

ASN-optimale zweistufige Versionen des Gauß- und t-Tests

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Wirtschafts- und
Sozialwissenschaften der Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg

vorgelegt von

Eno Vangjeli

aus

Korçë, Albanien

Hamburg 2008

Gutachter der Dissertation:

Prof. Dr. W. Krumbholz
Prof. Dr. W. Schmid

Datum der mündlichen Prüfung:

13. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Theoretische Grundlagen	8
2.1	Der einstufige Gauß- und t-Test	9
2.2	Der einfache Variablenprüfplan	13
2.3	Der zweistufige Gauß- und t-Test	14
3	Die OC im zweiseitigen t-Fall	22
4	ASN-optimale zweistufige Tests	33
4.1	Zweistufige Minimax-Tests	34
4.2	Zweistufige Integral-Tests	38
4.3	Zweistufige Minimax-Integral-Tests	43
4.4	Zweistufige Tests bei unabhängigen Testgrößen	48
5	Der Suchalgorithmus	54
5.1	Der Grundalgorithmus	55
5.2	Festlegung der Suchräume	59
5.3	Fehleranalyse	63
6	Zusammenfassung und Ausblick	65
A	Suchraumgrenzen	69

Abbildungsverzeichnis

2.1	$L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im einseitigen Fall.	11
2.2	$L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im zweiseitigen Fall.	11
2.3	$L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im einseitigen Fall.	12
2.4	$L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im zweiseitigen Fall.	12
2.5	OC-Funktionen im einseitigen Fall.	17
2.6	Symmetrie der ASN-Funktionen im einseitigen Fall.	18
2.7	Symmetrie der OC- und ASN-Funktion im zweiseitigen Fall . . .	20
3.1	Fall 1: $m(x)$ steiler als $a(x)$	25
3.2	Fall 2: $m(x)$ und $a(x)$ haben gleiche Steigung.	27
3.3	Fall 3: $a(x)$ steiler als $m(x)$	29
4.1	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725, \alpha = \beta = 0.05$	34
4.2	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.725, \alpha = \beta = 0.05$	35
4.3	OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta = 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725, \alpha = \beta = 0.05$	36
4.4	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725, \alpha = \beta = 0.05$	36
4.5	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.725, \alpha = \beta = 0.05$	37

4.6	OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$	38
4.7	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	39
4.8	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	40
4.9	OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	41
4.10	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	41
4.11	OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	42
4.12	OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	43
4.13	ASN-Funktionen der zweistufigen zweiseitigen t-Tests für unter- schiedliche ε zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$	43
4.14	ASN-Funktionen der einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$	50
4.15	ASN-Funktionen der zweiseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$	51
4.16	ASN-Funktionen der einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	52
4.17	ASN-Funktionen der zweiseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta=0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$	53
5.1	ASN_{max} in Abhängigkeit von k_3	56
5.2	Verhältnis $k_3 \div k$ bei Feldmann.	57
5.3	Flußdiagramm zur Berechnung eines zweistufigen Tests.	58
5.4	λ_i im einseitigen Minimax-Gauß-Fall.	60
5.5	λ_i im einseitigen Integral-Gauß-Fall.	61
A.1	Der einseitige Minimax-Gaußfall	69
A.2	Der zweiseitige Minimax-Gaußfall	70

Tabellenverzeichnis

4.1	Einseitige AMI-Gaußtests zu 2.2a mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$.	44
4.2	Zweiseitige AMI-Gaußtests zu 2.2c mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$	45
4.3	Einseitige AMI-t-Tests zu 2.2b mit $\theta_1 = -0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$.	46
4.4	Zweiseitige AMI-t-Tests zu 2.2c mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$. .	47
5.1	Suchraumgrenzen im einseitigen Integral-Gauß-Fall	62
5.2	Suchraumgrenzen im zweiseitigen Integral-Gauß-Fall	62

Kapitel 1

Einleitung

Der Gauß- und der t-Test sind die wichtigsten Verfahren beim Test auf den Erwartungswert μ eines $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Merkmals. Der t-Test ist nach wie vor eines der am meisten verwendeten Testverfahren, insbesondere im Bereich der Biometrie. In dieser Arbeit werden zweistufige Versionen dieser Tests angegeben, die zum einen eine vorgegebene Trennschärfe aufweisen und zum anderen gewisse Optimalitätseigenschaften besitzen. Hierbei wird die Anforderung an die Trennschärfe in Form einer Zwei-Punkte-Bedingung an die Operationscharakteristik (OC) formuliert. Die Optimalitätskriterien basieren auf dem mittleren Stichprobenumfang ASN (Average Sampling Number).

Das wichtigste der verwendeten Kriterien ist das Minimaxkriterium. Die entsprechende zweistufige Minimaxversion des Gauß- und des t-Tests besitzt unter allen zweistufigen Tests derselben Trennschärfe das kleinste ASN-Maximum. Dieser Maximalwert der ASN liegt durchweg ca. 14 % unterhalb des Prüfumfanges der entsprechenden einstufigen Tests. Neben dem Minimaxkriterium wird noch das Integralkriterium, d.h. die Fläche unter der ASN-Kurve, verwendet. Schließlich wird das Minimax- mit dem Integralkonzept kombiniert. Die beträchtlichen Einsparungen an mittlerem Prüfumfang gegenüber den entsprechenden einstufigen Tests bedeuten eine wesentliche Reduzierung der Prüfkosten. In Anwendungsbereichen wie der Biometrie, in denen Versuchstiere verwendet werden, bekommen diese Einsparungen überdies eine ethische Dimension.

Mit den in dieser Arbeit vorgestellten zweistufigen ASN-optimalen Testverfahren wird den Anwendern ein zusätzliches Instrument zur Verfügung gestellt. Es ist gelungen, zweistufige Testverfahren aus dem engeren Umfeld der statistischen Qualitätskontrolle herauszuholen, in dem solche Verfahren als zweifache Prüfpläne etabliert sind und in den letzten Jahren auch unter Verwendung von ASN-Kriterien optimiert wurden.

Die in dieser Arbeit betrachteten Minimax-, Integral- und kombinierten Tests wurden von KRUMBHOLZ ET AL. [9], und EICHWEDE/ KRUMBHOLZ [4] im Rahmen der Attributprüfung als AM-, AI- und AMI-Pläne vorgeschlagen. Der zweistufige Gauß- und der t-Test entsprechen in der Qualitätskontrolle zweifachen Variablenprüfplänen. FELDMANN/ KRUMBHOLZ [6] gelang die Berechnung von zweifachen Minimaxprüfplänen bei $N(\mu, \sigma^2)$ -verteiltem Merkmal mit bekanntem σ und einseitiger Toleranzgrenze. Diese Ergebnisse, insbesondere der komplexe Algorithmus von FELDMANN [5] zur Berechnung des Minimaxplans, lassen sich auf den zweistufigen einseitigen Gaußtest und - nach geeigneter Modifizierung - auch auf den zweistufigen zweiseitigen Gaußtest übertragen. Bereits 1981 untersuchte SOMMERS [14] zweifache Variablenprüfpläne bei unbekanntem σ und einseitiger Toleranzgrenze. Er verwendete für die zweifachen Prüfpläne von BOWKER/ GOODE [1] eine Normalapproximation der OC und bestimmte näherungsweise denjenigen zweifachen Prüfplan, der die vorgegebene Zwei-Punkte-Bedingung an die OC erfüllt und die ASN an der Stelle p_1 (Gutgrenze) minimiert. Die Bowker-Goode-Pläne verwenden in der ersten und zweiten Stufe Testgrößen, die über die erste Stichprobe voneinander abhängen. Für die Berechnung der OC wird die gemeinsame Verteilung dieser Testgrößen benötigt, was zu beträchtlichen Schwierigkeiten führt. Erst fünfzig Jahre nach Etablierung der Bowker-Goode-Pläne gelang KRUMBHOLZ/ ROHR [10] die Programmierung eines Algorithmus, der nunmehr die exakte Berechnung der OC erlaubt. Dieser Algorithmus wird in der vorliegenden Arbeit auf die OC des zweistufigen einseitigen t-Tests übertragen. Eine Formel für die OC des entsprechenden zweiseitigen t-Tests wird im dritten Kapitel dieser Arbeit hergeleitet.

Mit Hilfe der Formeln für die OC des zweistufigen t-Tests erfolgt die Berechnung der Minimaxversion dieses Tests. Zur Lösung der entsprechenden Optimierungsaufgabe wird ein neuer Suchalgorithmus vorgestellt, der wie bei MÜLLER [12], FELDMANN [6] und HILBERT [7] keine einschränkende Restriktionen hinsichtlich der Testparameter benötigt. Dieser Algorithmus weist im Vergleich zu bislang verwendeten Verfahren kürzere Rechenzeiten auf. Gleichwohl erlaubt er die Berechnung der Integral- sowie Minimax-Integralversionen sowohl für den zweistufigen Gauß- als auch den zweistufigen t-Test.

Im nächsten Kapitel erfolgt die Darstellung der theoretischen Grundlagen. Anschließend wird die bereits erwähnte Formel für die OC des zweistufigen zweiseitigen t-Tests hergeleitet. Im vierten Kapitel wird eine Reihe von Beispielen für die neuen ASN-optimalen Tests angegeben. Die Beschreibung der Algorithmen zur Festlegung der optimalen Tests erfolgt im fünften Kapitel. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Sei X ein $N(\mu, \sigma^2)$ -verteiltes Merkmal ($\sigma > 0$) und $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Wir verwenden die dimensionslose Größe

$$\theta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \quad (2.1)$$

und behandeln die Testaufgabe, die Hypothese H_0 von der Alternative H_1 zu trennen mit

$$(i) \quad H_0 : „\theta \leq 0“ \quad \text{und} \quad H_1 : „\theta \geq \theta_1“ \quad \text{mit} \quad \theta_1 > 0 \quad (2.2a)$$

$$(ii) \quad H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{und} \quad H_1 : „\theta \leq \theta_1“ \quad \text{mit} \quad \theta_1 < 0 \quad (2.2b)$$

$$(iii) \quad H_0 : „\theta = 0“ \quad \text{und} \quad H_1 : „|\theta| \geq \theta_1“ \quad \text{mit} \quad \theta_1 > 0. \quad (2.2c)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten des Fehlers erster und zweiter Art sind wie üblich Niveaus α, β vorgegeben mit $0 < \beta < 1 - \alpha < 1$. Falls σ bekannt ist, wird der Gaußtest verwendet, falls σ unbekannt ist, der t-Test.

Sei A das Ereignis, nach der Durchführung des Tests die Hypothese H_0 anzunehmen. Dann heißt

$$L : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad L(\theta) = P_\theta(A) \quad (2.3)$$

die Operationscharakteristik (OC) des Tests. Die Forderungen

$$P(\text{Fehler 1. Art}) = \alpha$$

$$P(\text{Fehler 2. Art}) \leq \beta$$

sind äquivalent zur sogenannten Zwei-Punkte-Bedingung

$$L(0) = 1 - \alpha \quad (2.4a)$$

$$L(\theta_1) \leq \beta \quad (2.4b)$$

an die Operationscharakteristik.

2.1 Der einstufige Gauß- und t-Test

Die einstufigen Tests dieses Abschnitts basieren auf einer einfachen Stichprobe X_1, \dots, X_n bezüglich X . Sei \bar{X} der Stichprobenmittelwert und S^2 die Stichprobenvarianz ($n \geq 2$). Beim einstufigen Gauß- bzw. t-Test wird die Testgröße

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \quad (2.5)$$

bzw.

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \quad (2.6)$$

verwendet. Der einstufige Gauß- und t-Test $\gamma = (n, k)$ ist gegeben durch den Stichprobenumfang n , den kritischen Wert k und die Entscheidungsvorschrift, die Hypothese H_0 genau dann anzunehmen, wenn

$$(i) \quad T \leq k \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.7a)$$

$$(ii) \quad T \geq k \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.7b)$$

$$(iii) \quad |T| \leq k \quad \text{für} \quad (2.2c). \quad (2.7c)$$

Satz 2.1 Für die Operationscharakteristik des einstufigen Gaußtests (n, k) gilt:

$$(i) \quad L(\theta) = \Phi(k - \sqrt{n} \theta) \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.8a)$$

$$(ii) \quad L(\theta) = \Phi(-k + \sqrt{n} \theta) \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.8b)$$

$$(iii) \quad L(\theta) = \Phi(k - \sqrt{n} \theta) - \Phi(-k - \sqrt{n} \theta) \quad \text{für} \quad (2.2c) \quad (2.8c)$$

Beweis Wir zeigen nur (2.8a). Die beiden anderen Fälle verlaufen analog. Wegen (2.1), (2.3), (2.5) und (2.7a) erhält man im Fall (2.2a)

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P_\theta(T \leq k) \\ &= P_\theta\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \leq k\right) \\ &= P_\theta\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq k - \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k - \theta \sqrt{n}), \end{aligned}$$

da $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist. Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

Bemerkung 2.1 Aus der OC-Bedingung (2.4a) und Satz 2.1 ergibt sich für den kritischen Wert des einstufigen Gaußtests

$$k = \begin{cases} \Phi^{-1}(1 - \alpha) & \text{für (2.2a)} \\ \Phi^{-1}(\alpha) & \text{für (2.2b)} \\ \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) & \text{für (2.2c)}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Sei $F_{r,\delta}$ die Verteilungsfunktion der nichtzentralen t-Verteilung mit r Freiheitsgraden ($r \in \mathbb{N}$) und Nichtzentralitätsparameter δ . Bekanntlich besitzt die Testgröße aus (2.6) eine nichtzentrale t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter

$$\delta = \sqrt{n} \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \quad (2.10)$$

(vergl. z.B. JOHNSON/ WELCH [8]). Aus (2.1), (2.7a, b, c) und (2.10) folgt sofort:

Satz 2.2 Für die OC des einstufigen t-Tests $\gamma = (n, k)$ gilt:

$$(i) \quad L(\theta) = F_{n-1, \delta(\theta)}(k) \quad \text{für (2.2a)} \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad L(\theta) = 1 - F_{n-1, \delta(\theta)}(k) \quad \text{für (2.2b)} \quad (2.12)$$

$$(iii) \quad L(\theta) = F_{n-1, \delta(\theta)}(k) - F_{n-1, \delta(\theta)}(-k) \quad \text{für (2.2c)} \quad (2.13)$$

mit $\delta(\theta) = \theta \sqrt{n}$.

Bemerkung 2.2 Sei $t_{r;p}$ das p -Quantil der zentralen t-Verteilung mit r Freiheitsgraden. Da die nichtzentrale $t_{r,\delta}$ -Verteilung für $\delta = 0$ mit der zentralen t_r -Verteilung zusammenfällt, erhält man aus (2.4a) und Satz 2.2 für den kritischen Wert des einfachen t-Tests

$$k = \begin{cases} t_{n-1;1-\alpha} & \text{für (2.2a)} \\ t_{n-1;\alpha} & \text{für (2.2b)} \\ t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} & \text{für (2.2c)}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Durch die zweite OC-Bedingung (2.4b) wird eine Anforderung an die Trennschärfe des Tests gestellt. Das bedeutet bei den einfachen Tests eine Forderung an den Stichprobenumfang n . Da dieser durch (2.4b) noch nicht eindeutig festgelegt ist, fordert man üblicherweise zusätzlich zur Zwei-Punkte-Bedingung (2.4a, b)

$$n \stackrel{!}{=} \min. \quad (2.15)$$

In den folgenden Beispielen geben wir für unterschiedliche Eingangsparameter θ_1, α, β einstufige ein- und zweiseitige Gauß- und t-Tests, ihre jeweiligen OC-Funktionen $L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ sowie die OC-Differenz $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ an.

Beispiel 2.1 $\theta_1 = 0.5, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.05$

(i) $H_0 : „\theta \leq 0“$ gegen $H_1 : „\theta \geq \theta_1“$

Gaußtest $\gamma_g = (44, 1.64485)$, t-Test $\gamma_t = (45, 1.68023)$

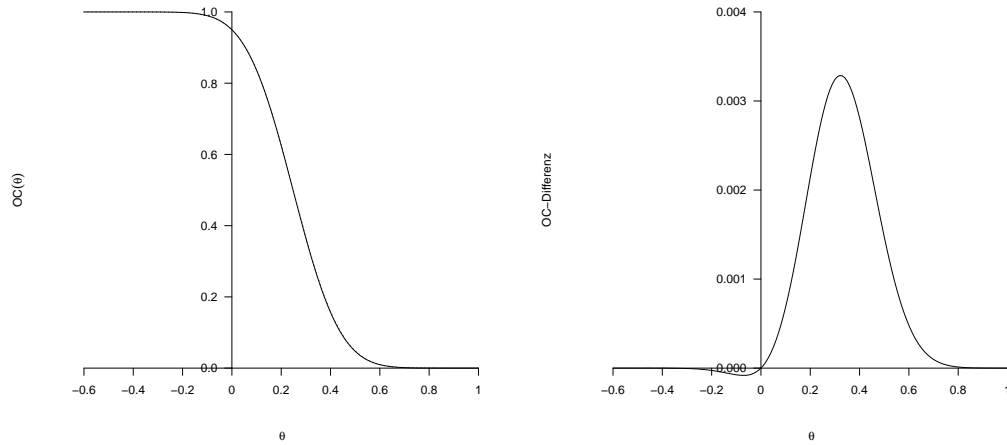


Abbildung 2.1: $L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im einseitigen Fall.

(ii) $H_0 : „\theta = 0“$ gegen $H_1 : „|\theta| \geq \theta_1“$

Gaußtest $\gamma_g = (52, 1.95996)$, t-Test $\gamma_t = (54, 2.00575)$

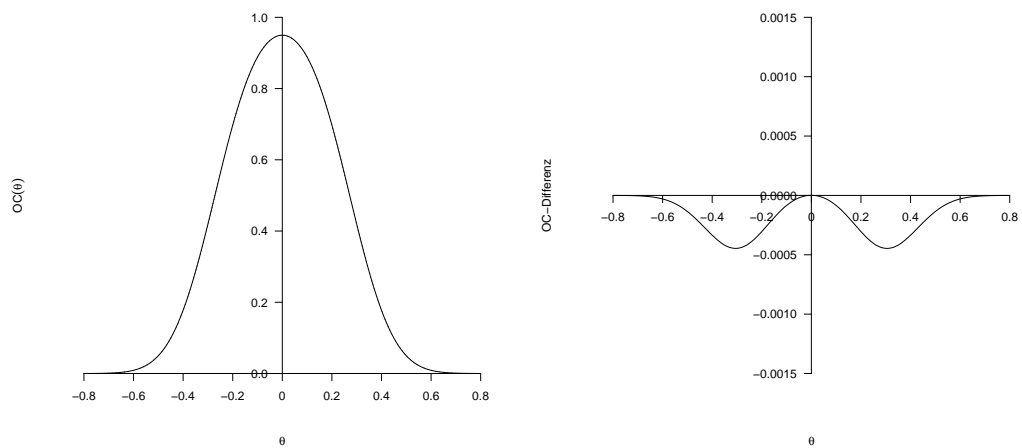


Abbildung 2.2: $L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im zweiseitigen Fall.

Beispiel 2.2 $\theta_1 = 0.25, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.05$

(i) $H_0 : „\theta \geq 0“$ gegen $H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$

Gaußtest $\gamma_g = (174, -1.64485), \quad t\text{-Test } \gamma_t = (175, -1.65366)$

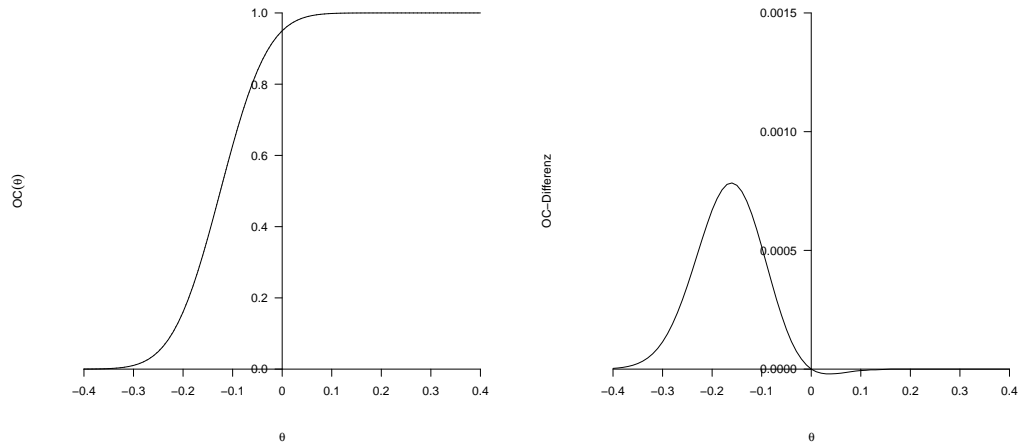


Abbildung 2.3: $L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im einseitigen Fall.

