expl}^{u_0} \geq \max_k \left\|(\mathfrak{u}_0)_k'\right\| \;.$$

Hierbei handelt es sich um eine Abschätzung der **explizit** gegebenen Anfangsdaten, nicht aber der Randdaten ϕ_+, deren Werte von der zu suchenden Lösung abhängen, also gewissermaßen implizit gegeben sind.

Sei $\Omega_{1\mathrm{expl}}$ eine Konstante die mit $\left(M_\mathrm{explizit}^{u_0}, \Omega_{1\mathrm{expl}}\right)$ anstelle von (M^{u_0}, Ω_1) Bedingung (7.19) erfüllt. Im CBVP-Fall definiere

$$M^{\phi_+} := \|\partial_t \phi_+\| + (K+1) \cdot \max_k \|\partial_{w_k} \phi_+\| \cdot \Omega_{1\mathrm{expl}}.$$

Falls $\|\partial_t w_k\| \leq \Omega_{1\text{expl}}$ gilt, wird M^{ϕ_+} eine obere Schranke für die Supremumsnorm von $[t \mapsto \phi_+ (t, (w_1, \ldots, w_{K+1})(t,0))]'$ sein. Vorläufig handelt es sich aber nur um eine Definition, mit deren Hilfe $\Omega_{1\text{impl}}$ so gewählt wird, daß mit $\left(M^{\phi_+}, \Omega_{1\text{impl}}\right)$ anstelle von (M^{u_0}, Ω_1) Bedingung (7.19) gilt. Jetzt läßt sich

$$\mathbb{U}_1 := \{\mathfrak{w} \in \mathbb{U}_0; \quad \|\partial_i w_k\| \leq \Omega_{1\text{expl}}, \|\partial_i w_{K+2}\| \leq \Omega_{1\text{impl}}\}$$

definieren. Für $\mathfrak{w} \in \mathbb{U}_1$ ist dann

$$\begin{aligned} M^\lambda := \max\Big\{&1, \\ &\max\nolimits_{k,i=1,2}\left\{\|\partial_i \underline{\lambda}_k\| + (K+1)\cdot \max\nolimits_{k'} \left\|\partial_{w_{k'}} \underline{\lambda}_k\right\| \cdot \Omega_{1\text{expl}}\right\}, \\ &\max\nolimits_{i=1,2}\left\{\left\|\partial_i \underline{\lambda}_+\right\| + (K+1)\cdot \max\nolimits_{k'} \left\|\partial_{w_{k'}} \underline{\lambda}_+\right\| \cdot \Omega_{1\text{expl}}\right\}\Big\}\end{aligned}$$

eine obere Schranke von $\left\|\partial_i \tilde{\lambda}_k\right\|$ und von $\left\|\partial_i \tilde{\lambda}_{K+2}\right\|$, wobei $\tilde{\lambda}_k$ in (7.32) und $\tilde{\lambda}_{K+2}$ in (7.34) definiert wurden. Jetzt sind alle Konstanten aus (7.15) so definiert, wie in den Lemmata 7.2.7 und 7.2.8 verlangt. Die Konklusionen dieser Lemmata werden allerdings nur in den Beweisen der weiteren Hilfssätze benötigt, so daß jetzt mit dem Definieren von Konstanten fortgefahren werden kann. Für die Anwendung von Lemma 7.2.10 und weiterer Hilfssätze setzt man

$$\begin{aligned} M^g := \max\Bigg\{ &\max_{k,i=1,2}\Big\{\|\partial_i g_k\| + (K+1)\cdot \max_{k'} \left\|\partial_{w_{k'}} g_k\right\| \cdot \Omega_{1\text{expl}} \\ &\qquad + \quad \left\|\partial_{w_{K+2}} g_k\right\| \cdot \Omega_{1\text{impl}}\Big\}, \\ &\max_{i=1,2}\Big\{\|\partial_i g_+\| + (K+1)\cdot \max_{k'} \left\|\partial_{w_{k'}} g_+\right\| \cdot \Omega_{1\text{expl}} \\ &\qquad + \quad \left\|\partial_{w_{K+2}} g_+\right\| \cdot \Omega_{1\text{impl}}\Big\}\Bigg\} \quad ,\end{aligned}$$

so daß $M^g \geq \|\partial_i \tilde{g}_k\|$ und $M^g \geq \|\partial_i \tilde{g}_{K+2}\|$ für $\tilde{g}_k$ aus (7.32) und $\tilde{g}_{K+2}$ aus (7.34) gelten. Erfülle $T > 0$ ab jetzt (7.20), und es sei

