

## Vergleich des Zielmaßes eines Ikosaeders aus Tripelspiegeln mit verschiedenen Lösungsverfahren

Ralf Burgschweiger<sup>1</sup>, Ingo Schäfer<sup>2</sup>, Arne Stoltenberg<sup>2</sup>, Delf Sachau<sup>1</sup>, Jan Ehrlich<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Helmut-Schmidt-Universität (UniBw/H), Fakultät für Maschinenbau, Institut für Mechatronik, 22043 Hamburg, E-Mail:burgschr@hsu-hh.de

<sup>2</sup> Wehrtechnische Dienststelle für Schiffe und Marinewaffen, Maritime Technologie und Forschung (WTD 71), Akustische Modellierung (GF640), 24340 Eckernförde

### Einleitung

Ein Ikosaeder, dessen 20 identische Dreiecksflächen durch Tripelspiegel ersetzt wurden, kann als Referenzobjekt für die Ermittlung des Zielmaßes unter Wasser verwendet werden. Ein entsprechendes Modell aus Stahlblech mit einem Durchmesser von ca. 33 cm wird in der Praxis eingesetzt.

In dem Beitrag werden für dieses Modell die Ergebnisse von Zielmaß-Simulationen für verschiedene Lösungsverfahren (schallharte BEM, Schalenrandbedingung mittels BEM-Trägheitskopplung, FEM-Schalenrandbedingung, Raytracing) verglichen und hinsichtlich des verwendbaren Frequenzbereiches diskutiert.

### Problemstellung / Verfahren

Es liegt ein mehrfach gekoppeltes Problem (Abb. 1) vor, mit

- Außenraum  $\Omega_0$  = Wasser
- Rand  $\Gamma$  = Stahlschale
- Innenraum  $\Omega_1$  = Vakuum bzw. Luft.

Als Schallquelle wird eine ebene Welle verwendet.

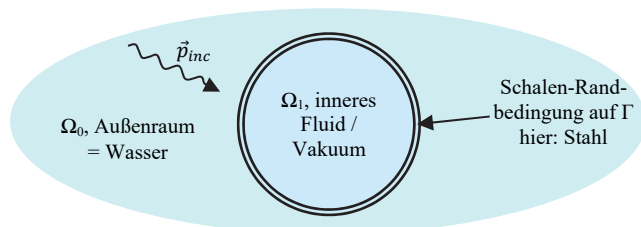


Abb. 1: mehrfach gekoppeltes Problem (Schema)

Folgende Verfahren werden zum Vergleich herangezogen:

- BEM (Randelementmethode mit schallharter Randbedingung oder mit Trägheitskopplung)
- FEM/BEM-Kopplung (Verwendung finiter Schalenelemente, kombiniert mit der BEM)
- Raytracing

### Numerische Verfahren

Im Folgenden sind stichpunktartig die wesentlichsten Eigenschaften der verwendeten Lösungsverfahren aufgeführt.

Ausführliche Details zu den einzelnen Verfahren sind unter den angegebenen Quellen zu finden.

Alle betrachteten Verfahren benötigen nur die Oberflächenelemente, daher konnte in allen Fällen das gleiche Modell verwendet werden.

### BEM (Randelementmethode)

- setzt homogene Materialien voraus
- benötigt nur die „Ränder“ der betrachteten Objekte, d.h., deren Oberflächen
- Nachbildung der Oberflächen durch Aufteilung in Elemente (Diskretisierung)
- „Größe“ der Oberflächenelemente wird durch die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt ( $\lambda/6$ -Faustformel)
- führt zu einem linearen Gleichungssystem aus mit voll besetzter komplexer Koeffizientenmatrix. Die Ordnung ist abhängig erstens von der Anzahl der Elemente oder Eckknoten und zweitens der Ansatzfunktion, hier: konstante Elemente mit Kollokation)
- Die Lösung ist mittels direkter oder iterativer Verfahren (z.B. GMRES) möglich, ggf. in Kombination mit schnellen Approximationsverfahren (Fast Multipole Methode, Source bzw. Panel Clustering)
- Die einmalige Faktorisierung der Koeffizientenmatrix ermöglicht die effiziente Lösung des Gleichungssystems Verwendung eines linearen Gleichungslöser für unterschiedliche rechte Seiten ( $\triangleq$  Schalleinfallrichtungen).

