Kay Kochan

Robuste aktive Schallreduktion in Flugzeugen

Robuste aktive Schallreduktion in Flugzeugen

Von der Fakultät Maschinenbau
der
Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Kay Kochan
aus Zwickau

Hamburg 2009

Erstgutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Sachau

Zweitgutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. U. Zölzer

Tag der mündlichen Prüfung: 07. September 2009

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Professur für Mechatronik an der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Delf Sachau gilt mein besonderer Dank für das in mich gesetzte Vertrauen und die fachkundige Betreuung, die es mir ermöglichte eigenverantwortlich und unbeschränkt diese Forschungsarbeit anzufertigen. Auch sei Prof. Dr.-Ing. habil. Udo Zölzer für die Übernahme des Zweitgutachtens gedankt.

Mein Dank gilt weiterhin Herrn Dipl.-Ing. Harald Breitbach – stellvertretend für die Airbus Deutschland GmbH – für die hervorragende Zusammenarbeit und die Möglichkeit in einem interessanten Projekt mitzuwirken.

Bei den Mitarbeitern der Professur für Mechatronik und den Studenten bedanke ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die Bereitschaft durch fachliche Diskussionen zum Erfolg dieser Arbeit beizutragen.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Freundin Femke und meiner Familie bedanken, die mich außerhalb der fachlichen Problemstellung unterstützt haben.

Hamburg, im September 2009 Kay Kochan

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis ..... **I**

Abbildungsverzeichnis ..... **IV**

Tabellenverzeichnis ..... **VI**

Formelzeichen und Symbole ..... **VII**

Abkürzungen ..... **IX**

1 Einleitung **1**

1.1 Problemstellung 2

1.2 Stand der Technik 4

1.2.1 Regelstrategien und Regelalgorithmen 4

1.2.2 Systeme zur aktiven Schallreduktion 7

1.2.3 Robustheit der aktiven Systeme 8

1.3 Ziel und Inhalt der Arbeit 9

1.3.1 Wesentliche Ziele 9

1.3.2 Gliederung der Arbeit 10

2 Mathematische Modellbildung **11**

2.1 Übertragungsverhalten im Frequenzbereich 11

2.2 Modell des aktiven Systems 12

2.3 Unsicherheitsmodelle 13

2.3.1 Unsicherheit der Übertragungsmatrizen $\Delta\mathbf{G}$ und $\Delta\mathbf{G}_M$ 14

2.3.2 Unsicherheit der Störschallfelder $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_M$ 16

3 Reglerentwurf **17**

3.1 Der adaptive Regler mit Entwurfsparametern 17

3.1.1 Grundlagen des adaptiven Reglers 17

3.1.2 Die Reglergewichtungsmatrizen 18

3.2 Reglerentwurf anhand der nominellen Regelstrecke 25

3.2.1 Nominale Regelstabilität 25

3.2.2 Nominale Regelqualität 27

3.2.3 Aufstellen des Parameteroptimierungsproblems 27
3.3 Erweiterung zum robusten Reglerentwurf 28
3.3.1 Robuste Regelstabilität 29
3.3.2 Robuste Regelqualität 31
3.3.3 Aufstellen des Parameteroptimierungsproblems 36
4 Lösen des Optimierungsproblems 37
4.1 Klassifizieren des Problems und Auswahl eines Lösungsverfahrens 37
4.2 Ablauf der genetischen Optimierung 38
4.3 Umsetzung des Lösungsverfahrens 40
4.3.1 Kodierung der Optimierungsvariablen 40
4.3.2 Kodierung der Zielfunktion und Nebenbedingungen 42
4.3.3 Operator-Anpassungen 43
4.4 Überprüfen der Lösungsgüte 46
5 Anwendung auf den Lademeisterbereich 47
5.1 Raumakustische Anforderungen an die Versuchsumgebung 48
5.1.1 Modellbildung 48
5.1.2 Schallenergiefluss durch die Kopplungsfläche 49
5.1.3 Modales Verhalten im Lademeisterbereich 52
5.1.4 Folgerungen 55
5.2 Versuchsanordnung für die experimentelle Umsetzung 56
5.2.1 Nachbildung der Raumakustik 56
5.2.2 Elektro-akustische Komponenten 57
5.2.3 Implementierung des Reglers 58
5.3 Ermittlung der Unsicherheit 60
5.3.1 Messung der Übertragungsfunktionen und des Störschallfelds 60
5.3.2 Ableiten eines Unsicherheitsmodells aus den Messreihen 63
5.4 Überprüfen der Regelgütemaße des robusten Entwurfs 65
5.4.1 Validierung mittels Monte-Carlo-Simulation 65
5.4.2 Gütemaß der robusten Regelstabilität 66