$\mathfrak{w} \in \mathbb{U}_1$. Dann sind alle Voraussetzungen von Lemma 7.2.10[7] erfüllt, und für beide $i \in \{1,2\}$ folgt $\|\partial_i u\| \leq \Omega_1$ für jedes $u = u_k$ mit $\Omega_1 = \Omega_{1\text{expl}}$ und $u = v_+$ mit $\Omega_1 = \Omega_{1\text{impl}}$, d.h. $\Omega_{1\text{expl}}$ **(bzw.** $\Omega_{1\text{impl}}$**) ist eine a-priori-Schranke für** $\|\partial_i u_k\|$ **(bzw.** $\|\partial_i v_+\|$**).** Also gilt $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}(\mathbb{U}_1) \subset \mathbb{U}_1$.

Setze $\Omega_1 := \max\{\Omega_{1\text{expl}}, \Omega_{1\text{impl}}\}$. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft sei ab jetzt

$$T \text{ so klein, daß } T \cdot \left(M^\lambda \cdot \Omega_1 + M^g\right) \leq \frac{1}{2} \tag{7.36}$$

gilt. Seien nun $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}^* = \left(w_1^*, \ldots, w_{K+2}^*\right) \in \mathbb{U}_1$ gegeben. Für $\mathfrak{u} := \mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}(\mathfrak{w})$ und $\mathfrak{u}^* := \mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}(\mathfrak{w}^*)$ setze $\tilde{\lambda}_l$, $\tilde{g}_l$ für alle $l = 1, \ldots, K+2$ gemäß (7.32) und (7.34). Definiere entsprechend mit $\mathfrak{w}^*$ anstelle von $\mathfrak{w}$ die Größen $\tilde{\lambda}_l^*$ und $\tilde{g}_l^*$. Dann genügt die Differenz $(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{K+2}) := \mathfrak{u} - \mathfrak{u}^*$ der linearen Differentialgleichung

$$\partial_t \hat{u}_l + \tilde{\lambda}_l(t,x)\,\partial_x \hat{u}_l = h_l(t,x)\,, \tag{7.37}$$

wobei $h_l := -\left(\tilde{\lambda}_l - \tilde{\lambda}_l^*\right) \cdot \partial_x u_l^* + \tilde{g}_l - \tilde{g}_l^*$ sei. Also gilt

$$\begin{aligned}
&|h_l(z)| \\
&= \left|\underline{\lambda}_l\left(z, (w_1, \ldots, w_{K+1})(z)\right) - \underline{\lambda}_l\left(z, \left(w_1^*, \ldots, w_{K+1}^*\right)(z)\right)\right| \\
&\qquad \cdot \left|\partial_x u_l^*(z)\right| + \left|g_l(z, \mathfrak{w}(z)) - g_l(z, \mathfrak{w}^*(z))\right| \\
&\leq \left(M^\lambda \cdot \Omega_1 + M^g\right) \cdot \|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*\|\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\hat{u}_k = 0$ auf der Datenfläche, folgt aus (7.37) dann $|\hat{u}_k(z)| \leq T \cdot \left(M^\lambda \cdot \Omega_1 + M^g\right) \cdot \|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*\|$. Nach Wahl von T mit $T \cdot \left(M^\lambda \cdot \Omega_1 + M^g\right) \leq \frac{1}{2}$ folgt

$$\|\mathfrak{u} - \mathfrak{u}^*\| = \left\|\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}(\mathfrak{w}) - \mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}(\mathfrak{w}^*)\right\| \leq \frac{1}{2}\|\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*\|\,.$$

[7] Für (M^{u_0}, Ω_1) ist im Lemma $(M^{u_0}_{\text{expl}}, \Omega_{1\text{expl}})$ bzw. $(M^{\phi_+}, \Omega_{1\text{impl}})$ einzusetzen

Also ist $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_1}$ für jedes T mit (7.36) eine **Kontraktion**.