(ii) $H_0 : „\theta = 0“$ gegen $H_1 : „|\theta| \geq \theta_1“$

Gaußtest $\gamma_g = (208, 1.95996), \quad t\text{-Test } \gamma_t = (210, 1.97138)$

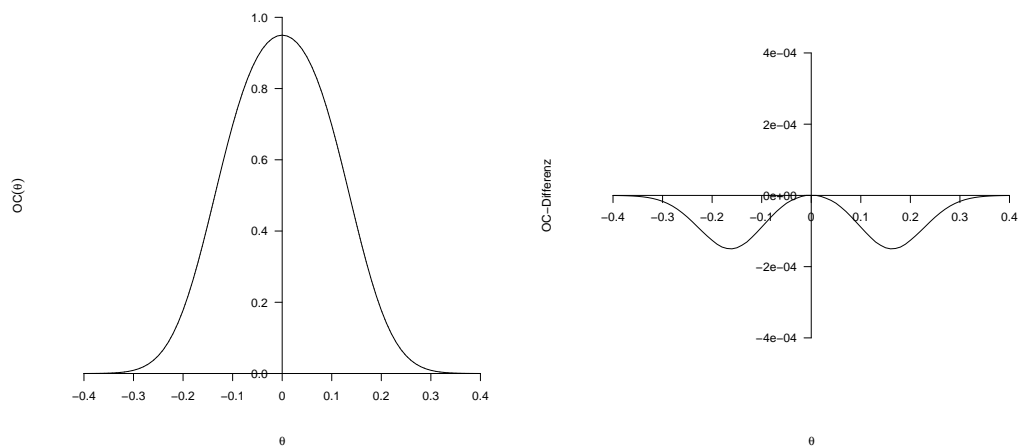


Abbildung 2.4: $L_{\gamma_g}, L_{\gamma_t}$ und $L_{\gamma_t} - L_{\gamma_g}$ im zweiseitigen Fall.

2.2 Der einfache Variablenprüfplan

Zur Verdeutlichung der Analogie zwischen dem einstufigen einseitigen Test und dem in der statistischen Qualitätssicherung etablierten einfachen Variablenprüfplan mit einseitiger Toleranzgrenze wird in diesem Abschnitt der einfache Variablenprüfplan zu einseitiger Toleranzgrenze, die o.B.d.A. eine obere sein kann, kurz beschrieben. Für ein $N(\mu, \sigma^2)$ -verteiltes Merkmal X ($\sigma > 0$) und eine obere Toleranzgrenze U ist der Ausschußanteil p gemäß

$$p := P(X \geq U) = \Phi\left(\frac{\mu - U}{\sigma}\right) \quad (2.16)$$

definiert. Nach Invertierung gilt:

$$\frac{\mu - U}{\sigma} = \Phi^{-1}(p). \quad (2.17)$$

Im Folgenden wird vom Fall der bekannten Varianz ausgegangen. Als Prüfgröße wird

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - U}{\sigma} \quad (2.18)$$

verwendet. Das Prüflot wird nach Anwendung des Prüfplans (n, k) genau dann angenommen, wenn

$$T \leq k. \quad (2.19)$$

Die OC des Plans (n, k) ist mit (2.17), (2.18), (2.19) gegeben gemäß

$$\tilde{L}_{(n,k)}(p) = \tilde{L}(p) := P_p(T \leq k) = \Phi(k - \sqrt{n} \Phi^{-1}(p)). \quad (2.20)$$

Sei L die OC des einstufigen einseitigen Gaußtests zur Testaufgabe (2.2a) und \tilde{L} die OC des einfachen Prüfplans (n, k) . Dann folgt aus (2.8a) und (2.20) sofort

Satz 2.3 Es gilt

$$L(\theta) = \tilde{L}(\Phi(\theta)). \quad (2.21)$$

Üblicherweise gibt man sich für den Prüfplan (n, k) eine Gutgrenze p_1 , eine Schlegelgrenze p_2 ($0 < p_1 < p_2 < 1$) sowie wie oben Fehlerniveaus α, β vor und fordert

$$\tilde{L}(p_1) = 1 - \alpha \quad (2.22a)$$

$$\tilde{L}(p_2) \leq \beta. \quad (2.22b)$$

Bemerkung 2.3 (i) Aus (2.4a, b), (2.21) und (2.22a, b) sieht man, dass der einstufige Gaußtest zu (2.2a) äquivalent ist zum einfachen Prüfplan mit denselben Niveaus α , β und der - in der Praxis eigentlich völlig uninteressanten - Gutgrenze

$$p_1 = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

sowie der Schlechtgrenze

$$p_2 = \Phi(\theta_1) > \frac{1}{2}.$$

(ii) Auch für den zweistufigen Gaußtest zu (2.2a) und den entsprechenden zweifachen Variablenprüfplan sowie für den einstufigen bzw. zweistufigen t-Test zu (2.2a) und den entsprechenden einfachen bzw. zweifachen Variablenprüfplan gilt ein Analogon zu Satz 2.3 und damit die analoge Aussage zu Bemerkungsteil (i).

2.3 Der zweistufige Gauß- und t-Test

Das von BOWKER/ GOODE [1] bereits 1952 vorgeschlagene zweistufige Testverfahren basiert auf einer ersten Stichprobe X_1, \dots, X_{n_1} , sowie auf einer zweiten Stichprobe $X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}$ bezüglich X . Sei \bar{X}_i der Mittelwert und S_i^2 die Stichprobenvarianz der i -ten Stichprobe ($i = 1, 2$). Ferner sei

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \quad (2.23)$$

das Gesamtmittel und

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 1} \left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i^2 - (n_1 + n_2) \bar{\bar{X}}^2 \right) \quad (2.24)$$

die Gesamtstichprobenvarianz. Im Folgenden werden die Teststatistiken

$$T_1 = \begin{cases} \sqrt{n_1} \frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{\sigma} & \text{für den Gaußtest,} \\ \sqrt{n_1} \frac{\bar{X}_1 - \mu_0}{S_1} & \text{für den t-Test} \end{cases} \quad (2.25)$$

und

$$T = \begin{cases} \sqrt{n_1 + n_2} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} & \text{für den Gaußtest,} \\ \sqrt{n_1 + n_2} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} & \text{für den t-Test} \end{cases} \quad (2.26)$$

verwendet.

Definition 2.1 Der zweistufige Gauß-, t-Test $\gamma = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}; n_1, n_2 \geq 2; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}; k_1 \leq k_2$ ist durch die folgende Testvorschrift gegeben

(1) Ziehe aus der zu testenden Grundgesamtheit eine erste Stichprobe der Länge n_1 und bilde die Testgröße T_1 . Nimm H_0 an, falls

$$(i) \quad T_1 \leq k_1 \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.27a)$$

$$(ii) \quad T_1 \geq k_2 \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.27b)$$

$$(iii) \quad |T_1| \leq k_1 \quad \text{für} \quad (2.2c), \quad (2.27c)$$

verwerfe H_0 , falls

$$(i) \quad T_1 > k_2 \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.28a)$$

$$(ii) \quad T_1 < k_1 \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.28b)$$

$$(iii) \quad |T_1| > k_2 \quad \text{für} \quad (2.2c), \quad (2.28c)$$

falls

$$(i) \quad k_1 < T_1 \leq k_2 \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.29a)$$

$$(ii) \quad k_1 \leq T_1 < k_2 \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.29b)$$

$$(iii) \quad k_1 < |T_1| \leq k_2 \quad \text{für} \quad (2.2c), \quad (2.29c)$$

gehe zu (2).

(2) Ziehe aus der zu testenden Grundgesamtheit eine zweite Stichprobe der Länge n_2 und bilde die Testgröße T . Nimm H_0 an, falls

$$(i) \quad T \leq k_3 \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.30a)$$

$$(ii) \quad T \geq k_3 \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.30b)$$

$$(iii) \quad |T| \leq k_3 \quad \text{für} \quad (2.2c), \quad (2.30c)$$

verwerfe H_0 , falls

$$(i) \quad T > k_3 \quad \text{für} \quad (2.2a) \quad (2.31a)$$

$$(ii) \quad T < k_3 \quad \text{für} \quad (2.2b) \quad (2.31b)$$

$$(iii) \quad |T| > k_3 \quad \text{für} \quad (2.2c). \quad (2.31c)$$

Satz 2.4 Die Operationscharakteristik des zweistufigen Gaußtests im einseitigen Fall (2.2a) ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned}
 L_{(\theta \leq 0)}(\theta) &= P(T_1 \leq k_1) + P(T \leq k_3, k_1 < T_1 \leq k_2) \\
 &= \Phi(k_1 - \theta\sqrt{n_1}) + \int_{k_1 - \theta\sqrt{n_1}}^{k_2 - \theta\sqrt{n_1}} \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2}} \left(-\theta\sqrt{n_1 + n_2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + k_3 - t\sqrt{\frac{n_1}{n_1 + n_2}} \right) \right\} \Phi'(t) dt. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Den Beweis liefert mit $p = \Phi(\theta)$ FELDMANN [5]. Analog kann für den Fall (2.2b) gezeigt werden

$$\begin{aligned}
 L_{(\theta \geq 0)}(\theta) &= P(T_1 \geq k_2) + P(T \geq k_3, k_1 \leq T_1 < k_2) \\
 &= \Phi(\theta\sqrt{n_1} - k_2) + \int_{k_1 - \theta\sqrt{n_1}}^{k_2 - \theta\sqrt{n_1}} \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2}} \left(\theta\sqrt{n_1 + n_2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - k_3 + t\sqrt{\frac{n_1}{n_1 + n_2}} \right) \right\} \Phi'(t) dt. \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4 Sei $\gamma_{(\theta \leq 0)} = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ der zweistufige Gaußtest zur Testaufgabe (2.2a) mit $\theta_1 > 0$. Dann ist

$$\gamma_{(\theta \geq 0)} = \begin{pmatrix} n_1 & -k_2 & -k_1 \\ n_2 & -k_3 & \end{pmatrix}$$

der entsprechende einseitige Test zur Testaufgabe

$$H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{gegen} \quad H_1 : „\theta \leq -\theta_1“.$$

Zwischen den OCs der beiden Tests besteht die Beziehung

$$L_{(\theta \geq 0)}(\theta) = L_{(\theta \leq 0)}(-\theta), \tag{2.34}$$

d.h. beide OCs sind spiegelsymmetrisch zur Ordinate.

Seien

$$\gamma(\theta \leq 0) = \begin{pmatrix} 14 & 0.693877 & 1.9355 \\ 11 & 1.74528 & \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma(\theta \geq 0) = \begin{pmatrix} 14 & -1.9355 & -0.693877 \\ 11 & -1.74528 & \end{pmatrix}$$

zwei einseitige zweistufige Gaußtests. Die OC-Funktionen

$$L_1 = L(\theta \leq 0) \quad \text{und} \quad L_2 = L(\theta \geq 0)$$

dieser Tests sind in der Abbildung 2.5 dargestellt.

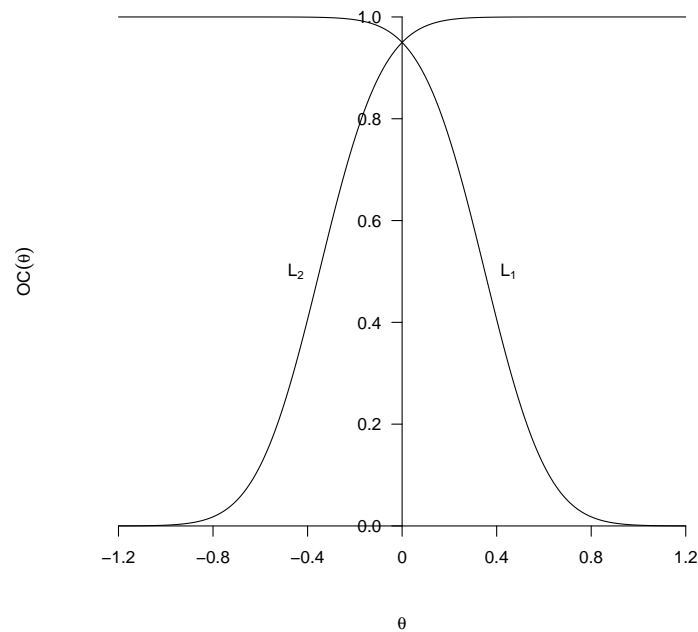


Abbildung 2.5: OC-Funktionen im einseitigen Fall.

Sei $Q_\gamma(\theta)$ die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung der zweiten Stichprobe eines beliebigen zweistufigen Tests γ . Dann heißt der Erwartungswert des Gesamtstichprobenumfangs

$$ASN_\gamma(\theta) = n_1 + n_2 Q_\gamma(\theta) \quad (2.35)$$

ASN-Funktion dieses Tests. Für die einseitigen zweistufigen Gaußtests lauten die ASN-Funktionen

$$\begin{aligned} ASN_\gamma(\theta) &= n_1 + n_2 P(k_1 < T_1 \leq k_2) \\ &= n_1 + n_2 \{ \Phi(k_2 - \theta\sqrt{n_1}) - \Phi(k_1 - \theta\sqrt{n_1}) \}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Analog zu den OC-Funktionen kann die Symmetrie der ASN-Funktionen

$$ASN_1 = ASN_{(\theta \leq 0)} \quad \text{und} \quad ASN_2 = ASN_{(\theta \geq 0)}$$

zur Ordinatenachse gezeigt werden (Abb. 2.6).

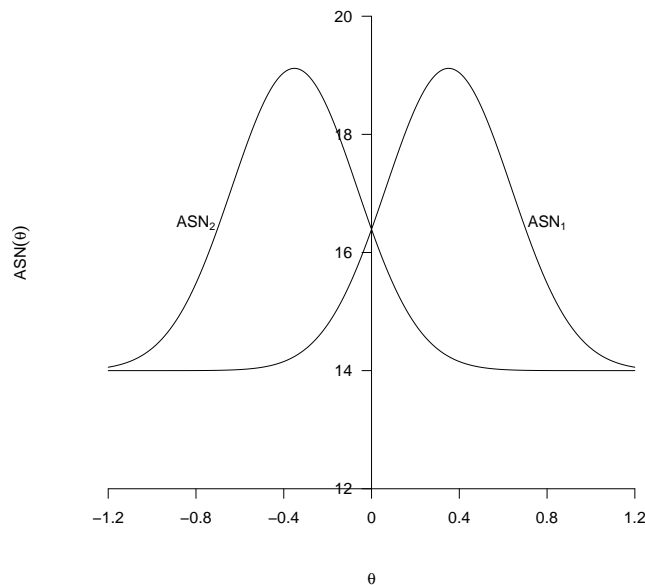


Abbildung 2.6: Symmetrie der ASN-Funktionen im einseitigen Fall.

Satz 2.5 Die ASN-Funktion eines einseitigen, zweistufigen Gaußtests γ besitzt genau einen Maximumwert

$$ASN_{max}(\gamma) = n_1 + n_2 \left\{ 2\Phi\left(\frac{k_2 - k_1}{2}\right) - 1 \right\}. \quad (2.37)$$

Den Beweis liefert FELDMANN/ KRUMBHOLZ [6].

Satz 2.6 Sei $\gamma = \begin{pmatrix} n_1 & k_1 & k_2 \\ n_2 & k_3 & \end{pmatrix}$ mit $k_1 < k_2$ und $k_1, k_3 > 0$ ein zweistufiger Gaußtest für den Fall (2.2c) und $P(A_1) = P(|T_1| \leq k_1)$, sowie $P(A_2) = P(|T| \leq k_3, k_1 < |T_1| \leq k_2)$. Die Operationscharakteristik dieses Tests ist gegeben gemäß

$$L(\theta) = P(A_1) + P(A_2) \quad (2.38)$$

mit

$$P(A_1) = \Phi(k_1 - \theta\sqrt{n_1}) - \Phi(-k_1 - \theta\sqrt{n_1}) \quad (2.39)$$

und

$$P(A_2) = \int_A^B f_1(t)dt - \int_A^B f_2(t)dt + \int_C^D f_1(t)dt - \int_C^D f_2(t)dt \quad (2.40)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= k_1 - \theta\sqrt{n_1}, & B &= k_2 - \theta\sqrt{n_1}, \\ C &= -k_2 - \theta\sqrt{n_1}, & D &= -k_1 - \theta\sqrt{n_1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2}} \left(\theta\sqrt{n_1 + n_2} + k_3 + t\sqrt{\frac{n_1}{n_1 + n_2}} \right) \right\} \Phi'(t) \\ f_2(t) &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_2}} \left(\theta\sqrt{n_1 + n_2} - k_3 + t\sqrt{\frac{n_1}{n_1 + n_2}} \right) \right\} \Phi'(t). \end{aligned}$$

Beweis Mit (2.7c) und (2.8c) ist (2.39) sofort ersichtlich. Aus

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(-k_3 \leq T \leq k_3, k_1 < T_1 \leq k_2) + \\ &\quad + P(-k_3 \leq T \leq k_3, -k_2 < T_1 \leq -k_1) \\ &= P(T \geq -k_3, k_1 < T_1 \leq k_2) - P(T > k_3, k_1 < T_1 \leq k_2) \\ &\quad + P(T \geq -k_3, -k_2 < T_1 \leq -k_1) - P(T > k_3, -k_2 < T_1 \leq -k_1) \end{aligned} \quad (2.41)$$

folgt (2.40). Damit ist Satz 2.6 bewiesen.

Bemerkung 2.5 Die OC-Funktion des zweiseitigen zweistufigen Gaußtests ist symmetrisch zur Ordinate (Abb. 2.7). Es gilt: $L_\gamma(\theta) = L_\gamma(-\theta)$.

Beweis Wegen der Symmetrie der Normalverteilung gilt:

$$\begin{aligned}
 L_\gamma(\theta) &= P(-k_1 \leq T_1 \leq k_1) \\
 &+ P(-k_3 \leq T \leq k_3, k_1 < T_1 \leq k_2) \\
 &+ P(-k_3 \leq T \leq k_3, -k_2 < T_1 \leq -k_1) \\
 &= P(-k_1 \leq -T_1 \leq k_1) \\
 &+ P(-k_3 \leq -T \leq k_3, -k_2 \leq -T_1 < -k_1) \\
 &+ P(-k_3 \leq -T \leq k_3, k_1 \leq -T_1 \leq k_2) = L_\gamma(-\theta).
 \end{aligned}$$

Damit ist Bemerkung 2.6 bewiesen.

Analog kann auch die Symmetrie der ASN-Funktion zur Ordinatenachse gezeigt werden (Abb. 2.7). Diese ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned}
 ASN_\gamma(\theta) &= n_1 + n_2 \{ \Phi(k_2 - \theta\sqrt{n_1}) - \Phi(k_1 - \theta\sqrt{n_1}) + \\
 &\quad + \Phi(-k_1 - \theta\sqrt{n_1}) - \Phi(-k_2 - \theta\sqrt{n_1}) \}. \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Sei

$$\gamma = \begin{pmatrix} 24 & 1.01416 & 2.23943 \\ 16 & 2.04385 & \end{pmatrix}$$

ein zweiseitiger zweistufiger Gaußtest. Die OC- und ASN-Funktion dieses Tests ist in der Abbildung 2.7 dargestellt.

