

Stabilitätstheorie für die oszillierende Rohrströmung

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

DISSERTATION

von

Kai Elmar Trukenmüller
aus Darmstadt

Hamburg, 2006

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Gert Böhme
Zweitgutachter: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Ellermeier
Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juni 2006

Inhalt

Einleitung	1
§ 1. Oszillierende Rohrströmung	9
§ 2. Einführung in die Stabilitätstheorie	13
§ 3. Quasistatische Methode	16
A. Schießverfahren	19
B. Galerkin-Entwicklung	24
§ 4. Aussage der Floquet-Theorie	31
§ 5. Berechnungen	33
§ 6. Vergleich mit Experimenten	61
Zusammenfassung	64
Literatur	67

Einleitung

Mit der *Stabilität der oszillierenden Rohrströmung* untersuchen wir die Bewegung einer viskosen Flüssigkeit innerhalb eines unendlich langen Rohres, angetrieben durch einen zeitlich oszillierenden axialen Druckgradienten. Im Zentrum der Diskussion steht die Frage, ob kleine Störungen die Grundströmung, welche aus der Lösung der Bewegungsgleichungen resultiert, grundsätzlich ändern, oder ob sie nach gewisser Zeit abklingen. Dies bezeichnen wir als das *Stabilitätsproblem* und nennen die Grundströmung entweder *stabil* oder *instabil* gegenüber den Störungen.

Der Bewegungszustand einer Flüssigkeit läßt sich in zwei grundsätzlich verschiedene Zustände einteilen. Bei der *laminaren* Bewegung strömt die Flüssigkeit in Schichten, die sich nicht vermischen. Im Gegensatz dazu wird eine ungeordnete teils chaotische Strömungsform als *turbulente* Flüssigkeitsbewegung bezeichnet.

Unter technischen Gesichtspunkten ist es oft unwesentlich zu wissen, welche Gestalt eine Strömung im Detail annimmt. Es kann jedoch entscheidend sein, ob es sich im ganzen um eine eher laminare oder turbulente Strömung handelt.

Welche der Formen bevorzugt wird, hängt von den Anwendungsfällen ab. In verfahrenstechnischen Anlagen wird beispielsweise zur Herstellung eines gleichmäßigen Produktes eine laminare Strömung der Zuströme erforderlich sein. Sollen Flüssigkeiten vermischt werden, kann hingegen eine turbulente Strömung von Vorteil sein. Ein weiteres wichtiges Kriterium ist der Strömungswiderstand. Er kann sich mit dem Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung sprunghaft ändern.

Mathematisch betrachtet sind beide Formen Lösungen der selben hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Hierbei sind die Gleichungen, welche auf die laminare Strömung führen, in einfachen Geometrien oft analytisch lösbar. Die zentrale Fragestellung ist, welche der Strömungsformen sich unter bestimmten gegebenen Bedingungen einstellt. Die Stabilitätstheorie ist ein Versuch, diese Frage zu beantworten.

Wir gehen dafür von der analytischen laminaren Lösung aus und verändern diese ein wenig. Anschließend studieren wir die weitere zeitliche Entwicklung

der Strömung. Falls sich nach gewisser Zeit wieder die laminare Lösung einstellt, gilt diese als stabil, und wir gehen davon aus, daß sie in der Natur in dieser Weise vorkommt.

Falls sich jedoch in der weiteren Entwicklung eine völlig andere Strömung ergibt, dann bezeichnen wir die laminare Lösung als instabil. Sie kann in dieser Form nicht existieren, da sie von jeder noch so kleinen Störung verändert wird, obwohl sie mathematisch aus den Bewegungsgleichungen resultiert. Eine instabile Strömung ist im Umkehrschluß nicht unbedingt turbulent. Es kann sich zwar eine turbulente Strömung einstellen, falls die untersuchte Strömung instabil ist, es kann sich jedoch auch eine weitere Strömung ausbilden, die wir von ihrem Phänotyp als laminar bezeichnen müßten. Auch Zwischentypen oder eine nicht *voll ausgebildete* turbulente Strömung sind möglich.

In dieser Arbeit stellen wir die Stabilitätsfrage bezüglich einer *instationären* Grundströmung. Instationär bedeutet, daß sich die Strömung mit der Zeit verändert. Als Beispiel behandeln wir die *oszillierende Rohrströmung*. Diese ist einfach genug, daß wir eine analytische Darstellung der laminaren Lösung angeben können. Wir wollen eine Übersicht der Stabilitätsverhältnisse dieser Strömung in Abhängigkeit aller ihrer Parameter erstellen, denn es läßt sich vermuten, daß das Stabilitätskriterium von den Parametern der Strömung beeinflußt wird.

Die oszillierende Rohrströmung ist zwar eine idealisierte Strömung, doch sie kann als Modell für viele in Natur und Technik vorkommende Strömungen verwendet werden. In der Bioströmungsmechanik hat sie Modellcharakter für die Strömung in Blutgefäßen, oder den Gasaustausch in den Atemwegen. Im Bereich der Mikrofluidik wird sie benutzt, um die Strömung peristaltischer Pumpen nachzubilden. Im Maschinenbau spiegelt die Strömung die Verhältnisse in Kolbenpumpen oder allgemein in hydraulischen oder pneumatischen Rohrsystemen wider.

Die Rohrströmung gehört zur Klasse der *Parallelströmungen*, deren Stabilitätsanalyse zu den klassischen Problemen der Hydrodynamik zählt. Parallelströmungen zeichnen sich dadurch aus, daß alle Teilchen in die gleiche, oder die entgegengesetzte Richtung fließen. Dabei nehmen ihre Geschwindigkeiten im allgemeinen verschiedene Werte an. Neben der Rohrströmung fallen auch die ebenen Couette- und Poiseuilleströmungen in diese Kategorie. Die meisten Untersuchungen über das Stabilitätsverhalten von Parallelströmungen behandeln das stationäre Problem, bei welchem sich die Geschwindigkeiten der laminaren Strömung im Gegensatz zu jenen unserer os-

zillierenden Strömung, zeitlich nicht verändern.

In den frühen Arbeiten wurde versucht, das Stabilitätsverhalten von Flüssigkeiten mit Hilfe von Theorien über reibungsfreie Fluide zu klären. *Helmholtz** widmete sich der Frage, wie es dazu kommt, daß in Flüssigkeitsströmen um spitze Kanten Unregelmäßigkeiten entstehen, welche in elektrischen Feldern mit scheinbar analogen Gleichungen nicht vorhanden sind.

Rayleigh† gelang es, eine Stabilitätstheorie für Parallelströmungen aufzustellen, welche auf der Annahme reibungsfreier Flüssigkeiten beruht. Diese kann in manchen Fällen als Grenzfall bei niedrig viskosen Flüssigkeiten herangezogen werden, allerdings stimmt das Ergebnis selten mit jenem einer Theorie über schwach reibungsbehaftete Flüssigkeiten überein. Die mathematischen Probleme, die sich ergeben, wenn man die Viskosität gegen null gehen läßt, werden in der Arbeit von *Case*‡ behandelt.

In zwei grundlegenden Arbeiten stellte *Reynolds* die Rolle der Viskosität bei der Ermittlung der Stabilitätsgrenze hervor.§ Durch seinen bekannten Farbfadenversuch ermittelte er den laminar-turbulenten Übergang einer stationären Rohrströmung und führte als Kriterium für den Umschlag einen Parameter ein, welcher heute als Reynoldssche Zahl bekannt ist. In der zweiten Arbeit widmete sich *Reynolds* einer theoretischen Erklärung der gefundenen Zusammenhänge und versuchte, die turbulente Strömung mittels einer Analogie zur kinetischen Gastheorie zu ergründen.

Außer *Reynolds* nahmen es sich auch andere Wissenschaftler zur Aufgabe, die experimentell gefundene Stabilitätsgrenze zu berechnen. Die hierbei entwickelten Theorien basieren auf zwei verschiedenen Ansätzen: der *Energie-methode* und der *Methode der kleinen Schwingungen*.

Erstere bilanziert den Energietransfer von der Grundströmung in die Störungen. *Serrin*¶ weist mittels Variationsrechnung nach, daß es für stationäre Strömungen mit beliebiger Umrandung eine minimale Reynoldssche Zahl gibt, unterhalb derer die laminare Strömung stets stabil ist.∥ Die Methode liefert im Umkehrschluß leider keine Aussage, ab welcher Reynoldsschen Zahl eine Instabilität zu erwarten ist. Da die gefundenen Zahlenwerte sehr niedrig sind, ist die Aussagekraft dieser Theorien für das Auffinden des laminar-turbulenten Übergangs begrenzt.

Die Methode der kleinen Schwingungen wurde erstmals von *Kelvin*** auf

Helmholtz: Preuß. Akad. Wiss.* **23 (1868)

†*Rayleigh: Phil. Mag.* **34** (1892)

‡*Case: J. Fluid. Mech.* **10** (1961)

§*Reynolds: Phil. Trans.* **174** (1883), **186** (1895)

¶*Serrin: Arch. Rat. Mech. Anal.* **3** (1959)

∥Für nichtnewtonsche Fluide gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht.

***Kelvin: Phil. Mag.* **24** (1887)

das hydrodynamische Problem angewandt und später von *Sommerfeld*^{*} und seinen Schülern *Hopf*[†] und *Heisenberg*[‡] weiterentwickelt. Sie beschränkten sich der mathematischen Einfachheit wegen auf die ebenen Couette- und Poiseuilleströmungen. Die Theorie ist heute bekannt unter dem Namen *Orr-Sommerfeld-Theorie*.[§] *Sexl*[¶] verallgemeinerte den Ansatz und formulierte die Störungsgleichungen für die Rohrströmung in zylindrischen Koordinaten. Keine der Arbeiten konnte die Stabilitätsgrenze der Reynoldsschen Experimente theoretisch untermauern. Es wurde vielmehr vermutet, daß die stationäre Rohrströmung für beliebige Reynoldssche Zahlen stabil gegenüber kleinen Störungen bleibe. Da man zu jener Zeit auf asymptotische Methoden angewiesen war, konnte dies erst durch eine numerische Lösung des Eigenwertproblems bestätigt werden, welche *Salwenn und Grosch*^{||} für eine große Anzahl an Parametern durchführten.

Das hydrodynamische System hat einige Eigenschaften, die eine Stabilitätsanalyse erschweren.

- Es handelt sich um ein nichtlineares mehrdimensionales System mit nichtkonstanten Koeffizienten.
- Die Dispersionsrelation, d.h. der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Frequenz der Störungen, liegt nicht explizit vor und ist mehrdeutig.
- Es gibt einen kleinen Parameter, der sich schlecht auf die Kondition auswirkt, was zu numerischen Problemen führen kann.
- Der Parameterraum ist hochdimensional, was einen hohen Rechenaufwand zur Folge hat.

Das Problem der Nichtlinearität kann umgangen werden, da die Störgrößen per Definition zunächst klein gegenüber der Hauptlösung sind. Terme höherer Ordnung in den Störgrößen können vernachlässigt werden, was auf ein lineares System führt.

Das lineare System hat den Vorteil, daß das Superpositionsprinzip angewendet werden kann, das es überhaupt erst ermöglicht, eine große Klasse möglicher Störungen zu erfassen. Die Aussage einer linearen Stabilitätsanalyse gilt für Zeiten, in denen die Störungen klein sind. Daher gilt sie für instabile

^{*}*Sommerfeld*: *4 Cong. Mat.* **III** (1908)

[†]*Hopf*: *Ann. Phys.* **44** (1914)

[‡]*Heisenberg*: *Annalen der Physik* **74** (1924)

[§]*Orr*: *Proc. Roy. Irish Acad.* **XXVII** (1907)

[¶]*Sexl*: *Ann. Phys.* **83** (1927)

^{||}*Salwenn, Grosch*: *J. Fluid. Mech.* **54** (1972)

Systeme nur begrenzt. Wenn die Störungen eine gewisse Größe überschreiten, können wir sicher sein, daß die Vorhersagen der linearen Theorie ihre Gültigkeit verloren haben. In der weiteren Entwicklung spielen die nichtlinearen Terme eine entscheidende Rolle. Es ist jedoch nicht notwendigerweise der Fall, daß sich aus einer instabilen laminaren Strömung stets eine turbulente Strömung entwickelt. Die nichtlinearen Terme können auch dazu führen, daß die Stömung in eine neue Ordnung—möglicherweise ein periodisches Muster—geführt wird, die ihrerseits stabil erscheint. Man nennt diese Phänomene *Sekundärströmungen*. Der Stabilitätsbegriff einer linearen Theorie kann diese nicht mit einschließen.

Von einem energetischen Standpunkt aus, ist die Voraussetzung einer Instabilität ein Transfer kinetischer Energie von der Grundströmung in die Störungen. Bei diesem Vorgang spielen nichtlineare Effekte keine Rolle. Dies kann als weitere Rechtfertigung einer linearen Theorie gelten.

In den letzten Jahren gibt es allerdings eine Theorie, die einen Instabilitätsmechanismus vorschlägt, bei dem es trotz linearer Stabilität und kleiner Anfangsstörungen zu Instabilitäten kommen kann. Aufgrund der Nichtorthogonalität der Eigenfunktionen kann es möglich sein, daß kleine Störungen kurzfristig wachsen bis sie eine Größe erreicht haben, bei der nichtlineare Effekte zu einer Umverteilung der Energie in den Störungen führen können.* Bereits Hamel[†] kritisierte die Sommerfeldsche Arbeit und wies auf die Möglichkeit von Instabilität trotz gedämpfter Eigenmoden hin. Die versprochene nähere Erläuterung ließ er jedoch aus. Ob er den selben Effekt im Sinne hatte ist ungewiß.

In der Theorie der hydrodynamischen Stabilität unterscheidet man das *örtliche* und das *zeitliche* Problem, sowie die mathematisch verwandten Themen der *konvektiven* und *absoluten* Instabilität. Diese Begriffe wurden im Bereich der Plasmaphysik geprägt und später in der Hydrodynamik aufgegriffen.[‡]

Im Mittelpunkt dieser Thematik steht die *Dispersionsrelation*, die Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge der Störungen. Beim zeitlichen Problem fragt man nach der Entwicklung eines Anfangszustandes, bei dem Störungen

*Trefethen, Trefethen, Reddy, Driscoll: *Science* **261** (1993)

Reddy, Schmidt, Henningson: *SIAM J. Appl. Math.* **53** (1993)

Grossmann: *Rev. Mod. Phys.* **72** (2000)

[†]Hamel: *Ges. Wiss. Göttingen* (1911)

[‡]Landau, Lifschitz: (1983)

Watson: *J. Fluid. Mech.* **14** (1962)

Huerre, Monkewitz: *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22** (1990)

durch ihre spektralen Komponenten dargestellt werden. Die Dispersionsrelation wird unter Vorgabe reeller Wellenlängen, nach komplexen Frequenzen gelöst. Falls komplexe Frequenzen mit anfachenden Eigenschaften existieren, gilt das zeitliche Problem als instabil.

Das örtliche Problem behandelt den umgekehrten Fall. Anstatt eines Anfangswertproblems mit reellen Wellenzahlen, erfolgt die Vorgabe reeller Frequenzen. Diese Art der Problemstellung kommt experimentellen Anordnungen nach, bei denen eine Strömung an einer festen Stelle harmonisch gestört wird. Aus der Dispersionsrelation erhält man im Falle einer Instabilität eine komplexe Wellenzahl, d.h. es ergibt sich ein Ansteigen der Störung im Ort. Im Gegensatz zum zeitlichen Problem ist das Kriterium nicht hinreichend. Ein Gegenbeispiel ist das Modell transversaler Schwingungen einer elastisch gebetteten Saite—eine Wellengleichung mit linearer Rückstellung. Für einige Frequenzen hat ihre Dispersionsrelation komplex konjugierte Lösungen und ist trotzdem stabil. Eine Antwort auf die Stabilitätsfrage gibt erst eine genauere Untersuchung der Topologie der Dispersionsrelation.* Die entsprechende Unterscheidung führt beim zeitlichen Problem auf die Begriffe der konvektiven und absoluten Instabilität.

Eine Anfangsstörung, welche zeitlich wächst, gleichzeitig von der Strömung wegtransportiert wird, wird als konvektiv instabil bezeichnet. Im Gegensatz dazu bezeichnet die absolute Instabilität den Zustand, daß Störungen nach genügend langer Zeit an jedem Ort anwachsen. Ob die Unterscheidung notwendig ist, hängt von der Betrachtung ab. Jede konvektive Instabilität, kann mittels einer Galilei-Transformation in eine absolute umgewandelt werden und umgekehrt. Betrachtet man hingegen ein begrenztes System, aus dem eine wachsende Störung hinausfließt, bevor sie einen gewissen Wert erreicht hat, dann ist die Unterscheidung essentiell.

Beim vorliegenden Problem muß zwischen konvektiven und absoluten Instabilitäten nicht unterschieden werden. Zum einen erstreckt sich das System über ein unendlich großes Gebiet, zum anderen oszilliert die Grundströmung harmonisch, sodaß in einem Zeitraum über mehrere Perioden keine Konvektion stattfindet.

Im Gegensatz zu den zahlreichen Arbeiten, welche stationäre Strömungen behandeln, sind Theorien zur Stabilität periodischer oder instationärer Strömungen seltener. *Davis* gibt eine Übersicht über einige behandelte Arbeiten.†

* *Clemmow, Dougherty* (1969)

† *Davis: Ann. Rev. Fluid Mech.* 8 (1976)

Von den ebenen Strömungen wurden die oszillierende Strömung zwischen zwei Platten und die Stokessche Grenzschicht untersucht.* Diese sind aufgrund ihrer einfachen Geometrie leichter zugänglich als Strömungen in zylindrischen Koordinaten. In Grenzfällen kann die Aussage von Theorien ebener Strömungen auch auf jene mit gekrümmter Umrandung angewandt werden. Ghidaoui und Kolyshkin[†] behandeln eine instationäre Strömung im Rohr mit der quasistatischen Methode. Allerdings untersuchen sie im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit keine oszillierenden Geschwindigkeiten, sondern eine Anlauf-Abbremsströmung.

Tozzi und von Kerczek[‡] wenden die Floquet-Theorie auf eine Rohrströmung an, welcher zusätzlich zum stationären Anteil kleine Oszillationen überlagert werden. Sie ziehen den Schluß, daß die Schwingungen die Hauptströmung leicht stabilisieren.

Die rein oszillierende Rohrströmung wird von Yang und Yih[§] mit einer Floquet-Theorie mit finiten Differenzen untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Strömung gegenüber axialsymmetrischen Störungen keine Instabilität aufweist. Auch Fedele, Hitt und Prabhu[¶] beschränken sich auf axialsymmetrische Störungen und kommen mit einer ähnlichen Theorie zum gleichen Ergebnis. Zhao, Ghidaoui, Kolyshkin und Vaillancourt^{||} lösen das linearisierte Anfangswertproblem exemplarisch für wenige Parameter. Auch sie bestätigen ein Abklingen der Störungsenergie nach mehreren Perioden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Charakterisierung des Strömungsverhaltens der oszillierenden Rohrströmung in Abhängigkeit ihrer Parameter. Welche Parameter nötig sind, ermitteln wir im ersten Kapitel, in dem wir eine analytische Darstellung der laminaren Grundströmung herleiten und ihre dimensionslosen Kenngrößen identifizieren.

Anschließend führen wir eine Stabilitätsrechnung durch. Hierfür vergleichen wir mehrere Theorien und beurteilen ihre Aussagefähigkeiten. Für das vorliegende zeitlich periodische Problem kommen quasistatische Methoden und eine Floquet-Theorie in Frage. Wir entscheiden uns für eine quasistatische Me-

*Grosch, Salwen: *J. Fluid. Mech.* **34** (1968)

Hall: *Proc. Roy. Soc.* **359** (1978)

Blennerhassett, Bassom: *J. Fluid Mech.* **464** (2002)

Hall: *J. Fluid Mech.* **482** (2003)

[†]Ghidaoui, Kolyshkin: *J. Fluid. Mech.* **465** (2002)

[‡]Tozzi, von Kerczek: *J. Appl. Mech.* **53** (1986)

[§]Yang, Yih: *J. Fluid. Mech.* **82** (1977)

[¶]Fedele, Hitt, Prabhu: *Euro. J. Mech.* **24** (2005)

^{||}Zhao, Ghidaoui, Kolyshkin, Vaillancourt: *Tech. Mech.* **24** (2004)

thode mit Hilfe einer Galerkin-Entwicklung. Diese ermöglicht es, kurzzeitige Instabilitäten vorauszusagen, welche im Laufe der Periode wieder gedämpft werden. Eine Floquet-Theorie beurteilt das Langzeitverhalten von Störungen über mehrere Perioden und kommt zu dem Ergebnis, daß die oszillierende Rohrströmung gegenüber allen Störungen stabil für lange Zeiten ist.

Mit Hilfe der quasistatischen Methode führen wir Parameterstudien über viele Kombinationen von Grundströmungen und Störungen durch. Die Linearität der Theorie ermöglicht es, daß wir mittels Fourierreihen und Koordinatenseparation eine sehr allgemeine Darstellung von Störungen berücksichtigen können. Die benutzten Methoden sind so weit wie möglich analytisch aufbereitet. Im letzten Schritt werden die Rechnungen numerisch durchgeführt. Die Berechnungsergebnisse vergleichen wir im letzten Kapitel mit Experimenten vorheriger Arbeiten.

§ 1. Oszillierende Rohrströmung

In diesem Kapitel leiten wir die Grundströmung her, deren Stabilität im folgenden untersucht wird. Wir geben eine dimensionslose Form an, die sich durch zwei unabhängige Kenngrößen parametrisieren läßt.