Nun soll die Existenz einer a-priori bestimmten Lipschitz-Konstante von $\partial_i u_k$ und $\partial_i v_+$ gezeigt werden. Wie in Lemma 7.2.11 wird $L^\gamma := \max\left\{1, 2M^\lambda\left(1 + M^\gamma\right)\right\}$ gesetzt. Sei L^{t_0} eine Lipschitz-Konstante von t_0' wie in Lemma 7.2.12. Mit M^{ξ_γ} aus (7.23) und $\tilde{M}$ aus (7.24) definiere L^{τ_0} gemäß (7.22) wie in Lemma 7.2.12. Zur Definition von Ω_2 fehlt noch eine Lipschitz-Konstante (LipKon) der Ableitung der Datenvorgabefunkionen. Sei $L^{u_0}_{\text{expl}}$ eine LipKon von jedem $(\underline{u}_0)'_k$. Jetzt wird $\Omega_{2\text{expl}}$ definiert durch Ω_2 aus (7.25,7.27) mit $\left(M^{u_0}_{\text{expl}}, L^{u_0}_{\text{expl}}\right)$ anstelle von (M^{u_0}, L^{u_0}). Falls $\Omega_{2\text{expl}}$ eine LipKon von $\partial_t w_k$ ist, so ist nach Lemma 7.2.9

$$\begin{aligned} L^{\phi_+} &:= [\text{eine LipKon von } \partial_t \phi_+] \\ &\quad + (K+1) \cdot [\text{eine LipKon von } \partial_{w_k} \phi_+ \text{ für jedes } k] \cdot \Omega_{2\text{expl}} \end{aligned}$$

eine LipKon von $[t \mapsto \phi_+\left(t, (w_1, \ldots, w_{K+1})\,(t,0)\right)]'$. Definiere jetzt $\Omega_{2\text{impl}}$ durch Ω_2 aus (7.25) mit $\left(M^{u_0}_{\text{impl}}, L^{\phi_+}\right)$ anstelle von (M^{u_0}, L^{u_0}). Nun definiere

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_2 := \{\mathfrak{w} \in \mathbb{U}_1; \quad & \Omega_{2\text{expl}}\ (\text{bzw. } \Omega_{2\text{impl}}) \\ & \text{ist LipKon von } \partial_i w_k\ (\text{bzw. } \partial_i w_{K+2})\}\,. \end{aligned}$$

Setze schließlich

$$\begin{aligned} L^\lambda := &\ [\text{eine LipKon von } \partial_t \lambda \text{ und } \partial_x \lambda \\ &\qquad \text{für jedes } \lambda = \underline{\lambda}_k \text{ und } \lambda = \underline{\lambda}_+\big] \\ &+ (K+1) \cdot \big[\text{eine LipKon von } \partial_{w_{k'}} \lambda \text{ für jedes } k' \\ &\qquad \text{und jedes } \lambda = \underline{\lambda}_k \text{ und } \lambda = \underline{\lambda}_+\big] \cdot \Omega_{2\text{expl}} \end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
L^g := &\text{[eine LipKon von } \partial_t g \text{ und } \partial_x g \\
&\qquad\qquad \text{für jedes } g = g_k \text{ und } g = g_+] \\
&+(K+1)\cdot \left[\text{eine LipKon von } \partial_{w_{k'}} g \text{ für jedes } k'\right. \\
&\qquad\qquad \left.\text{und jedes } g = g_k \text{ und } g = g_+\right]\cdot \Omega_{2\text{expl}} \\
&+\left[\text{eine LipKon von } \partial_{w_{K+2}} g\right. \\
&\qquad\qquad \left.\text{für jedes } g = g_k \text{ und } g = g_+\right]\cdot \Omega_{2\text{impl}} \quad .
\end{aligned}
$$

Dann sind alle Konstanten aus (7.26) so wie in Lemma 7.2.13 definiert. Gelte also nun (7.26) und (7.36). Dann sind alle Voraussetzungen von Lemma 7.2.13 erfüllt, und $\Omega_{2\text{expl}}$ (bzw. $\Omega_{2\text{impl}}$) ist somit LipKon von $\partial_i \underline{u}_k$ (bzw. $\partial_i v_+$), insbesondere gilt $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_2}(\mathbb{U}_2) \subset \mathbb{U}_2$.