5.4.3 Gütemaß der robusten Schallpegelreduktion 67
5.4.4 Gütemaß der robusten Lautsprecheransteuerung 69
5.4.5 Folgerungen 69
5.5 Reglerentwurf 70
5.5.1 Durchführung der Reglerparameteroptimierung 70
5.5.2 Ergebnisse der Optimierung 72
5.5.3 Ergebnisse des Reglerentwurfs 75
5.5.4 Analyse der Robustheit 78
5.5.5 Folgerungen 80
5.6 Überprüfen des Reglerentwurfs im Experiment 81
5.6.1 Ermitteln der Schallpegelreduktion 81
5.6.2 Überprüfen der Lautsprecheransteuerung 85
5.6.3 Schlussfolgerung 86
6 Zusammenfassung 87
A Anhang 89
A.1. Übertragungsmatrix und Störschallfeld des Abschnitts 3.1.2.4 89
A.2. Maximum eines Matrix-Vektor-Produkts 89
A.3. Lautsprecher- und Mikrofonpositionen 91
A.4. Gemessene Unsicherheitsnormen 92
A.5. Ergänzende Diagramme zur Bewertung der Regelgütemaße 93
A.6. Parameter des genetischen Optimierungsverfahrens 94
A.7. Ergänzende Ergebnisse des Reglerentwurfsbeispiels 94
Literaturverzeichnis 95

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1-1: Das Transportflugzeug Airbus A400M mit an den Laderaum angeschlossenem Lademeisterbereich [4]. 2

Abb. 1-2: Regelstrategien; a) adaptive Steuerung; b) adaptive oder nicht-adaptive Rückkopplungsregelung 4

Abb. 1-3: Ausgewählte Algorithmen zur aktiven Schall- und Schwingungsreduktion 5

Abb. 2-1: Elektroakustische Übertragungsstrecke. 11

Abb. 2-2: Modell des Systems zur aktiven Schallreduktion. 12

Abb. 3-1: Zeigerdiagramm der komplexen Lautsprecheransteuerung $u_{\mathrm{opt}(3)}$; a) GPK; b) GHK 23

Abb. 3-2: Lage der Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ der Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]$ 30

Abb. 4-1: Aufbau des verwendeten genetischen Algorithmus. 39

Abb. 4-2: Repräsentation des Individuums als Genotyp und Phänotyp (Abb. nach K. Weicker [104]). 41

Abb. 4-3: Kodierungsvorschrift für die Gewichtung der physikalischen Reglerkoordinaten. 41

Abb. 4-4: Kodierungsvorschrift für die Gewichtung der Regelhauptkoordinaten. 42

Abb. 4-5: Indikatorfunktion $I(z)$ und Approximation $\hat{I}(z)$. 43

Abb. 4-6: Dichte der Beta-Verteilung. 43

Abb. 4-7: Ablauf der Mutation eines einzelnen Individuums. 44

Abb. 4-8: Parameter α und β der Beta-Verteilung zur zufälligen Erzeugung des Mutationsschritts sowie ausgewählte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen auf dem Intervall $\left[-0.5, 0.5\right]$. 45