Radius	L
Oszillationsfrequenz	Ω
Amplitude	$V/2$
kinematische Viskosität	ν
Grenzschichtdicke	$\delta = (\nu/\Omega)^{\frac{1}{2}}$
diffusive Zeiteinheit	L^2/ν
konvektive Zeiteinheit	L/V
aufgeprägte Zeiteinheit	$1/\Omega$
Reynoldszahl	$R = VL/\nu$
Womersleyzahl	$\alpha = L(\Omega/\nu)^{\frac{1}{2}} = L/\delta$
Grenzschicht-Reynoldszahl	$R/\alpha = V\delta/\nu$

Wir betrachten die Bewegung einer viskosen Flüssigkeit in einem unendlich ausgestreckten Rohr verursacht durch einen harmonisch oszillierenden axialen Druckgradienten. Die eingeschwungene laminare Lösung nennen wir die *oszillierende Rohrströmung*.^{*} Sie hat nur eine Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung, und gehört daher zur Klasse der Parallelströmungen.

Die räumlich über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit oszilliert harmonisch mit der Kreisfrequenz Ω und der Amplitude $V/2$. Den Faktor $1/2$ wählen wir, damit die Formulierung im stationären Grenzfall mit der Hagen-Poiseuillschen Lösung vergleichbar ist.

Aus diesen Parametern sowie dem Radius L und der kinematischen Viskosität ν bilden wir die Kenngrößen

$$R = VL/\nu \quad \alpha = L(\Omega/\nu)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

^{*}Sexl: *Z. Phys.* **61** (1930)

Uchida: *ZAMM* **7** (1956)

Es sind dies die Reynoldszahl und die Womersleyzahl.*

Wir benutzen dimensionslose Größen: Geschwindigkeiten beziehen sich auf V , Längen auf L , die Zeit auf L/V und der Druck auf das Produkt aus der Dichte und V^2 . Die dimensionslose räumlich über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit sei

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \sin \tau \quad \tau = \frac{\alpha^2}{R} t. \quad (1.2)$$

Die Bewegungsgleichung lautet im zylindrischen Koordinatensystem mit der radialen Koordinate r , der azimuthalen Koordinate φ und der axialen Koordinate z

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (1.3)$$

mit der axialen laminaren Geschwindigkeit $W(r, t)$. Aus formalen Gründen formulieren wir die Schwingungsgleichungen mit Hilfe komplexer Größen. Als physikalisch relevant ist hierbei nur der Realteil zu betrachten.

Der axiale Druckgradient oszilliert harmonisch

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\alpha^2}{R} a e^{i(\tau_0 - \tau)}. \quad (1.4)$$

Als Randbedingung fordern wir die Haftung der Flüssigkeit an der Rohrwand und Regularität der Geschwindigkeit auf der Achse

$$W(1, t) = 0 \quad W(0, t) : \text{regulär.} \quad (1.5)$$

Die Lösung folgt mit Hilfe des Gleichtaktansatzes zu

$$W(r, t) = a \left[1 - \frac{J_0(\sqrt{i}\alpha r)}{J_0(\sqrt{i}\alpha)} \right] e^{i(\tau_0 - \tau)}. \quad (1.6)$$

Hierbei bezeichnet J_0 die nullte Besselsche Funktion erster Art. Der Amplitudenfaktor $a(\alpha)$ und die Phase $\tau_0(\alpha)$ sind so zu wählen, daß die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{W} = 2 \int_0^1 W(r, t) r \, dr \quad (1.7)$$

gemäß (1.2) gegeben ist.

Im Grenzfall langsamer Oszillation (und damit kleiner Womersleyscher Zahl) geht das Strömungsprofil in die Hagen-Poiseuillesche Parabel über

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} W(r, t) = (1 - r^2) \sin \tau. \quad (1.8)$$

*Womersley: *WADC Tech. Rep. TR 56-614* (1959)

Im Hochfrequenzlimes zeigt die Strömung Grenzschichtcharakter. Sie hat einen reibungsfreien Kern, welcher sich durch eine über den Querschnitt konstante Geschwindigkeit auszeichnet, und eine viskose Grenzschicht nahe der Wand

$$\lim_{\alpha \gg 1} W(r, t) = \frac{1}{2} [\sin \tau - e^{-\eta} \sin(\tau - \eta)] \quad (1.9)$$

mit der mit der Grenzschichtdicke skalierten Koordinate $\eta = \alpha(1 - r)/\sqrt{2}$. Der mit dem Kern mitbewegte Beobachter stellt eine Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht fest, welche der *Stokesschen Grenzschicht** entspricht. Die Geschwindigkeitsverteilung hat zu einem festen Zeitpunkt die Form $e^{-\eta} \sin \eta$. Daraus folgt, daß die Grenzschicht für höhere Anregungsfrequenzen enger wird, ihre Form sich jedoch nicht charakteristisch ändert.

Die radiale Verteilung der Geschwindigkeit hängt also maßgeblich vom Womersleyschen Parameter α ab. Wir können α als den Quotienten aus dem Radius und der Grenzschichtdicke interpretieren oder als die Wurzel aus dem Verhältnis der *diffusiven Zeitskala* L^2/ν zur *aufgeprägten Zeitskala* $1/\Omega$. Der Parameter R ändert nichts an der Form der Geschwindigkeitsverteilung, sondern stellt ihren charakteristischen Amplitudenfaktor V ins Verhältnis zur Diffusionsgeschwindigkeit ν/L .

Abbildung 1.1 zeigt die Verteilung der Geschwindigkeit W über der radialen Koordinate r während eines halben Zyklus. Im oberen Bild erkennen wir, daß für kleine Womersleysche Zahlen α die Geschwindigkeitsverteilung in die Hagen-Poiseuillsche Parabel (1.8) übergeht. In der quadratischen Skalierung der radialen Koordinate erscheint die Parabel als Gerade. Für größere Womersleysche Zahlen oszilliert der Kern mit konstanter Geschwindigkeit, hingegen bildet sich im Gebiet nahe der Wand eine viskose Grenzschicht aus.

*Stokes: *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **ix** (1851)

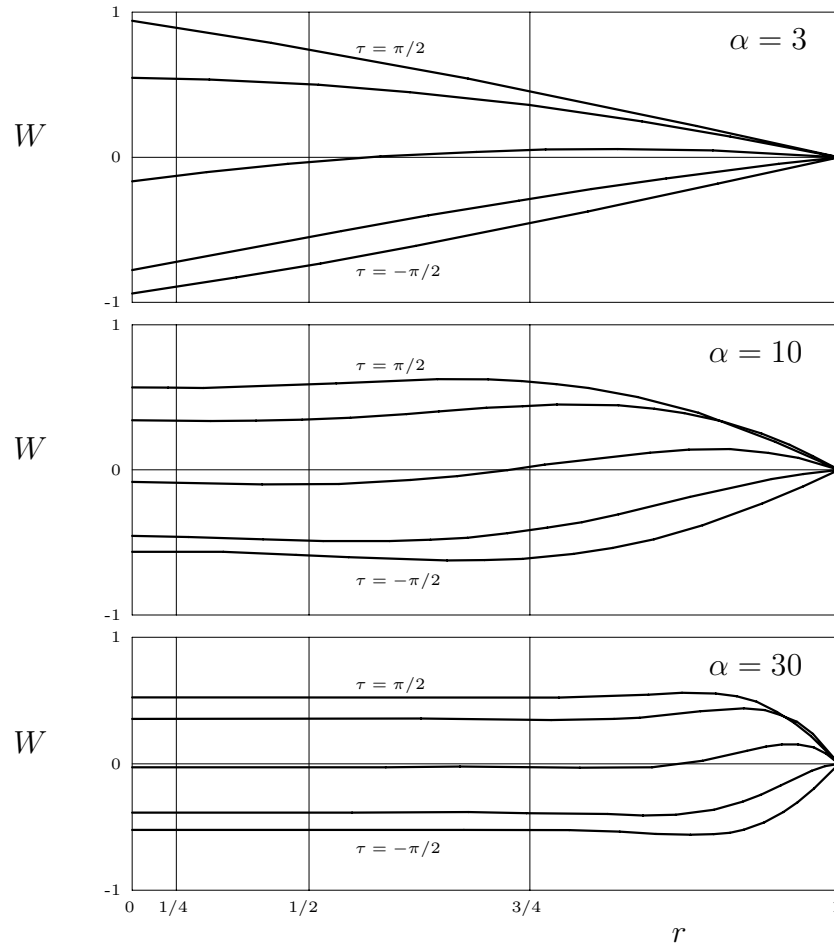


Abbildung 1.1: Die oszillierende Grundströmung $W(r; \tau)$ zu den Phasen $\tau/\pi = \{-1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2\}$ für verschiedene Werte der Womersleyschen Zahl α . Die Zuordnung der Zeitwerte erfolgt von unten nach oben gemäß (1.2). Die Geschwindigkeitsverteilung in der zweiten Hälfte der Periode, kann aus den angegebenen Kurven durch Spiegelung an der Horizontalen $W = 0$ gewonnen werden.

§ 2. Einführung in die Stabilitätstheorie

Die Frage der Stabilität der Grundströmung gegenüber Störungen beantwortet die Dynamik der Evolutionsgleichung der Störungen.

Wir bezeichnen die Relativgeschwindigkeit zwischen der gestörten Geschwindigkeit und der Grundgeschwindigkeit mit \mathbf{v} , die entsprechende Druckdifferenz mit p . Sowohl die Grundströmung \mathbf{v}_0 , p_0 als auch die gestörte Strömung $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$, $p_0 + p$ gehorchen den *Navier-Stokes-Gleichungen*. Substrahieren wir von den gestörten Gleichungen die ungestörten Gleichungen, erhalten wir die Evolutionsgleichungen der Störungsgeschwindigkeit \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \operatorname{grad}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v}_0 + \operatorname{grad} p \\ = -(1/R) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit der Nebenbedingung der inkompressiblen Flüssigkeit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

Als Randbedingungen fordern wir das Haften der Flüssigkeit an der festen Begrenzung des Strömungsraumes

$$\mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

und im Falle der Rohrströmung außerdem die Annahme axial periodischer Störungen.

Die Evolutionsgleichung ist linearisiert unter der Voraussetzung, daß die Störungsgeschwindigkeiten klein sind gegenüber der Geschwindigkeit der Grundströmung. Im allgemeinen hätten wir auf der linken Seite von (2.1) den zusätzlichen nichtlinearen Term

$$(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} \quad (2.4)$$

zu berücksichtigen.

Aus dieser relativen Impulsbilanz bekommen wir durch Multiplikation mit \mathbf{v} und Integration über den Strömungsraum \mathcal{B} die Bilanz der *relativen Störungsenergie* $e = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$

$$\int \frac{\partial e}{\partial t} d\mathcal{B} = - \int (\mathbf{v} \cdot D_0 \mathbf{v} + (1/R) |\operatorname{rot} \mathbf{v}|^2) d\mathcal{B} \quad (2.5)$$

mit dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor der Grundströmung D_0 . In axialer Richtung erstreckt sich die Integration über eine Wellenlänge der Störungen. Die bei der partiellen Integration auftretenden Randintegrale verschwinden unter Berücksichtigung der Randbedingungen.

Die Gleichung ist bekannt unter dem Namen *Reynolds-Orr-Energiegleichung*.^{*} Stabilitätsbetrachtungen, die auf dieser Gleichung aufbauen, bezeichnet man als *Energiemethode*. Sie vergleicht die Terme auf der rechten Seite. Den ersten Term können wir als Energietransfer pro Zeit von der Grundströmung in die Störung betrachten. Der zweite Term beinhaltet die Reibungskräfte und ist bei newtonschen Flüssigkeiten stets dissipierend. Wir werden die Energiemethode nicht weiter verfolgen, doch zwei wichtige Eigenschaften wollen wir (2.5) entnehmen.

Zum einen wird der Mechanismus, Energie von der Grundströmung in die Störungen zu transportieren, durch den Term $\mathbf{v}D\mathbf{v}$ beschrieben, welcher in zylindrischen Koordinaten für das betrachtete Problem keine Abhängigkeit der Winkelkomponente $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi$ aufweist

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z) \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Zum anderen ist die Energiegleichung dieselbe, würde man sie aus der nichtlinearen Form von (2.1) herleiten. Nichtlineare Effekte spielen beim primären Energietransfer von der Grundströmung in die Störungen keine Rolle.

Analog zur Orr-Sommerfeldschen Theorie untersuchen wir die Gleichungen (2.1) bis (2.3) direkt. In zylindrischen Koordinaten stellen wir den Vektor der Geschwindigkeitsstörung durch

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi + w\mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

dar. Hiermit lautet die Koordinatendarstellung der Evolutionsgleichungen

^{*}Osborne Reynolds: *Phil. Trans.* **186** (1895)

Orr: *Proc. Roy. Irish Acad.* **XXVII** (1907)

(2.1)

$$\begin{aligned}
& R \frac{\partial u}{\partial t} + RW \frac{\partial u}{\partial z} + R \frac{\partial p}{\partial r} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\
& R \frac{\partial v}{\partial t} + RW \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{R}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\
& R \frac{\partial w}{\partial t} + RW \frac{\partial w}{\partial z} + R \frac{\partial W}{\partial r} u + R \frac{\partial p}{\partial z} \\
&= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.9}$$

Aufgrund der Linearität können wir die Störungen in modale Komponenten zerlegen und aus dem Einzelverhalten der Komponenten auf die Gesamtheit aller möglichen Störungen schließen. Wir spalten die Axial- und Winkelabhängigkeiten des Störungsgeschwindigkeitsvektors ab

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(r, t) e^{i(kz+n\varphi)} \tag{2.10}$$

und nennen k die *axiale Wellenzahl* und n die *Winkelzahl* der Störung. Da der Strömungsraum in axialer Richtung unbegrenzt ist, handelt es sich bei der Wellenzahl um eine *reelle* Zahl $k \in \mathbb{R}$. Die Winkelzahl hingegen ist eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, da das Gebiet in azimuthaler Richtung 2π -periodisch ist.

Für alle Störungen, die sich durch (2.10) mit $n = 0$ ausdrücken lassen, sprechen wir von *axialsymmetrischen* oder kurz *symmetrischen* Störungen. Die Moden mit $n = 1$ bezeichnen wir als *antisymmetrisch*.

Im folgenden unterscheiden wir zwei Herangehensweisen an das instationäre Problem: die *quasistatische Methode* und die *Floquet-Theorie*. Erstere gilt nur eingeschränkt und trifft Aussagen über die kurzzeitige Entwicklung von Störungen. Letztere gilt für einen beliebig langen Zeitraum. Aus ihr folgt ein asymptotischer Stabilitätsbegriff.

§ 3. Quasistatische Methode

Die quasistatische Methode beruht auf der Annahme, daß charakteristische Zeitkonstanten der Störungen kurz gegenüber der Zeit sind, in der sich die Grundgeschwindigkeit ändert. Wir bezeichnen den Quotienten zwischen den Zeitkonstanten der Störungen und der Grundströmung als ε und fordern, daß dieser ein kleiner Parameter sei. Eine genaue Definition des Quasistatikparameters ε geben wir an späterer Stelle an. Die Forderung ist erfüllt, falls die Grundgeschwindigkeit sich langsam gegenüber den Störungsgeschwindigkeiten ändert. Allerdings verlangen wir von der Grundgeschwindigkeit, daß sie sich bezüglich der diffusiven Zeitskala L^2/ν schnell genug ändert, damit sich das Grundströmungsprofil infolge der Impulskräfte von der stationären Hagen-Poiseuilleschen Parabel unterscheidet. Die Betrachtungen, für die die quasistatische Methode angebracht ist, wird durch die Ungleichungen

$$\varepsilon \ll 1 \ll \alpha^2 \quad (3.1)$$

beschrieben. Der linke Teil trägt der Forderung nach schnellen Störungen Rechnung, der rechte berücksichtigt dynamische Strömungsprofile.

Mit der Annahme (3.1) betrachten wir die kurzzeitige Entwicklung der Störungsgeschwindigkeit. Dadurch hat das partielle Differentialgleichungssystem zeitlich *konstante Koeffizienten* und die Zeitabhängigkeit aus (2.10) kann separiert werden

$$\bar{\mathbf{v}}(r, t) = \mathbf{v}^*(r)e^{(\sigma+i\omega)t}. \quad (3.2)$$

Hierbei sind σ die Aufklingrate und ω die Kreisfrequenz der betrachteten Störungskomponente. Es sind die gesuchten Größen, die eine Aussage über die Stabilität der Grundströmung liefern. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma < 0 : & \quad \textit{quasistatisch stabil} \\ \sigma > 0 : & \quad \textit{quasistatisch instabil.} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit Hilfe der Aufklingrate und Frequenz einer Störungskomponente definieren wir den Quasistatikparameter als den Quotienten zwischen der Oszillationsfrequenz der Grundströmung und dem Betrag der komplexen Frequenz

der Störung. In dimensionsloser Form lautet der Parameter

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2}{R|\sigma + i\omega|}. \quad (3.4)$$

Da die zeitliche Entwicklung der Störungen und damit die Parameter σ und ω von vorneherein nicht bekannt sind, kann die Forderung $\varepsilon \ll 1$ nicht sofort überprüft werden. Deshalb setzen wir sie a priori als erfüllt voraus und entscheiden nach der Lösung, ob dies zulässig war.

Indem wir (3.2) und (2.10) in (2.1) und (2.2) einsetzen, reduzieren wir die partiellen Differentialgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in r . Wir benutzen die Komponentendarstellung des radialen Anteils des Störungsgeschwindigkeitsvektors zweckmäßigerweise in der Form

$$\mathbf{v}^*(r) = u^* \mathbf{e}_r + iv^* \mathbf{e}_\varphi - iw^* \mathbf{e}_z \quad (3.5)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{du^*}{dr} + \frac{u^*}{r} - \frac{nv^*}{r} + kw^* &= 0 \\ \frac{d^2u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} + \left(b - \frac{1+n^2}{r^2}\right) u^* + \frac{2nv^*}{r^2} - R \frac{dp^*}{dr} &= 0 \\ \frac{d^2v^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv^*}{dr} + \left(b - \frac{1+n^2}{r^2}\right) v^* + \frac{2nu^*}{r^2} - \frac{nRp^*}{r} &= 0 \\ \frac{d^2w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} + \left(b - \frac{n^2}{r^2}\right) w^* - iR \frac{dW}{dr} u^* + kRp^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit der Abkürzung $b \equiv -R[\sigma + i(\omega + kW)] - k^2$ und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u^* = v^* = w^* &= 0 & \text{für } r = 1 \\ u^*, v^*, w^* &: \text{regulär} & \text{für } r = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Aufgabe besteht darin, für jede Kombination der Parameter der Grundströmung α und R sowie der Parameter der Störungsgeschwindigkeit n und k zu jedem Zeitpunkt τ das Randwertproblem zu lösen, indem passende Eigenwerte $\sigma + i\omega$ gefunden werden

$$(R, \alpha, \tau, k, n) \rightarrow (\sigma + i\omega). \quad (3.8)$$

Zu jeder Kombination der Parameter existieren unendlich viele Eigenwerte. Für die Frage der Instabilität genügt es, den Eigenwert mit dem größten Realteil σ zu finden.

Im folgenden werden zwei Methoden zur Lösung des Rand-Eigenwertproblems vorgestellt. Beim *Schießverfahren* werden Eigenwerte angenommen und das Randwertproblem von innen nach außen integriert. Anhand der Randbedingung am äußeren Rand, die im allgemeinen nicht erfüllbar ist, können wir ein Gütemaß formulieren, welches die Wahl der Eigenwerte beurteilt. Mit einem geeigneten Optimierungsverfahren wird der Vorgang wiederholt, bis das Gütemaß einen zufriedenstellenden Wert liefert.

Die Alternative ist eine *Galerkin-Entwicklung*, bei der die Radialfunktionen durch eine Summe von Ansatzfunktionen angenähert werden. Die Lösung wird anschließend im verkleinerten Lösungsraum gesucht. Statt eines Rand-Eigenwertproblems muß dadurch nur noch ein algebraisches Eigenwertproblem gelöst werden.

A. Schießverfahren

Beim Schießverfahren geben wir Schätzungen der gesuchten Eigenwerte $\sigma + i\omega$ vor und integrieren das gewöhnliche Randwertproblem (3.6) über die radiale Koordinate r . Die äußere Randbedingung (3.7) wird dadurch im allgemeinen nicht erfüllt sein. Aus ihr leiten wir eine Zielbedingung her, welche uns zu entscheiden hilft, ob die Schätzungen mit den Eigenwerten übereinstimmen. Dieser Vorgang wird mittels eines Optimierungsverfahrens wiederholt, bis die Zielbedingung erfüllt ist.

Das Verfahren konvergiert nur dann gegen den gesuchten instabilsten Eigenwert, falls wir einen „guten“ Startwert wählen. Dies gelingt unter der Annahme, daß sich die Eigenwerte stetig mit kleinen Änderungen der Parameter ändern. Kennen wir eine Lösung, können wir daraus auf den Startwert für das nächste Optimierungsproblem mit geringfügig geänderten Parametern schließen und uns somit sequentiell im Parameterraum vorantasten. Die Startwerte für den ersten Schritt sind bekannt. Im Grenzfall langwelliger Störungen $k \rightarrow 0$ kann das Eigenwertproblem analytisch gelöst werden.* Die Eigenwerte sind in Tabelle 3.1 angegeben. Alle Eigenwerte sind negativ reell, daher sind langwellige Störungen unabhängig von der Grundströmung immer aperiodisch gedämpft.