Alle unsere Konstanten sind a priori bestimmt. Außerdem ist $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_2}$ eine Kontraktion und hat also einen Fixpunkt $(\underline{\mathbf{u}}, v_+)$, der die einzige Lösung von Problem 7.2.14 ist. Diese liegt zunächst nur im C^0-Rand von $\mathbb{U}_2$, weil $\mathcal{T}_{|\mathbb{U}_2}$ nur bezüglich der C^0-Norm kontrahiert. Die übrigen Aussagen des Satzes lauten

$$(\underline{\mathbf{u}}, v_+) = \mathcal{T}\left(\underline{\mathbf{u}}, v_+\right) \in \mathbb{U}_2$$

und werden mit Hilfe des folgenden Hilfssatzes gewonnen. □

Lemma 7.2.16 *Sei F ein Banachraum. Sei G ein kompakter metrischer Raum. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus*

$$\mathbb{U} := \left\{u \in C_L^1(G \to F)\,; \quad \|u\| \le \Omega_0, \|u'\| \le \Omega_1 \textit{ und } \Omega_2 \textit{ ist LipKon von } u'\right\}$$

habe einen C^0-Grenzwert u_∞. Dann gilt $u_\infty \in \mathbb{U}$.

Beweis Sei $i \in \{1, 2\}$. Die Menge der $\partial_i u_n$ ist gleichgradig stetig, denn für jedes $\varepsilon > 0$ findet man $\delta := \frac{\varepsilon}{2\Omega_2}$ derart, daß $|z - z^*| \leq \delta$

$$|\partial_i u_n (z) - \partial_i u_n (z^*)| \leq |z - z^*| \cdot \Omega_2 \leq \frac{\varepsilon}{2\Omega_2} \Omega_2 < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nach sich zieht. Außerdem ist für jedes z die Menge aller $\partial_i u_n (z)$ als Teilmenge des Kompaktums $[-\Omega_1, \Omega_1]$ relativ kompakt. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli (etwa [Dieu85, 7.5.7]) erfüllt, also hat $\partial_i u_n$ eine Teilfolge, die gleichmäßig gegen ein u_i^* mit $\|u_i^*\| \leq \Omega_1$ konvergiert. Nach [Dieu85, 8.6.3] ist $u_i^* = \partial_i u_\infty$, so daß der C^0-Grenzwert auch der C^1-Grenzwert ist. Daß Ω_2 eine Lipschitzkonstante von $\partial_i u_\infty$ ist folgt jetzt aus

$$\begin{aligned}
&|\partial_i u_\infty (z) - \partial_i u_\infty (z^*)| \\
&\quad \leq \quad |\partial_i u_\infty (z) - \partial_i u_n (z)| + |\partial_i u_n (z) - \partial_i u_n (z^*)| \\
&\qquad\qquad + \; |\partial_i u_n (z^*) - \partial_i u_\infty (z^*)| \\
&\quad \leq \quad 2 \|\partial_i u_n - \partial_i u_\infty\| + \Omega_2 \cdot |z - z^*|
\end{aligned}$$

durch Grenzübergang. □

7.2.4 Maximales Abhängigkeitsgebiet beim IVP

Wir beschränken uns auf den Fall $x_{\text{links}} = 0$ und $t_0 = 0$ gemäß Abschnitt 7.1.1. Satz 7.2.15 ist geeignet, einen Beweis zu Satz 3.2.4 zu liefern, indem man durch Fortsetzen der Anfangsdaten (und Systemgrößen) das in Satz 7.2.15 benutzte Lösungsgebiet $G_{\text{P}}(T)$ auf eine Obermenge von

$$G_{\text{IVP}}(T) := [\text{max. Abhängigkeitsgebiet}] \cap ([0,T] \times [0, x_{\text{rechts}}])$$

ausdehnt.