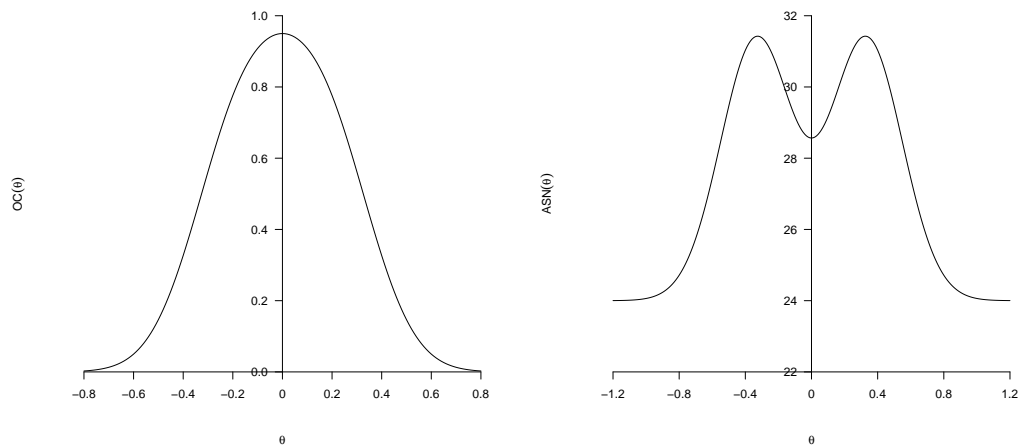


Abbildung 2.7: Symmetrie der OC- und ASN-Funktion im zweiseitigen Fall

Bemerkung 2.6 Der Wert der Maxima der ASN-Funktion kann in diesem Fall nicht explizit angegeben werden. Er wird für die Bestimmung der Minimaxtests numerisch errechnet. Wegen der Symmetrie der ASN-Funktion reicht eine Suche des Maximums im positiven Wertebereich des Parameters θ aus.

Für den Fall der unbekanntem Varianz geben KRUMBHOLZ/ ROHR [10] die OC-Funktion des zweifachen Variablenprüfplans mit einseitiger unterer Toleranzgrenze an. Diese OC-Funktion entspricht mit $p = \Phi(-\theta)$ der OC des zweistufigen t-Tests zu (2.2b).

Bemerkung 2.7 Die Erfahrung mit der Optimierung ein- und zweistufiger Testverfahren zu (2.2a) und der realistischen Annahme $\alpha \leq 0.1$ hat stets zu dem Ergebnis

$$0 \leq k < k_3 \quad (2.43)$$

geführt. Damit entfällt die Fallunterscheidung nach k_3 für die Angabe der OC-Funktion wie in KRUMBHOLZ/ ROHR [10]. Der Zusammenhang (2.43) spielt eine wesentliche Rolle beim Aufbau des Suchalgorithmus für die Festlegung der reellen Parameter k_1, k_2 und k_3 .

Die ASN-Funktion für die t-Tests zu (2.2a), (2.2b) ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned} ASN_\gamma(\theta) &= n_1 + n_2 P(k_1 \leq T_1 < k_2) \\ &= n_1 + n_2 \{F_{n_1-1, \delta(\theta)}(k_2) - F_{n_1-1, \delta(\theta)}(k_1)\}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Bemerkung 2.8 Die in den Abb. 2.5, 2.6 dargestellten Eigenschaften der OC- und ASN-Funktionen der einseitigen zweistufigen Gaußtests sind wegen der Symmetrie der nichtzentralen t-Verteilung für die OC- und ASN-Funktionen der einseitigen t-Tests analog übertragbar. Der Wert des ASN-Maximums für den t-Fall muss jedoch numerisch bestimmt werden.

Kapitel 3

Die OC im zweiseitigen t-Fall

Die OC-Funktion des zweiseitigen, zweistufigen t-Tests ist gegeben gemäß

$$L(\theta) = P(A_1) + P(A_2), \quad (3.1)$$

mit

$$P(A_1) = F_{n_1-1, \delta(\theta)}(k_1) - F_{n_1-1, \delta(\theta)}(-k_1), \quad (3.2)$$

wobei

$$\delta(\theta) = \sqrt{n_1} \theta \quad (3.3)$$

gilt. $P(A_2)$ kann analog zum zweiseitigen zweistufigen Gaußtest mit Hilfe der $P(A_2)$ des einseitigen zweistufigen t-Tests ermittelt werden. Sie bestünde in diesem Fall aus vier dreifachen Integralen. Im Folgenden wird eine Formel hergeleitet, die die Angabe der $P(A_2)$ als Summe von zwei dreifachen Integralen erlaubt. Die Implementierung dieser Formel benötigt weniger Rechenkapazität. Seien für $i = 1, 2$

$$Y_i = \sqrt{n_i} \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad (3.4)$$

$$W_i = \frac{n_i - 1}{\sigma^2} S_i^2 \sim \chi_{n_i-1}^2. \quad (3.5)$$

Nach Testkonstruktion gilt:

$$P(A_2) = P(|T| \leq k_3, k_1 < |T_1| \leq k_2),$$

mit

$$\{k_1 < |T_1| \leq k_2\} = \{k_1 < T_1 \leq k_2\} \cup \{-k_2 \leq T_1 < -k_1\}.$$

Mit (3.4) und (3.5) gilt weiterhin:

$$T_1 = \sqrt{n_1 - 1} \frac{Y_1 + \delta(\theta)}{\sqrt{W_1}} \quad (3.6)$$

und für gegebenes $W_1 = w_1$

$$k_1 < T_1 \leq k_2 \Leftrightarrow a_1(w_1) < Y_1 \leq a_2(w_1), \quad (3.7)$$

mit

$$a_i(w_1) = \frac{k_i}{\sqrt{n_1 - 1}} \sqrt{w_1} - \delta(\theta) \quad (i = 1, 2). \quad (3.8)$$

Ebenso gilt:

$$-k_2 \leq T_1 < -k_1 \Leftrightarrow -a_2(w_1) - 2\delta(\theta) \leq Y_1 < -a_1(w_1) - 2\delta(\theta). \quad (3.9)$$

Mit Hilfe des Satzes für die totale Wahrscheinlichkeitszerlegung kann $P(A_2)$ gemäß

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \int_0^\infty \left(\int_{a_1(w_1)}^{a_2(w_1)} I(w_1, y_1) \Phi'(y_1) dy_1 \right) g_{n_1-1}(w_1) dw_1 \\ &+ \int_0^\infty \left(\int_{-a_2(w_1)-2\delta(\theta)}^{-a_1(w_1)-2\delta(\theta)} J(w_1, y_1) \Phi'(y_1) dy_1 \right) g_{n_1-1}(w_1) dw_1, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I(w_1, y_1) = J(w_1, y_1) &= \int_0^\infty P(|T| \leq k_3 | W_1 = w_1, Y_1 = y_1, W_2 = w_2) \times \\ &\times g_{n_2-1}(w_2) dw_2 \end{aligned}$$

angegeben werden. Die Spezifizierung der Funktionen $I(w_1, y_1)$, $J(w_1, y_1)$ erfolgt über die Untersuchung der Ungleichung

$$-k_3 \leq T \leq k_3. \quad (3.10)$$

Lemma 3.1 Für die gepoolte Testgröße T gilt:

$$T = \frac{\sqrt{n_1 + n_2 - 1} (\sqrt{n_1} Y_1 + \sqrt{n_2} Y_2 + (n_1 + n_2) \theta)}{\sqrt{(n_1 + n_2) (W_1 + W_2) + (\sqrt{n_2} Y_1 - \sqrt{n_1} Y_2)^2}}. \quad (3.11)$$

Den Beweis liefern KRUMBHOLZ/ ROHR [10].

Zu gegebenen $W_1 = w_1$, $Y_1 = y_1$, $W_2 = w_2$ hängt die Ungleichung (3.10) von Y_2 ab. Mit

$$A = A(y_1) = \sqrt{n_1 + n_2 - 1} (\sqrt{n_1} y_1 + (n_1 + n_2) \theta), \quad (3.12)$$

$$B = \sqrt{n_2} (n_1 + n_2 - 1), \quad (3.13)$$

$$C = C(w_1, w_2) = (n_1 + n_2) (w_1 + w_2), \quad (3.14)$$

$$m(x) = A + Bx \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (3.15)$$

$$n(x) = k_3 \sqrt{C + (\sqrt{n_2} y_1 - \sqrt{n_1} x)^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (3.16)$$

gilt:

$$-k_3 \leq T \leq k_3 \Leftrightarrow -n(Y_2) \leq m(Y_2) \leq n(Y_2). \quad (3.17)$$

Die Spezifizierung der Funktionen $I(w_1, y_1)$, $J(w_1, y_1)$ hängt damit von den Schnittpunkten der Funktionen $m(x)$ und $n(x)$ ab. Die Hyperbel $n(x)$ hat ein

Minimum in $x = R = y_1 \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}$ sowie die Asymptoten

$$a(x) = k_3 \sqrt{n_1} x - k_3 \sqrt{n_1} y_1 \quad (3.18)$$

für $x \rightarrow \infty$ und $-a(x)$ für $x \rightarrow -\infty$. $n(x)$ und $-n(x)$ sind symmetrisch zur Abszissenachse. R ist der gemeinsame Schnittpunkt der Asymptoten mit der Abszissenachse. Die Anzahl und Lage der Schnittpunkte der Hyperbel $n(x)$ mit der Geraden $m(x)$ hängt von den Steigungen der Geraden $m(x)$ und $a(x)$ ab. Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

- (i) $m(x)$ ist steiler als $a(x)$,
- (ii) $m(x)$ und $a(x)$ sind parallel und
- (iii) $a(x)$ ist steiler als $m(x)$.

Für alle drei Fälle wird Lemma 3.2 benötigt.

Lemma 3.2 Es gilt:

$$y_1 \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} - \frac{A}{B} \iff y_1 \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} - \delta(\theta). \quad (3.19)$$

Den Beweis liefern KRUMBHOLZ/ ROHR [10].

Fall 1: $B > k_3 \sqrt{n_1}$

Dieser Fall ist in der Abb. 3.1 dargestellt.

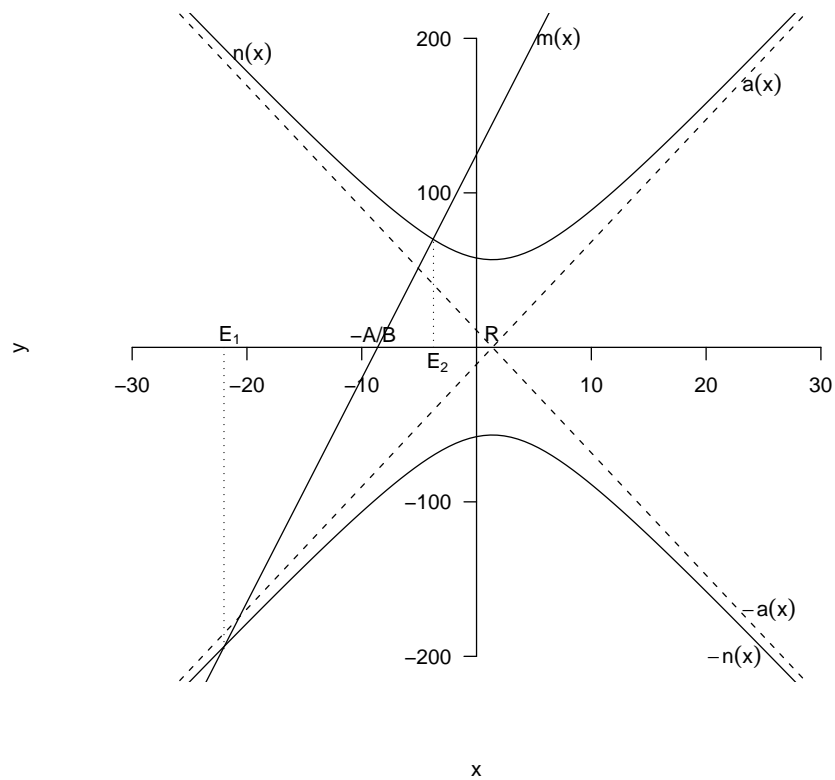


Abbildung 3.1: Fall 1: $m(x)$ steiler als $a(x)$.

Es gibt den Schnittpunkt E_2 zwischen $m(x)$ und $n(x)$, sowie E_1 zwischen $m(x)$ und $-n(x)$. E_1, E_2 lassen sich als Lösungen des aus den Gleichungen $m(x) = n(x)$ und $m(x) = -n(x)$ resultierenden Polynoms zweiten Grades

$$(B^2 - k_3^2 n_1) x^2 + 2x (AB + k_3^2 \sqrt{n_1 n_2} y_1) = k_3^2 C + k_3^2 n_2 y_1^2 - A^2 \quad (3.20)$$

bestimmen. (3.20) lässt sich schreiben als

$$(x + D)^2 = H \quad (3.21)$$

mit

$$D = D(y_1) = \frac{AB + k_3^2 y_1 \sqrt{n_1 n_2}}{B^2 - n_1 k_3^2}, \quad (3.22)$$

$$H = H(w_1, y_1, w_2) = \frac{k_3^2 C + k_3^2 n_2 y_1^2 - A^2}{B^2 - n_1 k_3^2} + D^2. \quad (3.23)$$

Da in diesem Fall wegen $B > k_3 \sqrt{n_1}$, $H > 0$ gilt, hat (3.21) die zwei Lösungen

$$E_1 = E_1(w_1, y_1, w_2) = -D - \sqrt{H}, \quad (3.24)$$

$$E_2 = E_2(w_1, y_1, w_2) = -D + \sqrt{H}. \quad (3.25)$$

Lemma 3.3 Es gilt:

$$-n(Y_2) \leq m(Y_2) \leq n(Y_2) \Leftrightarrow E_1 \leq Y_2 \leq E_2. \quad (3.26)$$

Damit folgt:

$$I(w_1, y_1) = J(w_1, y_1) = \int_0^\infty \{\Phi(E_2) - \Phi(E_1)\} g_{n_2-1}(w_2) dw_2.$$

Fall 2: $B = k_3 \sqrt{n_1}$

In diesem Fall gibt es einen Schnittpunkt E zwischen $m(x)$ und $n(x)$ oder $-n(x)$ (Abb. 3.2). $m(x)$ kann dabei die Lage von $m_1(x)$ oder $m_2(x)$ annehmen. Nach Lemma 3.2 gilt für die Gerade $m_1(x)$:

$$y_1 > -\delta(\theta),$$

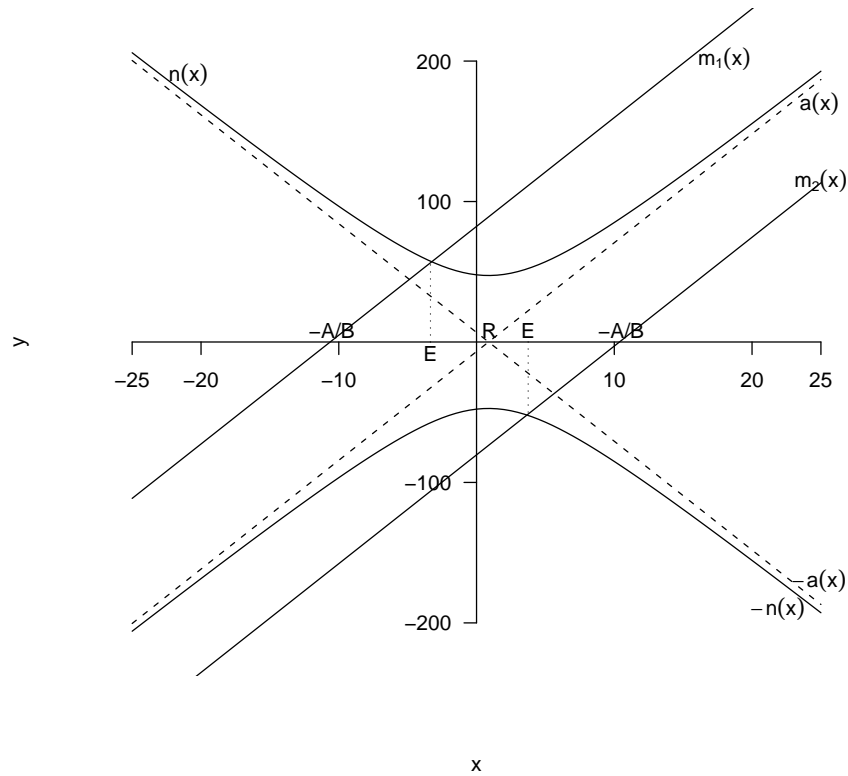
für $m_2(x)$:

$$y_1 < -\delta(\theta).$$

E wird in diesem Fall für $y_1 \neq -\delta(\theta)$ gemäß

$$E = E(w_1, y_1, w_2) = \frac{k_3^2 C + k_3^2 n_2 y_1^2 - A^2}{2(AB + k_3^2 \sqrt{n_1 n_2} y_1)} \quad (3.27)$$

bestimmt.


 Abbildung 3.2: Fall 2: $m(x)$ und $a(x)$ haben gleiche Steigung.

Lemma 3.4 Im Fall $B = k_3 \sqrt{n_1}$

(i) falls $y_1 > -\delta(\theta)$ gilt: $E > -A/B$ und

$$-n(Y_2) \leq m(Y_2) \leq n(Y_2) \Leftrightarrow Y_2 \leq E, \quad (3.28)$$

(ii) falls $y_1 < -\delta(\theta)$ gilt: $E < -A/B$ und

$$-n(Y_2) \leq m(Y_2) \leq n(Y_2) \Leftrightarrow Y_2 \geq E. \quad (3.29)$$

Damit folgt:

(i) wegen

$$-\delta(\theta) \leq -\delta(\theta) + \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \sqrt{w_1} \leq y_1$$

gilt:

$$I(w_1, y_1) = \int_0^{\infty} \Phi(E) g_{n_2-1}(w_2) dw_2,$$

(ii) wegen

$$y_1 \leq -\delta(\theta) - \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \sqrt{w_1} \leq -\delta(\theta)$$

gilt:

$$J(w_1, y_1) = \int_0^{\infty} \{1 - \Phi(E)\} g_{n_2-1}(w_2) dw_2.$$

Fall 3: $B < k_3 \sqrt{n_1}$

Die Lage der Funktionen $m(x)$, $n(x)$, $-n(x)$, $a(x)$ ist in der Abbildung 3.3 dargestellt. Es gibt für $H > 0$ immer zwei Schnittpunkte E_1 , E_2 zwischen $m(x)$ und $n(x)$ bzw. $-n(x)$. Das folgende Lemma gilt unabhängig davon, ob die Gerade $m(x)$ die Lage von $m_1(x)$ oder von $m_2(x)$ annimmt.

Lemma 3.5 Im Fall $B < k_3 \sqrt{n_1}$ mit $H > 0$ gilt:

$$-n(Y_2) \leq m(Y_2) \leq n(Y_2) \Leftrightarrow Y_2 \leq E_1 \vee Y_2 \geq E_2. \quad (3.30)$$

Die Zusatzbedingung $H > 0$ in diesem Fall erfordert im Gegensatz zu den vorherigen zwei Fällen eine Einschränkung der Integrationsgrenzen. Sei

$$K(y_1) = \frac{(n_1 k_3^2 - B^2) D^2 + A^2 - n_2 k_3^2 y_1^2}{k_3^2 (n_1 + n_2)}. \quad (3.31)$$

Lemma 3.6 Im Fall $B < k_3 \sqrt{n_1}$ gilt:

$$H > 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_2 < K(y_1) - w_1. \quad (3.32)$$

$K(y_1)$ kann auch nach dem folgenden Lemma ausgedrückt werden.

Lemma 3.7 Mit $B < k_3 \sqrt{n_1}$ gilt:

$$K(y_1) = \frac{(n_1 + n_2) (n_1 + n_2 - 1)}{n_1 k_3^2 - B^2} (y_1 + \delta(\theta))^2. \quad (3.33)$$

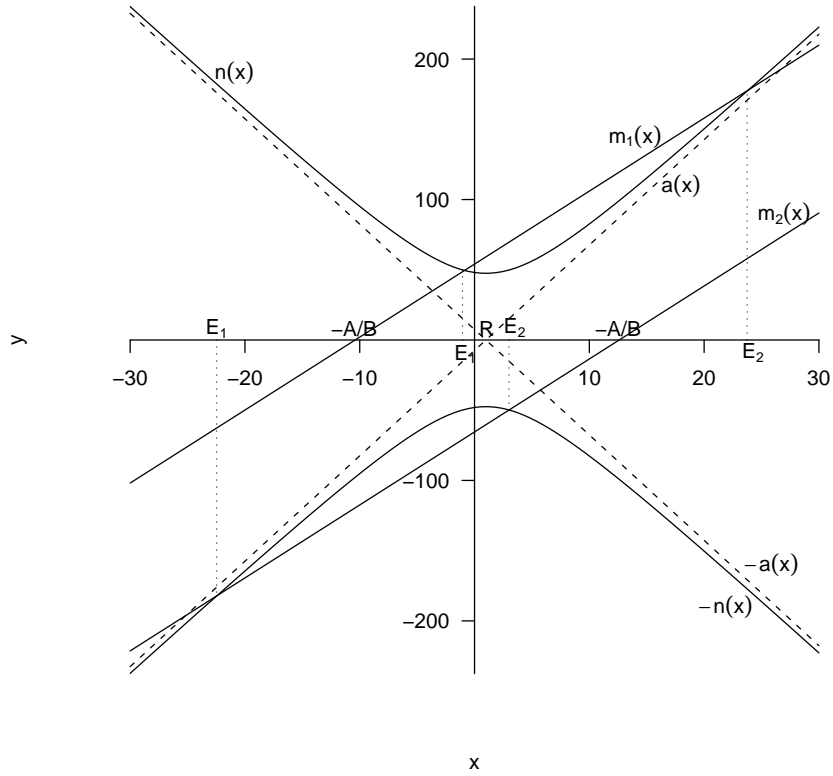


Abbildung 3.3: Fall 3: $a(x)$ steiler als $m(x)$.