Abb. 5-1: Vereinfachtes Modell des gekoppelten Systems. 48

Abb. 5-2: Schallwechseldruckmoden des vereinfachten Modells; Substruktur des Lademeisterbereichs (oben); gekoppeltes Gesamtsystem (unten); Zuordnung über MAC-Werte (Mitte). 54

Abb. 5-3: Im Laborraum aufgestelltes Mock-up des Lademeisterbereichs. 56

Abb. 5-4: Versuchsanordnung im Überblick 57

Abb. 5-5: Aufbau des auf dem dSPACE 1103 implementierten Reglers. 59

Abb. 5-6: Kistendiagramme der gemessenen Unsicherheitsnormen aufgrund der Schwankungen in der nominellen Messreihe. 61

Abb. 5-7: Lademeisterbereich mit Störkörper (links); Abmaße der Störkörper I bis III (rechts). 62

Abb. 5-8: Kistendiagramm der bezogenen Normen der aufgrund der Störkörper verursachte Unsicherheiten $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$. 63

Abb. 5-9: Blasendiagramm der mittlere Matrixelementbeträge von a) $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und b) $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$. 64

Abb. 5-10: Ablauf einer von hundert Monte-Carlo-Simulationen zur stochastischen Bestimmung der Stabilität, der Schallreduktion und der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall. 66

Abb. 5-11: Schätzfehler des kleinsten Eigenwertrealteils der Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]$; rechts – GPK; links – GHK. 67

Abb. 5-12: Schätzfehler des Schalldruckpegels im ungünstigsten Fall bei GPK. 68

Abb. 5-13: Relativer Schätzfehler der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall bei GPK. 68

Abb. 5-14: Diagonalelemente der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}$ für beide Lastfälle (I, II); a) nomineller Reglerentwurf; b) robuster Reglerentwurf. 73

Abb. 5-15: Diagonalelemente der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$ für beide Lastfälle (I, II); a) nomineller Entwurf; b) robuster Entwurf. 73

Abb. 5-16: Diagonalelemente $\hat{q}_{\mathrm{HK}(i)}$ der Gewichtungsmatrizen $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}$ für beide Lastfälle. . 74

Abb. 5-17: Erwartete mittlere Schallpegelreduktion im Monitorvolumen. 75

Abb. 5-18: Erwartete Amplitude der Lautsprecheransteuerung; a) GLF b), c) GPK; d), e) GHK. 77

Abb. 5-19: Schallpegelreduktion mit GPK bei schrittweiser Erhöhung der bezogenen Unsicherheit. 78

Abb. 5-20: Schallpegelreduktion mit GHK bei schrittweiser Erhöhung der bezogenen Unsicherheit. 80

Abb. 5-21: Gemessene mittlere Schallpegelreduktion im Monitorvolumen für den Lastfall I a) und den Lastfall II b). 82

Abb. 5-22: Am rechten Kunstkopfmikrofon gemessenes Schallpegelspektrum im Lastfall I bei nGPK. 84

Abb. 5-23: Schallfeld im Monitorvolumen im Vergleich. 84

Tabellenverzeichnis

Tab. 3-1: Vergleich der Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten (GPK), in Regelhauptkoordinaten (GHK) und mit Leakage-Faktor (GLF).....25

Tab. 5-1: Angenommene Lastfälle.....47

Tab. 5-2: Bezogener Medianwert der durch die Störkörper verursachten Unsicherheiten $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$.....64

Tab. 5-3: Steigungswinkel des Kostengebirges an den Lösungen des nominellen Reglerentwurfs; Optimierungszeit in Minuten.....71

Tab. 5-4: Ausgewählte Ansteuerungen mit Angabe des Minimums, des Medians, des Maximums und des Interquartilsabstands (QA).....85