Tabelle 3.1: Am schwächsten gedämpfte Eigenwerte im Grenzfall langwelliger Störungen $k \rightarrow 0$ für eine beliebige Grundströmung. Die axialsymmetrischen Störungen entkoppeln die r, z und die (stets stabile) φ Komponente. Es bezeichnet $j_{n,m}$ die m -te Nullstelle größer null der n -ten Besselschen Funktion erster Art.

n	$-R\sigma$	
0 (r, z)	$j_{2,1}^2$	26.37
0 (φ)	$j_{1,1}^2$	14.68
1	$j_{1,1}^2$	14.68
$n > 1$	$j_{n,1}^2$	größer

Im folgenden stellen wir eine Methode zur Integration des Randwertproblems dar.

Im Falle symmetrischer Störungen ($n = 0$) zerfällt das System (3.6) in zwei Teilsysteme. Eines enthält die Azimuthalkomponente der Störungsgeschwin-

*Gill: *J. Fluid. Mech.* **61** (1973)

digkeit, das andere ist eine Kopplung aus den radialen und axialen Anteilen. Alle Störungen der Azimuthalkomponente sind in der linearen Betrachtung gedämpft. Da im Interaktionsterm (2.6), welcher den Energietransport von der Grundströmung in die Störung ausdrückt, die azimuthale Störungsgeschwindigkeitskomponente nicht auftaucht, können diese Störungsanteile nicht angefacht werden. Wir werden das erste Teilsystem deshalb nicht weiter behandeln.

Das zweite Teilsystem überführen wir in die Standardform

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}(s)}{ds} = A(s)\boldsymbol{\eta}(s). \quad (3.9)$$

Dies gelingt durch die Wahl des komplexen Vektors $\boldsymbol{\eta}$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(1)}(s) &= \frac{u^*(r)}{r} & \boldsymbol{\eta}^{(2)}(s) &= \frac{du^*}{dr} + \frac{u^*}{r} - Rp^* \\ \boldsymbol{\eta}^{(3)}(s) &= w^*(r) & \boldsymbol{\eta}^{(4)}(s) &= \frac{1}{2r} \frac{dw^*}{dr}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierbei nutzen wir die Symmetrie aus, indem wir die Variable $s = r^2$ einführen. Die Systemmatrix folgt zu

$$A = \begin{pmatrix} -1/s & 0 & -k/2s & 0 \\ -b/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ iR\mathcal{W}'/2 & k/4s & (k^2 - b)/4s & -1/s \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

mit der Darstellung der Grundströmung $\mathcal{W}(s)$.

Das System ist von vierter Ordnung und benötigt daher für die Integration des Schießverfahrens vier Randbedingungen auf der Rohrachse $s = 0$. Wir besitzen lediglich die Vorgabe, daß alle physikalischen Größen regulär bleiben sollen. Diesen Forderungen müssen wir mit besonderen Einschränkungen in den Randbedingungen nachkommen.

Wir erreichen dies, indem wir alle abhängigen Variablen in eine reguläre Taylorreihe um $r = 0$ entwickeln, und diese in das Differentialgleichungssystem einsetzen. Dadurch bekommen wir ein lineares Gleichungssystem für die niedrigsten Koeffizienten. Das Gleichungssystem ist allerdings nicht vollständig lösbar. Es verbleiben zwei Parameter, welche auf linear unabhängige Lösungen führen. Wir können eine Integralbasis konstruieren, indem wir wechselweise einen der Parameter *null* setzen und das System integrieren.

Die mit dieser Methode gewonnenen Randbedingungen für die erste Basislösung lauten

$$\boldsymbol{\eta}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k/4 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Außerdem benötigen wir die dazugehörigen Ableitungen an der Stelle der Singularität

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\eta}_1}{ds} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} -k^2/16 \\ 0 \\ k/4 \\ k(k^2 - b)/32 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Für die zweite Basislösung erhalten wir die Randbedingungen entsprechend

$$\boldsymbol{\eta}_2(0) = \begin{pmatrix} -k/2 \\ 0 \\ 1 \\ (k^2 - b)/4 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\eta}_2}{ds} \right|_{s=0} = \begin{pmatrix} k(b - k^2)/16 \\ kb/4 \\ (k^2 - b)/4 \\ (k^4 - bk^2 + b^2)/32 - ikR\mathcal{W}'(0)/8 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Die Integration des Systems (3.9) mit den Randbedingungen (3.12) und (3.13) von $s = 0$ bis $s = 1$ führt auf die erste Basislösung $\boldsymbol{\eta}_1$. Entsprechend führt die Integration mit den Randbedingungen (3.14) und (3.15) auf die zweite Basislösung $\boldsymbol{\eta}_2$. Die übrigen zwei unabhängigen Lösungen des Systems vierter Ordnung sind auf der Rohrachse singularär und daher aus physikalischen Gründen ausgeschlossen.

Für das Schießverfahren benötigen wir eine Zielbedingung am äußeren Rand, um die Güte der Schätzung des Eigenwertes $\sigma + i\omega$ zu beurteilen. Da es sich bei $\boldsymbol{\eta}_1$ und $\boldsymbol{\eta}_2$ um ein Fundamentalsystem handelt, erhalten wir die allgemeine Lösung aus einer Linearkombination beider Basislösungen. Daher lauten die Geschwindigkeitskomponenten an der Rohrwand

$$\begin{aligned} u^*(1) &= C_1 \boldsymbol{\eta}_1^{(1)}(1) + C_2 \boldsymbol{\eta}_2^{(1)}(1) \\ w^*(1) &= C_1 \boldsymbol{\eta}_1^{(3)}(1) + C_2 \boldsymbol{\eta}_2^{(3)}(1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

welche laut (3.7) verschwinden sollen. Dies gelingt nur dann auf nichttriviale Weise, wenn die Determinantenbedingung

$$|\mathcal{D}| = 0 \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)}(1) & \eta_2^{(1)}(1) \\ \eta_1^{(3)}(1) & \eta_2^{(3)}(1) \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

erfüllt ist. Diese skalare Gleichung fassen wir als Gütefunktion auf. Das Optimierungsverfahren hat die Aufgabe unter Variation der Schätzungen der Eigenwerte, (3.17) zu minimieren.

In der Implementation benutzen wir dazu das Verfahren nach *Hooke und Jeeves*.*

Für jede Kombination aus den Parametern α , R , τ und k konstruieren wir eine Integralbasis für (3.9), indem wir das System numerisch integrieren und den Eigenwert $\sigma + i\omega$ nach der Vorschrift

$$\min_{\sigma, \omega} |\mathcal{D}| \quad (3.18)$$

optimieren. Als Startwert dient nach Tabelle 3.1

$$k = 0 \quad R\sigma = -j_{2,1}^2. \quad (3.19)$$

Der Startwert gilt unabhängig von der Form der Grundströmung und damit für alle Womersleyzahlen α und jede Zeit τ . Der nächste Schritt besteht darin, die Wellenzahl k stufenweise zu erhöhen. Als Startwerte für die Eigenwerte können lineare Schätzungen aus den vorhergehenden Lösungen genommen werden.

Statt einer Minimierung gibt es eine alternative Methode zur Lösung von (3.17). In der Arbeit von *Mack*[†] wird ein ähnliches Problem graphisch gelöst, indem die Kurven der Gleichungen

$$\Re \mathcal{D} = 0 \quad \Im \mathcal{D} = 0 \quad (3.20)$$

erzeugt werden und die Nullstellen $|\mathcal{D}| = 0$ als Schnittpunkte dieser Kurven identifiziert werden. Das Verfahren ist zuverlässiger als eine Minimierung. Es läßt sich jedoch schwer automatisieren und wird daher nicht verwendet.

*www.netlib.org/opt/hooke.c

Hooke, Jeeves: J. ACM **8** (1961)

[†]*Mack: J. Fluid. Mech.* **73** (1976)

Für höhere Winkelzahlen $n > 0$ ist eine analoge Vorgehensweise zu dem beschriebenen Schießverfahren möglich. Dazu empfiehlt es sich, das System zu transformieren, indem neue Variable als Produkte aus r^{1-n} und den alten Variablen, eingeführt werden. Man erhält ein System sechster Ordnung mit drei unabhängigen nichtsingulären Basislösungen. Es wird an dieser Stelle auf eine Darstellung des Systems verzichtet, da sie zum einen umfangreich ist, zum anderen werden wir im nächsten Abschnitt eine Methode kennenlernen, welche sich als vorteilhafter erweist.

Zu den Nachteilen des Schießverfahrens gehört die fehlende Robustheit des Optimierungsverfahrens. Es ist schwer zu entscheiden, ob es sich bei einem Minimum tatsächlich um eine Nullstelle handelt, und ob diese global den größten Realteil besitzt. Im Grenzfall langwelliger Störungen sind die gesuchten Eigenwerte bekannt. Nach dem beschriebenen Verfahren wird angenommen, daß der Eigenwert mit maximaler Aufklingrate im Grenzfall aus dem ersten Startwert hervorgeht. Es ist jedoch auch denkbar, daß bei Variation der Wellenzahl k ein Eigenwert den größten Realteil besitzt, welcher für langwellige Störungen einem stärker gedämpften Eigenwert entspricht. Um dies auszuschließen, müßte das Verfahren für mehrere Startwerte durchgeführt werden.

Die steigende Komplexität des Systems für höhere Winkelzahlen $n > 0$ macht das Verfahren für nichtsymmetrische Störungen unbrauchbar. Es muß für jede Winkelzahl n ein eigenes System einschließlich ihrer Anfangs- und Singularitätsbedingungen hergeleitet werden. Außerdem hat die Determinantenbedingung (3.17) eine um eins erhöhte Dimension, was eine erheblich schlechtere Konditionierung zur Folge hat.

Die Galerkin-Entwicklung, welche wir im folgenden Abschnitt behandeln, besitzt diese Unzulänglichkeiten nicht. Eine genauere Gegenüberstellung der Methoden erfolgt an späterer Stelle.

B. Galerkin-Entwicklung

In diesem Abschnitt wird eine alternative Methode zur Lösung des quasistatischen Stabilitätsproblems dargestellt. Die Berechnungsergebnisse der vorliegenden Arbeit basieren auf dieser Theorie. Die Methode ist einer Arbeit von *Salwen und Grosch** entnommen, welche sich dem stationären Problem widmet.

Im Gegensatz zu den Berechnungen von *Salwen und Grosch*, die ausschließlich die Stabilität der Geschwindigkeitsverteilung $W = 1 - r^2$ untersuchen, behandeln wir die oszillierende Strömung (1.6). Durch diese Erweiterung erhöht sich die Dimension des Parameterraums um zwei: die Womersleyzahl und die Zeit.

Nach der Galerkinschen Methode diskretisieren wir das partielle Differentialgleichungssystem, und müssen folglich statt eines Rand-Eigenwertproblems nur noch ein algebraisches Eigenwertproblem lösen.

Dazu entwickeln wir die Störungsgeschwindigkeiten der Gleichungen (2.1) und (2.2) in eine Reihe aus skalaren Zeitfunktionen g_i und vektoriellen Ortsfunktionen \mathbf{v}_i^\dagger

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z, t) = \sum_{i=1}^N g_i(t) \mathbf{v}_i(r, \varphi, z). \quad (3.21)$$

Die Ansatzfunktionen \mathbf{v}_i sollen eine orthonormale Basis für die Näherungslösung der partiellen Differentialgleichungen der Störungsentwicklung darstellen. Wir fordern daher

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_k \rangle = \delta_{ik} \quad (3.22)$$

mit der Definition des *inneren Produktes* zweier komplexer Vektorfunktionen $\mathbf{f}(r, \varphi, z)$ und $\mathbf{g}(r, \varphi, z)$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \equiv \int_0^{2\pi/k} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g}) r \, dr \, d\varphi \, dz. \quad (3.23)$$

Hierbei bezeichnet $(\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g})$ das Skalarprodukt des komplex Konjugierten von \mathbf{f} mit \mathbf{g} . Die Integration erstreckt sich über das Strömungsgebiet, beziehungsweise in axialer Richtung über eine Wellenlänge.

Salwen, Grosch: J. Fluid. Mech.* **54 (1972)

†Wir bezeichnen die Indizes in diesem Abschnitt mit \mathbf{i} und \mathbf{k} , um eine Verwechslung mit den anderweitig verwendeten Buchstaben i, k zu vermeiden.

Insbesondere die Anforderung bezüglich der Regularität auf der Rohrachse im zylindrischen Koordinatensystem und die Tatsache, daß es sich um Vektorfunktionen handelt, macht die Wahl der Basisfunktionen zu einem schwierigen Unterfangen. Eine mögliche Wahl, mit der alle Schwierigkeiten auf natürliche Weise gelöst sind, sind die Eigenfunktionen $\bar{\mathbf{v}}_i$ des vereinfachten Systems

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_i &= 0 \\ \lambda_i \mathbf{v}_i + \operatorname{grad} p_i &= -(1/R) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_i &: \text{regulär für } r = 0 \\ \mathbf{v}_i &= 0 \quad \text{für } r = 1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i .

Bei dem System handelt es sich um das Eigenwertproblem des *Stokesschen* Operators in Zylinderkoordinaten, dessen Lösung von *Rummler* angegeben wird.* Außerdem können wir das System als das Stabilitätsproblem für den Fall der ruhenden Flüssigkeit interpretieren. In diesem Falle denken wir uns die Zeitabhängigkeit durch den Faktor $e^{\lambda t}$ separiert.

Die Eigenfunktionen des Systems (3.24) setzen sich analog zu (2.10) aus einem radialen Anteil $\bar{\mathbf{v}}_i(r)$ und exponentiellen Axial- und Winkelabhängigkeiten zusammen

$$\mathbf{v}_i(r, \varphi, z) = \bar{\mathbf{v}}_i(r) e^{i(kz+n\varphi)}. \quad (3.25)$$

Der von der radialen Komponente abhängige Anteil lautet für Winkelzahlen $n > 0$ und Wellenzahlen $k > 0$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_i &= \\ &- i^n \frac{k}{2} \left(\frac{I_{n+1}(k)}{J_{n+1}(\beta_i)} J_{n+1}(\beta_i r) + \frac{I_{n-1}(k)}{J_{n-1}(\beta_i)} J_{n-1}(\beta_i r) \right. \\ &\quad \left. - I_{n-1}(kr) - I_{n+1}(kr) \right) \mathbf{e}_r \\ &+ i^{n+1} \frac{k}{2} \left(\frac{I_{n+1}(k)}{J_{n+1}(\beta_i)} J_{n+1}(\beta_i r) - \frac{I_{n-1}(k)}{J_{n-1}(\beta_i)} J_{n-1}(\beta_i r) \right. \\ &\quad \left. + I_{n-1}(kr) - I_{n+1}(kr) \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &+ i^{n+1} \left(k I_n(kr) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \beta_i \left[\frac{I_{n+1}(k)}{J_{n+1}(\beta_i)} - \frac{I_{n-1}(k)}{J_{n-1}(\beta_i)} \right] J_n(\beta_i r) \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Rummler: ZAMM 77(8) (1997)*

I_n bezeichnet die modifizierten Besselschen Funktionen $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$. Statt der Eigenwerte λ_i benutzen wir die Hilfsgrößen β_i , mit

$$\beta_i^2 = -(k^2 + R\lambda_i) \quad (3.27)$$

als Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} 2kI_n(k)J_{n-1}(\beta)J_{n+1}(\beta) - \beta I_{n+1}(k)J_{n-1}(\beta)J_n(\beta) \\ + \beta I_{n-1}(k)J_n(\beta)J_{n+1}(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Gleichung hat rein reelle Wurzeln $\beta_i > 0$, welche numerisch ermittelt werden müssen. Hierbei benutzen wir als Startwert den asymptotischen Grenzfall für $k \rightarrow 0$

$$\beta J_n(\beta)J_{n+1}(\beta) = 0, \quad (3.29)$$

mit den Lösungen (geordnet in aufsteigender Ordnung)

$$\beta = \{j_{n,1}; j_{n+1,1}; j_{n,2}; j_{n+1,2}; \dots\}. \quad (3.30)$$

Es ist $j_{n,m}$ die m -te Nullstelle größer null, der n -ten Besselschen Funktion erster Art.

Der symmetrische Anteil der Eigenfunktionen mit $n = 0$ lautet

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_i = & \left(kI_1(kr) - k \frac{I_1(k)}{J_1(\beta_i)} J_1(\beta_i r) \right) \mathbf{e}_r \\ & + i \left(kI_0(kr) - \beta_i \frac{I_1(k)}{J_1(\beta)} J_0(\beta_i r) \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit β_i aus der Eigenwertgleichung

$$kI_0(k)J_1(\beta) - \beta I_1(k)J_0(\beta) = 0, \quad (3.32)$$

dessen rein reelle Lösungen $\beta_i > 0$ im Grenzfall langwelliger axialer Abhängigkeit $k \rightarrow 0$ in

$$\beta_i = j_{2,i} \quad (3.33)$$

übergehen. Beispiele der Ansatzfunktionen werden in Abbildung 3.1 dargestellt.

Hiermit sind die Ansatzfunktionen \mathbf{v}_i vollständig definiert, die wir benötigen, um auf die Lösung des Stabilitätsproblems (3.6) zurückzukommen.

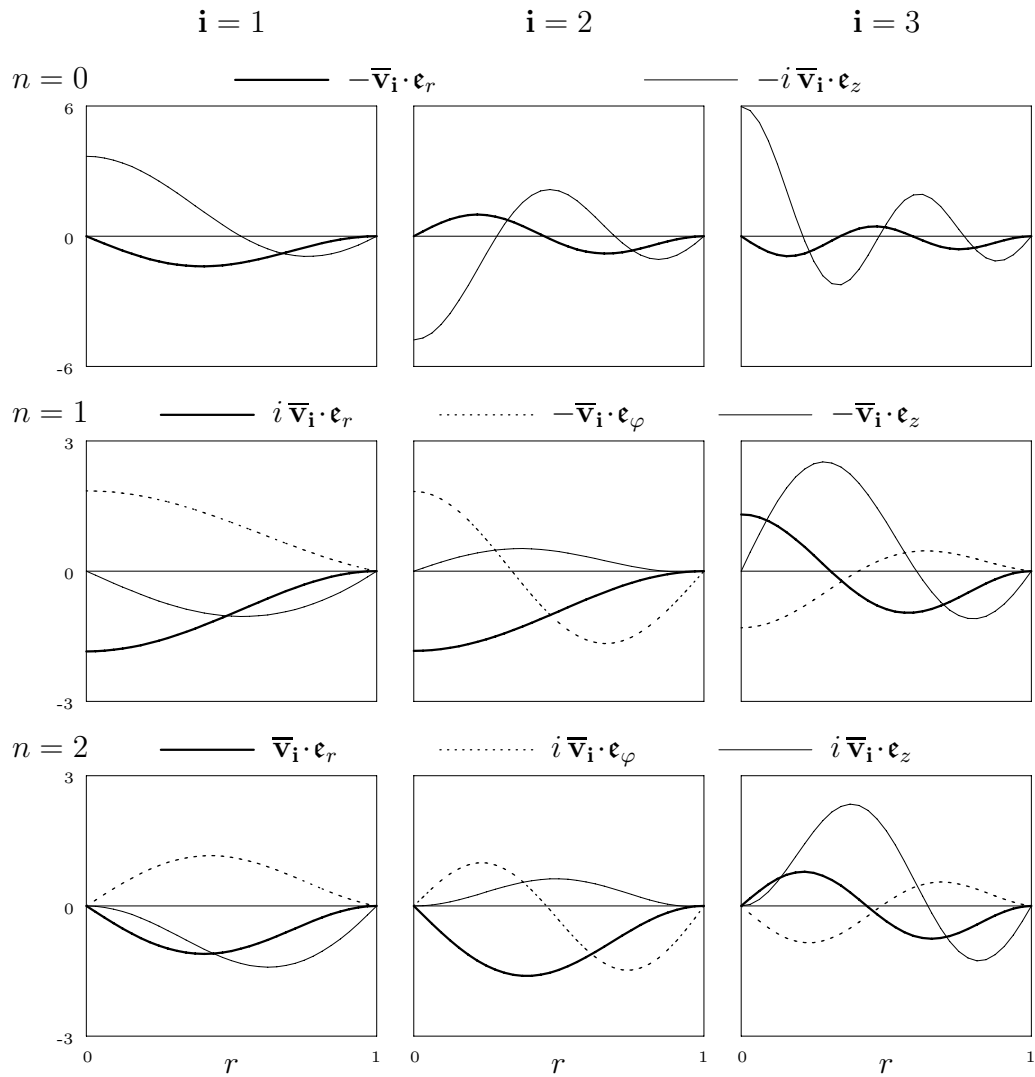


Abbildung 3.1: Beispiele der ersten drei Ansatzfunktionen $\bar{\mathbf{v}}_i$ mit $k = 3$ und den Winkelzahlen $n = 0, 1, 2$. Die Funktionen sind gemäß $\int_0^1 \bar{\mathbf{v}}_i^* \cdot \bar{\mathbf{v}}_i r dr = 1$ skaliert.

Setzen wir den Ansatz (3.21) in das System (2.1) bis (2.3), multiplizieren mit \mathbf{v}_k , und integrieren über den Strömungsraum, so bekommen wir das gewöhnliche lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{dg_i}{dt} = B_{ik}g_k \quad (3.34)$$

mit der quadratischen Matrix

$$B_{ik} = \langle (\mathbf{v}_0 \text{ grad})\mathbf{v}_i + (\mathbf{v}_i \text{ grad})\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_k \rangle + \lambda_i \delta_{ik}. \quad (3.35)$$

Das System hat die gleiche Dimension wie die Anzahl der Ansatzfunktionen N . Der Druck p ist in der Matrix B nicht enthalten, da der Term $\langle \text{grad } p, \mathbf{v}_k \rangle$ keinen Beitrag leistet.