Den Beweis der Lemmata 3.6, 3.7 liefern KRUMBHOLZ/ ROHR [10]. Da $K(y_1) - w_1$ nach Lemma 3.6 als Obergrenze des inneren Integrals dient, muss für die Erfüllung der Bedingung $P(A_2) \neq 0$ gelten:

$$K(y_1) - w_1 > 0. \quad (3.34)$$

Mit Lemma 3.7 ist dies äquivalent zu

$$y_1 < b_1(w_1) \quad \vee \quad y_1 > b_2(w_1), \quad (3.35)$$

wobei

$$b_1(w_1) = -Q\sqrt{w_1} - \delta(\theta) < -\delta(\theta), \quad (3.36)$$

$$b_2(w_1) = Q\sqrt{w_1} - \delta(\theta) > -\delta(\theta), \quad (3.37)$$

$$Q = \sqrt{\frac{n_1 k_3^2 - B^2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)}} \quad (3.38)$$

gilt. Für die Integrationsgebiete der mittleren Integrale müssen (3.7) und (3.35) im Fall $y_1 > -\delta(\theta)$, sowie (3.9) und (3.35) im Fall $y_1 < -\delta(\theta)$ gleichzeitig gelten. Es gilt also:

$$M(w_1) = [a_1(w_1), a_2(w_1)] \setminus [b_1(w_1), b_2(w_1)]. \quad (3.39)$$

Falls $y_1 > -\delta(\theta)$ gilt:

$$b_1(w_1) < -\delta(\theta) < a_1(w_1) < a_2(w_1). \quad (3.40)$$

Je nach Lage von $b_2(w_1)$ müssen folgende Fälle unterschieden werden:

$$(i) \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \geq Q$$

In diesem Fall gilt:

$$a_1(w_1) \geq b_2(w_1) \Rightarrow M(w_1) = [a_1(w_1), a_2(w_1)]. \quad (3.41)$$

$$(ii) \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} < Q$$

In diesem Fall gilt: $a_1(w_1) < b_2(w_1)$. Es ergeben sich zwei Unterfälle:

$$(1) \frac{k_2}{\sqrt{n_1 - 1}} \geq Q$$

Damit gilt:

$$a_2(w_1) \geq b_2(w_1) \Rightarrow M(w_1) = [b_2(w_1), a_2(w_1)]. \quad (3.42)$$

$$(2) \frac{k_2}{\sqrt{n_1 - 1}} < Q$$

Es gilt:

$$a_2(w_1) < b_2(w_1) \Rightarrow M(w_1) = \emptyset. \quad (3.43)$$

Falls $y_1 < -\delta(\theta)$ gilt:

$$-a_2(w_1) - 2\delta(\theta) < -a_1(w_1) - 2\delta(\theta) < -\delta(\theta) < b_2(w_1). \quad (3.44)$$

Je nach Lage von $b_1(w_1)$ müssen folgende Fälle unterschieden werden:

$$(i) \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \geq Q$$

In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} &\leq -Q, \\ -\frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \sqrt{w_1} - \delta(\theta) &\leq -Q \sqrt{w_1} - \delta(\theta), \\ -\frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} \sqrt{w_1} + \delta(\theta) - 2\delta(\theta) &\leq -Q \sqrt{w_1} + \delta(\theta) - 2\delta(\theta), \\ -a_1(w_1) - 2\delta(\theta) &\leq b_1(w_1) < -\delta(\theta). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$N(w_1) = [-a_2(w_1) - 2\delta(\theta), -a_1(w_1) - 2\delta(\theta)]. \quad (3.45)$$

$$(ii) \frac{k_1}{\sqrt{n_1 - 1}} < Q$$

In diesem Fall gilt: $-a_1(w_1) - 2\delta(\theta) > b_1(w_1)$. Es ergeben sich zwei Unterfälle:

$$(1) \frac{k_2}{\sqrt{n_1 - 1}} \geq Q$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} -a_2(w_1) - 2\delta(\theta) &\leq b_1(w_1) \\ \Rightarrow N(w_1) &= [-a_2(w_1) - 2\delta(\theta), b_1(w_1)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$(2) \frac{k_2}{\sqrt{n_1 - 1}} < Q$$

Es gilt:

$$-a_2(w_1) - 2\delta(\theta) > b_1(w_1) \Rightarrow N(w_1) = \emptyset. \quad (3.47)$$

Damit ist die Herleitung der Formel für die Berechnung der $P(A_2)$ abgeschlossen. Die ASN-Funktion des zweiseitigen t-Tests ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned} ASN_\gamma(\theta) &= n_1 + n_2 \{ F_{n_1-1, \delta(\theta)}(k_2) - F_{n_1-1, \delta(\theta)}(k_1) + \\ &\quad + F_{n_1-1, \delta(\theta)}(-k_1) - F_{n_1-1, \delta(\theta)}(-k_2) \}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Bemerkung 3.1 Die Symmetrieeigenschaften der OC- und ASN-Funktion im zweiseitigen Gaußfall lassen sich wegen der Symmetrie der nichtzentralen t-Verteilung für den zweiseitigen t-Test analog übertragen. Die Bestimmung des ASN-Maximums erfolgt im zweiseitigen t-Fall ebenfalls numerisch.

Mit den Grundlagen aus Kapitel 2 sowie der OC- und ASN-Funktion für den zweiseitigen zweistufigen t-Test können im nächsten Kapitel Beispiele des zweistufigen Minimax-, Integral- und Minimax-Integral-Tests im Gauß- und t-Fall angegeben werden.

Kapitel 4

ASN-optimale zweistufige Tests

Sei $L(\theta)$ die OC eines zweistufigen Tests γ . γ heißt zugelassen, wenn zu vorgegebenen α, β, θ_1 (2.4a) und (2.4b) erfüllt sind.

Definition 4.1 Sei Z die Menge aller zugelassenen zweistufigen Tests, ASN_{max} der Maximumwert der ASN-Funktion, F_{ASN} die Fläche unter der ASN-Funktion und $\varepsilon > 0$.

(i) Ein Test $\gamma^* \in Z$, der

$$ASN_{max}(\gamma^*) = \min_{\gamma \in Z} ASN_{max}(\gamma)$$

erfüllt, heißt ASN-Minimax-Test (AM-Test).

(ii) Ein Test $\gamma_F \in Z$, der

$$F_{ASN}(\gamma_F) = \min_{\gamma \in Z} F_{ASN}(\gamma)$$

erfüllt, heißt ASN-Integral-Test (AI-Test).

(iii) Ein Test $\gamma(\varepsilon) \in Z$, der

$$\begin{aligned} ASN_{max}(\gamma(\varepsilon)) &\leq (1 + \varepsilon) ASN_{max}(\gamma^*), \\ F_{ASN}(\gamma(\varepsilon)) &= \min_{\gamma \in Z} F_{ASN}(\gamma) \end{aligned}$$

erfüllt, heißt ASN-Minimax-Integral-Test (AMI-Test).

Im Folgenden geben wir Beispiele der AM-, AI- und AMI-Tests, die mit dem im Kapitel 5 noch zu erläuternden Algorithmus berechnet worden sind.

4.1 Zweistufige Minimax-Tests

Die Verwendung des ASN-Minimax-Kriteriums als Optimalitätskriterium bei zweistufigen Testverfahren wurde von KRUMBHOLZ ET AL. [9] im Rahmen der zweistufigen Attributprüfung in der statistischen Qualitätssicherung vorgeschlagen. ASN-Minimaxtests neigen dazu, eine Entscheidung über Annahme oder Ablehnung einer Hypothese möglichst nach der Ziehung der ersten Stichprobe herbeizuführen. Für diese Tests gilt in der Regel:

$$n_2 \leq n_1 \quad \text{und} \quad P(A_2) \leq P(A_1).$$

Im Folgenden werden zur Verdeutlichung einige Minimaxbeispiele des Gauß- und t-Tests angegeben.

Beispiel 4.1 $\theta_1 = 0.725, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.05$

(i) Einseitiger Gaußtest zu (2.2a)

- Einstufig: $\gamma(\theta \leq 0) = (21, 1.64485)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta \leq 0) = \begin{pmatrix} 13, & 0.660324, & 1.95340 \\ 10, & 1.73861 \end{pmatrix}$

mit $ASN_{max} = 17.8207$ und einer Ersparnis $E = 15.1395 \%$ gegenüber dem einstufigen Test (Abb. 4.1).

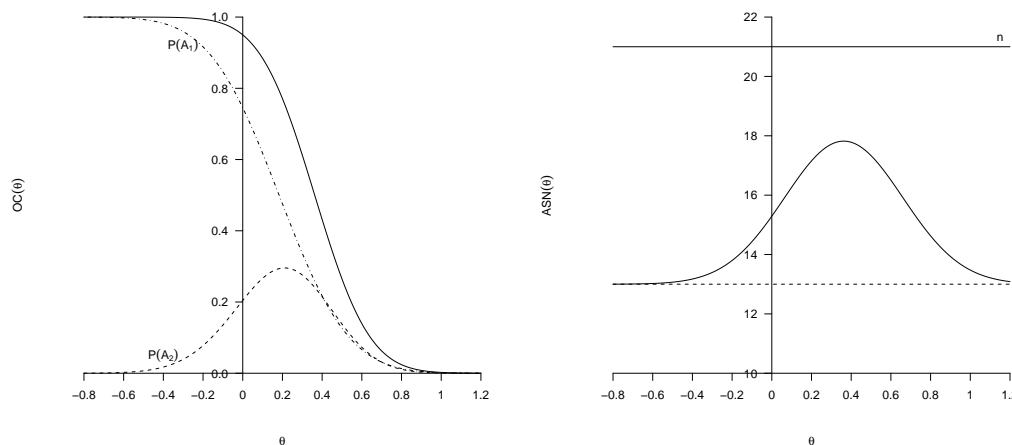


Abbildung 4.1: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma(\theta \leq 0)$ zu $\theta_1 = 0.725, \alpha = \beta = 0.05$

(ii) Einseitiger Gaußtest zu (2.2b)

$$H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{gegen} \quad H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$$

- Einstufig: $\gamma(\theta \leq 0) = (21, -1.64485)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta \leq 0) = \begin{pmatrix} 13, & -1.95340, & -0.660324 \\ 10, & -1.73861 \end{pmatrix}$

mit ASN_{max} und E wie in (i) (Abb. 4.2).

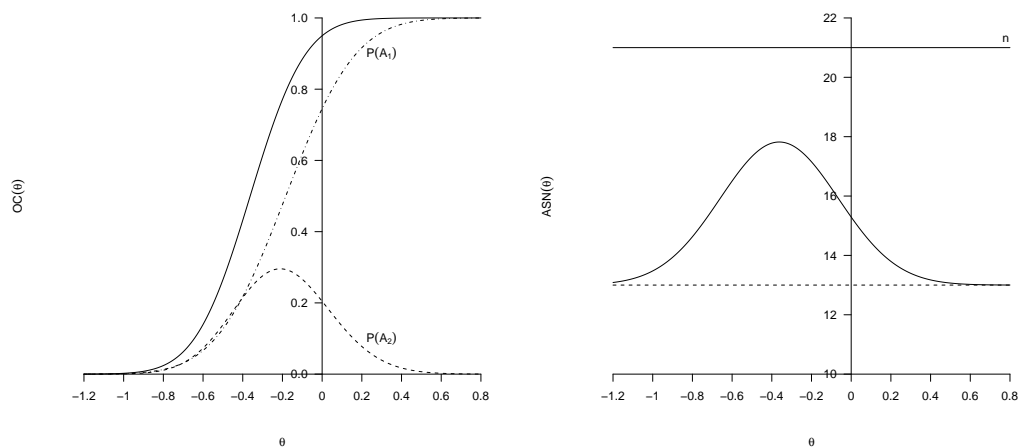


Abbildung 4.2: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma(\theta \geq 0)$ zu $\theta_1 = -0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

(iii) Zweiseitiger Gaußtest zu (2.2c)

- Einstufig: $\gamma(\theta = 0) = (25, 1.95996)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 16, & 1.00147, & 2.21844 \\ 12, & 2.05992 \end{pmatrix}$

mit $ASN_{max} = 21.5416$ und $E = 13.8334\%$ gegenüber dem einstufigen Test (Abb. 4.3).

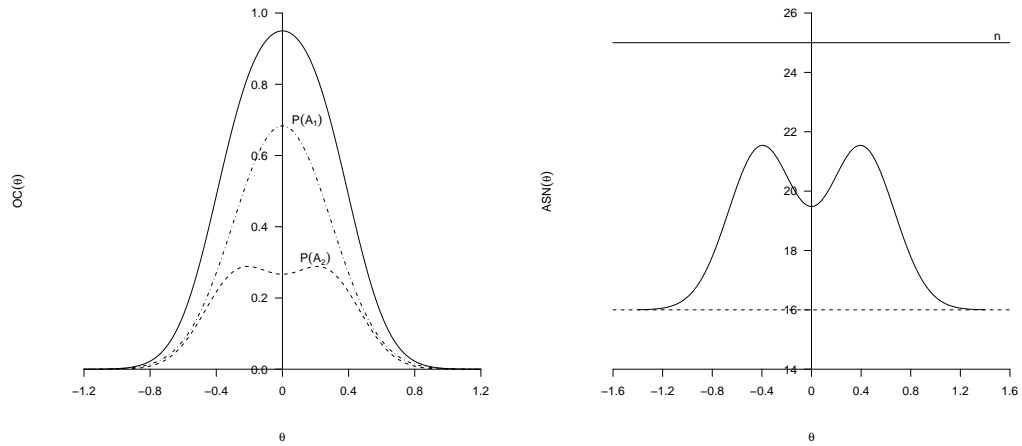


Abbildung 4.3: OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

(iv) Einseitiger t-Test zu (2.2a)

- Einstufig: $\gamma_{(\theta \leq 0)} = (23, 1.71714)$

- Zweistufig: $\gamma_{\theta \leq 0} = \begin{pmatrix} 15, & 0.900082, & 2.07530 \\ 10, & 1.84119 \end{pmatrix}$

mit $ASN_{max} = 19.1996$ und $E = 16.5233\%$ (Abb. 4.4).

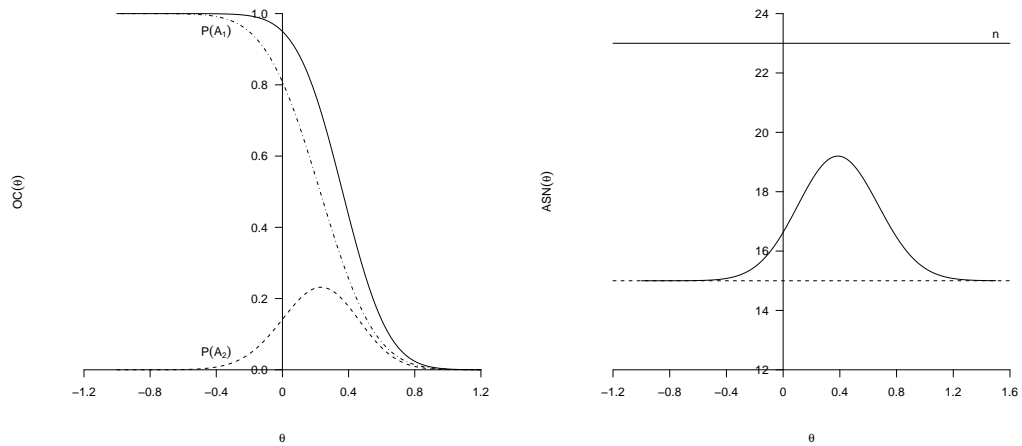


Abbildung 4.4: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

(v) Einseitiger t-Test zu (2.2b)

$$H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{gegen} \quad H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$$

- Einstufig: $\gamma_{(\theta \geq 0)} = (23, -1.71714)$

- Zweistufig: $\gamma_{\theta \geq 0} = \begin{pmatrix} 15, & -2.07530, & -0.900082 \\ 10, & -1.84119 \end{pmatrix}$

mit ASN_{max} und E wie in (iv) (Abb. 4.5).

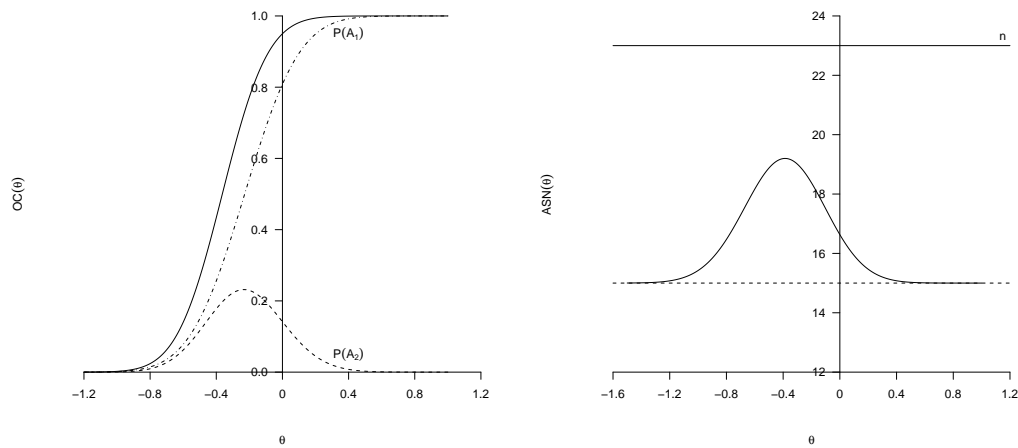


Abbildung 4.5: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

(vi) Zweiseitiger t-Test zu (2.2c)

- Einstufig: $\gamma_{(\theta = 0)} = (27, 2.05553)$

- Zweistufig: $\gamma_{(\theta = 0)} = \begin{pmatrix} 18, & 1.16415, & 2.43485 \\ 12, & 2.15831 \end{pmatrix}$

mit $ASN_{max} = 23.408$ und $E = 13.3036\%$ gegenüber dem einstufigen Test (Abb. 4.6).