Formelzeichen und Symbole

Skalare

A	äquivalente Absorptionsfläche
Anz_{UnPop}	Anzahl der Unterpopulationen
a, b	Hilfsgröße
$bend$	Parameter für den Mutationsoperator
c_s	Schallgeschwindigkeit in Luft
E	Energiedichte
e	Fehlersignal
f	Funktion
G	elektroakustische Übertragungsstrecke
I	Indikatorfunktion
i	Laufvariable
J_{R}	Reglerkostenfunktion
j	Laufvariable
k	Kopplungsfaktor
L	Schalldruckpegel
N_{E}	Anzahl der Fehlermikrofone
N_{L}	Anzahl der Lautsprecher
N_{M}	Anzahl der Monitormikrofone
N_{UnPop}	Anzahl der Individuen pro Unterpopulationen
N_{Elite}	Anzahl der Eliteindividuen pro Unterpopulationen
N_{Mig}	Anzahl der Generationen zwischen zwei Migrationen
N_{Tour}	Anzahl der Individuen in der Tunierselektion
n	diskrete Zeit
n_{Gen}	Generation
P	Schallleistungseintrag
p_0	Bezugsschalldruck
p_i	Störschallfeld als Regelhauptkoordinate
r_{Cross}	Anteil der migrierenden Individuen
q , r	Gewichtungsparameter
S	Koppelfläche
SF	Sicherheitsfaktor
t	kontinuierliche Zeit
u	Lautsprecheransteuerung
V	Volumen
v_i	Regelhauptkoordinate der Ansteuerung
x	Referenzsignal
α, β	Parameter der Beta-Verteilung
Γ	Gamma-Funktion
γ	Leakage-Faktor
ε	relativer Fehler
λ	Eigenwert
μ	Schrittweite
σ_i	Singulärwert von $\mathbf{G}_0$
τ	Abweichung des Eigenwert λ von $\hat{\lambda}$
Ω , ω	Kreisfrequenz

Matrizen

$\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$	Hilfsgröße
$\mathbf{C}$	Reglermatrix der optimalen Ansteuerung
$\mathbf{d}$	Schalldruck des Störschallfeldes
$\mathbf{e}$	Fehler des überlagerten Schallfeldes
$\mathbf{G}$	Übertragungsmatrix der elektroakustischen Regelstrecke
$\hat{\mathbf{G}}$	im Regler verwendetes Modell der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$
$\mathbf{g}$	Gradient der Reglerkostenfunktion J_R
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{K}$	FE-Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}$	FE-Massenmatrix
$\mathbf{Q}$	Gewichtungsmatrix für die Fehlersignale
$\mathbf{R}$	Gewichtungsmatrix für die Ansteuerung
$\mathbf{P}$	Störübertragungsstrecke
$\mathbf{p}$	Störschallfeld $\mathbf{d}$ in Reglerhauptkoordinaten
$\mathbf{u}$	Lautsprecheransteuerung
$\mathbf{U}$	unitäre Matrix
$\mathbf{V}$	unitäre Matrix
$\mathbf{v}$	Ansteuerung $\mathbf{u}$ in Reglerhauptkoordinaten
$\mathbf{y}$	Fehler $\mathbf{e}$ in Regelhauptkoordinaten
$\mathbf{X}$	Matrix der Eigenvektoren
$\mathbf{x}$	Eigenvektor
$\mathbf{\Sigma}$	Singulärwertmatrix von $\mathbf{G}_0$
$\Delta\mathbf{G}$	additive Unsicherheit der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$
$\Delta\mathbf{d}$	additive Unsicherheit der Übertragungsmatrix $\mathbf{d}$
$\Delta\mathbf{u}$	additive Unsicherheit der Ansteuerung $\mathbf{u}$
$\Delta\mathbf{W}$	Matrix der Unsicherheitsstruktur von $\Delta\mathbf{G}$
$\Delta\mathbf{w}$	Spaltenmatrix der Unsicherheitsstruktur von $\Delta\mathbf{d}$
$\mathbf{\Phi}$	Modalmatrix
$\mathbf{\Psi}$	Singulärmatrix der Reglermatrix