Da die Grundströmung \mathbf{v}_0 zeitabhängig ist, ist auch die Matrix B nicht konstant. Im Rahmen der quasistatischen Asymptotik entkoppeln wir die Zeitabhängigkeit der Matrix B von jener der Zeitfunktionen g . Wir fassen die Zeit in B als zusätzlichen Parameter auf und erzwingen dadurch ein System mit konstanten Koeffizienten. Dieses hat exponentielle Lösungen, deren Aufklingrate σ und Kreisfrequenz ω als Eigenwerte $\sigma + i\omega$ der Matrix B gegeben sind.

Anhand von (3.35) erkennen wir die Verwandtschaft des Eigenwertproblems, welches wir zur Definition der Ansatzfunktionen benutzt haben, mit dem Eigenwertproblem der Störungsgleichungen. In zwei Grenzfällen sind die Systeme die gleichen:

1. Die Strömung ist ruhend ($\mathbf{v}_0 = 0$)
2. Die Störungen sind langwellig ($k \rightarrow 0$)

Falls einer der Fälle auftritt, sind die Eigenwerte von (3.35) identisch mit den Eigenwerten der Ansatzfunktionen λ_i , welche in B auf der Hauptdiagonalen stehen.

In diesen Fällen sind die Eigenwerte

$$\sigma_i = \lambda_i = -(1/R)(\beta_i^2 + k^2) \quad \omega_i = 0 \quad (3.36)$$

negativ reell, und alle Störungen klingen exponentiell aperiodisch ab.

Im allgemeinen muß für jede Kombination von R , α , n , k und dem Zeitparameter τ die vollbesetzte komplexe Matrix B aufgestellt werden. Aus ihr folgen die Eigenwerte $\sigma + i\omega$ durch eine numerische Eigenwertroutine. Die Berechnungen können unabhängig voneinander durchgeführt werden. Im

Gegensatz zum Schießverfahren sind keine Startwerte nötig. Es empfiehlt sich jedoch aus Zeitgründen nach einem bestimmten Schema zu verfahren, welches wir kurz erläutern wollen. Die folgende Übersicht skizziert die Verschachtelung der Schleifen über die Parameter, welche für die Berechnung der Eigenwerte verwandt wurde:

- R, α -Schleife (1)
 - Grundströmung (2)
 - n -Schleife (3)
 - k -Schleife (4)
 - Ansatzfunktionen (5)
 - τ -Schleife (6)
 - Grundströmung anpassen (7)
 - Berechnung von B (8)
 - Eigenwertproblem lösen (9)

Für jeden Punkt in der Reynoldszahl-Womersleyzahl-Ebene für R zwischen 0 und 3000 und α zwischen 0 und 20 iterieren wir in der äußersten Schleife (1).

Durch die Veränderung der Womersleyzahl ist es notwendig, die Grundströmung (1.6) neu zu berechnen (2). Hierbei speichern wir sowohl den Real- und den Imaginärteil der Ortsfunktion ab, ohne den Faktor $e^{i\tau}$. Zur Berechnung der Grundströmung benötigen wir Besselfunktionen mit komplexen Argumenten, welche von der Bibliothek **amos*** bereitgestellt werden.

Die Schleife über die Winkelzahl n läuft über die Werte 0 und 1 für symmetrische und antisymmetrische Störungen (3). Nachdem in (4) die Wellenzahlen variiert werden, müssen im nächsten Schritt die Ansatzfunktionen (3.26) berechnet werden (5), welche von n , k und R abhängen. Die benötigten reellen modifizierten Besselschen Funktionen I_n entnehmen wir der **cephes**-Bibliothek von *Moshier*.[†]

In der innersten Schleife läuft der Zeitparameter τ mit Werten zwischen 0 und der halben Periode π (6). Die Grundströmung, welche in (2) gespeichert wurde, wird nun an den Zeitparameter τ durch Multiplikation mit $e^{i\tau}$ und Projektion auf die reelle Achse angepaßt (7).

Im nächsten Schritt stellen wir die Matrix B auf (8). Die Integration zur Berechnung des Skalarproduktes (3.23) in (3.35) führen wir nur über die radiale Koordinate durch, da sich die Beiträge der Integrationen über die übrigen Raumdimensionen aufheben. Als Quadrationsverfahren benutzen wir die Simpson-Methode.

*Amos: *ACM Trans. Math. Soft.* **12** (1986)

[†]Steve Moshier: www.moshier.net, www.netlib.org/cephes

Hiermit haben wir alle Voraussetzungen erfüllt, um die Eigenwerte der komplexen Matrix B zu berechnen (9). Zu diesem Zweck bedienen wir uns der Routine `zgeev` aus der Bibliothek `LAPACK`.*

Es hat sich herausgestellt, daß wir für die Anzahl von Ansatzfunktionen $N = 80$ stabile Werte erhalten.

Im übernächsten Kapitel stellen wir die Berechnungsergebnisse detailliert dar. Vorher stellen wir mit der Floquet-Theorie eine allgemeinere Stabilitätstheorie für periodische Systeme vor, welche nicht auf die Annahme der Quasistatik angewiesen ist.

*Anderson: *Soc. Indust. Appl. Math.* (1999)

§ 4. Aussage der Floquet-Theorie

In diesem Kapitel erläutern wir die Stabilitätsanalyse nach der Floquet-Theorie. Diese erfordert im Gegensatz zur quasistatischen Theorie des vorangegangenen Kapitels keine zeitliche Skalenseparation.

Die Floquet-Theorie* gilt für Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten. Das Stabilitätsproblem der oszillierenden Rohrströmung führt auf periodische Koeffizienten in der Zeit und ist daher eine mögliche Anwendung der Floquet-Theorie. Aus der linearisierten Evolutionsgleichung (2.1) können wir mit (2.10) die Abhängigkeiten von φ und z separieren, die Abhängigkeit von r bleibt bestehen. Daher können wir die Floquet-Theorie nicht direkt anwenden, sondern müssen auf die Galerkin-Entwicklung des vorangegangenen Abschnittes zurückgreifen.

Das lineare System (3.34) erfüllt alle Voraussetzungen. Ohne die quasistatische Separation hat die Matrix B periodische Koeffizienten mit der Periodendauer

$$T = 2\pi R/\alpha^2. \quad (4.1)$$

Für das System (3.34) läßt sich eine Fundamentalmatrix konstruieren, indem wir die homogene Matrix-Differentialgleichung

$$\frac{dF}{dt} = B(t)F(t) \quad B(t+T) = B(t) \quad F(0) = I \quad (4.2)$$

mit der Einheitsmatrix I als Anfangsbedingung über eine Periodendauer integrieren. Die Integration wird numerisch durchgeführt. Den Endzustand nennen wir die *Floquetmatrix* $F(T)$.

Die Eigenwerte γ_i der Floquetmatrix $F(T)$ spielen bei der Stabilitätsbetrachtung die entscheidende Rolle. Falls alle Eigenwerte betragsmäßig kleiner eins sind, dann ist die Grundströmung (1.6) *asymptotisch stabil*. Im Um-

*Floquet: *Ann. Sci. É. Norm. Sup.* **12** (1883)
Nayfeh, Mook: (1979)

kehrschluß ist die Grundströmung *asymptotisch instabil*, falls mindestens einer der Eigenwerte betragsmäßig größer eins ist.

$$|\gamma_i| \begin{cases} < 1 & \text{für alle } i : & \text{stabil} \\ > 1 & \text{für mindestens ein } i : & \text{instabil} \end{cases} \quad (4.3)$$

Nach dem Floquetschen Satz gibt es eine Wahl von Fundamentallösungen, die sich als Produkt aus einer Exponentialfunktion und einer periodischen Funktion darstellen lassen. Asymptotische Instabilität bedeutet, daß eine dieser Exponentialfunktionen ansteigt, und damit die Amplitude der Lösung nach langer Zeit gegen unendlich strebt.

Yang und Yih* wenden die Floquet-Theorie erstmals auf das Stabilitätsproblem der oszillierenden Rohrströmung an. Statt der Diskretisierung nach der Galerkin-Entwicklung benutzen sie eine Diskretisierung nach der Methode der finiten Elemente. In ihrer Arbeit untersuchen sie nur symmetrische Störungen. Für diese werden keine instabilen Lösungen gefunden.

Diese Aussage können wir auch für antimetrische Störungen bestätigen. Es konnte für keine Parameterkombination eine Instabilität im Sinne der Floquetschen Theorie nachgewiesen werden. Wir betrachten daher die oszillierende Rohrströmung als asymptotisch stabil. Diese Stabilität bezieht sich auf das Langzeitverhalten der Störungen über eine Dauer, welche mehrere Perioden umfaßt.

Es ist dennoch möglich, daß Störungen während einer Periode wesentlich verstärkt werden können, obwohl sie asymptotisch stabil sind. Um diese kurzzeitigen Verstärkungen zu quantifizieren, empfiehlt sich die quastistische Theorie.

In Experimenten, auf welche wir in einem späteren Kapitel eingehen, zeigt es sich, daß unter bestimmten Parameterkombinationen ein turbulentes Strömungsbild zu verzeichnen ist, welches jedoch nie über eine komplette Periodendauer Bestand hat. In dieser Hinsicht stimmen die Stabilitätsergebnisse nach der Floquetschen Theorie mit den Experimenten überein.

*Yang, Yih: *J. Fluid Mech.* **82** (1977)

§ 5. Berechnungen

In diesem Kapitel stellen wir die Berechnungsergebnisse der Parameterstudien zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der oszillierenden Rohrströmung zusammen. Hierzu wurden Rechnungen beruhend auf den folgenden Theorien durchgeführt:

- Floquet-Theorie
- Quasistatische Theorie
 - Schießverfahren
 - Galerkin-Entwicklung
- Anfangswertproblem

Die Berechnungen zur Galerkin-Entwicklung nehmen hiervon den Hauptteil ein. Rechnungen zur Floquet-Theorie wurden nur stichpunktartig durchgeführt, um bereits bestehende Arbeiten zu bestätigen. Das Schießverfahren dient dazu, die Ergebnisse nach der Galerkin-Entwicklung zu kontrollieren. Außerdem wurde das System (3.34), welches aus der Diskretisierung mit der Galerkinschen Methode resultiert, ohne die Einschränkungen der quasistatischen Annahme als Anfangswertproblem integriert. Dies soll helfen, Aufschluß über die Aussagekraft der quasistatischen Theorie zu erhalten.

Der untersuchte Parameterbereich der R - α -Ebene umfaßt alle Kombinationen von Womersleyschen Zahlen zwischen 0 und 20 mit Reynoldsschen Zahlen zwischen 0 und 3000. Der Womersleysche Parameter deckt den Bereich langsamer Oszillationen von der stationären Grenze bis zu hochfrequenten Oszillationen mit ausgeprägtem Grenzschichtcharakter ab. Das Intervall der Reynoldsschen Zahl stößt bis in einen Bereich vor, in dem eine lineare Theorie ihre Zulässigkeit verliert. Es ist bekannt, daß die stationäre Rohrströmung für Reynoldssche Zahlen größer 2000 Instabilitätsphänomene aufweist, welche nicht mit einer linearen Theorie erklärt werden können. Daher erwarten wir auch für eine oszillierende Strömung—zumindest zu Zeiten maximalen Flusses und kleiner Womersleyscher Zahlen—einen entsprechenden Instabilitätsmechanismus, der in dieser einfachen Theorie nicht

mit einbegriffen ist. Es erscheint deshalb nicht sinnvoll, lineare Untersuchungen mit größeren Reynoldsschen Zahlen durchzuführen.

Die Untersuchungen fußend auf der Floquetschen Theorie haben ergeben, daß sich die oszillierende Rohrströmung als *asymptotisch stabil* gemäß des Kriteriums (4.3) erweist. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den in der Einleitung erwähnten Untersuchungen von *Yang und Yih* sowie *Fedele, Hitt und Prabhu*.

Trotz der asymptotischen Stabilität reagiert die Strömung für bestimmte Parameterkombinationen quasistatisch instabil, jedoch nur über einen kurzen Zeitraum während der Schwingungsperiode. Diese Instabilitäten treten zu Zeitpunkten der Flußumkehr auf und werden nach der linearen Theorie zu Zeiten des maximalen Flusses wieder stabilisiert. Der Kern der vorliegenden Arbeit liegt darin, diese Phänomene zu ergründen. Hierfür benutzen wir die Methoden der quasistatischen Theorie.

Es wurden beide Verfahren der quasistatischen Stabilitätstheorie implementiert und Rechnungen durchgeführt. Im Falle des Schießverfahrens wurden nur symmetrische Störungen untersucht. In den Bereichen, in denen das Schießverfahren verlässliche Ergebnisse liefert, stimmen diese mit den Ergebnissen der Galerkin-Entwicklung überein. Dies ist eine beruhigende Ausgangssituation, da hiermit Fehler in der Herleitung und Implementierung der Gleichungen ausgeschlossen werden können. Im Vergleich zwischen dem Schießverfahren und der Galerkin-Methode erweist sich letztere als vorteilhafter. Das Schießverfahren ermöglicht prinzipiell eine genauere Berechnung der Eigenwerte. Der Unterschied ist jedoch bei einer ausreichenden Anzahl N an Ansatzfunktionen vernachlässigbar.

Für jede Winkelzahl n müssen für das Schießverfahren eigene Gleichungen hergeleitet werden, deren Zielbedingung für steigende Winkelzahlen schlechter konditioniert ist. Für die Galerkin-Methode ist dies nicht nötig. In ihren Ansatzfunktionen ist die Winkelzahl ein Parameter. Dies ist ein bedeutender Vorteil der Methode für alle Winkelzahlen $n > 0$.

Die Galerkin-Methode kann Rechnungen für beliebige Wellenzahlen k in einem Schritt durchführen. Das ist ein Vorteil gegenüber dem Schießverfahren, welches Lösungen zu einer Wellenzahl k sequentiell mit dem Startwert $k = 0$ berechnen muß. Außerdem findet man mit der Galerkin-Methode nicht nur den größten Eigenwert, sondern eine Näherung der ersten N Eigenwerte auf einmal.

Ein großer Nachteil des Schießverfahrens ist es, daß das Einflußgebiet der Zielbedingung (3.17) des größten Eigenwertes mit steigenden Wellenzahlen k

und Womersleyschen Zahlen α enger wird und schließlich vom Optimierungsverfahren nicht mehr als Nullstelle erkannt wird. Bei der Galerkin-Methode kann es zu diesem Fehler nicht kommen.

Methodisch unterscheiden sich die Verfahren in den benötigten Algorithmen. Das Schießverfahren erfordert einen Integrations- und einen Optimierungsalgorithmus, die Galerkin-Methode hingegen eine Quadratur, einen komplexen Eigenwertlöser und eine Implementierung der reellen Versionen der Besselfunktionen erster Art J_n und der modifizierten Besselfunktionen I_n .

Die Abbildungen 5.2 bis 5.8 zeigen die Ergebnisse der quasistatischen Berechnungen nach der Galerkin-Methode.

Die Ergebnisse sind als Kontourlinien über der R - α -Ebene aufgetragen. Die Eigenwerte $\sigma + i\omega$ werden in dieser Ebene auf ~ 5000 Stützstellen berechnet. Die linke Spalte der Abbildungen 5.3 bis 5.8 umfaßt symmetrische Störungen ($n = 0$), die rechte Spalte antisymmetrische ($n = 1$). Nicht direkt ersichtlich sind aus dem Parameterraum (3.8) die Wellenzahl k und der Zeitparameter τ .

Die Abbildungen sind wie folgt zu interpretieren:

Es werden in jedem Berechnungspunkt mit festen Werten für R , α und n die N Eigenwerte $\sigma_i + i\omega_i$ in Abhängigkeit von k und τ ermittelt. Von Interesse sind die Kombinationen, welche auf eine maximale Verstärkungsrate führen, also die maximale Aufklingrate

$$\sigma = \max_{k, \tau, i} \sigma_i, \quad (5.1)$$

die zum entsprechenden Eigenwert zugehörige Kreisfrequenz ω , sowie die Wellenzahl k und der Zeitparameter τ , unter welchen die Aufklingrate maximal wird. Diese Größen sind den Abbildungen 5.3 bis 5.8 aufgetragen.

In der Maximierung (5.1) laufen die Wellenzahlen k in 40 Schritten zwischen 0 und 10, der Zeitparameter in 120 Schritten über eine halbe Periode (0 bis π). Da die Strömung periodisch ist, genügen die Eigenwerte der Periodizitätsbedingung

$$\sigma(\tau + \pi) = \sigma(\tau) \quad \omega(\tau + \pi) = -\omega(\tau). \quad (5.2)$$

In zwei weiteren Schritten wird die Diskretisierung von k und τ um die jeweils aktuell zu maximaler Verstärkung führenden Werte verfeinert. Hiermit erreichen wir eine Schrittweite in der Wellenzahl von $1/100$ und im Zeitparameter von $1/3000$. Alle Rechnungen wurden mit 80 Ansatzfunktionen durchgeführt.

Abbildung 5.1 zeigt schematisch den Verlauf des Eigenwertes $\sigma + i\omega$ mit der größten Verstärkung in Abhängigkeit der Wellenzahl k und des Zeitparameters τ . Die qualitative Darstellung ist charakteristisch für die auftreten-

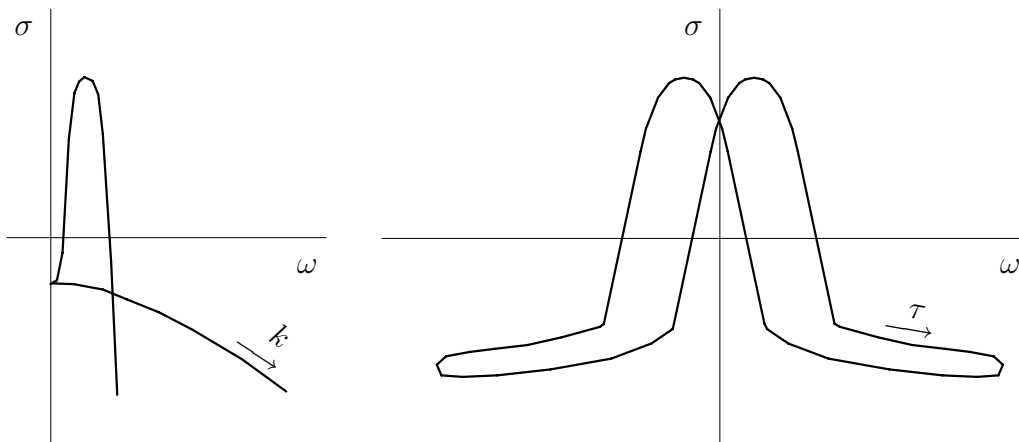


Abbildung 5.1: Eigenwerte in Abhängigkeit der Wellenzahl k und der Zeit τ . Links: Beide Kurven gehören zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Hierbei ist k der Kurvenparameter. Alle Kurven gleicher Winkelzahl haben den gleichen Startwert für $k \rightarrow 0$. Rechts: Der zeitliche Verlauf eines Eigenwertes während einer Periode bei konstanter Wellenzahl k . Die Symmetrie bezüglich der σ -Achse folgt aus der Symmetrie der Hin- und Rückströmung während einer Periode.

den Eigenwertverteilungen. Langwellige Störungen haben nach Tabelle 3.1 gedämpfte Eigenwerte $\sigma < 0$ ohne schwingenden Anteil $\omega = 0$. Daher starten die Kurven des linken Bildes an einem Punkt mit negativer Aufklingrate. Durch Erhöhung der Wellenzahl fällt die Eigenwertkurve in den meisten Fällen ab, das bedeutet Störungen mit kürzeren Wellenlängen werden stärker gedämpft. In manchen Fällen steigt die Kurve an bevor sie für kurzwellige Störungen abfällt. Falls die Kurve die ω -Achse schneidet, ist die Strömung quasistatisch instabil. Der Maximalwert dieser Kurve liefert die maximale Verstärkung σ .

Das rechte Bild zeigt die zeitliche Variation des gleichen Eigenwertes bei jener Wellenzahl, welche im linken Bild zu einer maximalen Verstärkung führt. Charakteristisch am Verlauf der Eigenwerte ist, daß es nur für einen engen Bereich von Wellenzahlen zu einem Ansteigen in den instabilen Bereich kommt. Im linken Bild ist eine solche Kurve dargestellt, die andere entspricht dem Normalfall eines stabilen Verhaltens. Die Eigenwerte mit diesen Wellenzahlen sind außerdem nur zeitlich begrenzt instabil, wie aus dem rechten Bild ersichtlich ist. Für keine Parameterkombination existieren Störungen, welche während des gesamten Zyklus instabil sind.

Kurven neutraler Stabilität Abbildung 5.2 zeigt die Kurven neutraler Stabilität in der R - α -Ebene für verschiedene Winkelzahlen n . Dies sind die Grenzkurven mit $\sigma = 0$ nach (5.1), welche die Bereiche negativer und positiver maximaler Anfachungsraten σ separieren. Unterhalb dieser Kurven ist die Strömung gegenüber Störungen aller Wellenzahlen zu jedem Zeitpunkt quasistatisch stabil. Oberhalb der Kurven existiert eine Parameterkombination mit einer maximalen Verstärkung $\sigma > 0$.

Wir erkennen, daß antimetrische Störungen das größte Instabilitätsgebiet umfassen. Störungen mit größeren Winkelzahlen haben ein kleineres Instabilitätsgebiet. Daher beschränken wir die Berechnungen auf die wichtigen Winkelzahlen symmetrischer und antimetrischer Störungen $n = 0$ und $n = 1$.