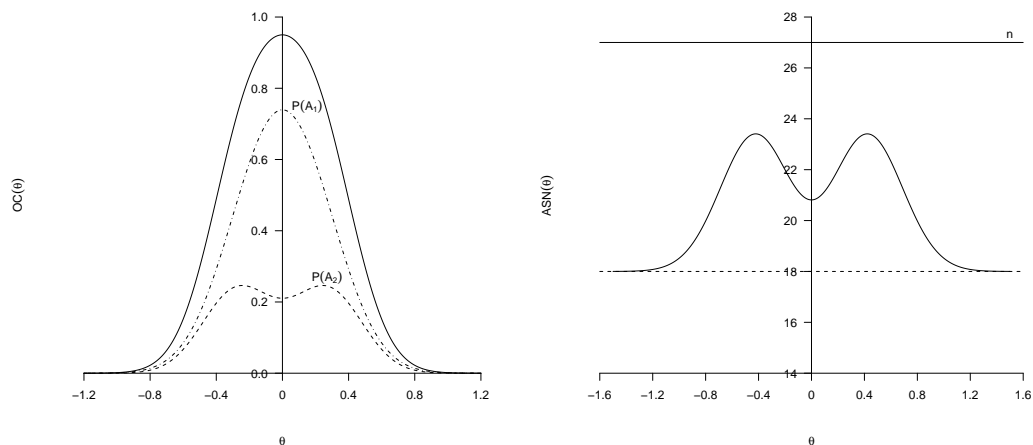


Abbildung 4.6: OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

4.2 Zweistufige Integral-Tests

Die Verwendung des ASN-Integral-Kriteriums und ASN-Minimax-Integral-Kriteriums als Optimalitätskriterium bei zweistufigen Testverfahren wurde von EICHWEDE/ KRUMBHOLZ [4] vorgeschlagen. Für einen beliebigen Test γ sei

$$F(\gamma) := \int_{-3}^{+3} ASN_{\gamma}(\theta) d\theta$$

die Fläche unter der ASN-Funktion. Der optimale ASN-Integral Test weist unter allen zugelassenen Tests, die minimale Fläche $F(\gamma)$ auf. Die Festlegung des Integrationsbereiches $M(\theta) = [-3, 3]$ beruht auf der durch Erfahrung bestätigten Annahme, dass der relevante Teil der ASN-Funktion im einseitigen Fall innerhalb des Bereiches $M(\theta)$ liegt. Für $\theta < -3 \wedge \theta > 3$ gilt:

$$ASN_{\gamma}(\theta) = n_1.$$

Die ASN-Integraltests neigen dazu, eine Entscheidung über Annahme oder Ablehnung einer Hypothese möglichst nach der Ziehung der zweiten Stichprobe herbeizuführen. Für diese Tests gilt:

$$n_1 \ll n_2$$

und im relevanten Bereich $[0, \theta_1]$ bzw. $[-\theta_1, 0]$:

$$P(A_2) > P(A_1).$$

Im Folgenden geben wir Beispiele von ASN-Integraltests.

Beispiel 4.2 $\theta_1 = 0.3, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.05$

(i) Einseitiger Gaußtest zu (2.2a)

- Einstufig: $\gamma(\theta \leq 0) = (121, 1.64485)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta \leq 0) = \begin{pmatrix} 17, & -0.816251, & 1.95432 \\ 137, & 1.91362 \end{pmatrix}$

mit $F = 185.308$. Die OC- und ASN-Funktion dieses Tests ist in der Abbildung 4.7 dargestellt.

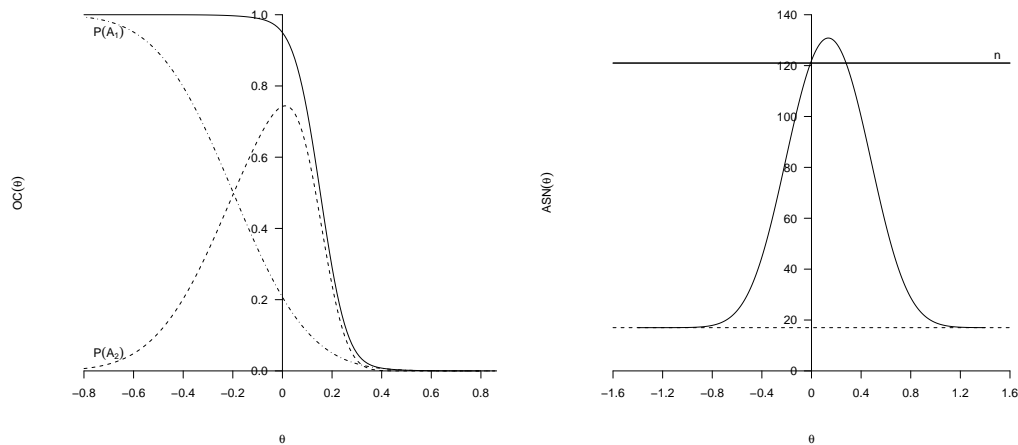


Abbildung 4.7: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma(\theta \leq 0)$ zu $\theta_1 = 0.3, \alpha = \beta = 0.05$

(ii) Einseitiger Gaußtest zu (2.2b)

$$H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{gegen} \quad H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$$

- Einstufig: $\gamma(\theta \leq 0) = (121, -1.64485)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta \leq 0) = \begin{pmatrix} 17, & -1.95432, & 0.816251 \\ 137, & -1.91362 \end{pmatrix}$

mit F wie in (i) (Abb. 4.8).

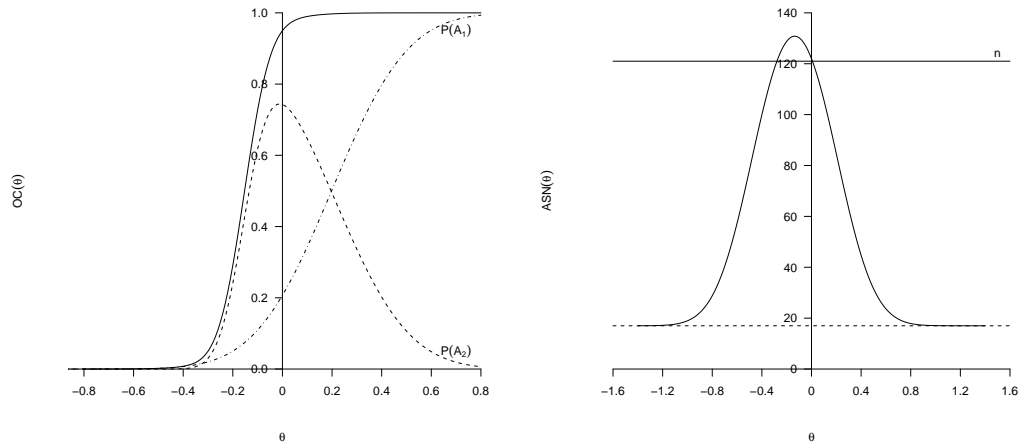


Abbildung 4.8: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma(\theta \geq 0)$ zu $\theta_1 = -0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

(iii) Zweiseitiger Gaußtest zu (2.2c)

- Einstufig: $\gamma(\theta = 0) = (145, 1.95996)$

- Zweistufig: $\gamma(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 17, & 0.00000064, & 2.27941 \\ 144, & 2.18057 \end{pmatrix}$

mit $F = 261.184$ (Abb. 4.9).

Bemerkung 4.1 (a) Die OC-Funktion des zweistufigen zweiseitigen Integral-Gaußtests besteht überwiegend aus der Annahmewahrscheinlichkeit der zweiten Stichprobe $P(A_2)$. $P(A_1)$ nimmt vernachlässigbare Werte an und lässt sich kaum von der Abszissenachse unterscheiden.

(b) Ein Analogon zu Bemerkungsteil (a) gilt auch für die im Unterpunkt (vi) dieses Beispiels darzustellende OC-Funktion des zweistufigen zweiseitigen Integral-t-Tests.

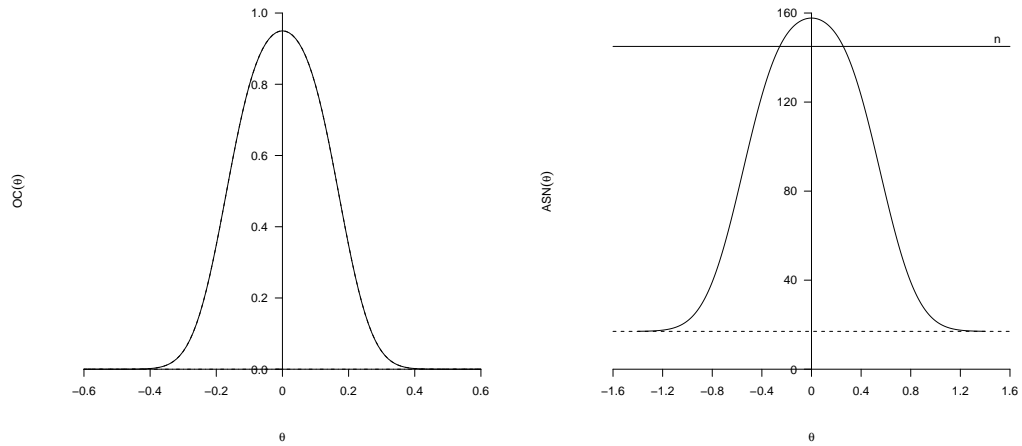


Abbildung 4.9: OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

(iv) Einseitiger t-Test zu (2.2a)

- Einstufig: $\gamma_{(\theta \leq 0)} = (122, 1.65754)$

- Zweistufig: $\gamma_{\theta \leq 0} = \begin{pmatrix} 18, & -0.811342, & 2.05025 \\ 140, & 1.9559 \end{pmatrix}$

mit $F = 192.68$ (Abb. 4.10).

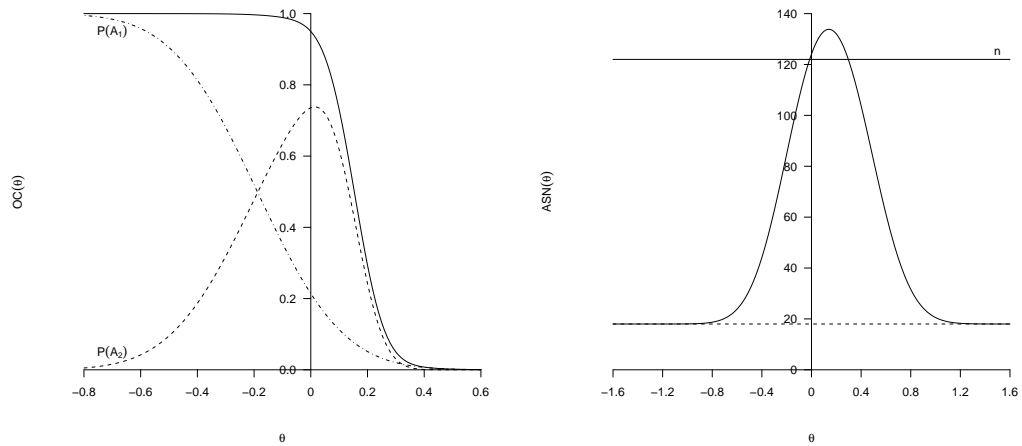


Abbildung 4.10: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

(v) Einseitiger t-Test zu (2.2b)

$$H_0 : „\theta \geq 0“ \quad \text{gegen} \quad H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$$

- Einstufig: $\gamma_{(\theta \geq 0)} = (122, -1.65754)$

- Zweistufig: $\gamma_{\theta \geq 0} = \begin{pmatrix} 18, & -2.05025, & 0.811342 \\ 140, & -1.9559 & \end{pmatrix}$

mit F wie in (iv) (Abb. 4.11).

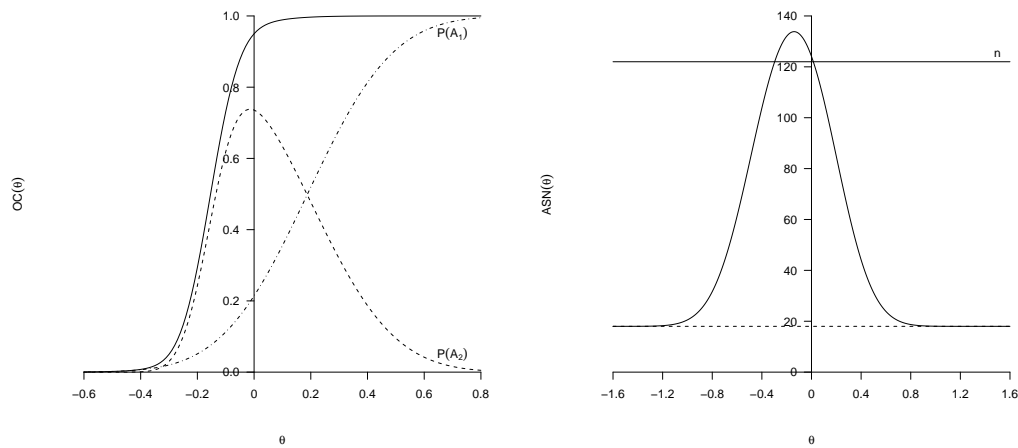


Abbildung 4.11: OC und ASN des einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.3, \alpha = \beta = 0.05$

(vi) Zweiseitiger t-Test zu (2.2c)

- Einstufig: $\gamma_{(\theta = 0)} = (147, 1.97635)$

- Zweistufig: $\gamma_{(\theta = 0)} = \begin{pmatrix} 19, & 0.000000104, & 2.44757 \\ 147, & 2.23215 & \end{pmatrix}$

mit $F = 276.778$ (Abb. 4.12).

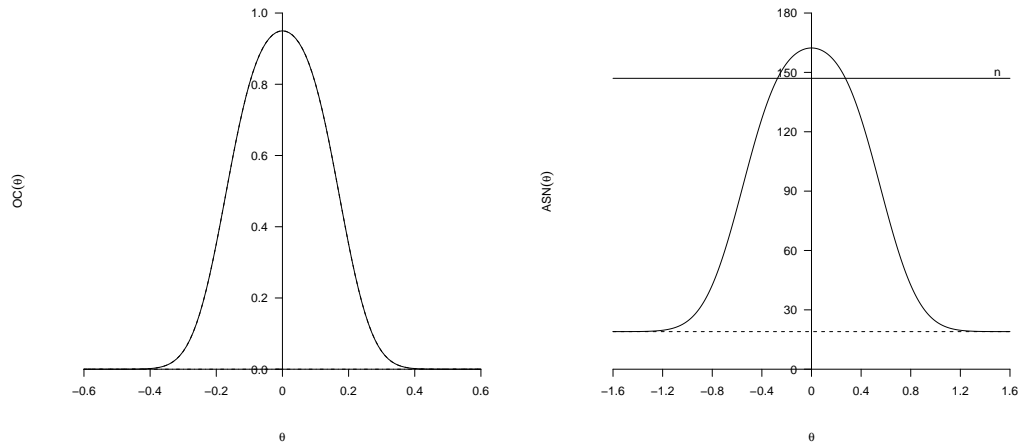


Abbildung 4.12: OC und ASN des zweiseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

4.3 Zweistufige Minimax-Integral-Tests

Seien γ^* und γ_F die zweistufigen Minimax- und Integral-Tests zu α, β, θ_1 . Der ASN-Minimax-Integral-Test $\gamma(\varepsilon)$ zu vorgegebenem $\varepsilon \geq 0$ weist unter allen zugelassenen Tests die minimale Fläche mit der zusätzlichen Restriktion $ASN_{max}(\gamma(\varepsilon)) \leq (1 + \varepsilon)ASN_{max}(\gamma^*)$ auf.

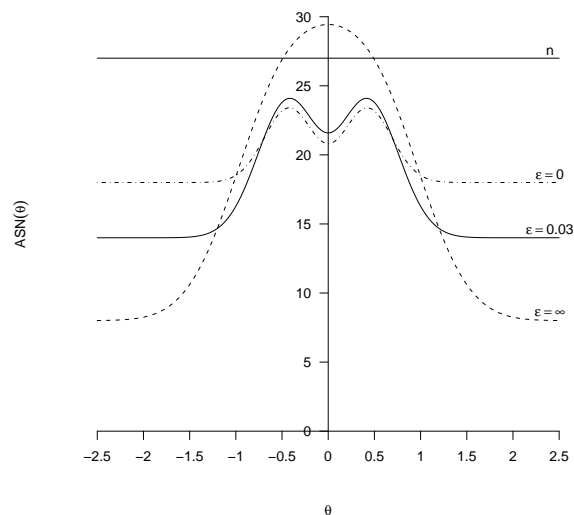


Abbildung 4.13: ASN-Funktionen der zweistufigen zweiseitigen t-Tests für unterschiedliche ε zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$.

Offensichtlich gilt $\gamma(0) = \gamma^*$ und $\gamma(\infty) = \gamma_F$. ASN-Funktionen zu $\alpha = \beta = 0.05$, $\theta_1 = 0.725$ und $\varepsilon = 0.03$ im zweiseitigen t-Fall sind in der Abbildung 4.13 dargestellt. AMI-Tests zu denselben Eingangsparametern in Abhängigkeit von ε sind in den Tabellen 1, 2, 3 und 4 zusammengefasst. Minimax-Integral-Tests besitzen ASN-Funktionen mit der Eigenschaft, daß die marginale Erhöhung ihres ASN-Maximums vom ASN-Maximum der AM-Tests große Einsparungen in der Fläche unter der ASN-Funktion bewirkt (Abb. 4.13). Aus diesem Grund erscheint eine Begrenzung des Parameters ε auf höchstens 5% sinnvoll.

ε	$\gamma(\varepsilon)$	$N_{max}(\gamma(\varepsilon))$	$F(\gamma(\varepsilon))$
0	$\left(\begin{array}{l} 13, 0.6603240, 1.95340 \\ 10, 1.73861 \end{array} \right)$	17.8207	81.5864
0.005	$\left(\begin{array}{l} 12, 0.5270720, 1.98676 \\ 11, 1.73762 \end{array} \right)$	17.8797	76.6351
0.010	$\left(\begin{array}{l} 12, 0.5914020, 1.91769 \\ 12, 1.77710 \end{array} \right)$	17.9131	76.5944
0.020	$\left(\begin{array}{l} 11, 0.4584380, 1.94348 \\ 13, 1.77710 \end{array} \right)$	18.0490	71.8209
0.035	$\left(\begin{array}{l} 10, 0.3212630, 1.96851 \\ 14, 1.77710 \end{array} \right)$	18.2579	67.2927
0.050	$\left(\begin{array}{l} 9, 0.1790160, 1.99287 \\ 15, 1.77710 \end{array} \right)$	18.5333	63.0693
0.065	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.0306224, 2.01663 \\ 16, 1.77710 \end{array} \right)$	18.8687	59.2346
0.080	$\left(\begin{array}{l} 7, -0.210310, 2.13203 \\ 16, 1.73762 \end{array} \right)$	19.1355	56.1652
0.090	$\left(\begin{array}{l} 7, -0.125321, 2.03989 \\ 17, 1.77710 \end{array} \right)$	19.2573	55.9124
0.105	$\left(\begin{array}{l} 6, -0.379180, 2.15885 \\ 17, 1.73762 \end{array} \right)$	19.5246	53.6145
0.115	$\left(\begin{array}{l} 6, -0.290714, 2.06275 \\ 18, 1.77710 \end{array} \right)$	19.6925	53.2944
0.130	$\left(\begin{array}{l} 5, -0.560045, 2.18523 \\ 18, 1.73762 \end{array} \right)$	19.9424	52.0991
0.145	$\left(\begin{array}{l} 5, -0.468270, 2.08533 \\ 19, 1.77710 \end{array} \right)$	20.1682	51.6981
∞	$\left(\begin{array}{l} 5, -0.484301, 2.07041 \\ 19, 1.78631 \end{array} \right)$	20.1719	51.6698

Tabelle 4.1: Einseitige AMI-Gaußtests zu 2.2a mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

ε	$\gamma(\varepsilon)$	$N_{max}(\gamma(\varepsilon))$	$F(\gamma(\varepsilon))$
0	$\left(\begin{array}{l} 16, 1.0014700, 2.21844 \\ 12, 2.05992 \end{array} \right)$	21.5416	51.6492
0.020	$\left(\begin{array}{l} 15, 0.8748320, 2.14783 \\ 14, 2.15204 \end{array} \right)$	21.7851	49.6004
0.035	$\left(\begin{array}{l} 14, 0.8384790, 2.15832 \\ 16, 2.14498 \end{array} \right)$	22.0190	47.6426
0.040	$\left(\begin{array}{l} 13, 0.5630400, 2.21848 \\ 15, 2.11911 \end{array} \right)$	22.3356	45.8864
0.075	$\left(\begin{array}{l} 12, 0.5591570, 2.22331 \\ 17, 2.11676 \end{array} \right)$	22.6269	44.1664
0.105	$\left(\begin{array}{l} 11, 0.4457780, 2.23986 \\ 18, 2.11676 \end{array} \right)$	23.1871	42.7369
0.110	$\left(\begin{array}{l} 10, 0.3380870, 2.25136 \\ 19, 2.12147 \end{array} \right)$	23.9016	41.4957
0.145	$\left(\begin{array}{l} 9, 0.2527110, 2.26758 \\ 20, 2.12147 \end{array} \right)$	24.6626	40.4326
0.160	$\left(\begin{array}{l} 9, 0.1737280, 2.28312 \\ 19, 2.11911 \end{array} \right)$	24.9536	40.3597
0.180	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.1880640, 2.28636 \\ 21, 2.11911 \end{array} \right)$	25.4087	39.5791
0.190	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.1736250, 2.26389 \\ 21, 2.13793 \end{array} \right)$	25.6102	39.5195
0.195	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.1151700, 2.28604 \\ 20, 2.12852 \end{array} \right)$	25.7212	39.3504
0.210	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.0362118, 2.30579 \\ 19, 2.12382 \end{array} \right)$	26.0498	39.2460
0.215	$\left(\begin{array}{l} 7, 0.1340320, 2.29249 \\ 22, 2.12617 \end{array} \right)$	26.1730	38.9481
0.220	$\left(\begin{array}{l} 6, 0.0185501, 2.33707 \\ 21, 2.11911 \end{array} \right)$	26.2810	37.8771
0.225	$\left(\begin{array}{l} 6, 0.0124359, 2.32303 \\ 21, 2.12852 \end{array} \right)$	26.3679	37.8092
0.230	$\left(\begin{array}{l} 6, 0.0046089, 2.30656 \\ 21, 2.14028 \end{array} \right)$	26.4801	37.7351
0.235	$\left(\begin{array}{l} 6, 0.0014200, 2.30029 \\ 21, 2.14498 \end{array} \right)$	26.5261	37.7087
∞	$\left(\begin{array}{l} 6, 0.0003496, 2.29823 \\ 21, 2.14655 \end{array} \right)$	26.5416	37.7002