Operatoren

$\left\|\ldots\right\|_\mathrm{F}$	Frobeniusnorm
$\left\|\ldots\right\|_2$	Euklidische Vektornorm
$\left[\ldots\right]^\mathrm{T}$	Transponierte einer Matrix
$\left[\ldots\right]^\mathrm{H}$	Adjungierte einer Matrix
$\left[\ldots\right]^*$	konjugiert komplexe Größe
$\overset{\circ}{\ldots}$	Ableitung nach der dimensionslosen Zeit
max	Maximum einer Größe
min	Minimum einer Größe
$\succ, \prec$	positiv bzw. negativ definit

Indizes

$\cdots_M$	Monitormikrofone
$\cdots_0$	nominale Größe
$\cdots_{opt}$	optimale Größe
$\cdots_D$	physikalischen Reglerkoordinaten
$\cdots_{HK}$	Reglerhauptkoordinaten

Symbole in Flussdiagrammen

Vorbereitung

Prozess

Verzweigung

Ausgang

Abkürzungen

ABF	Regler mit adaptivem Bilinear-Filter
aFB / nFB	adaptiver Rückkopplungsregler / nicht-adaptiver Rückkopplungsregler
ANC	Active Noise Control, aktive Schallreduktion
APA	affiner Projektionsalgorithmus
FB	Rückkopplungsregelung
FDdelayless	verzögerungsfreier Regler im Frequenzbereich
FDFxLMS	FxLMS im Frequenzbereich
FEM	Finite Element Methode
FuRLS	filtered-u recursive least square Algorithmus
FxLMS	filtered reference LMS Algorithmus
FxRLS	filtered reference recursive least square Algorithmus
HBFxLMS	FDFxLMS mit Hartley-Transformation
GA	genetischer Algorithmus
GHK	Gewichtung in Reglerhauptkoordinaten
GLF	Gewichtung mit Leakage-Faktor
GPK	Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten
LMS	least mean square
MAC	modal assurance criterion
mFxLMS	modified FxLMS Algorithmus
NB	Nebenbedingung
nGHK	nomineller Entwurf mit Gewichtung in Reglerhauptkoordinaten

rGHK	robuster Entwurf mit Gewichtung in Reglerhauptkoordinaten
nGPK	nomineller Entwurf mit Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten
rGPK	robuster Entwurf mit Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten
PC-LMS	principal component Algorithmus
VFxLMS	Volterra FxLMS Algorithmus

1 Einleitung

Lärm wird als jene Art von Geräuschen bezeichnet, die ungewollt und störend auf einen Menschen einwirken. Dauerschallreize oberhalb von 65 dB(A) führen zu vegetativen Reaktionen des menschlichen Nervensystems, oberhalb von 90 dB(A) werden lärmbedingte Hörschäden verursacht. Maßnahmen zur Lärmreduktion sind daher ein Bestandteil jedes technischen Systems.

Durch den hohen Ölpreis und die Effizienz von Propellerflugzeugen rücken diese wieder zunehmend in den Fokus der Luftfahrtindustrie. Neben anderen sich gegenwärtig in der Entwicklung befindenden propellergetriebenen Transport- und Regionalflugzeugen kann als bedeutendes Beispiel das Konzept des Airbus A30X mit offenen gegenläufigen Propellern genannt werden [1]. Nachteilig an den Propellern ist jedoch die Anregung von hohen tonalen Lärmpegeln in der Flugzeugkabine.

Weiterhin wird bei der Entwicklung effizienter Luftfahrzeuge ein konsequenter Leichtbau verfolgt. Der Einsatz von leichten Kohlefaserverbundwerkstoffen verringert jedoch das Schalldämmmaß der Rumpfstruktur. Zugleich verfügen die passiven Lärmdämmmaßnamen im niedrigen Frequenzbereich über ein besonders hohes Gewicht. Dies steht im Widerspruch zum konsequenten Leichtbau.