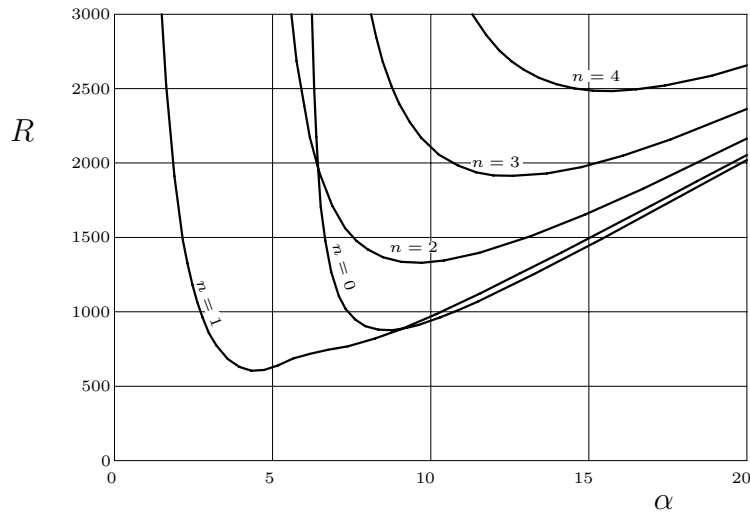


Abbildung 5.2: Kurven neutraler Stabilität für verschiedene Werte der Winkelzahl n . Unterhalb der Kurven herrscht zu jedem Zeitpunkt vollständige Stabilität für jede Wellenzahl der Störungen. Symmetrische und antimetrische Störungen dominieren das Instabilitätsverhalten gegenüber Störungen höherer Winkelzahlen.

Maximale Anfachungsraten Die maximalen Anfachungsraten und die zugehörigen Frequenzen symmetrischer und antimetrischer Störungen zeigen die Abbildungen 5.3 und 5.4 in verschiedenen Zeitskalen. Da sich die dimensionslosen Zeitvariablen auf die konvektive Zeitskala L/V beziehen, können wir Aufklingraten und Frequenzen in der diffusiven Zeitskala L^2/ν darstellen, indem wir sie mit der Reynoldsschen Zahl multiplizieren. Entsprechend erhalten wir die Größen in der Einheit der Grenzschichtzeit δ/V durch Divi-

sion mit α .

Am aussagekräftigsten ist der Bezug der Zeitkonstante auf die Oszillationszeit $1/\Omega$. Dies gelingt, indem wir die Anfachungsrate σ mit R/α^2 multiplizieren. Das untere Bild der Abbildung 5.4 zeigt die Aufklingrate in diesem Bezug. Da die maximale Verstärkung nur zu einem kurzen Zeitpunkt auftritt, können wir mit dieser Darstellung abschätzen, um welchen Faktor Störungen während dieser Zeit verstärkt werden. Wenn wir annehmen, die Verstärkung sei während eines Achtels der Periode konstant dem maximalen Wert, dann wächst eine Störung während des Zeitintervalls $\Delta\tau$ um den Faktor $e^{\Delta\tau R\sigma/\alpha^2}$. In Zahlenwerten ergeben sich maximale Verstärkungsfaktoren von 2.2, 4.8, 10.5 und 23 für die Kurven der unteren Abbildung mit Werten von 1, 2, 3 und 4 während des Zeitintervalls $\Delta\tau = \pi/4$.

Wir erkennen an den Abbildungen, daß für steigende Reynoldssche Zahlen R die maximalen Anfachungsraten erwartungsgemäß steigen.

Für kleine Womersleysche Zahlen $\alpha < 2$ steigt die Grenzkurve der quasistatischen Instabilität in der R - α -Ebene stark an. Im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ entspricht die Theorie dem klassischen hydrodynamischen Problem der stationären Rohrströmung, welche nach der linearen Stabilitätstheorie keinen instabilen Bereich besitzt.

Im Hochfrequenzlimes für große Womersleysche Zahlen ab etwa $\alpha > 15$ haben die Eigenfunktionen mit maximaler Verstärkung Grenzschichtcharakter. Die Anfachungsrate hängt hierbei nur von der Grenzschicht-Reynoldszahl R/α ab.

Die Kontourlinien der maximalen Aufklingrate in der Oszillationszeitskala haben für Werte der Womersleyschen Zahl α von 8 für symmetrische und 4 für antimetrische Störungen ein Minimum. Das bedeutet, daß bei konstanter Reynoldsscher Zahl Störungen mit diesen Womersleyschen Zahlen am deutlichsten angefacht werden.

Wellenzahl Die Wellenzahl k , welche in (5.1) zu einer maximalen Anfachungsrate führt, ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Im oberen Bild erkennen wir den relevanten Bereich der Wellenzahlen, welche mit zunehmender Womersleyscher Zahl ansteigen. Im untersuchten Parameterbereich liegt er zwischen 1 und 7.

Wählen wir als Längenskala statt des Radius L die Grenzschichtdicke δ , dann erkennen wir, daß für große Womersleysche Zahlen $\alpha > 10$ die Wellenzahl weitgehend konstant ist. Die Wellenlänge, welche zu maximalen Verstärkungen führt, ist in diesem Fall proportional zur Grenzschichtdicke. Das untere Bild zeigt diesen Zusammenhang. Die Wellenzahl in der Längenskala der

Grenzschichtdicke k/α nimmt im Hochfrequenzlimes $\alpha \rightarrow \infty$ etwa den Wert $1/\sqrt{8}$ an. Damit hat die Wellenlänge einen Wert von ungefähr $4\sqrt{2}\pi\delta$.

Aktionsradius Den Grenzschichtcharakter der Störungen erkennen wir auch an der Verteilung der Eigenfunktionen. Die zu dem Eigenwert mit maximaler Anfachung gehörende Eigenfunktion des Systems (3.6) bezeichnen wir mit \mathbf{v}^* . Wir definieren den Aktionsradius ϱ als „Schwerpunkt“ ihres Betrages

$$\varrho = \int_0^1 r |\mathbf{v}^*|^2 dr / \int_0^1 |\mathbf{v}^*|^2 dr. \quad (5.3)$$

In Abbildung 5.6 erkennen wir, daß sich der Aktionsradius mit steigenden Womersleyschen Zahlen dem Wert 1 nähert. Das bedeutet daß für diese Fälle wandnahe Störungsgeschwindigkeiten am meisten verstärkt werden.

Das untere Bild zeigt den Abstand dieses Schwerpunktes von der Wand, gemessen in Einheiten der Grenzschichtdicke. Die Umrechnung auf die Grenzschichtdicke erfolgt durch Multiplikation mit α . Der Wandabstand $(1 - \varrho)\alpha$ nimmt für große Womersleysche Zahlen Werte zwischen 3 und 4 ein.

Zeitparameter In der Definition der maximalen Aufklingrate (5.1) wird neben der Wellenzahl auch die Zeit τ variiert. Der Zeitparameter, der zu einer maximalen Verstärkung führt, wird in Abbildung 5.7 im oberen Bild dargestellt. Die stärksten Instabilitäten treten zu den Zeitpunkten der Flußumkehr auf, welche nach (1.2) bei ganzzahligen Vielfachen von $\tau = \pi$ stattfinden. Mit steigender Reynoldsscher Zahl, verschiebt sich der Zeitpunkt etwas vor die Zeit der Flußumkehr.

Während einer Periode hat keiner der Eigenwerte dauerhaft einen positiven Realteil $\sigma > 0$. Im rechten Bild der Abbildung 5.1 verfolgen wir den zeitlichen Verlauf des Eigenwertes mit der Wellenzahl, welche zur maximalen Verstärkung gehört. Wir definieren die Größe Δt , indem wir die Zeitdauer, in welcher der Eigenwert eine positive Aufklingrate besitzt, zur Periodendauer ins Verhältnis setzen. Die Größe ist im unteren Bild der Abbildung 5.7 aufgetragen. Im untersuchten Parameterbereich liegt ihr Wert unter 50%.

Quasistatikparameter Die Berechnungen der quasistatischen Theorie fußen auf der a priori getroffenen Annahme $\varepsilon \ll 1$ mit dem Parameter ε aus (3.4). Abbildung 5.8 zeigt den Kehrwert des Quasistatikparameters im Berechnungsgebiet. Für Womersleysche Zahlen zwischen 5 und 10 nimmt ε Werte um 1 ein. Daher sind die Annahmen, unter welchen die Berechnungen

durchgeführt werden, in diesem Bereich schlecht erfüllt.

Der Zeitskala der Störungen im Quasistatikparameter setzt sich nach (3.4) aus einer Kombination der Aufklingrate und der Frequenz zusammen. Dieses Maß wird mit der Zeitskala der Grundströmung ins Verhältnis gesetzt. Für große Womersleysche Zahlen $\alpha > 15$ dominiert der Frequenzanteil der Störungen. Die Quasistatikbedingung wird mit steigenden Womersleyschen Zahlen besser erfüllt.

Den Einfluß der Aufklingrate an der zeitlichen Änderung der Störungen haben wir bereits im unteren Bild der Abbildung 5.4 dargestellt. Die dort aufgetragene Größe (die Aufklingrate in der Oszillationszeitskala) entspricht dem Quasistatikparameter, falls wir die Frequenz der Störung ω nicht berücksichtigen. In den Bereichen der Maxima der Aufklingrate steigt auch die Größe $1/\varepsilon$.

Wir können hiermit drei Gebiete des Quasistatikparameters in der R - α -Ebene ausmachen. Im langsam oszillierenden Bereich des Instabilitätsgebietes steigt die Aufklingrate mit steigender Reynoldszahl, und sichert damit die Annahme der Quasistatik. Im hochfrequenten Bereich großer Womersleyscher Zahlen übertrifft die Frequenz der instabilsten Störungen die Oszillationsfrequenz der Grundströmung, was ebenfalls zu einer Verfestigung der Annahme führt. Die Aufklingrate der Störungen spielt in diesem Bereich eine untergeordnete Rolle. Im dazwischen liegenden Bereich ändern sich weder Amplitude noch Frequenz der instabilsten Störung schneller als die Grundströmung selbst. Daher ist die quasistatische Theorie in diesem Bereich nur bedingt aussagekräftig.

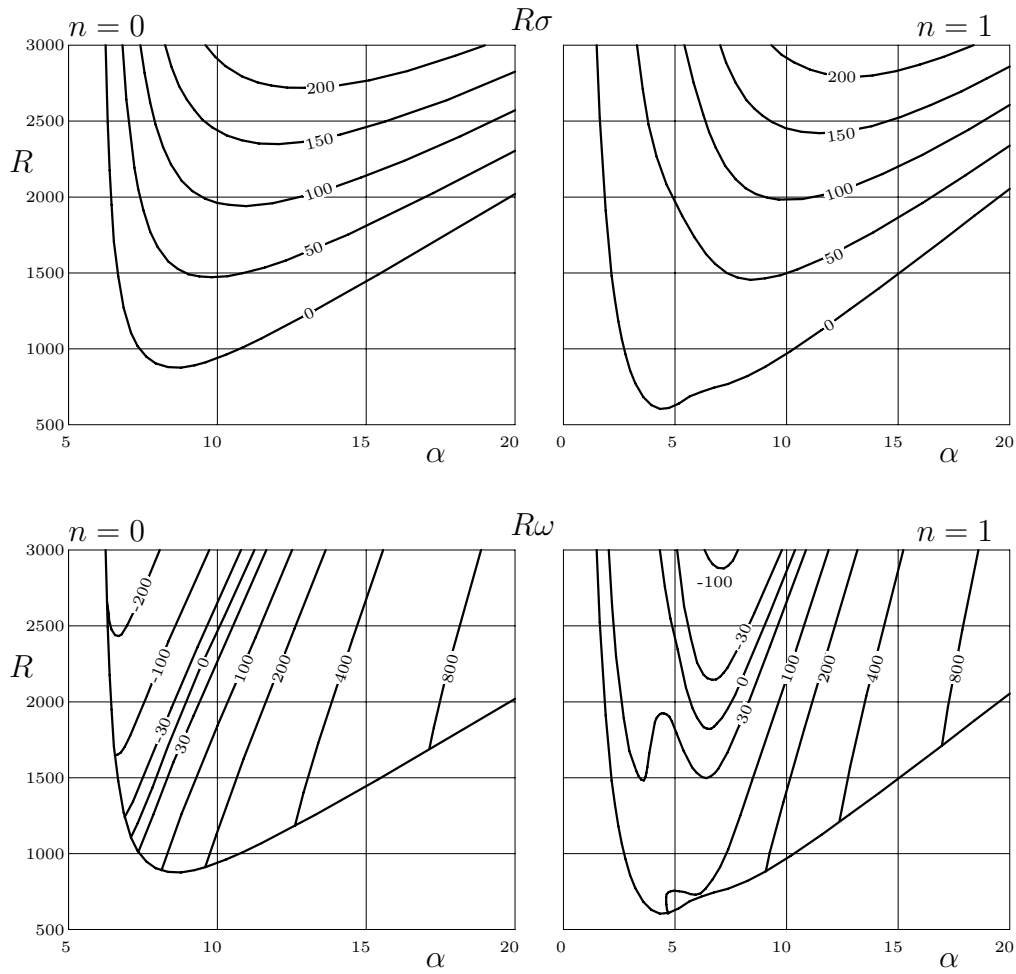


Abbildung 5.3: Maximaler Aufklingfaktor σ und zugehörige Frequenz ω in diffusiver Zeitskala.

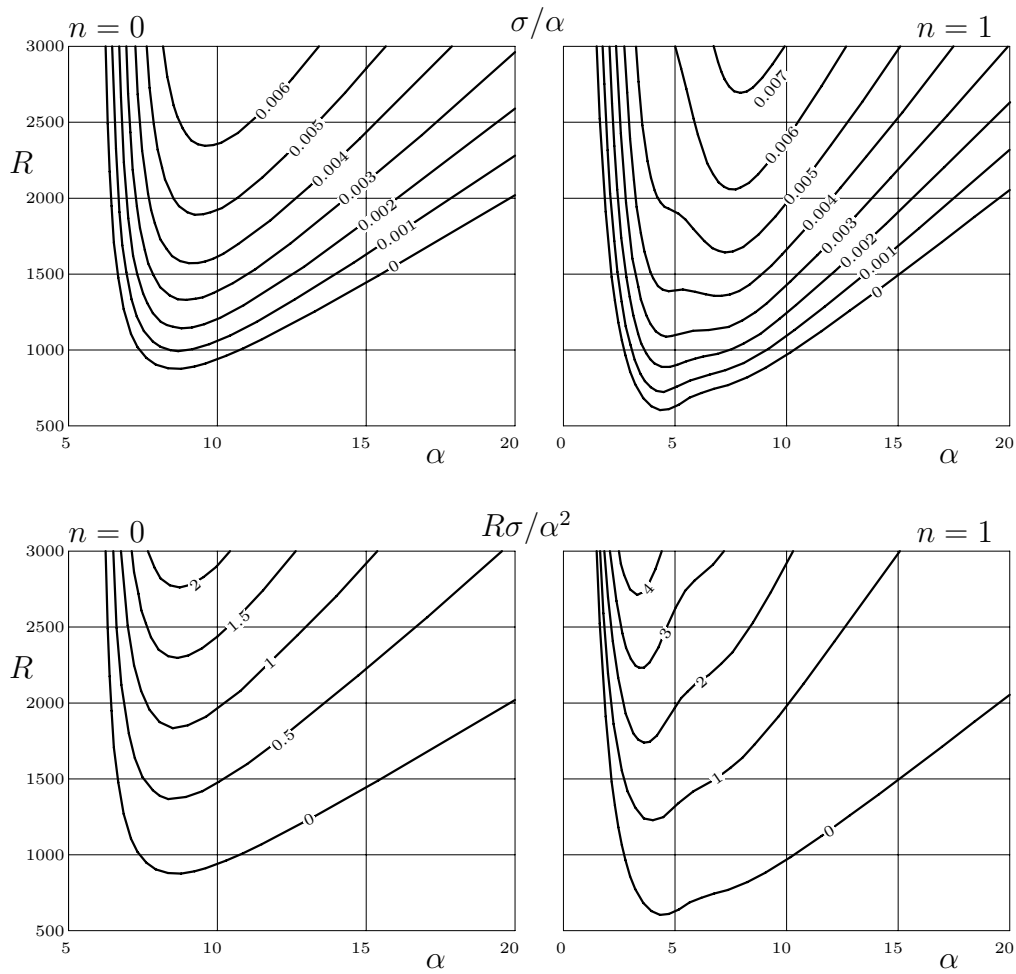


Abbildung 5.4: Aufklüpfaktor in Grenzschichtzeit δ/V (oben) und in der Oszillationszeit $1/\Omega$ (unten).

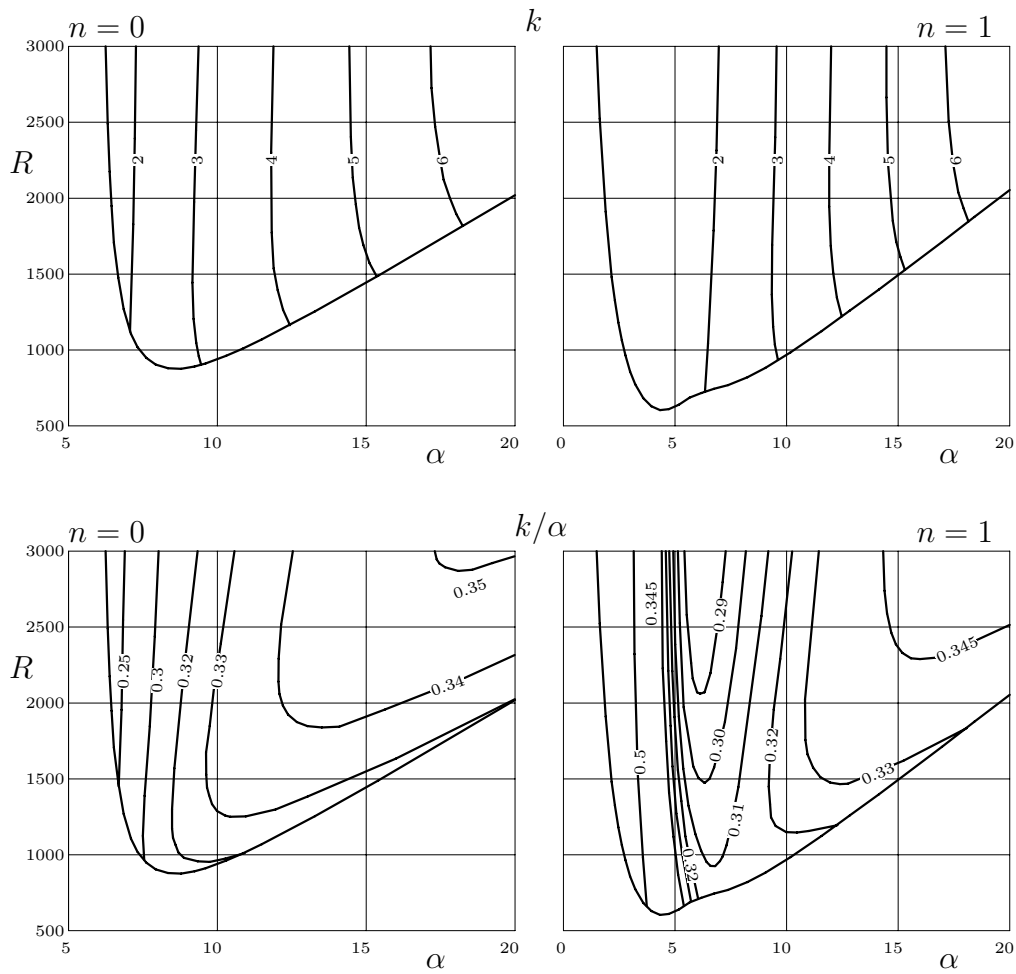


Abbildung 5.5: Wellenzahl k mit maximaler Verstärkung in Längeneinheiten des Radius (oben) und der Grenzschichtdicke (unten).

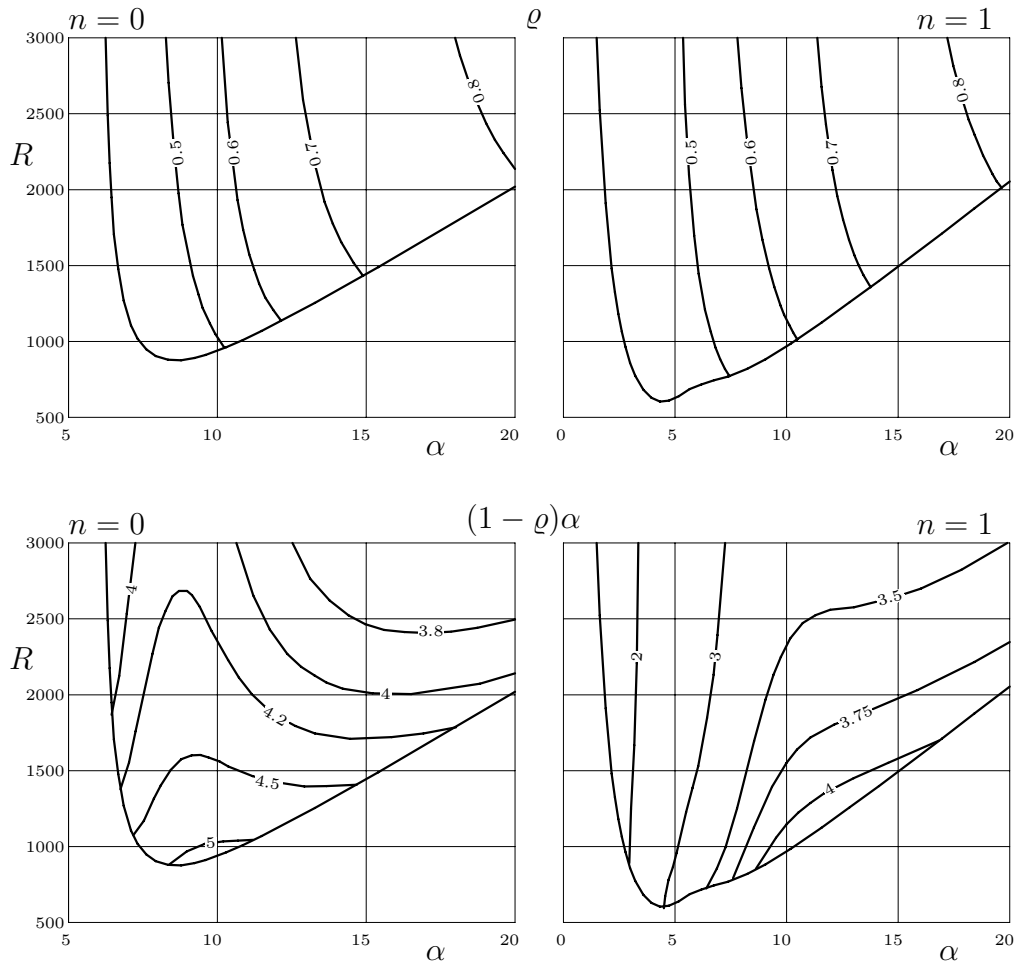


Abbildung 5.6: Aktionsradius ϱ (oben) und sein Wandabstand bezogen auf die Grenzschichtdicke $(1 - \varrho)\alpha$ des Eigenmodes mit maximaler Verstärkung \mathbf{v}^* (unten).