### BEM mit Massenträgheitskopplung [1]

- ermöglicht die Berücksichtigung von dünnen Materialschichten
- ersetzt die elastische Schale durch einen Impedanz-Äquivalenzkoeffizienten. Dieser wird durch die Schalendicke und Materialdichte bestimmt.
- benötigt keine zusätzlichen Einträge in der System-Matrix
- elastische Eigenschaften der Schale werden nicht berücksichtigt

### FEM (Finite Element Methode)

- die Schale und der Außenraum werden mit Hilfe von finiten Volumenelementen diskretisiert
- eine Schicht spezieller Volumenelemente am äußeren Rand, die sog. Perfectly Matched Layer (PML), bildet die Freifeldbedingungen ab
- die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmt die Größe der finiten Elemente
- führt zu einem dünn besetzten Gleichungssystem hoher Ordnung (Sparse Matrix)
- wurde nicht berücksichtigt, da eine Volumen-Diskretisierung der dünnen Schale aufgrund zu hoher resultierender Elementanzahlen unzumutbar ist

## FEM-Schalenrandbedingung

- berücksichtigt das elastische Materialverhalten für dünne Schalen
- Schalenelemente entsprechen geometrischen Oberflächenelementen mit einer vordefinierten „Dicke“, d.h., es sind keine Volumenelemente erforderlich [2]
- Berechnung mit kommerziellen FEM-Programmen möglich (sehr zeitaufwändig)

## FEM/BEM-Schalenrandbedingung [3]

- Integration der FEM-spezifischen Anteile in das BEM-Gleichungssystem mit Hilfe von Transformationsmatrizen
- Lösung des gekoppelten Gleichungssystems mittels
  - direktem Sparse-Löser (z.B. PARDISO)
  - Schur-Verfahren (iterativ in Verbindung mit GMRES)
  - Eigenwert-Verfahren (hier verwendet)

## Raytracing (BEAM-Verfahren) [4, 5]

- ermittelt zunächst die einfallenden „Startstrahlen“
- Treffer auf der Oberfläche generieren „Kinderstrahlen“, die bis zu einem definierten Level weiter verfolgt werden
- Entsprechende Randbedingungen definieren die zu berücksichtigenden Reflexions- und Transmissionsfaktoren
- Summation der strahlspezifischen Druckanteile im Fernfeld nach Abschluss der Strahlverfolgung
- Größe der verwendeten Oberflächenelemente unkritisch, nur die Struktur muss hinreichend gut abgebildet werden
- liefert keine oberflächenspezifischen Daten

## Verwendetes Ikosaeder-Modell

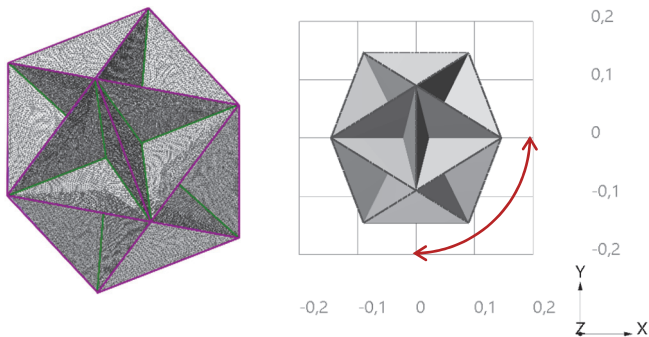


Abb. 2: Ikosaeder-Modell und Lage in der XY-Ebene

### Geometrie:

- 20 Tripelspiegel aus 60 gleichgroßen gleichschenkligen Dreiecken mit Kantenlängen von ca. 18 bzw. 12 cm
- äußerer Durchmesser: ca. 30 cm
- 8-fache Symmetrie in den 3 Hauptebenen (je Oktant) bzw. 4-fach (90°) in der XY-Auswertungsebene

### Numerisches Modell:

- 2 mm dicke Stahlschale, außen Wasser, innen Vakuum
- 126.192 Elemente, „eingespannte Kanten“
- Element-Kantenlänge: ca. 3 mm
- Matrix-Speicherbedarf (BEM/FEM): ca. 121,5 GB (SP)

### Realer Körper:

- luftgefüllte Stahlschale, ca. 2 mm stark
- verschweißte Kanten

## Ergebnisse

### Monostatische Auswertung

Für alle berücksichtigten Frequenzbereiche wurden monostatische Berechnungen mit folgenden Parametern durchgeführt:

- 721 Auswertungspunkte in der XY-Ebene, d.h. Einfallrichtungen mit 0,5° Schrittweite
- Auswertung im Fernfeld (Distanz 10 km)
- Mittelung über jeweils 11 Frequenzen ( $\pm 10\%$ )
- 7.931 Teilberechnungen pro Frequenzbereich
- Ergebnisse für 5 kHz, 20 kHz und 100 kHz

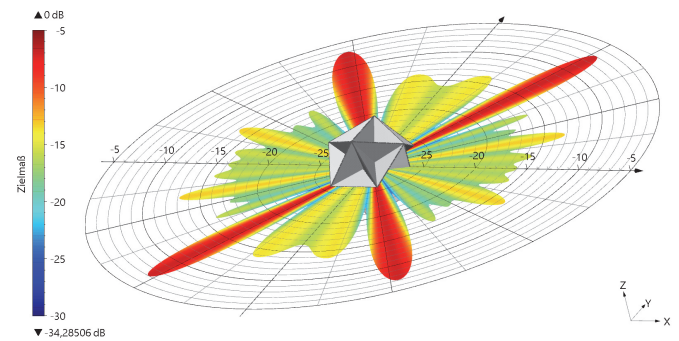


Abb. 3: Beispiel eines Polarplots zum Ikosaeder-Modell in der XY-Auswertungsebene

In allen Polarplots ist das Zielmaß jeweils in dB dargestellt.

### Frequenzabhängigkeit der FEM

Die Berücksichtigung des elastischen Verhaltens der Schale mit der FEM zeigt die starke Frequenzabhängigkeit des Zielmaßes um bis zu 20 dB bei einer Frequenz-Variation von  $\pm 10\%$ , wie aus Abb. 4 im Vergleich mit der BEM-Trägheitskopplung (rechts) deutlich wird.

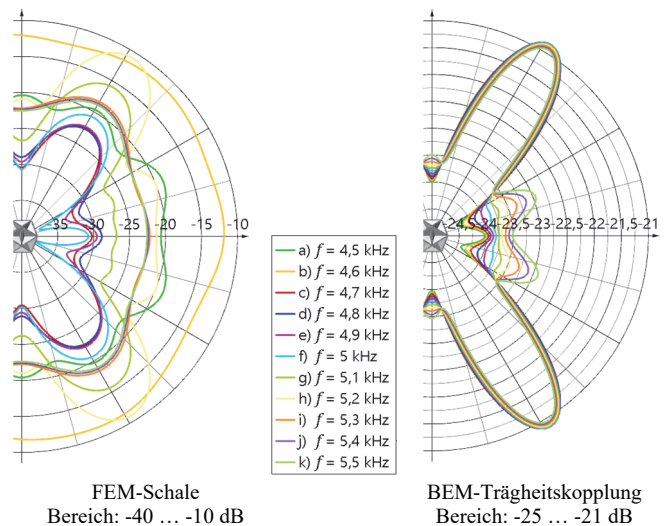
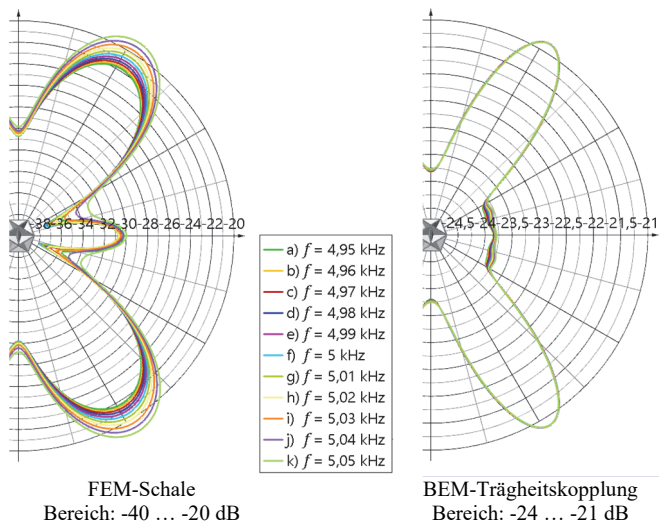


Abb. 4: Zielmaß des Ikosaeders bei  $f_{base} = 5$  kHz mit 10% Frequenz-Variation (4,5 ... 5,5 kHz)

Selbst bei einer geringeren Variation des Frequenzbereichs von nur  $\pm 1\%$  variiert der Pegel um bis zu 3 dB, während bei der BEM kaum noch Differenzen erkennbar sind (Abb. 5).