In einigen Fällen kann dieser Gegensatz durch den Einsatz der aktiven Schallreduktion aufgelöst werden. Die aktive Schallreduktion, engl. *Active Noise Control* (ANC), basiert auf dem Prinzip der Interferenz des Störschallfeldes mit einem Sekundärschallfeld. Umgesetzt wird dies mit aktiven Systemen bestehend aus akustischen Aktoren und Sensoren sowie einem Regler. Dieser steuert die Aktoren so an, dass der Schallpegel an den Sensoren reduziert wird.

Durchsetzen konnten sich diese Technologie noch nicht, da sie hohe Entwicklungs- und Integrationskosten verursacht [2]. Für jede einzelne Anwendung müssen die aktiven Systeme an die Anforderungen angepasst werden. Ändern sich die Anforderungen, sind umfangreiche Modifikationen am System notwendig.

Dies greift die vorliegende Arbeit im Rahmen einer anwendungsnahen Problemstellung auf. Die hier vorgestellte Entwurfsmethodik beschränkt sich auf die Modifikationen von Reglerparametern. Eine teure Anpassung der Aktor- und Sensorpositionen in der Flugzeugkabine entfällt.

1.1 Problemstellung

Der Airbus A400M ist ein militärisches Transportflugzeug (Abb. 1-1), welches sich derzeit in der Entwicklung befindet. Dieses soll die Flotten der C-130 Hercules und C-160 Transall ersetzen. Durch den Einsatz von Verbundwerkstoffen und leistungsfähiger Triebwerke werden hohe tonale Schallpegel mit der Propellerblattfolgefrequenz (blade passing frequency – BPF) in der Flugzeugkabine angeregt. Dies führt zu einem erhöhten Aufwand beim akustischen Design, um die Arbeitsschutzbestimmungen einzuhalten [3].