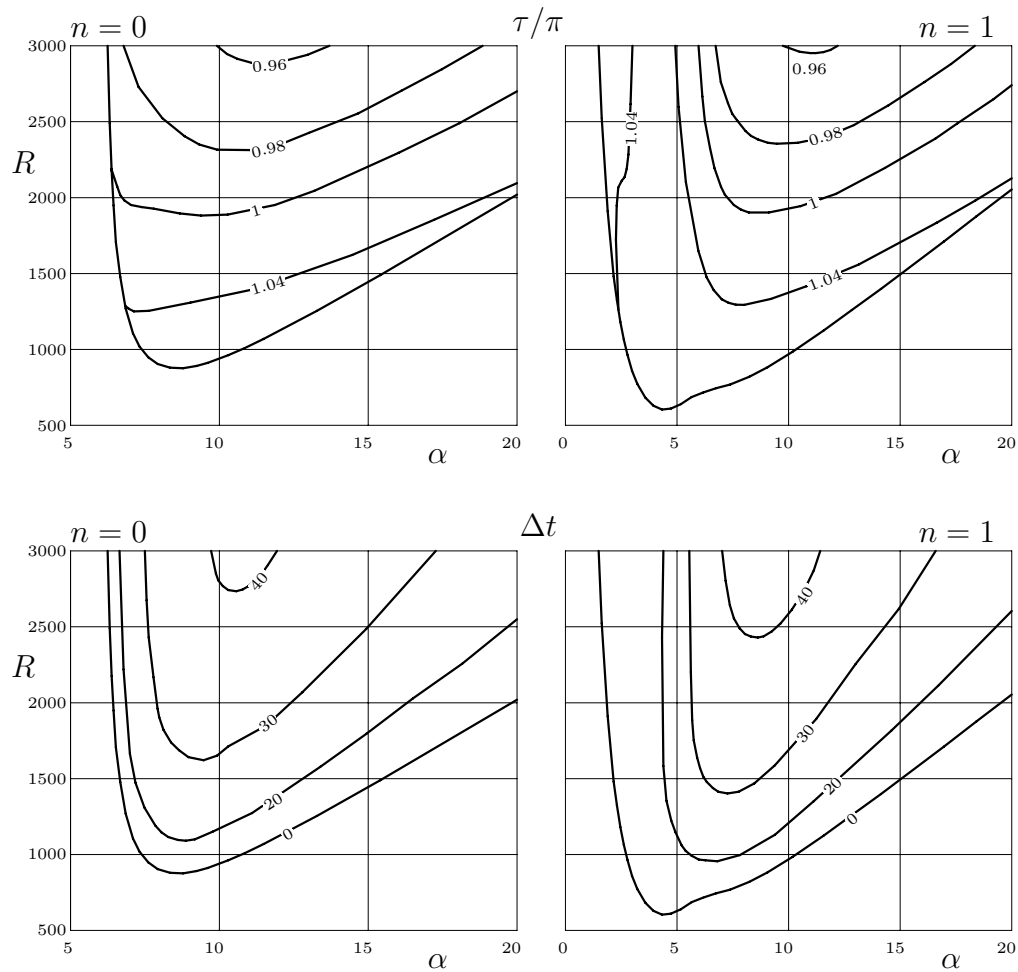


Abbildung 5.7: Zeitpunkt maximaler Verstärkung τ . Zeitdauer positiver Aufklingrate von Störungen der Wellenzahl mit maximaler Verstärkung bezogen auf die Periodendauer Δt in % des Zyklus.

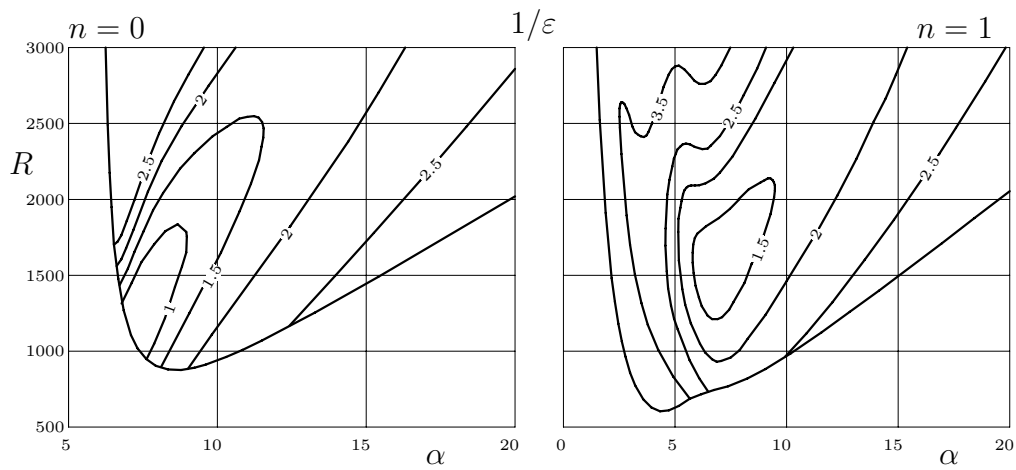


Abbildung 5.8: Überprüfung der Voraussetzung der Quasistatik: Für Parameter mit $\varepsilon \ll 1$, ist die quasistatische Theorie eine gute Approximation.

Hochfrequenzlimes Wir haben festgestellt, daß im Bereich großer Womersleyscher Zahlen die Strömung sowie die maximal verstärkten Störungen Grenzschichtcharakter besitzen. Störungen in einer engen Zone nahe der Wand werden am stärksten angefacht. Dies hat zur Folge, daß der Radius L nicht mehr zu den Einflußparametern der instabilsten Störungen zählt. Vielmehr hängen diese nun von der Grenzschichtdicke δ ab. Hiermit haben wir die Möglichkeit, die Zahl der unabhängigen Parameter zu reduzieren. Statt der beiden Parametern R und α , betrachten wir nunmehr die Grenzschicht-Reynoldszahl $R/\alpha = V\delta/\nu$.

Analog zu den vorgestellten Ergebnissen über der R - α -Ebene wurden Berechnungen in Abhängigkeit der Grenzschicht-Reynoldszahl durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.9 und 5.10 dargestellt.

In den Rechnungen nimmt die Womersleyzahl Werte zwischen 30 und 50 ein. In diesem Bereich nähern sich die Ergebnisse ihren Grenzwerten für hochfrequente Oszillationen an. Die Winkelzahl verliert im Grenzübergang ebenfalls an Einfluß. Die Ergebnisse für symmetrische und antisymmetrische Störungen nähern sich einander an.

Das obere Bild der Abbildung 5.9 zeigt die maximale Aufklingrate gemäß (5.1) bezogen auf die Oszillationsfrequenz. Sie steigt mit steigender Grenzschicht-Reynoldszahl annähernd linear an. Das mittlere Bild zeigt die gleiche Größe bezüglich der Zeiteinheit δ/V . Aus dem unteren Bild können wir ablesen, daß die Kreisfrequenz der maximal verstärkten Störungen mit steigender Reynoldszahl abnimmt.

Abbildung 5.10 zeigt im oberen Bild die Wellenzahl bezüglich der Grenzschichtdicke, welche in diesem Grenzwert wie bereits erwähnt einen konstanten Wert einnimmt. Das mittlere Bild zeigt den Zeitpunkt maximaler Verstärkung. Er verschiebt sich mit steigender Reynoldszahl kurz vor den Zeitpunkt der Flußumkehr.

Der Kehrwert des Quasistatistikparameters $1/\varepsilon$ ist im unteren Bild dargestellt. Für kleine Reynoldszahlen dominiert der Anteil welcher mit der Kreisfrequenz gebildet wird. Daher fällt der Wert bis $R/\alpha = 260$ leicht ab. Für größere Reynoldszahlen steigt er aufgrund der steigenden Aufklingrate wieder an.

Bei den Darstellungen sollte beachtet werden, daß die Reynoldssche Zahl sehr große Werte annimmt. Da wir in diesen Bereichen auch andere Instabilitätsmechanismen als den linearen Mechanismus vermuten, sollten die Ergebnisse für große R/α nicht überbewertet werden.

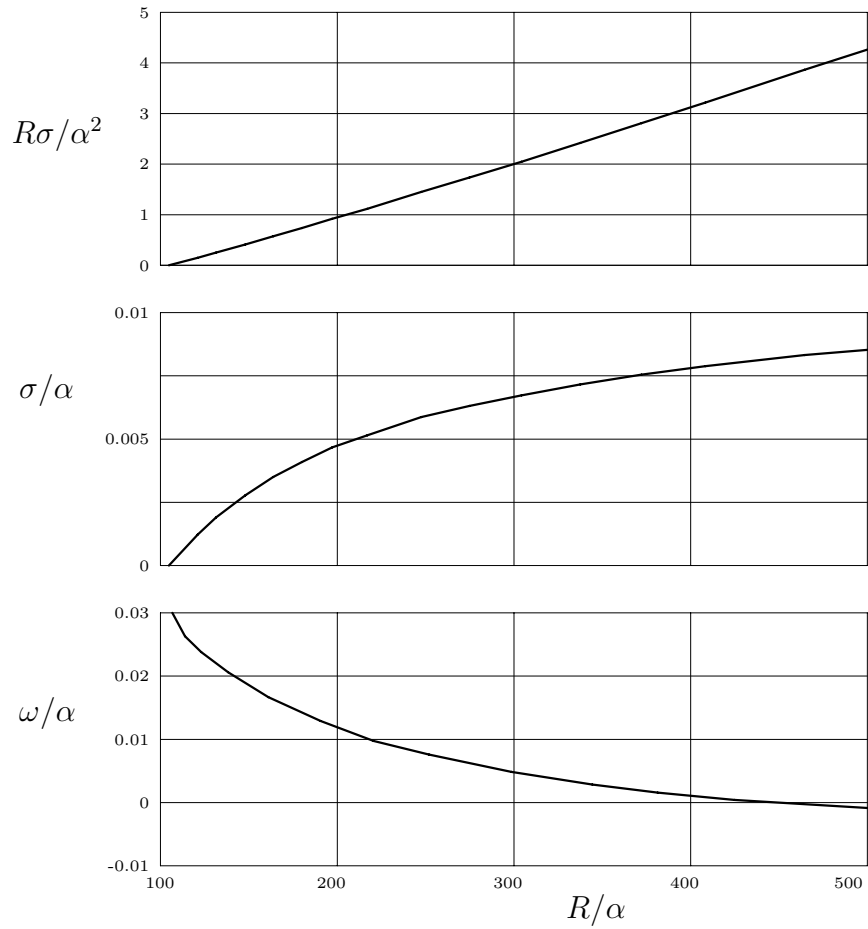


Abbildung 5.9: Hochfrequenzlimes $\alpha \rightarrow \infty$: Aufklingrate mit maximaler Verstärkung σ in der Oszillationszeit $1/\Omega$ und in der Grenzschichtzeit δ/V , sowie die dazugehörige Kreisfrequenz ω in Abhängigkeit der Grenzschicht-Reynoldszahl R/α .

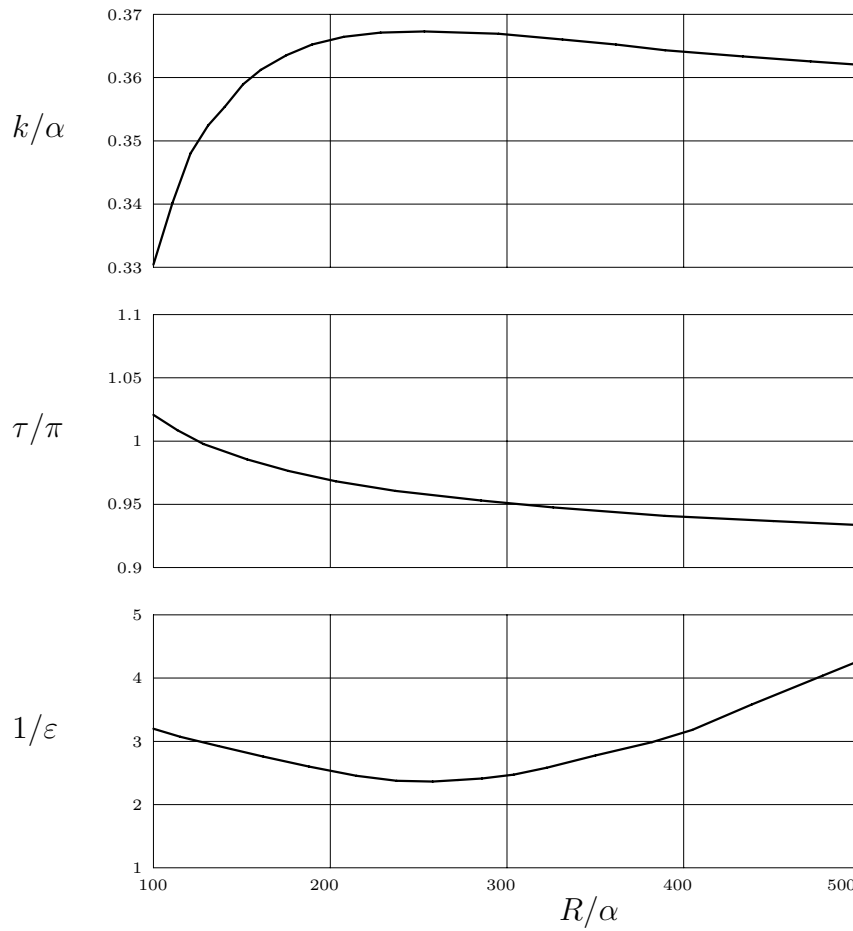


Abbildung 5.10: Hochfrequenzlimes $\alpha \rightarrow \infty$: Zur maximalen Verstärkung gehörende Wellenzahl k in der Längeneinheit der Grenzschichtdicke δ , der Zeitpunkt der Instabilität τ und der Quasistatikparameter $1/\varepsilon = R|\sigma + i\omega|/\alpha^2$ in Abhängigkeit der Grenzschicht-Reynoldszahl R/α .

Eigenfunktionen In den vorherigen Abschnitten haben wir Eigenschaften von Störungen diskutiert, welche unter bestimmten Parameterkombinationen zu einer Instabilität der Grundströmung führen. Hierbei sind die Aufklingrate und die Frequenz der Störungen in der Kombination $\sigma + i\omega$ Eigenwerte des Eigenwertproblems (3.6). Die zugehörigen Eigenfunktionen \mathbf{v}^* geben Aufschluß über die radiale Verteilung der Störungsgeschwindigkeitskomponenten, welche sich zeitlich mit der Aufklingrate σ und der Kreisfrequenz ω entwickeln. Nach (2.10) und (3.2) setzt sich eine Fourierkomponente der Störungsgeschwindigkeit aus

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z, t) = \mathbf{v}^*(r) e^{i(kz+n\varphi)} e^{(\sigma+i\omega)t} \quad (5.4)$$

zusammen. Eine allgemeine Störung wird nur dann mit der vorausgesagten maximalen Aufklingrate σ ansteigen, falls sich in ihrer spektralen Zusammensetzung ein Anteil der zugehörigen Eigenfunktion \mathbf{v}^* mit hinreichend großer Amplitude befindet.

Die Abbildungen 5.11 und 5.12 zeigen den physikalisch relevanten Realteil der Geschwindigkeitsverteilung

$$\Re \mathbf{v}(r, 0, z, 0) = \Re \{ \mathbf{v}^*(r) e^{ikz} \}, \quad (5.5)$$

welcher aus den Eigenfunktionen mit maximaler Aufklingrate abgeleitet ist. In der Darstellung sind die Geschwindigkeitskomponenten an verschiedenen Stellen über eine halbe Wellenlänge entlang der Rohrachse aufgetragen.

Es ist deutlich erkennbar, daß Störungen mit maximalen Aufklingraten für große Womersleysche Zahlen Grenzschichtcharakter besitzen. Bei Annäherung an die Rohrachse $r = 0$ verschwinden alle Geschwindigkeitskomponenten. Hierbei ist zu beachten, daß bei symmetrischen Störungen die radiale und bei antisymmetrischen Störungen die axiale Komponente aufgrund der Stetigkeitsbedingung für $r = 0$ ohnehin verschwinden müssen.

Bei kleineren Womersleyschen Zahlen spielt die Grenzschicht eine untergeordnete Rolle. Beispielsweise verstärkte eine Grundströmung mit $R = 2000$ und $\alpha = 10$ symmetrische Störungen hauptsächlich in der Rohrmitte.

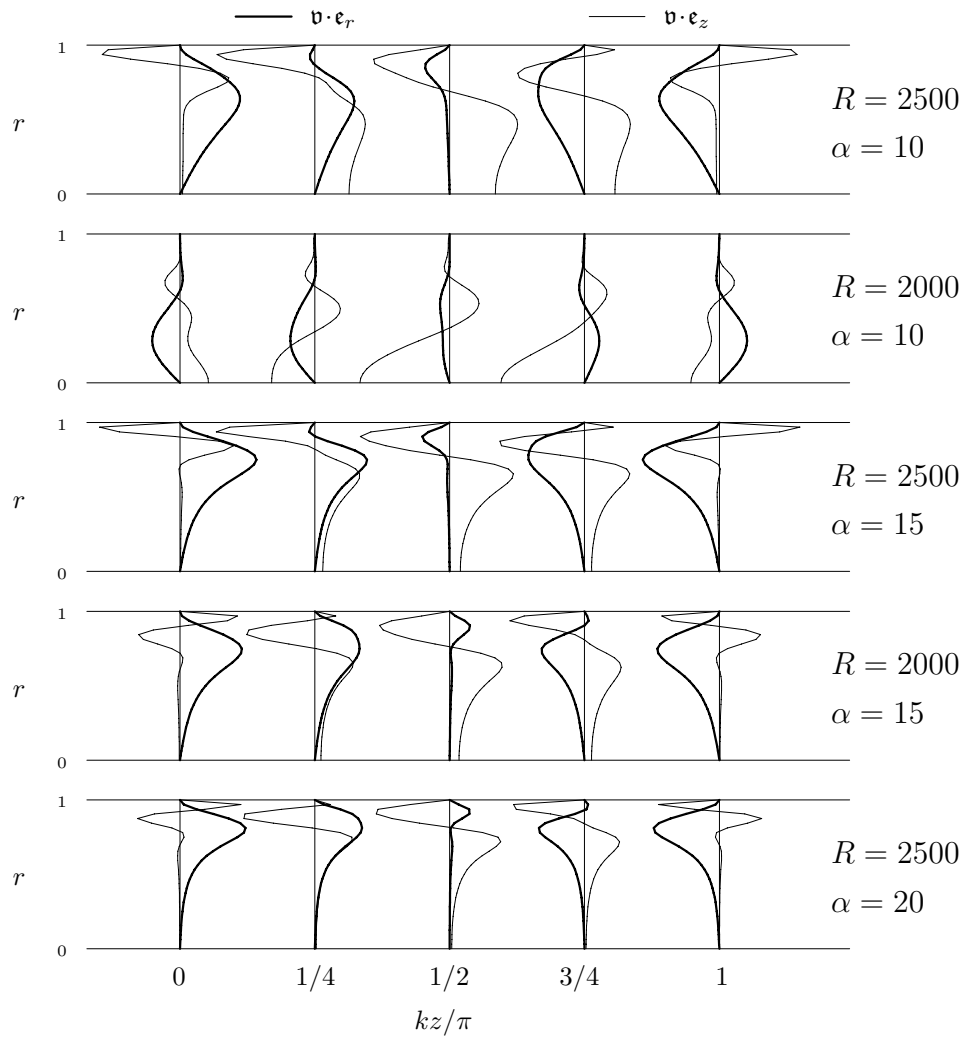


Abbildung 5.11: Eigenfunktionen symmetrischer Störungen ($n = 0$) zu Eigenwerten mit maximaler Verstärkung.