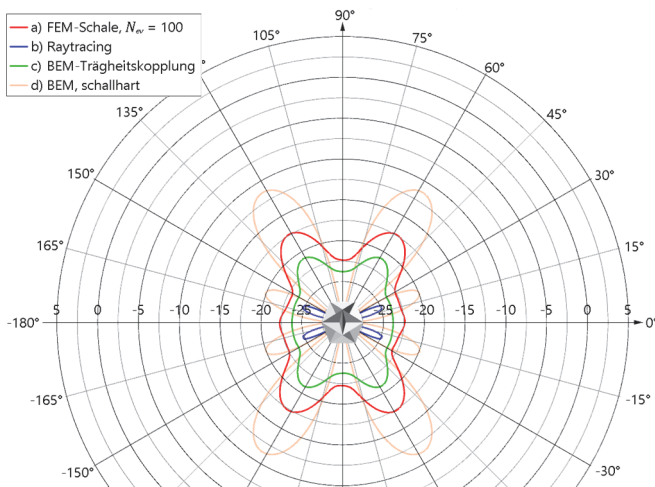


**Abb. 5:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{base} = 5$  kHz mit 1% Frequenz-Variation (4,95 ... 5,05 kHz)

Aus diesem Grund wurde bei den Vergleichsrechnungen immer eine 10%-ige Frequenzvariation berücksichtigt. Auch im Hinblick auf den Vergleich mit Messergebnissen ist dies sinnvoll, da dort i.d.R. zum einen vergleichbare Frequenzsweeps verwendet werden und zum anderen die Materialparameter nicht exakt bekannt sind, somit die gemessenen Werte entsprechend streuen können.

**Ergebnisse für  $f_{aver} = 5$  kHz**

Abb. 6 zeigt den ermittelten Verlauf des Zielmaßes für die gemittelte Frequenz  $f_{aver} = 5$  kHz.



**Abb. 6:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{aver} = 5$  kHz ( $\lambda = 0,3$  m,  $k_A \approx 1$ )

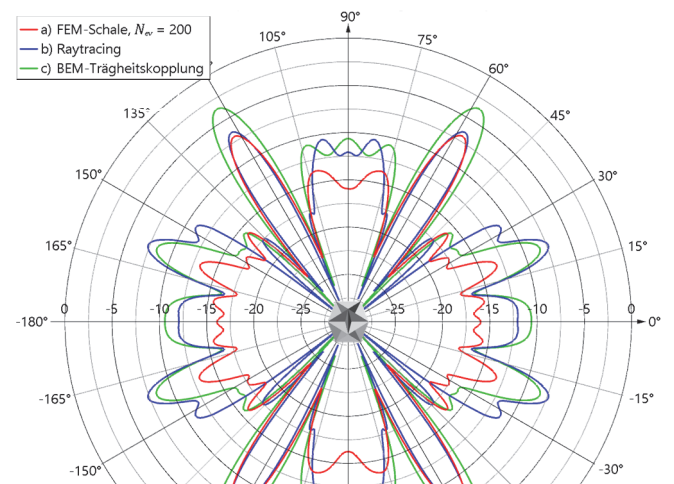
Es ist deutlich zu erkennen, dass das Raytracing-Verfahren für diesen Frequenzbereich und das Modell nicht geeignet ist, da es bei dieser „großen“ Wellenlänge von  $\lambda = 0,3$  m aufgrund des Algorithmus bedingt keine verwertbaren Daten liefert.

Die FEM-Schale und die BEM mit Trägheitskopplung zeigen vergleichbare Verläufe, wobei sich hier bei der FEM aufgrund der Berücksichtigung der elastischen Materialeigenschaften um ca. 2 - 3 dB höhere Werte einstellen.

Die schallharte BEM, die den Stahl nicht berücksichtigt, liefert dementsprechend zu hohe Werte, zeigt allerdings gut die primären Abstrahlrichtungen der Tripelspiegel.