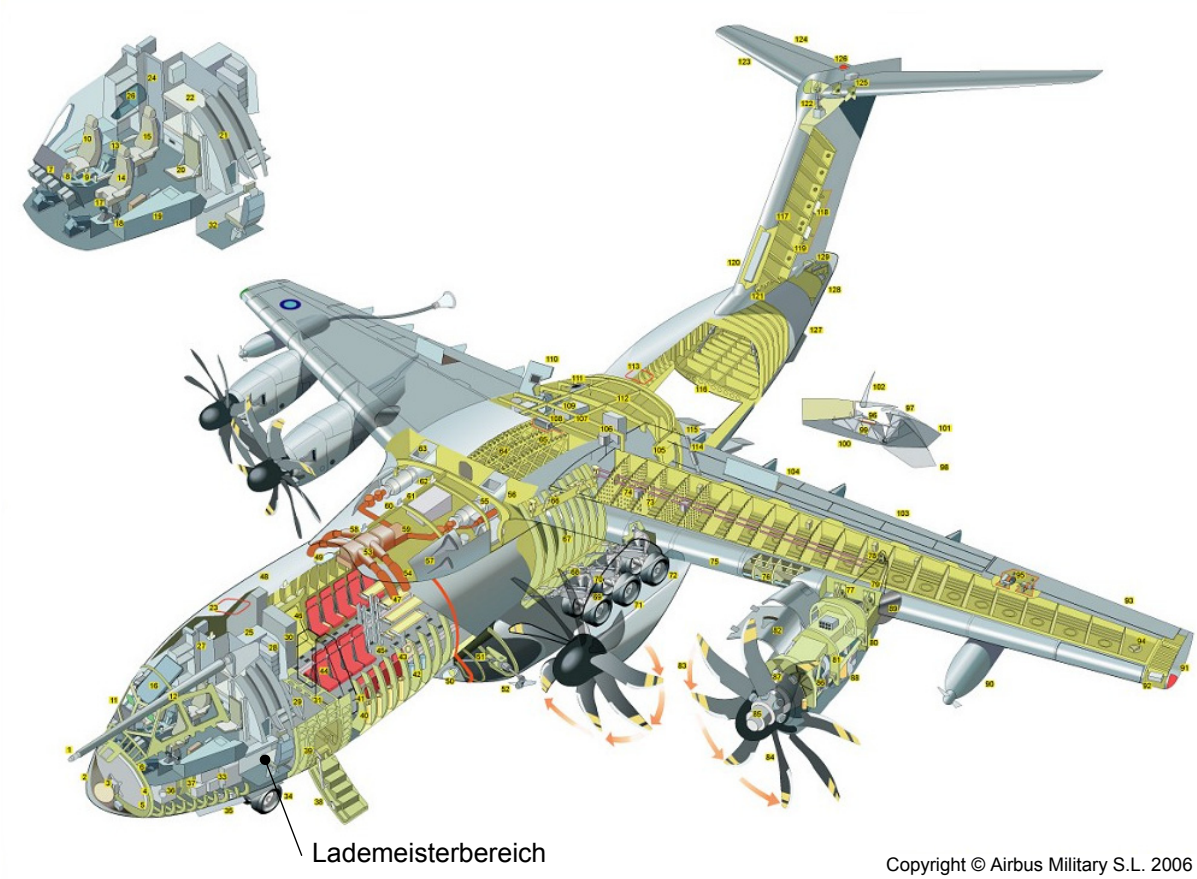


Abb. 1-1: Das Transportflugzeug Airbus A400M mit an den Laderaum angeschlossenem Lademeisterbereich [4].

Der Lademeister, zuständig für das Be- und Entladen des Flugzeuges, sitzt während des Fluges im Lademeisterbereich und überwacht die Ladung oder steuert den Lastabwurf. Dieser Lademeisterbereich befindet sich im vorderen Teil des Laderaums und wird mit einem aktiven Schallreduktionssystem ausgerüstet, vgl. Abb. 1-1. Die Aufgabe des aktiven Systems ist es, am Kopf des Lademeisters den Schalldruck der ersten drei Harmonischen (1xBPF, 2xBPF, 3xBPF) zu reduzieren.

Ein erster Demonstrator zeigt [4], dass mit optimierten Lautsprecher- und Mikrofonpositionen die notwendige Schallpegelreduktion an den Ohren des Lademeisters erreicht werden kann. Diese Konfiguration besteht aus vier Deckenlautsprechern und zwei Kopfstützenmik-

rofonen. Hierbei wird hochwertiges Equipment verwendet, welches sehr geringe Schwankungen aufgrund von Temperatur und anderen Umwelteinflüssen aufweist. Das Experiment wird in einem einfachen Mock-up des Lademeisterbereichs durchgeführt. Die realen akustischen Randbedingungen und der Laderaum werden nicht nachgebildet. Die Schrittweite des adaptiven Reglers wird über Versuch und Irrtum eingestellt; die Regelstabilität ist nicht garantiert. Da der Sitz mit den Kopfstützenmikrofonen beweglich ist, müssten die Übertragungsstreckenmodelle im Regler nachgeführt werden. Dies würde daher zur Implementierung einer Systemidentifikationsroutine zwingen. Gerner [4] stellt fest, dass die gefundene Lösung sensitiv bezüglich der Änderung der Übertragungsstrecken ist. Trotz des hochwertigen Laborequipments wird die notwendige Schallpegelreduktion bei manchen Konfigurationen nicht erzielt [4]. Dies bedeutet, dass bei einer kleinen Änderung der Übertragungsstrecken eine erneute Anpassung der Lautsprecher- und Mikrofonpositionen notwendig wäre. Dies ist jedoch wegen des festen Einbaus der Lautsprecher und Mikrofone unmöglich.