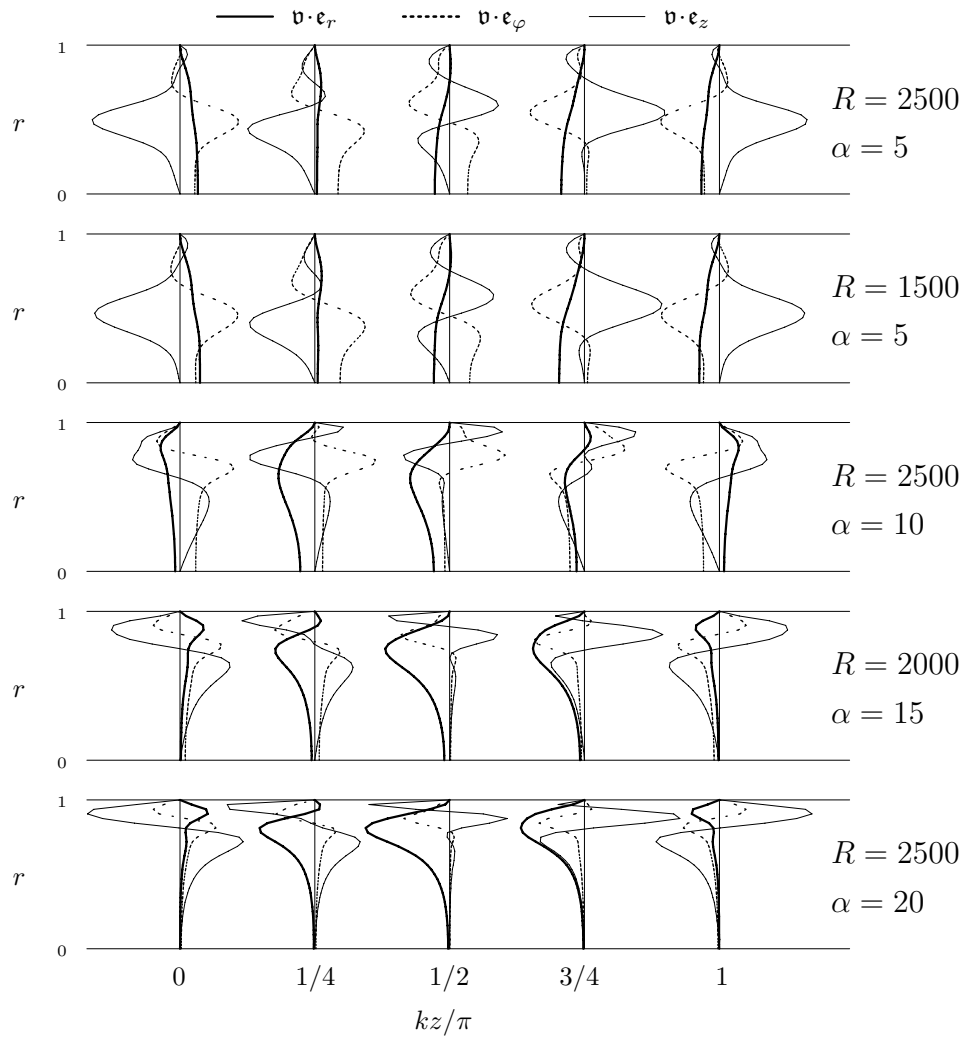


Abbildung 5.12: Eigenfunktionen antimetrischer Störungen ($n = 1$) zu Eigenwerten mit maximaler Verstärkung.

Anfangswertproblem Die Eigenwertanalyse der quasistatischen Methode soll eine Aussage über die zeitliche Entwicklung von Störungen liefern. Hierzu haben wir das Randwertproblem (2.1) bis (2.3) mit Hilfe der Galerkin-Methode diskretisiert und erhalten das zeitliche Differentialgleichungssystem (3.34). Unter der Annahme langsam veränderlicher Koeffizienten, besitzt das System kurzzeitig exponentielle Lösungen, welche durch die Eigenwerte der Systemmatrix charakterisiert sind.

Im Gegensatz hierzu können wir das System (3.34) als Anfangswertproblem auffassen und direkt numerisch integrieren, ohne die Zeitabhängigkeit der Systemmatrix einzuschränken. Das hat den Vorteil, daß wir statt quasistatischer Eigenwerte die tatsächliche zeitliche Entwicklung von Störungen in der linearen Näherung erhalten.

Allerdings kann mit jeder Integration nur eine einzelne Anfangsstörung untersucht werden. Eine Aussage über die Entwicklung der Gesamtheit der Störungen ist nicht möglich. Außerdem ist die Entscheidung ob eine Instabilität vorliegt komplizierter als das einfache Kriterium der quasistatischen Stabilität (3.3).

Im Hinblick auf den großen Aufwand, welcher mit der Untersuchung des Parameterraumes (3.8) verbunden ist, lösen wir das Anfangswertproblem nur für einige Parameterkombinationen. Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen die zeitliche Entwicklung symmetrischer und antisymmetrischer Störungen. Hierbei betrachten wir die skalare Größe

$$\zeta(\tau) = \int_0^1 |\bar{\mathbf{v}}(r, \tau)| r \, dr \quad (5.6)$$

als Maß für die Intensität der Störung. Als Wellenzahl k , wählen wir jene, welche nach der quasistatischen Theorie für die jeweilige Parameterkombination aus R, α und n eine maximale Verstärkung zur Folge hat.

Das Anfangswertproblem (3.34) lösen wir für neun zufällig gewählte Anfangsbedingungen. Die Integration wird jeweils nach einem Intervall von $\tau = \pi/4$ mit neuen Anfangsbedingungen gestartet. Das System hat eine Ordnung von $N = 30$. Die Komponenten der Anfangsbedingungen sind so gewählt, daß sie mit steigendem Index exponentiell abfallen

$$q_i = \mathbf{r} e^{-6i/N} \quad (5.7)$$

hierbei ist \mathbf{r} eine Zufallszahl im Intervall $[-1, 1]$.

Die Berechnungen bestätigen qualitativ die quasistatische Theorie, insbesondere für Parameterkombinationen mit großen Wachstumsraten in der Oszillationszeitskala. Für $R = 2500$ und $\alpha = 5$ wird die Intensität antisymmetrischer Störungen zu den Zeiten der Flußumkehr bei $\tau = 0$ und $\tau = \pi$ bis um

den Faktor 10 verstärkt. Nicht alle Anfangsbedingungen verhalten sich gleich. Dennoch können Bereiche mit vornehmlich anfachender Wirkung der Grundströmung ausgemacht werden. Hingegen gibt es in Bereichen mit kleinen quasistatischen Wachstumsraten, beispielsweise für symmetrische Störungen einer Strömung mit $R = 2500$ und $\alpha = 15$ keine erkennbare Verstärkung.

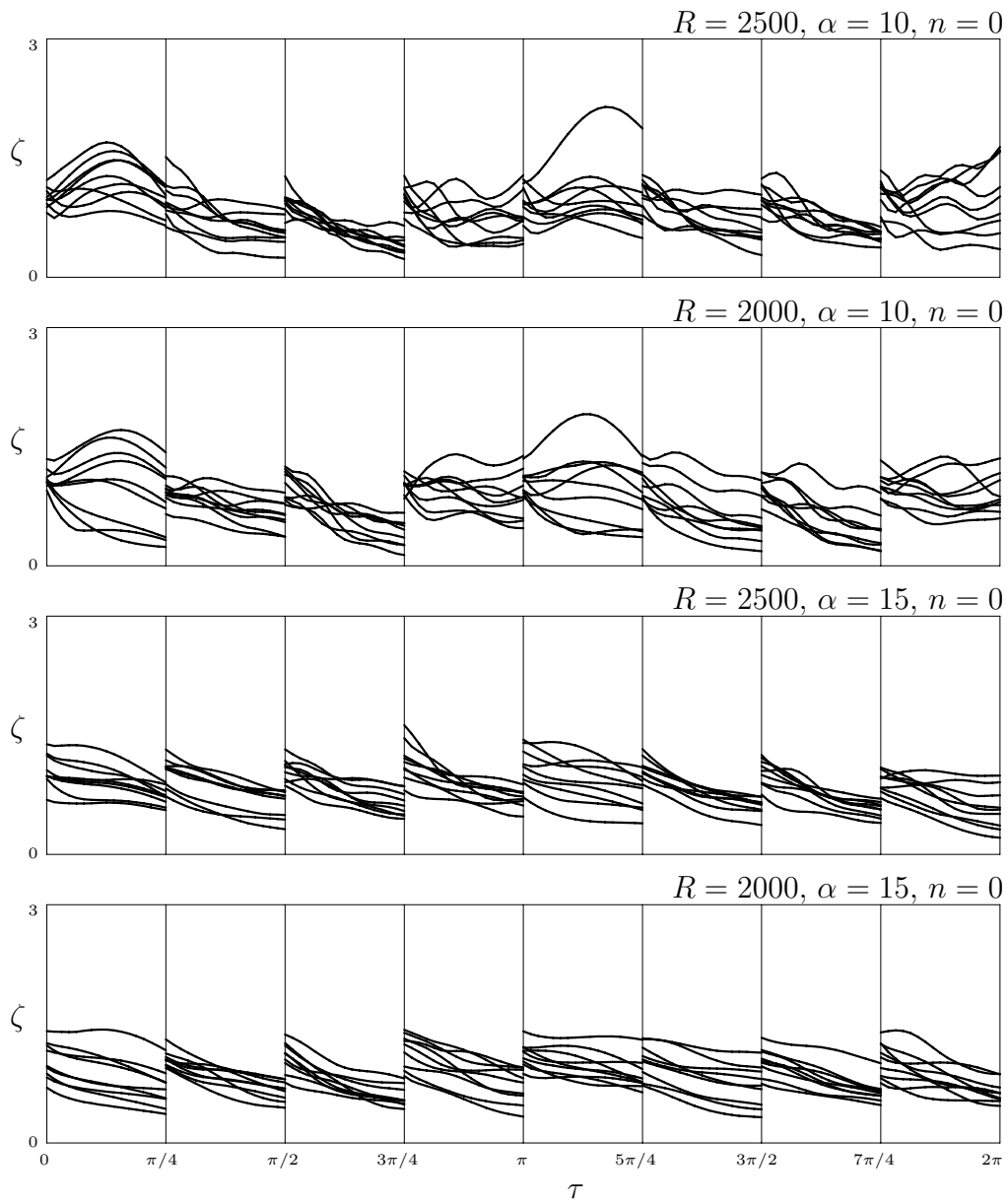


Abbildung 5.13: Die Entwicklung symmetrischer Störungen als Lösung des Anfangswertproblems.

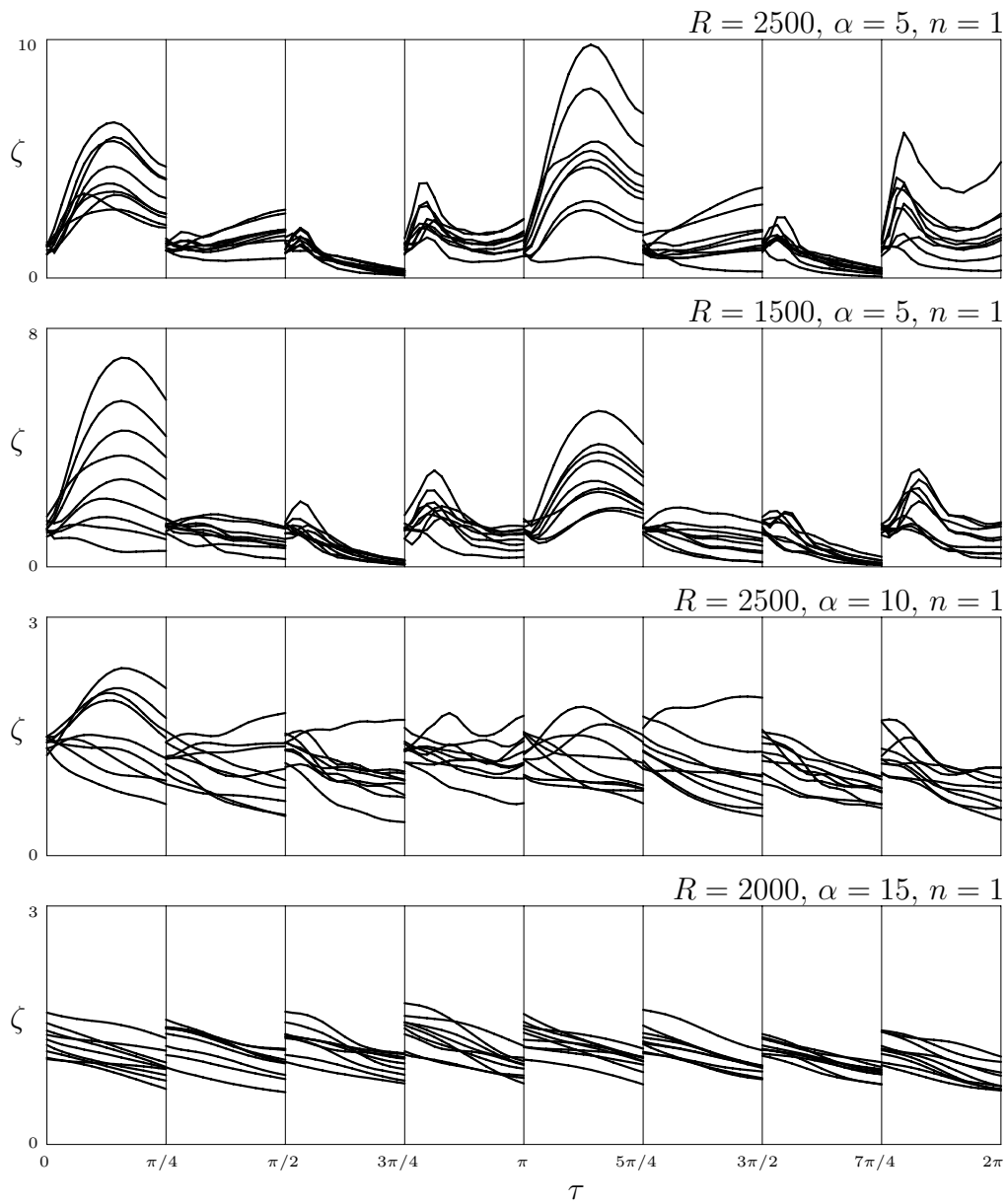


Abbildung 5.14: Antimetrische Störungen können zu bestimmten Zeiten verstärkt werden.

Abschließend läßt sich zusammenfassen, daß sich die oszillierende Rohrströmung im untersuchten Parameterbereich asymptotisch stabil gegenüber infinitesimalen Störungen verhält. Die Floquetsche Theorie ist hierbei die geeignete Methode um den Stabilitätsnachweis zu erbringen.

Trotz der asymptotischen Stabilität gibt es Bereiche, in denen Störungen kurzzeitig angefacht werden und zu einem zeitlich begrenzten turbulenten Erscheinungsbild führen können. Um diese zu erkennen, hat sich die quasistatische Theorie bewährt. Mit einem Verfahren basierend auf der Galerkin-Entwicklung wurden Parameterstudien durchgeführt. Die Parameter umfassen die beiden Kenngrößen der Grundströmung, Womersley- und Reynoldszahl, den Zeitparameter und die angulare und axiale Wellenzahl einer Störungskomponente. In umfangreichen numerischen Berechnungen wurden die Aufklingrate und die Kreisfrequenz der Störung als Eigenwerte und die radiale Verteilung als Eigenfunktion ermittelt.

Im klassischen Sinne folgt aus den Eigenwerten eines dynamischen Systems mit konstanten Koeffizienten ein asymptotischer Stabilitätsbegriff für lange Zeiten. Das exponentielle Wachstum ist unter Umständen erst nach gewisser Zeit erkennbar, schließlich setzt sich die Lösung aus einer Überlagerung von Schwingungen zusammen. Daher ist die Übertragung des Stabilitätsbegriffes auf instationäre Systeme heikel. Erstens sind die Koeffizienten des Systems durch die Instationarität nicht mehr konstant, wodurch die Lösung keine exponentielle Gestalt annimmt. Zweitens mag sich die Grundströmung—und damit die Eigenwerte—geändert haben, bevor eine Störung mit positiver Aufklingrate wesentlich angewachsen ist.

Die Aussagekraft der Eigenwerte als Stabilitätsbegriff für instationäre Systeme ist daher nur in abgeschwächter Form als quasistatische Stabilität gültig. Nützlich zur Beurteilung dieser Asymptotik ist der Quasistatistikparameter beziehungsweise die Aufklingrate in der Oszillationszeitskala.

Zur weiteren Interpretation der quasistatischen Eigenwerte, haben wir das System als Anfangswertproblem formuliert und numerisch integriert.

Aus beiden Berechnungen, sowohl der quasistatischen Eigenwertbestimmung als auch des Anfangswertproblems, ziehen wir folgende Schlüsse: Das quasistatische Instabilitätsgebiet läßt sich über der R - α -Ebene in drei Bereiche aufteilen. Diese sind in Abbildung 5.15 skizziert. In allen Bereichen gibt es einen Zeitpunkt mit positiver Aufklingrate im quasistatischen Sinne, dennoch unterscheiden sich die Gebiete bezüglich ihres Phänotypes.

In Bereich I gibt es wachsende Störungen. Die Aufklingraten in der Oszillationszeitskala sind groß genug, daß sie trotz veränderlicher Grundströmung um die Größenordnung 10^1 verstärkt werden können. Aus den Eigenfunktionen

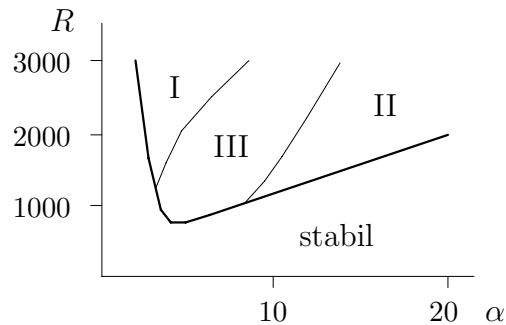


Abbildung 5.15: Gebiete der quasistatischen Instabilität (schematisch). I: Merkliche Verstärkung vornehmlich in der Rohrmitte. II: Schwache Instabilität der wandnahen Grenzschicht. III: Mischform ohne erkennbare Verstärkung.

geht hervor, daß hauptsächlich Störungen in der Rohrmitte verstärkt werden. Hingegen konzentriert sich die Wirksamkeit der Störungen für große Womersleysche Zahlen auf die wandnahen Grenzschicht. Diesen Bereich bezeichnen wir als Gebiet II. Die zugehörigen Aufklingraten sind allerdings nicht groß genug, daß die Instabilitäten sichtbar werden. Gleiches gilt für Bereich III. In diesem Mischgebiet wandeln sich die Eigenfunktionen der am stärksten angefachten Störungen mit nur mäßigen Verstärkungen von den zentralen Formen zur Grenzschichtform.

Die Interaktion von kleinen Störungen mit der Grundströmung, wie sie durch die lineare Theorie beschrieben wird, ist der zentrale Instabilitätsmechanismus. Dennoch reicht er nicht aus, den Zusammenbruch der laminaren Strömung zu beschreiben. Beispielsweise hat die stationäre Rohrströmung nach dieser Theorie keinen Bereich positiver Aufklingraten, obwohl wir im realen System eine Stabilitätsgrenze beobachten. Daher muß es noch andere Mechanismen geben, welche die Grundströmung beeinflussen können. Nichtlineare Effekte tragen zwar nichts zum Energiehaushalt der Störungen bei, können jedoch die Energie zwischen den Freiheitsgraden umverteilen. Außerdem können sie den Grundströmungszustand soweit verzerren, daß er eine instabilere Form einnimmt, die wiederum durch den linearen Mechanismus gestört werden kann. Bevor diese Effekte auftreten können, müssen die als klein angenommenen Störungen eine gewisse Größe erreichen. Eine Möglichkeit dazu bieten neben der behandelten linearen Interaktion transiente Verstärkungen durch nichtorthogonale Eigenfunktionen. Um diesen Effekt zu erläutern, geben wir im Anschluß ein Modellbeispiel. Die Eigenschaften der nichtlinearen und nichtorthogonalen Effekte sind we-

sentlich komplizierter zu analysieren, als jene der linearen Interaktion. Außerdem lassen sich nur spezielle Konfigurationen analysieren, welche nicht die Gesamtheit der Störungen widerspiegeln.

Wir können davon ausgehen, daß auch im vorliegenden Falle der oszillierenden Rohrströmung der lineare Instabilitätsmechanismus nicht alleine für das Einsetzen der turbulenten Strömung verantwortlich ist. Im Gegensatz zur stationären Strömung trägt er jedoch unmittelbar dazu bei.

Nichtorthogonalität Mit einem einfachen Modell wollen wir den Effekt transienter Verstärkung infolge nichtorthogonaler Eigenfunktionen demonstrieren.

Dazu betrachten wir ein lineares dynamisches System zweiter Ordnung mit dem Zustandsvektor $x(t) = (u, v)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (5.8)$$

Die Systemmatrix A habe Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ mit negativem Realteil

$$\Re\lambda_{1,2} < 0 \quad (5.9)$$

und nichtorthogonale Eigenvektoren

$$x_1 = (1, 0) \quad x_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (5.10)$$

Um den Effekt der nichtorthogonalen Eigenvektoren hervorzuheben soll der eingeschlossene Winkel φ klein sein $0 < \varphi \ll \pi/2$.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren korrespondieren mit der Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1) \cot \varphi \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems setzt sich linear aus den Basislösungen zusammen

$$x(t) = \alpha x_1 e^{\lambda_1 t} + \beta x_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.12)$$

Wählen wir als Anfangsbedingung einen Vektor, welcher orthogonal zur Vorzugsrichtung des Systems steht

$$x(0) = (0, 1), \quad (5.13)$$

dann lautet die Lösung

$$u(t) = (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \cot \varphi \quad (5.14)$$

$$v(t) = e^{\lambda_2 t}. \quad (5.15)$$

Da die Realteile der Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ negativ sind, nähern sich beide Komponenten für lange Zeiten exponentiell der Nulllösung. Trotzdem wächst die Komponente in Vorzugsrichtung des Systems u zwischenzeitlich stark, da der Faktor $\cot \varphi$ für kleine Winkel wie $1/\varphi$ singularär wird. Das hängt damit zusammen, daß die Faktoren α und β sehr groß sein müssen, um eine endliche Anfangskonfiguration $x(0)$ darzustellen, welche orthogonal zur Vorzugsrichtung des Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ kompensieren sich die Anteile nahezu gegenseitig. Wenn die Eigenwerte ungleich sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann klingen die Anteile im weiteren Verlauf unterschiedlich schnell ab, sodaß vorübergehend einer der beiden Anteile dominiert.