Tabelle 4.2: Zweiseitige AMI-Gaußtests zu 2.2c mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

ε	$\gamma(\varepsilon)$	$N_{max}(\gamma(\varepsilon))$	$F(\gamma(\varepsilon))$
0	$\left(\begin{array}{l} 15, -2.07530, -0.900082 \\ 10, -1.84119 \end{array} \right)$	19.1996	93.7036
0.005	$\left(\begin{array}{l} 13, -2.16970, -0.640259 \\ 12, -1.85108 \end{array} \right)$	19.2952	83.7208
0.010	$\left(\begin{array}{l} 13, -2.16087, -0.630125 \\ 12, -1.85829 \end{array} \right)$	19.3022	83.7192
0.015	$\left(\begin{array}{l} 12, -2.21737, -0.499036 \\ 13, -1.85829 \end{array} \right)$	19.4698	78.9543
0.025	$\left(\begin{array}{l} 12, -2.13705, -0.557760 \\ 14, -1.89916 \end{array} \right)$	19.5225	78.9529
0.040	$\left(\begin{array}{l} 11, -2.19156, -0.426791 \\ 15, -1.89916 \end{array} \right)$	19.7702	74.3746
0.045	$\left(\begin{array}{l} 10, -2.35122, -0.221431 \\ 15, -1.85829 \end{array} \right)$	20.0149	70.1630
0.060	$\left(\begin{array}{l} 10, -2.25569, -0.292028 \\ 16, -1.89779 \end{array} \right)$	20.0886	70.0844
0.065	$\left(\begin{array}{l} 9, -2.43371, -0.069425 \\ 16, -1.85932 \end{array} \right)$	20.3811	66.3710
0.080	$\left(\begin{array}{l} 9, -2.32646, -0.144103 \\ 17, -1.90019 \end{array} \right)$	20.4792	66.2149
0.085	$\left(\begin{array}{l} 8, -2.53843, -0.091414 \\ 17, -1.85932 \end{array} \right)$	20.7980	63.2477
0.090	$\left(\begin{array}{l} 8, -2.42225, -0.006051 \\ 18, -1.89779 \end{array} \right)$	20.9258	62.9719
0.100	$\left(\begin{array}{l} 8, -2.41826, -0.010353 \\ 18, -1.90019 \end{array} \right)$	20.9290	62.9717
0.115	$\left(\begin{array}{l} 8, -2.33284, -0.049084 \\ 19, -1.93969 \end{array} \right)$	21.1285	62.9127
0.125	$\left(\begin{array}{l} 7, -2.52388, +0.196276 \\ 19, -1.90843 \end{array} \right)$	21.4497	60.6809
0.145	$\left(\begin{array}{l} 7, -2.44200, +0.114083 \\ 20, -1.93969 \end{array} \right)$	21.6748	60.5151
0.160	$\left(\begin{array}{l} 6, -2.69431, +0.389644 \\ 20, -1.90843 \end{array} \right)$	22.0086	59.8740
0.175	$\left(\begin{array}{l} 6, -2.59387, +0.301782 \\ 21, -1.94209 \end{array} \right)$	22.2873	59.5485
∞	$\left(\begin{array}{l} 6, -2.50820, +0.245287 \\ 22, -1.98055 \end{array} \right)$	22.6161	59.4701

Tabelle 4.3: Einseitige AMI-t-Tests zu 2.2b mit $\theta_1 = -0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

ε	$\gamma(\varepsilon)$	$N_{max}(\gamma(\varepsilon))$	$F(\gamma(\varepsilon))$
0	$\left(\begin{array}{l} 18, 1.164150, 2.43485 \\ 12, 2.15831 \end{array} \right)$	23.4080	57.5403
0.005	$\left(\begin{array}{l} 17, 1.090860, 2.40588 \\ 14, 2.19942 \end{array} \right)$	23.5057	55.3946
0.015	$\left(\begin{array}{l} 16, 0.981234, 2.44214 \\ 15, 2.20284 \end{array} \right)$	23.6328	53.3869
0.025	$\left(\begin{array}{l} 15, 0.872455, 2.48413 \\ 16, 2.20284 \end{array} \right)$	23.8410	51.5399
0.030	$\left(\begin{array}{l} 14, 0.700102, 2.59960 \\ 16, 2.17544 \end{array} \right)$	24.0944	49.9681
0.040	$\left(\begin{array}{l} 14, 0.757356, 2.52567 \\ 17, 2.20627 \end{array} \right)$	24.1407	49.8812
0.045	$\left(\begin{array}{l} 13, 0.595568, 2.66751 \\ 17, 2.16858 \end{array} \right)$	24.4601	48.5681
0.050	$\left(\begin{array}{l} 13, 0.639933, 2.57150 \\ 18, 2.20969 \end{array} \right)$	24.5375	48.4445
0.065	$\left(\begin{array}{l} 13, 0.684942, 2.51289 \\ 19, 2.24053 \end{array} \right)$	24.6651	48.4343
0.070	$\left(\begin{array}{l} 12, 0.524203, 2.62538 \\ 19, 2.21175 \end{array} \right)$	25.0339	47.2661
0.085	$\left(\begin{array}{l} 12, 0.568829, 2.56021 \\ 20, 2.24464 \end{array} \right)$	25.1767	47.2393
0.100	$\left(\begin{array}{l} 11, 0.415920, 2.69155 \\ 20, 2.21175 \end{array} \right)$	25.6196	46.3843
0.115	$\left(\begin{array}{l} 11, 0.447550, 2.60734 \\ 21, 2.25560 \end{array} \right)$	25.8308	46.3382
0.130	$\left(\begin{array}{l} 10, 0.293146, 2.73816 \\ 21, 2.23162 \end{array} \right)$	26.4266	45.7929
0.150	$\left(\begin{array}{l} 10, 0.325952, 2.65435 \\ 22, 2.27479 \end{array} \right)$	26.6717	45.7558
0.180	$\left(\begin{array}{l} 9, 0.175670, 2.77704 \\ 22, 2.26519 \end{array} \right)$	27.5594	45.4912
0.200	$\left(\begin{array}{l} 9, 0.149846, 2.74913 \\ 22, 2.28438 \end{array} \right)$	27.9133	45.4764
0.255	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.005502, 2.86497 \\ 22, 2.29685 \end{array} \right)$	29.3752	45.4636
∞	$\left(\begin{array}{l} 8, 0.001559, 2.86036 \\ 22, 2.29973 \end{array} \right)$	29.4384	45.4546

Tabelle 4.4: Zweiseitige AMI-t-Tests zu 2.2c mit $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

4.4 Zweistufige Tests bei unabhängigen Testgrößen

Die in den vorigen Abschnitten berechneten zweistufigen Bowker-Goode-Tests verwenden für die Entscheidungsfindung in der zweiten Stufe auch die Informationen der ersten Stichprobe, die in der Testgröße

$$T = \begin{cases} \sqrt{n_1 + n_2} \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} & \text{für den Gaußtest,} \\ \sqrt{n_1 + n_2} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} & \text{für den t-Test} \end{cases} \quad (4.1)$$

enthalten sind. MÜLLER [12] gab zweifache Minimax-Variablenprüfpläne für ein normalverteiltes Merkmal mit bekanntem σ an, die in der zweiten Stufe ausschließlich die Informationen der zweiten Stichprobe verwenden. HILBERT [7] berechnete für ein normalverteiltes Merkmal mit unbekanntem σ ebenfalls zweifache Minimax-Variablenprüfpläne mit unabhängigen Testgrößen. Der Vorteil dieser Verfahren besteht in der vergleichsweise einfachen OC. FELDMANN [5] zeigte, dass die Berücksichtigung der Informationen aus der ersten Stichprobe mit Einsparungen im Stichprobenumfang verbunden ist. Analog zu FELDMANN [5] kann dies auch für die zweistufigen Gauß- und t-Tests gezeigt werden. Die Behandlung der Testaufgabe erfolgt mit der Verwendung der unabhängigen Testgrößen

$$T_i = \begin{cases} \sqrt{n_i} \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma}, & i = 1, 2 \quad \text{für den Gaußtest,} \\ \sqrt{n_i} \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{S_i}, & i = 1, 2 \quad \text{für den t-Test.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Die OC des zweistufigen Tests lautet im Gaußfall

$$(i) \quad L(\theta) = \Phi(k_1 - \sqrt{n_1} \theta) + \Phi(k_3 - \sqrt{n_2} \theta) \times \\ \times (\Phi(k_2 - \sqrt{n_1} \theta) - \Phi(k_1 - \sqrt{n_1} \theta)) \quad \text{für (2.2a)} \quad (4.3a)$$

$$(ii) \quad L(\theta) = \Phi(-k_2 + \sqrt{n_1} \theta) + \Phi(-k_3 + \sqrt{n_2} \theta) \times \\ \times (\Phi(k_2 - \sqrt{n_1} \theta) - \Phi(k_1 - \sqrt{n_1} \theta)) \quad \text{für (2.2b)} \quad (4.3b)$$

$$(iii) \quad L(\theta) = \Phi(k_1 - \sqrt{n_1} \theta) - \Phi(-k_1 - \sqrt{n_1} \theta) + \\ + (\Phi(k_3 - \sqrt{n_2} \theta) - \Phi(-k_3 - \sqrt{n_2} \theta)) \times \\ \times (\Phi(k_2 - \sqrt{n_1} \theta) - \Phi(-k_2 - \sqrt{n_1} \theta) - \\ - \Phi(k_1 - \sqrt{n_1} \theta) + \Phi(-k_1 - \sqrt{n_1} \theta)) \quad \text{für (2.2c),} \quad (4.3c)$$

im t-Fall mit $\delta_i(\theta) = \sqrt{n_i} \theta$

$$(i) \quad L(\theta) = F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_1) + F_{n_2-1, \delta_2(\theta)}(k_3) \times \\ \times (F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_2) - F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_1)) \quad \text{für (2.2a)} \quad (4.4a)$$

$$(ii) \quad L(\theta) = F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(-k_2) + F_{n_2-1, \delta_2(\theta)}(-k_3) \times \\ \times (F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_2) - F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_1)) \quad \text{für (2.2b)} \quad (4.4b)$$

$$(iii) \quad L(\theta) = F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_1) - F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(-k_1) + \\ + (F_{n_2-1, \delta_2(\theta)}(k_3) - F_{n_2-1, \delta_2(\theta)}(-k_3)) \times \\ \times (F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_2) - F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(-k_2) - \\ - F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(k_1) + F_{n_1-1, \delta_1(\theta)}(-k_1)) \quad \text{für (2.2c).} \quad (4.4c)$$

Ein Beweis zu (4.3a) mit $\theta = \Phi^{-1}(p)$ findet sich bei MÜLLER [12], zu (4.4a) bei HILBERT [7]. (4.3b und c und 4.4b und c) können analog bewiesen werden. Die ASN-Funktionen können formell analog zu den Bowker-Goode-Tests angegeben werden, die Testparameter unterscheiden sich jedoch. Im Folgenden zeigen wir anhand von Beispielen, dass die zweistufigen Bowker-Goode-Tests im Vergleich zu zweistufigen Testverfahren mit unabhängigen Testgrößen ein niedrigeres Optimalitätskriterium aufweisen und damit effizienter sind.

Beispiel 4.3 $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.05$

(i) Einseitiger zweistufiger Minimax-Gaußtest zu (2.2a) bei

- abhängigen Testgrößen:

$$\gamma_{(\theta \leq 0)} = \begin{pmatrix} 13, & 0.660324, & 1.95340 \\ 10, & & 1.73861 \end{pmatrix}$$

mit $ASN_{max} = 17.8207$ und $E = 15.1395 \%$

- unabhängigen Testgrößen:

$$\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)} = \begin{pmatrix} 15, & 0.976825, & 1.83111 \\ 10, & & 1.14628 \end{pmatrix}$$

mit $ASN_{max} = 18.3073$ und $E = 12.8226 \%$ (Abb. 4.14).

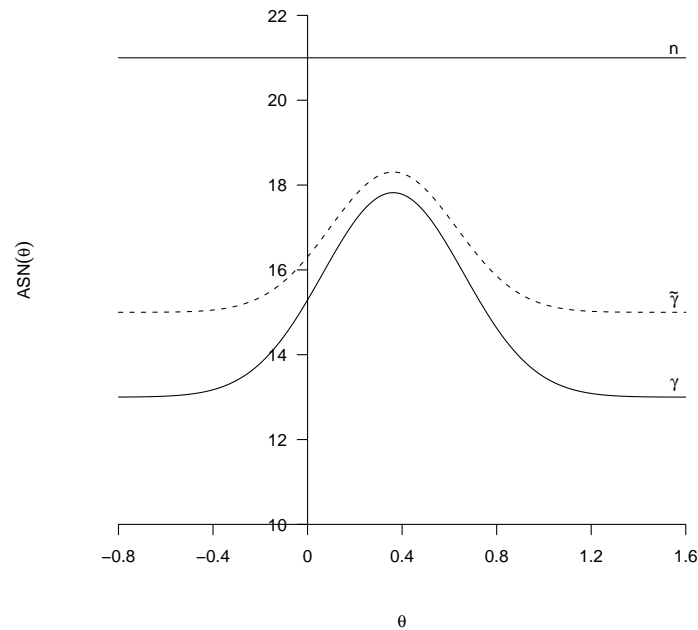


Abbildung 4.14: ASN-Funktionen der einseitigen zweistufigen Minimax-Gaußtests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

(ii) Zweiseitiger zweistufiger Minimax-t-Test zu (2.2c) bei

- abhängigen Testgrößen:

$$\gamma_{(\theta \leq 0)} = \begin{pmatrix} 18, & 1.16415, & 2.43485 \\ 12, & 2.15831 \end{pmatrix}$$

mit $ASN_{max} = 23.408$ und $E = 13.3036 \%$

- unabhängigen Testgrößen:

$$\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)} = \begin{pmatrix} 22, & 1.58889, & 2.20676 \\ 14, & 1.6214 \end{pmatrix}$$

mit $ASN_{max} = 25.2293$ und $E = 6.55803 \%$ (Abb. 4.15).

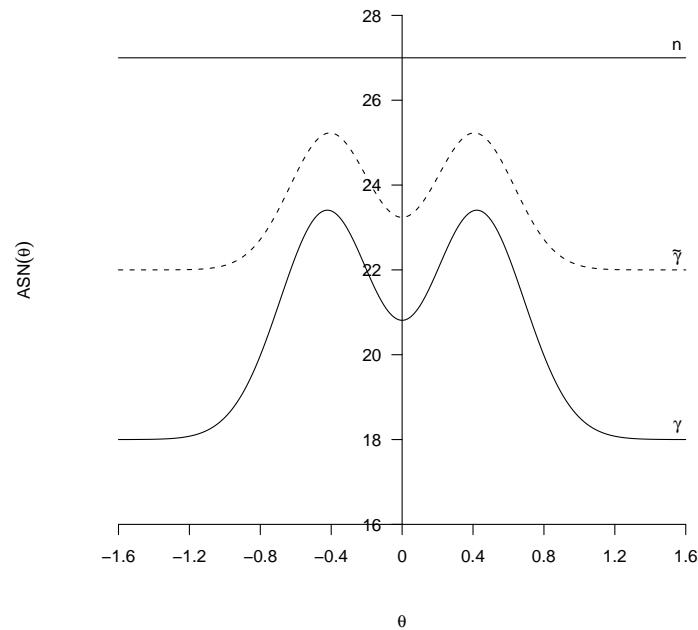


Abbildung 4.15: ASN-Funktionen der zweiseitigen zweistufigen Minimax-t-Tests $\gamma_{(\theta \leq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \leq 0)}$ zu $\theta_1 = 0.725$, $\alpha = \beta = 0.05$

Beispiel 4.4 $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.05$

(i) Einseitiger zweistufiger Integral-t-Test zu (2.2b)

$H_0 : „\theta \geq 0“$ gegen $H_1 : „\theta \leq -\theta_1“$ bei

- abhängigen Testgrößen:

$$\gamma_{(\theta \geq 0)} = \begin{pmatrix} 18, & -2.05025, & 0.811342 \\ 140, & -1.9559 & \end{pmatrix}$$

mit $F = 192.68$

- unabhängigen Testgrößen:

$$\tilde{\gamma}_{(\theta \geq 0)} = \begin{pmatrix} 19, & -1.99225, & 0.729807 \\ 154, & -1.9559 & \end{pmatrix}$$

mit $F = 197.845$ (Abb. 4.16).

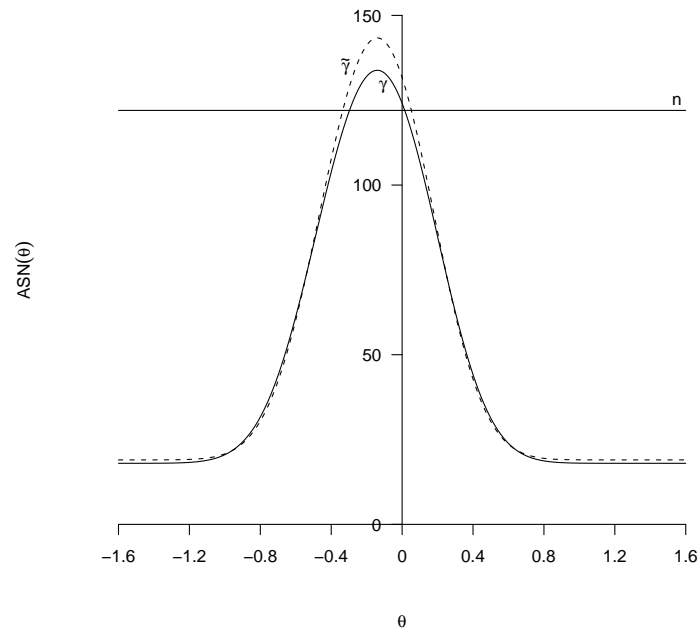


Abbildung 4.16: ASN-Funktionen der einseitigen zweistufigen Integral-t-Tests $\gamma_{(\theta \geq 0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta \geq 0)}$ zu $\theta_1 = -0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

(ii) Zweiseitiger zweistufiger Integral-Gaußtest zu (2.2c) bei

- abhängigen Testgrößen:

$$\gamma_{(\theta=0)} = \begin{pmatrix} 17, & 0.00000064, & 2.27941 \\ 144, & 2.18057 & \end{pmatrix}$$

mit $F = 261.184$

- unabhängigen Testgrößen:

$$\tilde{\gamma}_{(\theta=0)} = \begin{pmatrix} 16, & 0.000000185, & 2.24393 \\ 160, & 2.22915 & \end{pmatrix}$$

mit $F = 275.478$ (Abb. 4.17).