**Ergebnisse für  $f_{aver} = 20$  kHz**

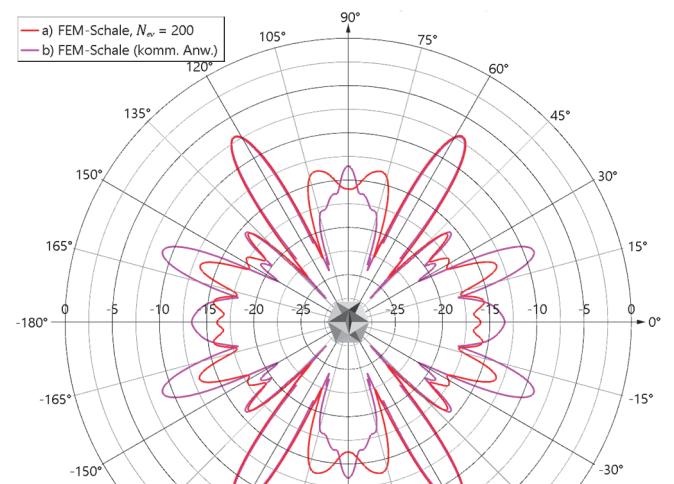
Abb. 7 zeigt den ermittelten Verlauf des Zielmaßes für die gemittelte Frequenz  $f_{aver} = 20$  kHz.



**Abb. 7:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{aver} = 20$  kHz ( $\lambda = 0,075$  m,  $k_A \approx 4,4$ )

Während hier in den primären Abstrahlrichtungen (bei ca.  $\pm 58^\circ$ ) die FEM-Schale und das Raytracing gut übereinstimmen, zeigt sich in den „ruhigeren“ Bereichen eher eine Übereinstimmung zwischen BEM und Raytracing. Die FEM liefert hier um bis zu 5 dB geringere Werte zurück.

Vergleicht man für diesen Fall die Ergebnisse für die FEM-Schale mit einer kommerziellen Anwendung (Abb. 8, auch über 11 Frequenzen gemittelt), so sind in den „ruhigeren“ Bereichen Differenzen von 2 - 4 dB erkennbar, während die primären Abstrahlwinkel sehr gut übereinstimmen.

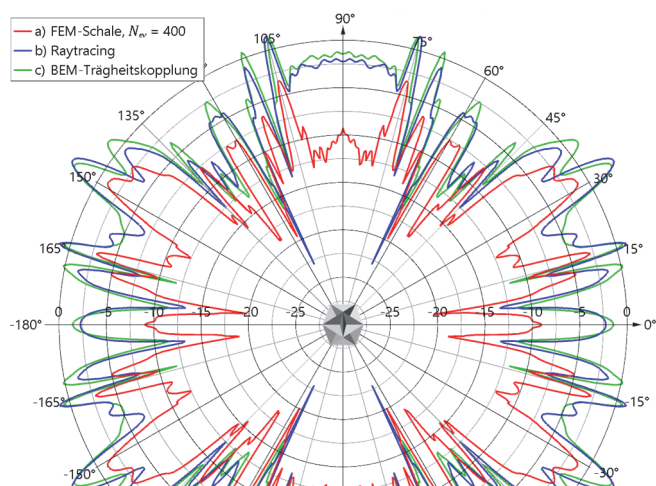


**Abb. 8:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{aver} = 20$  kHz (nur FEM-Schale & kommerzielle Anwendung)

Das liegt daran, dass unterschiedliche Verfahren für die FEM-Schalenelemente verwendet werden (Kirchhoff-Elemente im eigenen Code, Reissner-Mindlin-Elemente in der kommerziellen Anwendung).

### Ergebnisse für $f_{aver} = 100$ kHz

Abb. 9 zeigt den ermittelten Verlauf des Zielmaßes für die gemittelte Frequenz  $f_{aver} = 100$  kHz.