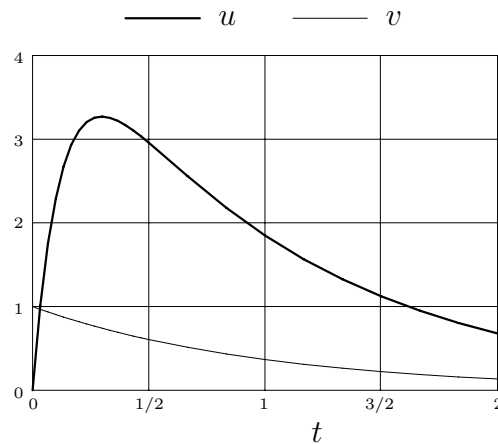


Abbildung 5.16: Wird ein gedämpftes System orthogonal zu seiner Vorzugsrichtung angeregt, so weicht es parallel zur Vorzugsrichtung aus, bevor es asymptotisch abklingt. Die Intensität der Verstärkung ist das Produkt aus dem Kotangens des eingeschlossenen Winkels der Eigenvektoren und der Differenz der Exponentiallösungen. In diesem Beispiel ist $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -1$ und $\varphi = \pi/16$.

§ 6. Vergleich mit Experimenten

Es wurden in der Vergangenheit außer Experimenten an der stationären Rohrströmung* auch einige Experimente an instationären Strömungen durchgeführt. Bei diesen unterscheiden wir transiente und oszillierende Strömungsvorgänge.

He und Jackson[†] untersuchen eine Rohrströmung, deren Fluß linear zwischen zwei konstanten Werten verändert wird. Das und Arakeri[‡] untersuchen die gleiche Konfiguration und betonen hierbei die instabilen Eigenschaften eines Geschwindigkeitsprofils mit Rückströmung, welches durch eine schnelle Abbremsung des Flusses hervorgeht.

Die oszillierenden Strömungen gliedern sich in solche mit einem überlagerten stationären Anteil[§] und jene, deren Fluß rein harmonisch oszilliert. Letztere lassen sich mit den Rechnungen dieser Arbeit vergleichen.

Hino, Sawamoto und Takasu[¶] sowie Omhi, Igushi, Kakehashi und Masuda^{||} untersuchen die Strömung mit der Hitzdrahtanemometrie. Im wesentlichen unterscheiden sie drei charakteristische Bereiche:

- Stabilität: Die Strömung ist während des gesamten Zyklus stabil.
- Transition: In der Beschleunigungsphase kommt es zu leichten Unregelmäßigkeiten im Strömungsbild.
- Turbulenz: In der Verzögerungsphase setzen sprunghaft turbulente Störungen ein, welche jedoch auch für hohe Reynoldszahlen nie über den gesamten Zyklus anhalten.

*Darbyshire, Mullin: *J. Fluid. Mech.* **289** (1995)

†He, Jackson: *J. Fluid. Mech.* **408** (2000)

‡Das, Arakeri: *J. Fluid. Mech.* **374** (1998)

§Lodahl, Sumer, Fredsoe: *J. Fluid. Mech.* **373** (1998)

Sarpkaya: *J. Basic Eng.* **Sep** (1966)

Shemer, Wygnanski, Kit: *J. Fluid. Mech.* **153** (1985)

¶Hino, Sawamoto, Takasu: *J. Fluid. Mech.* **75** (1976)

||Omhi, Iguchi, Kakehashi, Masuda: *Bull. JSME* **25** (1982)

Der Übergang vom schwach turbulenten zum stark turbulenten Bereich, findet laut den Untersuchungen bei $R/\alpha > 700$ statt. Dieser steht auch im Blickpunkt neuerer Untersuchungen.* In der vorliegenden Arbeit ist er jedoch nicht von Bedeutung. Wir beschränken uns auf den Übergang vom stabilen zum schwach turbulenten Bereich, welcher bei kleineren Grenzschicht-Reynoldszahlen stattfindet.

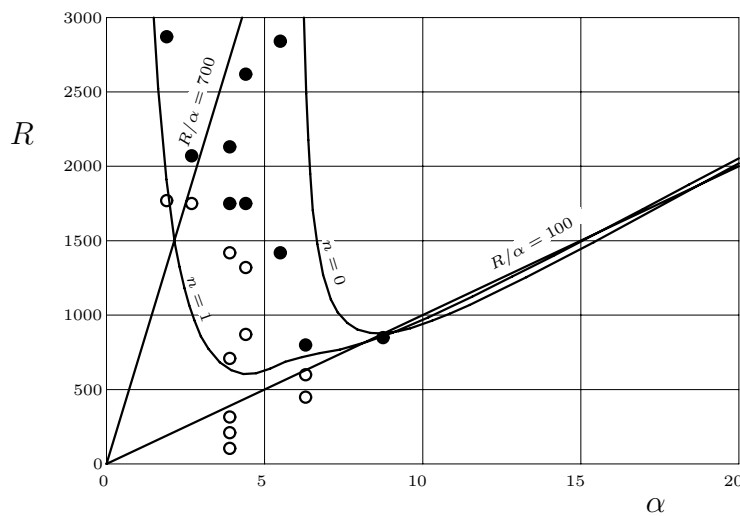


Abbildung 6.1: Die Experimente von *Hino*, *Sawamoto* und *Takasu* zeigen Stabilität (helle Punkte) und Instabilität (dunkle Punkte). Außerdem sind die neutralen Kurven der quasistatischen Rechnung für $n = 0$ und $n = 1$, sowie die Geraden $R/\alpha = 100$ und $R/\alpha = 700$ eingezeichnet.

Abbildung 6.1 zeigt die Ergebnisse der Untersuchungen von *Hino*, *Sawamoto* und *Takasu* vergleichend mit den vorliegenden Rechnungen der quasistatischen Theorie. Die instabilen Befunde liegen im Bereich, für den die Rechnung Instabilität bezüglich antisymmetrischer Störungen voraussagt. Für Parameterkombinationen nahe der neutralen Kurve können keine meßbaren Anzeichen für Instabilitäten erwartet werden, da zum einen der Aufklingfaktor zu klein ist und zum anderen die Zeitdauer des instabilen Bereichs zu kurz dafür ist, daß kleine Störungen auf ein meßbares Niveau ansteigen können.

In keiner der Arbeiten wird die Grenze für schwache Instabilitäten bei

*Akhavan, Kamm, Sharp: *J. Fluid. Mech.* **225** (1991)

Eckmann, Grotberg: *J. Fluid. Mech.* **222** (1991)

großen Womersleyschen Zahlen α ermittelt, die nach der quasistatischen Theorie einen Wert von $R/\alpha \simeq 100$ einnimmt. Das bekräftigt die Vermutung, welche bei der Diskussion der Berechnungsergebnisse am Ende des letzten Kapitels angestellt wurde, daß die Wirkdauer des quasistatischen Verstärkungsfaktors in diesem Parameterbereich zu kurz ist, um die laminare Bewegung wesentlich zu stören.

Zusammenfassung

Bei Strömungsvorgängen unterscheiden wir prinzipiell zwischen laminarer und turbulenter Bewegung. Welche der beiden Formen vorkommt, ist von grundlegendem Interesse. Die Lösung der Bewegungsgleichungen führt auch dann auf die laminare Strömung, wenn diese praktisch nicht vorkommt. Ursache dieses Phänomens ist die Instabilität der Strömung gegenüber kleinen Störungen oder Imperfektionen im System, die in der Realität stets vorhanden sind. Die Stabilitätsfrage kann mathematisch formuliert und gelöst werden. Ziel der Analyse ist die Entscheidung, unter welchen Parameterrestriktionen eine Grundströmung entweder stabil oder instabil ist. Falls sie stabil ist, kann die laminare Strömung aufrecht erhalten werden. Andernfalls zerfällt sie in eine möglicherweise turbulente Strömung.

In dieser Arbeit untersuchen wir die Strömung einer reibungsbehafteten Flüssigkeit in einem Rohr, welche sich unter dem Einfluß eines harmonisch oszillierenden axialen Druckgradienten einstellt. Die Grundströmung läßt sich durch zwei unabhängige Kenngrößen (Womersley- und Reynoldszahl) parametrisieren. Sie ist ein Prototyp für instationäre Strömungen, wie sie beispielsweise in biologischen Gefäßsystemen oder in verfahrenstechnischen Anlagen vorkommen.

Bisher wurde die oszillierende Rohrströmung vorwiegend experimentell untersucht. Aus den Befunden geht hervor, daß die Strömung für ausgewählte Parameterkombinationen zu bestimmten Zeiten ein instabiles Verhalten aufweist.

Rechnerisch konnte das bisher nicht bestätigt werden. Die durchgeführten Stabilitätsanalysen, basierend auf der Floquetschen Theorie, deuten auf asymptotisches Stabilitätsverhalten der Strömung gegenüber axialsymmetrischen Störungen hin.

Es ist Ziel dieser Arbeit, die in den Experimenten gefundenen Instabilitätsphänomene theoretisch zu erklären. Dazu werden die vorhandenen Ansätze zur hydrodynamischen Stabilität verglichen und an die Problemstellung angepaßt. Mit einer geeigneten Methode werden anschließend Para-

meterstudien über alle sinnvollen Kombinationen von Grundströmungen und Störungen durchgeführt.

Ausgehend von den Bewegungsgleichungen einer reibungbehafteten inkompressiblen Flüssigkeit (Navier-Stokes-Gleichungen), leiten wir die Evolutionsgleichungen der Störungsgeschwindigkeiten her. Es handelt sich dabei um ein System partieller Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten. Zur Diskussion des Systems vergleichen wir verschiedene Ansätze.

Mit der Floquetschen Theorie können lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten auf ihre asymptotische Stabilität hin untersucht werden. Es gelingt uns, die Evolutionsgleichungen mit einer Diskretisierung in diese Form zu überführen. Die Stabilitätsaussage gilt allerdings nur über einen Zeitraum, welcher mehrere Perioden der oszillierenden Strömung umfaßt und führt ausschließlich auf Stabilität.

Um die kurzzeitigen Effekte (während einer Schwingungsperiode) zu untersuchen, führen wir den quasistatischen Stabilitätsbegriff ein. Durch eine zeitliche Skalenseparation betrachten wir die Dynamik von schnellen Störungen über einer langsam oszillierenden (quasistatischen) Grundströmung. Das mathematische System vereinfacht sich dadurch zu einem System mit konstanten Koeffizienten in der Zeit und führt auf ein Rand-Eigenwertproblem.

Zur Lösung des Rand-Eigenwertproblems vergleichen wir ein Schießverfahren mit einer Galerkin-Entwicklung. Eine besondere Schwierigkeit stellt hierbei die Vermeidung von Singularitäten auf der Rohrmitte dar, die durch die Darstellung der Gleichungen im zylindrischen Koordinatensystem erscheinen. Die Hauptrechnungen dieser Arbeit, welche die Parameterstudien beinhalten, basieren auf der Galerkin-Entwicklung.

Um die Ergebnisse der quasistatischen Studien zu interpretieren, vergleichen wir sie mit direkten numerischen Lösungen des Anfangswertproblems. Hierbei wählen wir spezielle Parameterkombinationen und zufällige Anfangsbedingungen aus.

Es ist gelungen, mit der quasistatischen Methode kurzzeitige instabile Störungen nachzuweisen. Sie treten jeweils zu den Zeitpunkten der Flußumkehr auf und werden anschließend wieder stark gedämpft.

Sowohl symmetrische als auch antimetrische Störungen bezüglich der Rohrachse dominieren das Instabilitätsgebiet. Auffällig ist, daß antimetrische Störungen am meisten verstärkt werden. Störungen mit höheren Winkelzahlen sind hingegen allgemein stärker gedämpft.

Anfällig für die kurzzeitigen Verstärkungen sind Störungen im Bereich mittlerer axialer Wellenlängen. Sowohl langwellige als auch kurzwellige Störungen beliebiger Form werden zu jeder Zeit gedämpft.

Durch die vergleichenden Studien können wir das quasistatische Instabilitätsgebiet in drei Bereiche in Abhängigkeit der Reynolds- und Womersleyzahl aufteilen. Am auffälligsten sind die Verstärkungen bei Womersleyschen Zahlen von 8 für symmetrische (4 für antimetrische) Störungen in der Rohrmitte bereits ab Reynoldsschen Zahlen von 1000.

Die verwendete lineare Stabilitätstheorie beschreibt den primären Instabilitätsmechanismus, welcher durch den Energietransfer von der Grundströmung in die Störungen verursacht wird. Wir müssen davon ausgehen, daß auch andere Mechanismen eine wichtige Rolle spielen (Nichtlinearität und Nichtorthogonalität), wie aus dem Grenzfall der stationären Strömung ersichtlich wird.

In dieser Arbeit haben wir erstmals die quasistatische Theorie erfolgreich auf die Stabilitätsfrage der oszillierenden Rohrströmung angewendet. Mithilfe umfangreicher Parameterstudien haben wir die aus Experimenten bekannten Instabilitätsphänomene erklärt und das Instabilitätsgebiet eingehend analysiert.

Literatur

1. R. Akhavan, R. D. Kamm, A. H. Shapiro: An investigation of transition to turbulence in bounded oscillatory Stokes flows Part 1. Experiments. *Journal of Fluid Mechanics* **225**, 395–422 (1991) _____ 62
2. E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen: LAPACK Users' Guide. *Society for Industrial and Applied Mathematics* (1999) _____ 30
3. D. E. Amos: A portable package for Bessel functions of a complex argument and nonnegative order. *ACM Transactions on Mathematical Software* **12**, 265–273 (1986) _____ 29
4. Peter J. Blennerhassett, Andrew P. Bassom: The linear stability of flat Stokes layers. *Journal of Fluid Mechanics* **464**, 393–410 (2002) _____ 7
5. K. M. Case: Hydrodynamic stability and the inviscid limit. *Journal of Fluid Mechanics* **10**, 420 (1961) _____ 3
6. A. G. Darbyshire, T. Mullin: Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics* **289**, 83–114 (1995) _____ 61
7. Debopam Das, Jaywant H. Arakeri: Transition of unsteady velocity profiles with reverse flow. *Journal of Fluid Mechanics* **374**, 215–183 (1998) _____ 61
8. Stephen H. Davis: The stability of time-periodic flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **8**, 57–74 (1976) _____ 6
9. David M. Eckmann, James B. Grotberg: Experiments on transition to turbulence in oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics* **222**, 329–350 (1991) _____ 62
10. F. Fedele, D. L. Hitt, R. D. Prabhu: Revisiting the stability of pulsatile pipe flow. *European Journal of Mechanics B/Fluids* **24**, 237–254 (2005)
7

11. *Gaston Floquet*: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **12**, 47–88 (1883) _____ 31
12. *Mohamed S. Ghidaoui, A. A. Kolyshkin*: A quasi-steady approach to the instability of time-dependent flows in pipes. *Journal of Fluid Mechanics* **465**, 301–330 (2002) _____ 7
13. *A. E. Gill*: The least-damped disturbance to Poiseuille flow in a circular pipe. *Journal of Fluid Mechanics* **61**, 97–107 (1973) _____ 19
14. *Chester E. Grosch, Harold Salwen*: The stability of steady time-dependent plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* **34**, 177–205 (1968) _____ 7
15. *Siegfried Grossmann*: The onset of shear flow turbulence. *Reviews of Modern Physics* **72**, 603–618 (2000) _____ 5
16. *Philip Hall*: The linear stability of flat Stokes layers. *Proceedings of the Royal Society of London A* **359**, 151–166 (1978) _____ 7
17. *Philip Hall*: On the instability of Stokes layers at high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **482**, 1–15 (2003) _____ 7
18. *Georg Hamel*: Zum Turbulenzproblem. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 261–270 (1911) _____ 5
19. *S. He, J. D. Jackson*: A study of turbulence under conditions of transient flow in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics* **408**, 1–38 (2000) _____ 61
20. *Werner Heisenberg*: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. *Annalen der Physik* **74**, 577 (1924) _____ 4
21. *Hermann Helmholtz*: Über discontinuierliche Flüssigkeits-Bewegungen. *Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **23**, 215–218 (1868) _____ 3
22. *Mikio Hino, Masaki Sawamoto, Shuji Takasu*: Experiments on transition to turbulence in an oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics* **75**, 193–207 (1976) _____ 61
23. *R. Hooke, T. A. Jeeves*: Direct search solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM* **8**, 212–229 (1961) _____ 22

24. *Ludwig Hopf*: Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit. *Annalen der Physik* **44**, 1–60 (1914) _____ 4
25. *Patrick Huerre, Peter A. Monkewitz*: Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics* **22**, 473–537 (1990) _____ 5
26. *Kelvin*: Stability of fluid motion – rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes. *Philosophical Magazine* **24**, 188–196 (1887) 3
27. *C. R. Lodahl, B. M. Sumer, J. Fredsoe*: Turbulent combined oscillatory flow and current in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics* **373**, 331–348 (1998) _____ 61
28. *L. M. Mack*: A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **73**, 497–520 (1976) _____ 22
29. *Steven L. B. Moshier*: Methods and programmes for mathematical functions. Wiley (1989) _____ 29
30. *Ali Hasan Nayfeh, Dean T. Mook*: Nonlinear oscillations. Wiley (1979) 31
31. *Munekazu Ohmi, Manabu Iguchi, Koichiro Kakehashi, Tetsuya Masuda*: Transition to turbulence and velocity distribution in an oscillating pipe flow. *Bulletin of the JSME* **25**, 365 (1982) _____ 61
32. *William Orr*: The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy* **XXVII**, 9 (1907) _____ 4, 14
33. *Lord Rayleigh*: On the question of the stability of the flow of fluids. *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science* **34**, 59–70 (1892) _____ 3
34. *Satish C. Reddy, Peter J. Schmidt, Dan S. Henningson*: Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator. *SIAM Journal of Applied Mathematics* **53**, 15–47 (1993) _____ 5
35. *Osborne Reynolds*: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **186**, 123–164 (1895) _____ 3, 14

36. Osborne Reynolds: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **174**, 935 (1883) _____ 3
37. Bernd Rummeler: Eigenfunctions of the Stokes operator in special domains I. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **77(8)**, 619–627 (1997) _____ 25
38. Harold Salwen, Chester E. Grosch: The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section. *Journal of Fluid Mechanics* **54**, 93–112 (1972) _____ 4, 24
39. Turgut Sarpkaya: Experimental determination of the critical Reynolds number for pulsating Poiseuille flow. *Journal of Basic Engineering* **Sep.**, 589–598 (1966) _____ 61
40. James Serrin: On the stability of viscous fluid motions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **3**, 1–13 (1959) _____ 3
41. Theodor Sexl: Zur Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen und Couette-schen Strömung. *Annalen der Physik* **83**, 835–848 (1927) _____ 4
42. Theodor Sexl: Über den von E. G. Richardson entdeckten “Annulareffekt”. *Zeitschrift für Physik* **61**, 349–362 (1930) _____ 9
43. L. Shemer, I. Wygnanski, E. Kit: Pulsating flow in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics* **153**, 313–337 (1985) _____ 61
44. Arnold Sommerfeld: Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. *Atti del 4 Congresso Internazionale dei Matematici, Roma* **III**, 116–126 (1908) _____ 4
45. George Gabriel Stokes: On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **ix**, 8–16 (1851) _____ 11
46. J. T. Tozzi, Christian H. von Kerczek: The stability of oscillatory Hagen-Poiseuille flow. *Journal of Applied Mechanics* **53**, 187 (1986) _____ 7
47. Lloyd N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy, Tobin A. Driscoll: Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science* **261**, 578 (1993) _____ 5

48. *Shigeo Uchida*: The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **7**, 403 (1956)_____9
49. *J. Watson*: On spatially-growing finite disturbances in plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* **14**, 211–221 (1962)_____5
50. *John R. Womersley*: An elastic tube theory of puls transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. *WADC Technical Report TR 56-614*, (1959)_____10
51. *W. H. Yang, Chia-Shun Yih*: Stability of time-periodic flows in a circular pipe. *Journal of Fluid Mechanics* **82**, 497–505 (1977)_____7, 32
52. *M. Zhao, M. S. Ghidaoui, A. A. Kolyshkin, R. Vaillancourt*: On the stability of oscillatory pipe flow. *Technische Mechanik* **24**, 289–296 (2004)
7

Lebenslauf

Name Kai Elmar Trukenmüller
Anschrift Papyrusweg 17, 22117 Hamburg
Geburtsdatum 7. Januar 1978
Geburtsort Darmstadt
Eltern Ulrich Trukenmüller
Beate Trukenmüller

Schulbildung

1984 – 1988 Grundschule Nieder-Ramstadt
1988 – 1997 Georg-Büchner-Schule Gymnasium Darmstadt
1997 Abitur

Studium

1997 – 1999 Maschinenbau, TU Darmstadt
1999 Vordiplom Maschinenbau
1999 – 2002 Hauptstudium Mechanik, TU Darmstadt
2002 Diplom (Dipl.-Ing.)

2003 – 2006 Wissenschaftliche Hilfskraft
am Lehrstuhl für Strömungslehre
des Fachbereichs Maschinenbau
der Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg

seit 2006 Schenck RoTec GmbH, Darmstadt