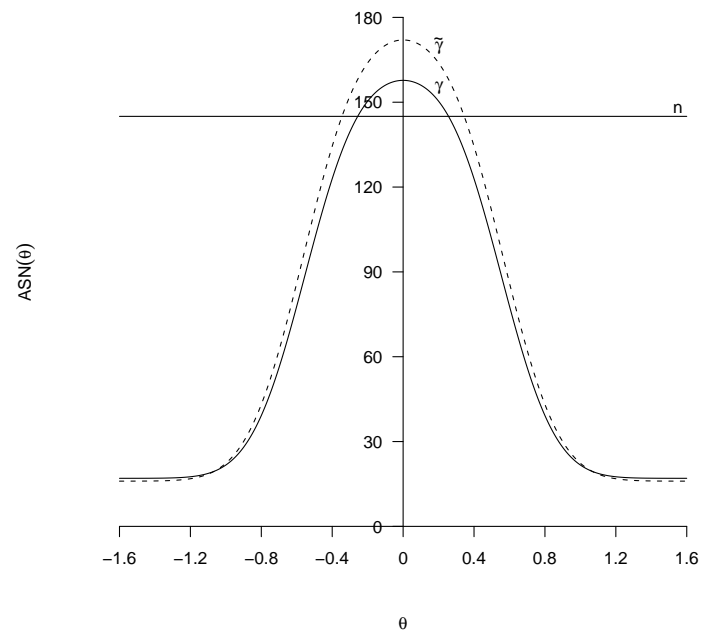


Abbildung 4.17: ASN-Funktionen der zweiseitigen zweistufigen Integral-Gaußtests $\gamma_{(\theta=0)}$ und $\tilde{\gamma}_{(\theta=0)}$ zu $\theta_1 = 0.3$, $\alpha = \beta = 0.05$

Kapitel 5

Der Suchalgorithmus

Die Definition der Testverfahren stellt an den Suchalgorithmus eine Reihe von Anforderungen. Neben den klassischen Anforderungen der Genauigkeit und Schnelligkeit sollte ein Algorithmus zur Festlegung der Parameter n_1, n_2, k_1, k_2, k_3 unterschiedliche Optimalitätskriterien berücksichtigen. Einen Algorithmus, der die letzte Anforderung erfüllt, lieferte FELDMANN [5].

Der FELDMANN-sche Algorithmus verwendet keine Restriktionen hinsichtlich der Testparameter¹ und beruht auf dem Prinzip des sequentiellen, rasterartigen Absuchens aller lösungsrelevanten Teile des Definitionsbereiches der Parameter n_1, n_2, k_1, k_2, k_3 . Da die ASN-Funktion nicht von k_3 abhängt, wird für die Parameter n_i, k_i mit $i = 1, 2$ ein Suchbereich eingegrenzt, innerhalb dessen die optimale Lösung vermutet wird. Aufgrund der unvermeidbaren Diskretisierung der reellen Parameter k_1, k_2 erfolgt die Suche des optimalen Tests in bis zu 10 Durchläufen. Nach jedem Durchgang wird die Schrittlänge sowie der Suchbereich der 4 Parameter um die gespeicherten besten Werte des abgelaufenen Durchgangs verkleinert. Der Parameter k_3 wird zu vorgegebenen n_1, n_2, k_1, k_2 gekoppelt an einer der OC-Bedingungen in jedem Schritt iterativ errechnet. Nach der Prüfung der OC-Bedingungen und der Verbesserung des Optimalitätskriteriums erfolgt das Speichern der Parameter. Der Algorithmus wird spätestens nach dem zehnten Durchgang abgebrochen, oder wenn in einem Durchgang keine Verbesserung des Optimalitätskriteriums erreicht wird. Der FELDMANN-sche Algorithmus liefert Tests mit hoher Genauigkeit, eignet sich mit entsprechender Anpassung der Suchbereiche und der Schrittlängen gut für jedes Optimalitätskriterium, ist jedoch aufgrund der sehr hohen Anzahl

¹SOMMERS [14] berechnete zweifache Prüfpläne unter der Verwendung der zusätzlichen Einschränkungen $k_1 = k_3$ und $n_1 = n_2$. FELDMANN [5] zeigte, dass ohne die Verwendung jeglicher Restriktionen berechnete Prüfpläne ein niedrigeres ASN-Maximum aufweisen.

der benötigten Iterationsschritte insbesondere für die Berechnung der t-Tests sehr langsam. Ein schnellerer Suchalgorithmus konnte entwickelt werden. Im folgenden Abschnitt wird der Grundalgorithmus beschrieben. Der Abschnitt 5.2 befasst sich mit den spezifischen Besonderheiten für die unterschiedlichen Fälle. Im letzten Abschnitt wird eine Fehleranalyse durchgeführt.

5.1 Der Grundalgorithmus

In der Regel lässt sich eine Verringerung des Rechenaufwands durch Nutzung von zusätzlichen, nicht berücksichtigten Informationen erreichen. Zahlreiche Erfahrungen mit der Optimierung von zweifachen Attribut- und Variablenprüfplänen haben stets zwei Annahmen bestätigt:

- (i) Der optimale Test erfüllt am schärfsten die OC-Bedingungen, d.h. zu vorgegebenen n_1, n_2, k_3 die Parameter k_1, k_2 als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} L(0, k_1, k_2) = 1 - \alpha \\ L(\theta_1, k_1, k_2) = \beta \end{cases} \quad (5.1)$$

berechnet werden können.

- (ii) Es gilt:

$$n_1 + n_2 \geq n. \quad (5.2)$$

Mit (5.1) reduziert sich das Optimierungsproblem auf zwei natürliche Parameter n_1, n_2 und einen reellen Parameter k_3 . (5.2) dient als zusätzliche Restriktion, um unbrauchbare Konstellationen der Parameter n_1, n_2 auszuschließen. Die Festlegung der Testparameter durch Nutzung dieser Informationen stellt zwei primäre Aufgaben. Zum einen muss ein Verfahren zur Lösung von nicht-linearen Gleichungssystemen verwendet, zum anderen die Abhängigkeit des Optimalitätskriteriums (ASN_{max} und Fläche unter der ASN-Funktion) vom Parameter k_3 untersucht werden.

Je nach Problemstellung und Informationsstand können nichtlineare Gleichungssysteme durch unterschiedliche Verfahren gelöst werden. Das Newton-Verfahren z.B. setzt einen gut geschätzten Anfangspunkt voraus und berechnet in jedem Schritt die Jacobi- bzw. Hesse-Matrix. Gut geschätzte Anfangswerte für dieses Verfahren können ohne zusätzlichen Rechenaufwand z.B. in Form vom vereinfachten FELDMANN-schen Algorithmus nicht generiert werden. Zu stark variieren k_1 und k_2 in Abhängigkeit sowohl von Trennschärfe

bei einem festgelegten Optimalitätskriterium, als auch vom Optimalitätskriterium selbst. Daher erscheint die Verwendung von sogenannten Quasi-Newton-Verfahren vernünftiger. Diese Verfahren berechnen zum einen vereinfachte Approximationen der Jacobi- bzw. Hesse-Matrix und sparen damit Rechenaufwand, zum anderen sind sie unabhängig vom Anfangspunkt. Eine aufwendige Abschätzung der Anfangswerte für k_1 und k_2 wird überflüssig. PRESS ET AL. [13] empfehlen für diesen Fall BROYDENS [2] Sekantenverfahren. Die Ergebnisse der Implementierung dieses Verfahrens konnten die Empfehlung von PRESS ET AL. [13] bestätigen.

Die ASN-Funktion hängt nicht unmittelbar von k_3 ab. Durch die Verschachtelung der Parameter k_1 und k_2 mit (5.1) ist die ASN-Funktion dennoch mittelbar von k_3 abhängig. Zu vorgegebenen n_1, n_2 zeigte eine Untersuchung des ASN-Maximums und der Fläche unter der ASN-Funktion ein Minimum in k_3 (Abb. 5.1).

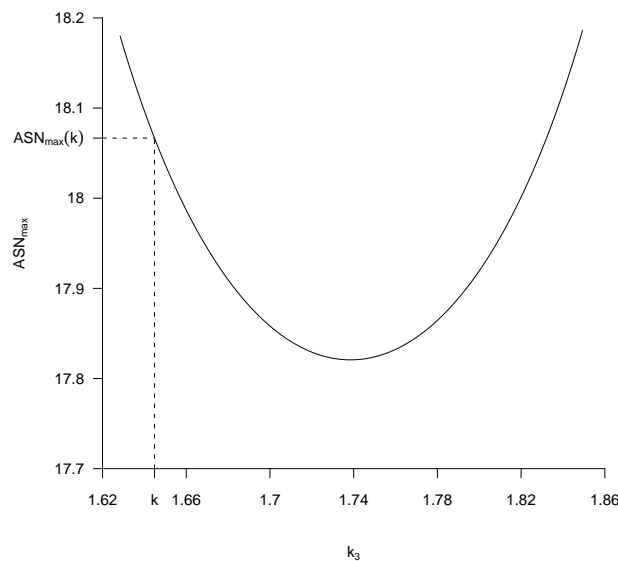


Abbildung 5.1: ASN_{max} in Abhängigkeit von k_3

FELDMANN [5] veröffentlichte zweifache ASN-Minimax-Variablenprüfpläne mit der Eigenschaft

$$\frac{k_3}{k} > 1, \quad (5.3)$$

(Abb. 5.2). Die Untersuchung von 18000 zweistufigen Minimax- und Integral-Gaußtests mit abhängigen Testgrößen zu $\alpha \leq 0.1$, $\beta \leq 0.1$ und $0.1 \leq \theta_1 \leq 1$

bestätigte (5.3). Diese Eigenschaft besitzen ebenfalls alle in dieser Arbeit

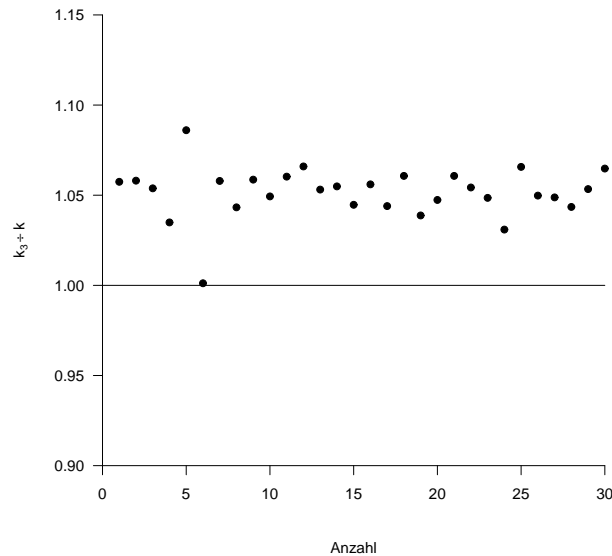


Abbildung 5.2: Verhältnis $k_3 \div k$ bei Feldmann.

vorgestellten zweistufigen Bowker-Goode-t-Tests sowie ASN-Integraltests mit unabhängigen Testgrößen zu den genannten Eingangsparametern. Für die Minimaxtests mit unabhängigen Testgrößen gilt:

$$\frac{k_3}{k} < 1.$$

k_3 kann damit von k beginnend solange erhöht (gesenkt) werden bis das Minimum des Optimalitätskriteriums erreicht wird. Die empirisch festgestellte kleine Differenz zwischen k_3 und k erlaubt ohne wesentliche Genauigkeitseinbußen eine konstante Schrittlänge in Höhe von $0.001k$.

Ein Flußdiagramm des Algorithmus für die Berechnung von zweistufigen Tests ist in der Abbildung 5.3 dargestellt. Nach Eingabe der Parameter α , β und θ_1 wird zunächst der einfache Test (n, k) berechnet. Der Anfangswert des Optimalitätskriteriums (AW) entspricht für den Minimaxfall n , für den Integralfall $6n$. Die Festlegung der Suchräume für die natürlichen Parameter n_1, n_2 erfolgt im Gaußfall in Abhängigkeit von n , im t-Fall von den Parametern des zweistufigen Gaußtests. Nach der Überprüfung der einschränkenden Bedingung (5.2) wird $k_3 = k$ gesetzt und damit die Werte k'_1 und k'_2 , sowie der Wert des Optimalitätskriteriums AW' berechnet. k_3 wird nun um $0.001k$ erhöht (gesenkt), mit dem neuen k_3 wird der zugehörige Wert des Optimalitätskriteriums OW'

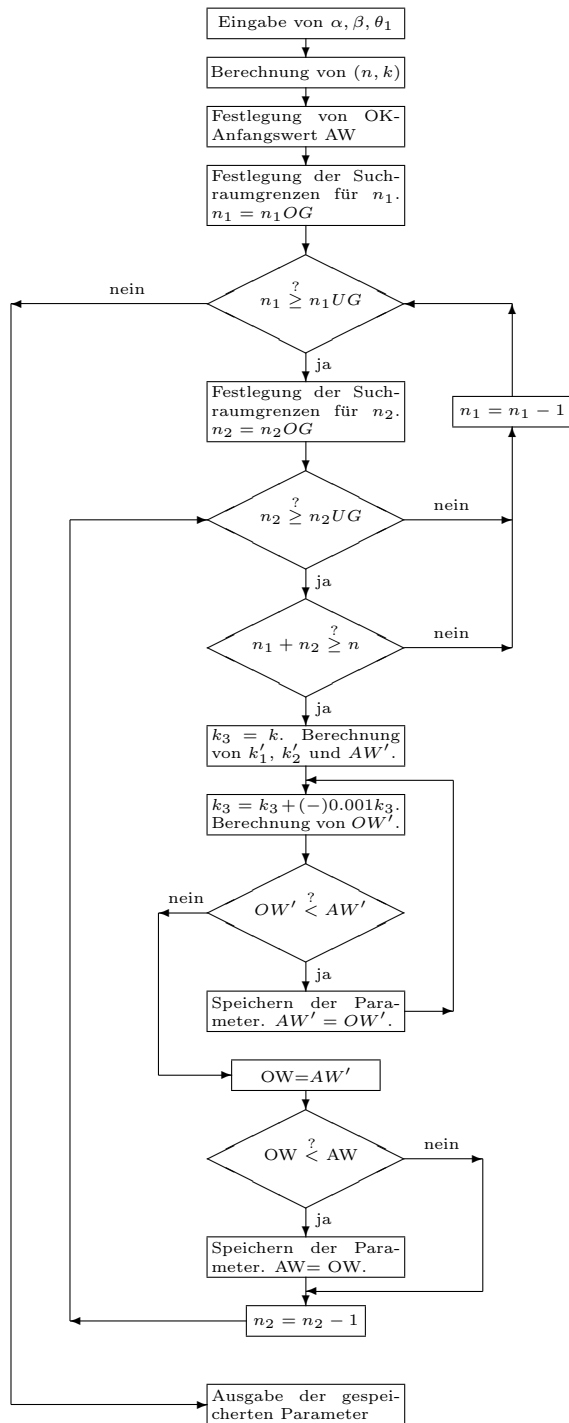


Abbildung 5.3: Flußdiagramm zur Berechnung eines zweistufigen Tests.

berechnet und mit AW' verglichen. Gilt $OW' < AW'$, werden die auszugebenden Parameter gespeichert, $AW' = OW'$ gesetzt und durch Erhöhung (Senkung) des Parameters k_3 eine erneute Überprüfungsprozedur initiiert. Die Überprüfung erfolgt solange bis zum ersten Mal $OW' < AW'$ nicht mehr gilt. Der zuletzt gespeicherte Optimalitätskriteriumswert AW' dient als aktueller OW für die Überprüfung der verschiedenen Konstellationen der Parameter n_1, n_2 . Ausgegeben wird dann die gespeicherte Konstellation mit dem niedrigsten OW. Die Festlegung der Suchräume für die Parameter n_1, n_2 in Abhängigkeit der Eingangsparameter α, β und θ_1 erfolgt im nächsten Abschnitt.

5.2 Festlegung der Suchräume

Die Optimierung der Suchraumgrenzen für die Parameter n_1, n_2 ist aus zwei Gründen erforderlich. Neben dem zeitlichen Aspekt muss noch berücksichtigt werden, dass es für bestimmte Parameterkonstellationen keine Lösung von (5.1) geben kann. Einige solcher Konstellationen werden gleich mit (5.2) ausgeschlossen, die übrigen durch optimierte Festlegung der Suchraumgrenzen.

Die Abhängigkeit des Suchverfahrens von den Eingangsparametern α, β und θ_1 legt Überlegungen über eine sinnvolle Eingrenzung dieser Parameter nahe. So können z.B. Tests mit $\alpha > 0.1$ und/oder $\beta > 0.1$ wegen der großen Fehlertoleranz als ungeeignet angesehen werden. Andererseits erfordern Tests mit sehr kleiner Fehlertoleranz die Überprüfung einer sehr hohen Anzahl von Stichprobenrealisationen und sind damit kostenaufwendig. Analog verhält sich die Stichprobenanzahl zum Trennschärfeparameter θ_1 . Je kleiner² θ_1 , um so trennschärfer der Test, um so höher sind die Stichprobenzahlen n_1 und n_2 . Für die Berechnung der zweistufigen Tests wurden in dieser Arbeit

$$0.01 \leq \alpha \leq 0.1,$$

$$0.01 \leq \beta \leq 0.1,$$

$$0.1 \leq \theta_1 \leq 1$$

eingegrenzt. Untersucht wurde das Verhältnis $\lambda_i = \frac{n_i}{n}$, $i = 1, 2$ in Abhängigkeit von den Eingangsparametern. Im Minimaxfall konnte festgestellt werden, dass λ_i in Abhängigkeit von θ_1 für feste α und β keinen wesentlichen Schwankungen unterliegen (Abb. 5.4). Bei der Festlegung der Ober- und Untergrenze wurde dem Maximal- bzw. Minimalwert des λ_i für $\theta_1 \leq 0.4$ ein Toleranzpuffer von etwa 1–2% addiert bzw. subtrahiert. Da die größere Streuung für $\theta_1 > 0.4$

²Im Folgenden wird mit θ_1 der Trennschärfeparameter zu 2.2a und c verstanden.

mit der Abnahme von n zu erklären ist, bleiben n_i für diese Fälle unterhalb der aufgerundeten Obergrenze bzw. oberhalb der abgerundeten Untergrenze. Anders verhält sich λ_i in Abhängigkeit von α und β . Für $\theta_1 = 0.1$ und $\alpha = \beta = 0.01$ zu (2.2a) wurde $\lambda_1 = 0.681755$ und $\lambda_2 = 0.406005$ errechnet. Für den gleichen θ_1 -Wert aber $\alpha = \beta = 0.1$ wurden $\lambda_1 = 0.619482$ und $\lambda_2 = 0.523592$ ermittelt. Mit $0.61n \leq n_1 \leq 0.685n$ und $0.40n \leq n_2 \leq 0.53n$ müsste die k_3 -Schleife für den ersten Fall um bis zu 45 000 Mal durchlaufen werden.

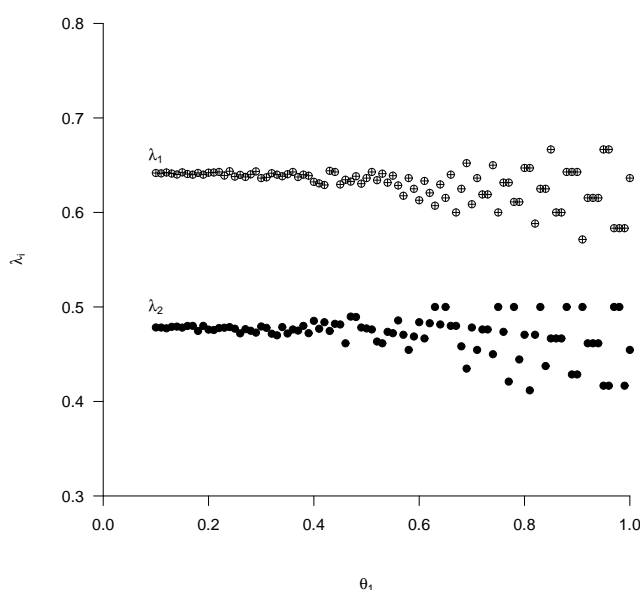


Abbildung 5.4: λ_i im einseitigen Minimax-Gauß-Fall.

Die genauere Untersuchung zeigte im Minimaxfall, dass eine engere Festlegung der Suchraumgrenzen in Abhängigkeit von α und β möglich ist. Im Anhang befindet sich eine Zusammenfassung der Suchraumgrenzen für den Minimax-Gauß-Fall. Die Rechenzeiten für die Berechnung der zweistufigen Gaußtests betragen im einseitigen Fall bis zu 3, im zweiseitigen Fall bis zu 9 Sekunden.³ Der große Unterschied lässt sich zum einen mit der rechenaufwendigeren OC-Funktion, zum anderen mit der Verwendung größerer Suchräume für n_1, n_2 erklären.

Die Festlegung der Suchräume für die Parameter n_{1t}, n_{2t} des zweistufigen t-Tests in Abhängigkeit von n_t erscheint aufgrund der ungleich aufwendigen

³Intel Core Duo, 2 GHz.