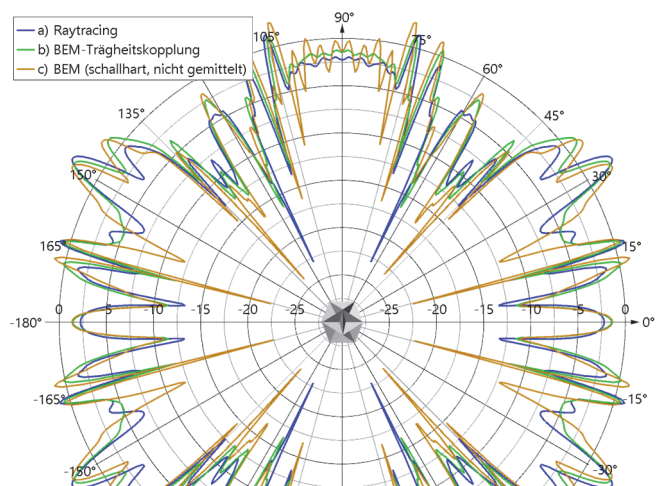


**Abb. 9:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{aver} = 100$  kHz  
( $\lambda = 0,015$  m,  $k_A \approx 22$ )

Während die Verläufe für BEM und Raytracing relativ gut übereinstimmen, sind die Werte für die FEM-Schale deutlich geringer und weisen z.T. einen nicht symmetrischen Verlauf auf (z.B. um  $0^\circ$  bzw.  $180^\circ$ ).

Ursache ist die für den Frequenzbereich nicht ausreichend feine Diskretisierung des Modells, d.h., die Elemente sind für die FEM-Berechnungen zu groß.

Grundsätzlich ist mit steigender Frequenz eine Annäherung an die schallharte Lösung zu erwarten, wie auch aus Abb. 10 erkennbar wird.



**Abb. 10:** Zielmaß des Icosaeders bei  $f_{aver} = 100$  kHz  
(mit schallharter BEM-Lösung)

### Zusammenfassung und Ausblick

Die Berücksichtigung der elastischen Strukturanteile mittels der FEM zeigt in der Mittelung geringere Abstrahlungspegel.

Der monostatische Verlauf des Pegels bei der FEM kann bei nur kleinen Frequenzänderungen stark schwanken und erschwert damit eine belastbare Auswertung. Dieses Verhalten zeigt sich auch bei den Ergebnissen der kommerziellen Anwendung.

Eine Mittelung über einen Frequenzbereich von  $\pm 10\%$  um die gewünschte Mittenfrequenz ist daher sinnvoll, auch im Hinblick auf den Vergleich mit Messergebnissen.

Mit steigender Frequenz nähern sich alle Lösungen dem schallharten Fall an, wobei im vorliegenden Beispiel die FEM bei 100 kHz aufgrund zu großer finiter Schalenelemente deutlich abweicht.

Um numerische Probleme als Ursache der starken Frequenzabhängigkeit auszuschließen, sind weitere Untersuchungen des verwendeten FEM/BEM-Kopplungsverfahrens geplant.

### Hinweis

Die zu dem vorgestellten Icosaeder erhaltenen Messergebnisse, entsprechende Informationen und Auswertungen finden sich im DAGA-Beitrag „Zielmaß eines Ecken-Icosaeders im Wasser“ [6].

### Referenzen / Literatur

- [1] R. Burgschweiger, I. Schäfer and M. Ochmann, "Implementation and results of a mass inertia coupling as an extension of the BEM for thin shells," in *International Congress on Sound and Vibration (ICSV22)*, Florence, 2015.
- [2] P. Steinke, *Finite-Elemente-Methode; Rechnergestützte Einführung*, 5. Auflage, Springer Vieweg Verlag, 2015.
- [3] R. Burgschweiger, I. Schäfer and M. Ochmann, "Integration of FEM shell elements as a "boundary condition" in BEM calculations using different solution methods," in *23rd International Congress on Acoustics (ICA2019)*, Aachen, Germany, 2019.
- [4] I. Schäfer, R. Burgschweiger und B. Nolte, „BEAM Teil I: Mathematisch-physikalische Grundlagen eines strahlenbasierten Löser zur approximativen Ermittlung der Schallrückstreuung dünnwandiger Objekte,“ in *40. Jahrestagung für Akustik (DAGA 2014)*, Oldenburg, 2014.
- [5] R. Burgschweiger, I. Schäfer, M. Ochmann und B. Nolte, „BEAM, Teil II: Implementierung und Ergebnisse,“ in *40. Jahrestagung für Akustik (DAGA 2014)*, Oldenburg, 2014.
- [6] A. Stoltenberg und I. Schäfer, „Zielmaß eines Ecken-Icosaeders im Wasser,“ in *50. Jahrestagung für Akustik (DAGA 2024)*, Hannover, 2024.