Dann liefert Satz 7.2.15 (für $t_0 \equiv 0$ im IVP-Fall angewandt) die gewünschte Lösung auf

$$\begin{aligned} G_0(T_0) \quad := \quad & \{(t,x)\,;\ t \in [0,T_0] \ \text{ und} \\ & t \cdot \|\lambda_+\| \leq x \leq x_{\text{rechts}} - t \cdot \|\lambda_-\|\} \ . \end{aligned}$$

Wie etwa in [LiWu92, Remark 4.2, S. 73] angedeutet, kann man die C^1_L-Daten und die C^1_L-Funktionen $\lambda_\pm, \mathfrak{b}, g_\pm$ so fortsetzen, daß sich die C^1_L-Normen um höchstens $\varepsilon > 0$ vergrößern[8]. Dazu findet man nach Satz 7.2.15, angewandt auf die fortgesetzten Funktionen ein $T \leq T_0$, das die Bedingungen (7.14), (7.20), (7.36) und (7.26) auch für die um ε vergrößerten Normen erfüllt. Der Satz liefert dann für jedes $\Delta x > 0$ eine Lösung $(\mathfrak{u}_{\Delta x}, \mathfrak{v}_{\Delta x}) := \underline{\mathfrak{u}}$ auf

$$\begin{aligned} G_{\Delta x}(T) \quad := \quad & \{(t,x)\,;\ t \in [0,T] \ \text{ und} \\ & t \cdot \|\lambda_+\| - \Delta x \leq x \leq x_{\text{rechts}} + \Delta x - t \cdot \|\lambda_-\|\} \,. \end{aligned}$$

[8] Eine gewisse Vergrößerung muß zugelassen werden, weil beispielsweise $x \mapsto g_+(0, x, \mathfrak{u}_0(x), \mathfrak{v}_0(x))$ in x_{rechts} ein Maximum mit echt positiver Steigung haben könnte, so daß jede C^1_L-Fortsetzung eine echt größere C^1-Norm hätte.

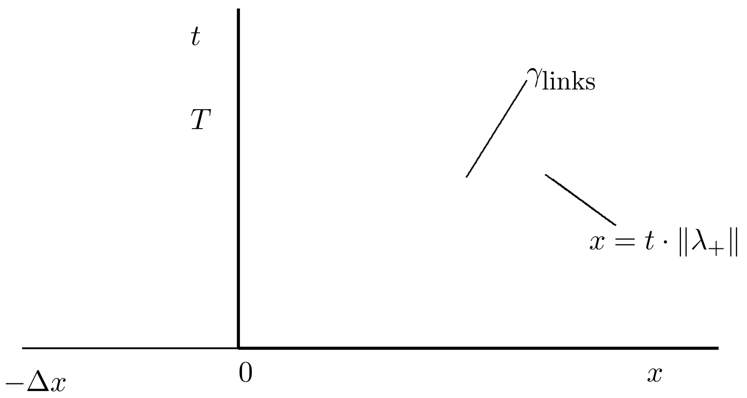

Abb. 7.2: Wahl von Δx so, daß $G_{\text{IVP}}(T) \subset G_{\Delta x}(T)$ gilt.

Wählt man Δx groß genug, (wie in der Skizze für den linken Rand angedeutet), so gilt $G_{\text{IVP}}(T) \subset G_{\Delta x}(T)$. Aus Eindeutigkeitsgründen ist $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) := (\mathfrak{u}_{\Delta x}, \mathfrak{v}_{\Delta x})_{|G_{\text{IVP}}(T)}$ dabei von Δx und ε unabhängig[9]. Dieses $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ ist die gewünschte Lösung aus Satz 3.2.4 mit allen behaupteten Eigenschaften. $\square$

[9] abgesehen davon, daß T für ein größeres ε evtl. kleiner hätte gewählt werden müssen