OC-Funktion als sehr zeit- und rechenintensiv. Daher wurden bei der Festlegung der Suchraumgrenzen für n_{it} die natürlichen Parameter n_{ig} des Gaußtests verwendet. Es konnte empirisch festgestellt werden, dass

$$n_{1g} \approx n_{1t} \quad \text{und} \quad n_{2g} \approx n_{2t}$$

gilt. Die Eingrenzung der Suchräume gemäß

$$\begin{aligned} n_{1g} &\leq n_{1t} \leq n_{1g} + 3, \\ n_{2g} &\leq n_{2t} \leq n_{2g} + 3 \end{aligned}$$

erwies sich sowohl im einseitigen als auch im zweiseitigen Minimax-Fall unabhängig von α , β und θ_1 als ausreichend. Die Rechenzeiten für die Berechnung der zweistufigen t-Tests betragen im einseitigen Fall bis zu 11, im zweiseitigen Fall bis zu 13 Minuten.

Im Integral-Gauß-Fall konnte im Gegensatz zum Minimaxfall festgestellt werden, dass λ_i in Abhängigkeit von θ_1 größeren Schwankungen unterliegen (Abb. 5.5).

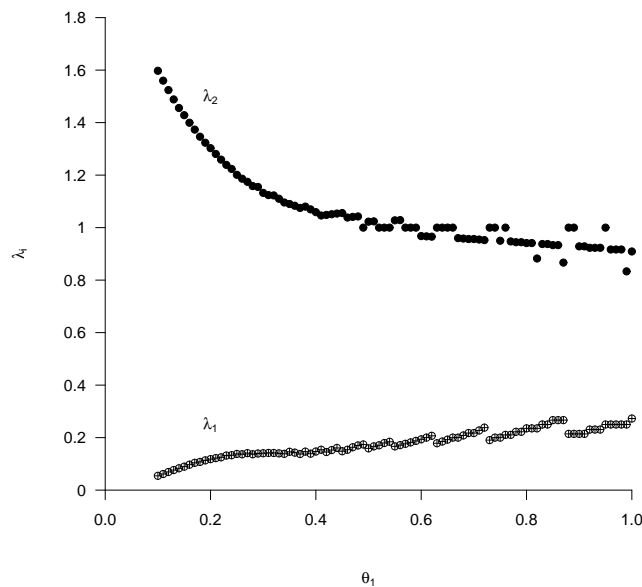


Abbildung 5.5: λ_i im einseitigen Integral-Gauß-Fall.

Auch die Untersuchung der Abhängigkeit der λ_i von α und β zeigte wesentliche Schwankungen. Die Optimierung der Suchraumgrenzen im Integralfall erfolgte in Abhängigkeit von θ_1 , da λ_i in Abhängigkeit von θ_1 , insbesondere im

einseitigen Fall die größere Schwankungsbreite aufweisen. Die Nicht-Berücksichtigung der Parameter α und β bei der Festlegung der Suchraumgrenzen im Integralfall erwies sich gegenüber dem Minimaxfall als zeitintensiver.

Die Suchraumgrenzen für die natürlichen Parameter n_i im Gaußfall sind in den Tabellen 5.1 und 5.2 zusammengefasst. Die Festlegung der Suchraumgrenzen für die t-Tests erfolgte analog zum Minimaxfall gemäß

$$\begin{aligned} n_{1g} &\leq n_{1t} \leq n_{1g} + 3, \\ n_{2g} &\leq n_{2t} \leq n_{2g} + 3. \end{aligned}$$

Trennschärfe	n_1UG	n_1OG	n_2UG	n_2OG
$\theta_1 = 0.1$	$0.04n$	$0.07n$	$1.38n$	$1.75n$
$0.10 < \theta_1 \leq 0.15$	$0.04n$	$0.11n$	$1.21n$	$1.75n$
$0.15 < \theta_1 \leq 0.20$	$0.07n$	$0.14n$	$1.13n$	$1.55n$
$0.20 < \theta_1 \leq 0.30$	$0.10n$	$0.16n$	$1.04n$	$1.41n$
$0.30 < \theta_1 \leq 0.40$	$0.10n$	$0.17n$	$1.00n$	$1.23n$
$0.40 < \theta_1 \leq 1.00$	$0.13n$	$0.25n$	$0.85n$	$1.10n$

Tabelle 5.1: Suchraumgrenzen im einseitigen Integral-Gauß-Fall

Die Rechenzeiten für die Berechnung der zweistufigen Integraltests betragen im einseitigen Gaußfall bis zu 6, im zweiseitigen Gaußfall bis zu 4 Minuten. Die Berechnung der einseitigen t- Tests dauerte bis zu 28, der zweiseitigen t-Tests bis zu 38 Minuten.

Trennschärfe	n_1UG	n_1OG	n_2UG	n_2OG
$\theta_1 = 0.1$	$0.04n$	$0.06n$	$1.01n$	$1.11n$
$0.10 < \theta_1 \leq 0.15$	$0.04n$	$0.09n$	$1.00n$	$1.11n$
$0.15 < \theta_1 \leq 0.20$	$0.06n$	$0.10n$	$0.97n$	$1.10n$
$0.20 < \theta_1 \leq 0.30$	$0.07n$	$0.13n$	$0.94n$	$1.08n$
$0.30 < \theta_1 \leq 0.40$	$0.09n$	$0.17n$	$0.91n$	$1.04n$
$0.40 < \theta_1 \leq 0.60$	$0.12n$	$0.22n$	$0.85n$	$1.02n$
$0.60 < \theta_1 \leq 1.00$	$0.16n$	$0.35n$	$0.80n$	$0.97n$

Tabelle 5.2: Suchraumgrenzen im zweiseitigen Integral-Gauß-Fall

Für die Minimax-Integral-Tests gilt nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} n_{1AI} &\leq n_{1AMI} \leq n_{1AM}, \\ n_{2AM} &\leq n_{2AMI} \leq n_{2AI}. \end{aligned}$$

Es konnte festgestellt werden, dass auch für den Parameter k_{3AMI} der Zusammenhang

$$k_{3AM} \leq k_{3AMI} \leq k_{3AI}$$

Gültigkeit behält. Damit gilt k_{3AM} als ein guter Startwert für die Bestimmung von k_{3AMI} . Die Optimierung der Suchraumgrenzen für die natürlichen Parameter n_1, n_2 in diesem Fall erfolgte aufgrund ihrer Abhängigkeit von nunmehr vier Eingangsparametern α, β, θ_1 und ε nur im Einzelfall. Auf eine allgemeine Angabe der Suchraumgrenzen wurde verzichtet.

5.3 Fehleranalyse

Das entscheidende Qualitätsmerkmal jedes Algorithmus ist seine Genauigkeit. Die während der Implementierung des vorgestellten Algorithmus identifizierten Fehlerquellen bestehen zum einen in der numerischen Berechnung der OC- und ASN-Funktion, zum anderen in der angewendeten Suchstrategie.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der nichtzentralen t -Verteilung erfolgte nach einem von CHATTAMVELLI/ SHANMUGAM [3] vorgeschlagenen Algorithmus. Für die numerische Integration zur Berechnung von dreifachen Integralen wurde das Gauß-Legendre-Verfahren verwendet. Die Anzahl der Stützstellen variierte in Abhängigkeit von der Trennschärfe. Die Maximumbestimmung der ASN-Funktion erfolgte durch eine auf das Prinzip des goldenen Schnitts (golden section search)⁴ beruhende Suchroutine, die eine maximale Abweichung vom "wahren" Maximum in Höhe von höchstens 10^{-8} erlaubt.

Die aus der Anwendung der vorgeschlagenen Suchstrategie resultierenden Fehlerquellen bestehen in:

- (i) der Berücksichtigung von nicht zugelassenen Tests durch die Festlegung der Parameter k_1, k_2 nach 5.1,
- (ii) dem Verlust von zugelassenen Tests, die ein günstigeres Optimalitätskriterium aufweisen, durch die Festlegung des Parameters k_3 ,

⁴vgl. PRESS ET AL. [13]

- (iii) der Nicht-Berücksichtigung von zugelassenen Tests, die ein günstigeres Optimalitätskriterium aufweisen, durch die Festlegung der Suchräume für die Parameter n_1, n_2 .

Die für die Lösung von 5.1 verwendete Routine liefert Ergebnisse mit einer Abweichung in Höhe von ebenfalls höchstens 10^{-8} . Ist die Abweichung für (I) positiv und (II) negativ, so ist der Test mit den errechneten Werten zugelassen, in den anderen drei Fällen nicht mehr. Die Bestimmung der Parameter k_1, k_2 erfolgte gemäß

$$\begin{cases} L(0, k_1, k_2) - 1 + \alpha = 10^{-8} \\ L(\theta_1, k_1, k_2) - \beta = -10^{-8}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Damit werden möglicherweise nach 5.1 zugelassene Tests mit günstigerem Optimalitätskriterium aufgegeben, die numerisch bedingten Lösungsschwankungen liegen jedoch alle im Zulassungsbereich.

Die Festlegung des Parameters k_3 durch Minimumsuche des Optimalitätskriteriums kann je nach verwendeter Schrittlänge zum Verlust eines Tests mit günstigerem Optimalitätskriterium führen. Die beschriebene Diskretisierungsmöglichkeit lässt Intervalle um das "wahre" Minimum höchstens im Hundertstelbereich zu. Die relative Intervalllänge beträgt im ungünstigsten Fall bis zu 0.05%. Damit können die berechneten Tests im Optimalitätskriterium durch die Diskretisierung des Parameters k_3 um höchstens 0.05% vom "optimalen" Test abweichen.

Die beschriebene Festlegung der Suchräume für die Parameter n_1 und n_2 erfolgte durch die Untersuchung zahlreicher Konstellationen. Die einfache OC-Funktion im Gaußfall und der geringe Unterschied der natürlichen Parameter $n_i, i = 1, 2$ zum t-Fall ermöglichten eine umfassende Optimierung der gängigen Konstellationen der Eingangsparameter α, β und θ_1 .

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit bestand in der Berechnung von ASN-Versionen des zweistufigen Gauß- und t-Tests nach der von BOWKER/ GOODE [1] vorgeschlagenen Konstruktion.

Der erste, wesentliche Schritt für die zweistufige Testentwicklung besteht in der Angabe der OC-Funktion. Im einseitigen Gaußfall ließ sich die von FELDMANN/ KRUMBHOLZ [6] im Rahmen der Entwicklung von zweistufigen Variablenprüfplänen hergeleitete OC-Funktion übertragen. Die Annahmewahrscheinlichkeit nach der Ziehung der zweiten Stichprobe $P(A_2)$ des einseitigen Tests wurde für die Berechnung der OC-Funktion im zweiseitigen Fall verwendet. KRUMBHOLZ/ ROHR [10] entwickelten die OC-Funktion des zweistufigen einseitigen t-Tests. Im zweiseitigen Fall wurde die Analogie zum Gaußtest zugunsten einer recheneffizienteren Ermittlung der $P(A_2)$ aufgegeben. Es konnte gezeigt werden, dass die Bowker-Goode-Tests ein niedrigeres Optimalitätskriterium und damit eine höhere Effizienz gegenüber den zweistufigen Tests mit unabhängigen Testgrößen aufweisen.

Der für die Herleitung der zweiseitigen OC-Funktion im t-Fall verfolgte Ansatz eignet sich nicht für die Angabe der OC-Funktion von zweistufigen Variablenprüfplänen mit zweiseitigen Toleranzgrenzen z.B. des LIEBERMAN/ RESNIKOFF'schen [11] Typs. Die von KRUMBHOLZ/ ROHR [10] bewiesenen Lemmata können dennoch für die Herleitung der OC-Funktion im Fall des zweistufigen Zweistichproben-t-Tests verwendet werden.

Aus allen in dieser Arbeit implementierten Optimalitätskriterien für die Festlegung von ASN-optimalen Tests erscheint das Minimaxkriterium natürlicher. Die Verwendung des Integralkriteriums für die Berechnung optimaler Testverfahren empfiehlt sich in Verbindung mit einer Schranke ε für das ASN-Maximum im Rahmen des Minimax-Integral-Ansatzes.

Der zweite wesentliche Schritt für die Entwicklung von zweistufigen

Test(Prüf)verfahren besteht in der Angabe von Algorithmen für die Festlegung der Parameter n_1, n_2, k_1, k_2, k_3 ohne einschränkende Restriktionen. Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Algorithmus eignet sich für die Berechnung von zweistufigen Test(Prüf)verfahren mit unterschiedlichen Optimalitätskriterien an die ASN-Funktion, da die Festlegung der reellen Parameter k_1, k_2 über die OC-Bedingungen erfolgt. Durch die hinreichende Eingrenzung der Suchräume für die Parameter n_1, n_2 konnte die Rechengeschwindigkeit gegenüber einer sequentiellen Suche ohne Genauigkeitseinbußen erhöht werden. Offen bleibt, ob der vorgeschlagene Algorithmus auch für die Berechnung von mehrstufigen Tests eine wesentlich höhere Geschwindigkeit gegenüber einer sequentiellen Suche aufweist. Der Geschwindigkeitsvorteil dürfte mit der Zunahme der Teststufenzahl abnehmen. Die Verwendung des Algorithmus für die Berechnung von zweistufigen Zweistichproben-Gauß- und t-Tests erscheint aufgrund der gleichen Optimierungsaufgabe sinnvoll.

Literaturverzeichnis

- [1] BOWKER, A.H., GOODE, H.P. (1952). Sampling Inspection by Variables. McGraw-Hill, New York.
- [2] BROYDEN, C.G. (1965). A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations. Mathematics of Computation 19, 577-593.
- [3] CHATTAMVELLI, R., SHANMUGAM, R. (1994). An Enhanced Algorithm for Noncentral T-Distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation 49, 77-83.
- [4] EICHWEDE, R., KRUMBHOLZ, W. (2001). ASN-optimal double sampling plans for attributes. Allgemeines Statistisches Archiv 85, 427-442.
- [5] FELDMANN, B. (1999). Zweifache und sequentielle Minimax-ASN-Variablenprüfpläne mit normal- und exponentialverteiltem Merkmal. Dissertation an der Universität der Bundeswehr Hamburg.
- [6] FELDMANN, B., KRUMBHOLZ, W. (2002). ASN-minimax double sampling plans for variables. Statistical Papers 43, 361-377.
- [7] HILBERT, M. (2005). Zweifache ASN-Minimax-Variablenprüfpläne für normalverteiltes Merkmal bei unbekanntem Parametern. Dissertation an der Universität der Bundeswehr Hamburg.
- [8] JOHNSON, N. L., WELCH, B. L. (1939). Applications of the non-central t-distribution. Biometrika 31, 362-389.
- [9] KRUMBHOLZ, W., LASSAHN, R., ŠEVČÍKOVÁ, H. (1999). Double Sampling Plans for Attributes that minimize the ASN maximum. Allgemeines Statistisches Archiv 83(2), 211-223.
- [10] KRUMBHOLZ, W., ROHR, A. (2006). The operating characteristic of double sampling plans by variables when the standard deviation is unknown. Allgemeines Statistisches Archiv 90, 233-252.

- [11] LIEBERMAN, G. J., RESNIKOFF, G. J. (1955). Sampling Plans for Inspection by Variables. *Journal of the American Statistical Association* 50, 457-516.
- [12] MÜLLER, K. (1998). Zweifache Stichprobenprüfpläne für qualitative und quantitative Merkmale mit minimaler maximaler ASN. Dissertation an der Universität der Bundeswehr Hamburg.
- [13] PRESS, W. H. ET AL. (2002). *Numerical Recipes in C++*. Cambridge University Press, 3. Aufl.
- [14] SOMMERS, D.J. (1981). Two Point Double Variables Sampling Plans. *Journal of Quality Technology* 13, 25-30.

Anhang A

Suchraumgrenzen

$\beta \backslash \alpha$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.02	X_1	A	A	A	B	B	B	B	B
0.03	A	X_2	A	B	B	B	B	B	C
0.04	A	A	X_3	B	B	B	B	C	C
0.05	A	B	B	X_4	B	B	B	C	C
0.06	B	B	B	B	X_5	C	C	C	C
0.07	B	B	B	B	C	X_6	C	C	C
0.08	B	B	B	B	C	C	X_7	C	C
0.09	B	B	C	C	C	C	C	X_8	C
0.10	B	C	C	C	C	C	C	C	X_9

Abbildung A.1: Der einseitige Minimax-Gaußfall

mit

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{cases} 0.66n \leq n_1 \leq 0.685n \\ 0.40n \leq n_2 \leq 0.45n \end{cases}, & X_2 &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.42n \leq n_2 \leq 0.46n \end{cases}, \\
 X_3 &= \begin{cases} 0.64n \leq n_1 \leq 0.66n \\ 0.44n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}, & X_4 &= \begin{cases} 0.63n \leq n_1 \leq 0.65n \\ 0.45n \leq n_2 \leq 0.48n \end{cases}, \\
 X_5 &= \begin{cases} 0.62n \leq n_1 \leq 0.65n \\ 0.46n \leq n_2 \leq 0.50n \end{cases}, & X_6 &= \begin{cases} 0.61n \leq n_1 \leq 0.64n \\ 0.47n \leq n_2 \leq 0.50n \end{cases}, \\
 X_7 &= \begin{cases} 0.61n \leq n_1 \leq 0.64n \\ 0.48n \leq n_2 \leq 0.52n \end{cases}, & X_8 &= \begin{cases} 0.61n \leq n_1 \leq 0.63n \\ 0.50n \leq n_2 \leq 0.52n \end{cases}, \\
 X_9 &= \begin{cases} 0.60n \leq n_1 \leq 0.63n \\ 0.50n \leq n_2 \leq 0.54n \end{cases}, & A &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.42n \leq n_2 \leq 0.46n \end{cases}, \\
 B &= \begin{cases} 0.63n \leq n_1 \leq 0.66n \\ 0.45n \leq n_2 \leq 0.50n \end{cases}, & C &= \begin{cases} 0.61n \leq n_1 \leq 0.64n \\ 0.48n \leq n_2 \leq 0.53n \end{cases}.
 \end{aligned}$$

$\beta \backslash \alpha$	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
0.02	X_1	C	C	C	C	C	A	A	A
0.03	C	X_2	D	D	C	C	B	B	A
0.04	D	D	X_3	D	D	D	C	C	A
0.05	D	E	E	X_4	D	D	C	C	C
0.06	E	E	E	E	X_5	D	D	C	C
0.07	E	E	E	E	E	X_5	D	D	C
0.08	E	E	F	F	E	E	X_6	D	D
0.09	E	F	F	F	E	E	E	X_7	D
0.10	E	F	F	F	E	E	E	D	X_7

Abbildung A.2: Der zweiseitige Minimax-Gaußfall

mit

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{cases} 0.67n \leq n_1 \leq 0.69n \\ 0.39n \leq n_2 \leq 0.42n \end{cases}, & X_2 &= \begin{cases} 0.66n \leq n_1 \leq 0.68n \\ 0.41n \leq n_2 \leq 0.44n \end{cases}, \\
X_3 &= \begin{cases} 0.655n \leq n_1 \leq 0.675n \\ 0.42n \leq n_2 \leq 0.45n \end{cases}, & X_4 &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.42n \leq n_2 \leq 0.45n \end{cases}, \\
X_5 &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.43n \leq n_2 \leq 0.46n \end{cases}, & X_6 &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.44n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}, \\
X_7 &= \begin{cases} 0.655n \leq n_1 \leq 0.675n \\ 0.44n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}, & A &= \begin{cases} 0.68n \leq n_1 \leq 0.705n \\ 0.39n \leq n_2 \leq 0.43n \end{cases}, \\
B &= \begin{cases} 0.67n \leq n_1 \leq 0.695n \\ 0.40n \leq n_2 \leq 0.44n \end{cases}, & C &= \begin{cases} 0.67n \leq n_1 \leq 0.69n \\ 0.40n \leq n_2 \leq 0.45n \end{cases}, \\
D &= \begin{cases} 0.66n \leq n_1 \leq 0.68n \\ 0.41n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}, & E &= \begin{cases} 0.65n \leq n_1 \leq 0.67n \\ 0.42n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}, \\
F &= \begin{cases} 0.64n \leq n_1 \leq 0.66n \\ 0.44n \leq n_2 \leq 0.47n \end{cases}.
\end{aligned}$$