Durch den fortgeschrittenen Entwicklungsprozess der A400M kommen jetzt weitere konstruktive Rahmenbedingungen hinzu: Die für die Beobachtbarkeit des Volumens um den Lademeisterkopf optimalen Kopfstützenmikrofone sollen nicht verwendet werden, da sie hohe Kosten bei der Integration in den Sitz verursachen würden. Stattdessen werden 16 nicht optimierte Fehlermikrofon- und 8 Lautsprecherpositionen an der Kabinendecke und –wand vorgegeben. Der Abstand zwischen Kopf und Fehlermikrofonen wächst bis auf eine ganze Wellenlänge an. Die direkte Beobachtbarkeit ist nicht mehr gegeben. Im Prototyp werden luftfahrt-zertifizierte Komponenten (16 Fehlermikrofone, 8 Lautsprecher, Verstärker, Verkabelung) verwendet. Diese unterliegen im Vergleich zum hochwertigen Laborequipment höheren Schwankungen durch Umwelteinflüsse. Dies und die größeren Abstände zwischen den Lautsprechern, Fehlermikrofonen und dem Lademeisterkopf führen zu sehr großen Unsicherheiten der Übertragungsstrecken.

Wenn keine Kopfstützenmikrofone verwendet werden, reicht die Reduktion des Schallpegels an den Ohrpositionen nicht mehr aus. Sie muss auf ein Volumen ausgedehnt werden, welches die Kopfbewegungen abdeckt. Mit dem bisherigen Ansatz wird bei dieser Anforderung nur noch für die erste Harmonische eine Schallpegelreduktion erzielt.

Die für ein solches ANC-System spezifizierte Schallpegelreduktion ist im vorgesehenen Einsatzspektrum zu erreichen. Der Nachweis muss daher auch außerhalb des Labors, unter dem Einfluss von Unsicherheiten, in einem realistischen Mock-up oder im Flugzeug gelingen. Die Schallpegelreduktion in einem optimalen nominellen Fall ist dann weniger wichtig als die unter dem Einfluss von Unsicherheiten.

Das zu lösende Problem kann wie folgt zusammengefasst werden: Wie kann unter dem Einfluss großer Unsicherheiten eine robuste Schallpegelreduktion in einem bis zu einer Wellenlänge entfernten Volumen erreicht werden? Die Lautsprecher- und Mikrofonpositionen sind dabei konstruktiv festgelegt und können nicht optimiert werden.

1.2 Stand der Technik

Einen Einstieg in die Methode der aktiven Schallreduktion bieten die Bücher von Kuo und Morgan [5] sowie Elliott [6]. Die besonderen Probleme bei der Realisierung komplexer ANC-Systeme für industrielle Anwendungen werden von Hansen [7] und Sano [2] diskutiert. Dieses Kapitel gibt nun einen Überblick über den Stand der Technik.

1.2.1 Regelstrategien und Regelalgorithmen

Kern eines ANC-Systems ist der Regler. Dieser minimiert das aus dem Störschallsignal d und dem Sekundärsignal u' überlagerte Schallfeld e. Grundsätzlich kann zwischen zwei verschieden Regelstrategien unterschieden werden [5, 6]. Abb. 1-2 zeigt die adaptive Steuerung (engl. feedforward control) und die (nicht)-adaptive Rückkopplungsregelung (engl. feedback control) im Vergleich. Die Verfügbarkeit eines zur Störung d korrelierten Referenzsignals x unterscheidet beide Regelstrategien.

Die Ansteuerung u bestimmt die adaptive Steuerung (Abb. 1-2a) aus dem zurückgeführten Fehler e und dem Referenzsignal x. Sie ist nur in der Lage, den Signalanteil der Störungen d zu kompensieren, welcher zum Referenzsignal x korreliert. Nur der deterministische Signalanteil in d kann dagegen durch die Rückkopplungsregelung (Abb. 1-2b) ausgelöscht werden. Sie berechnet die Ansteuerung u nur aus dem zurückgeführten Fehler e. Neben diesen beiden Regelstrategien gibt es auch Mischformen, die so genannten hybriden Regelstrategien.

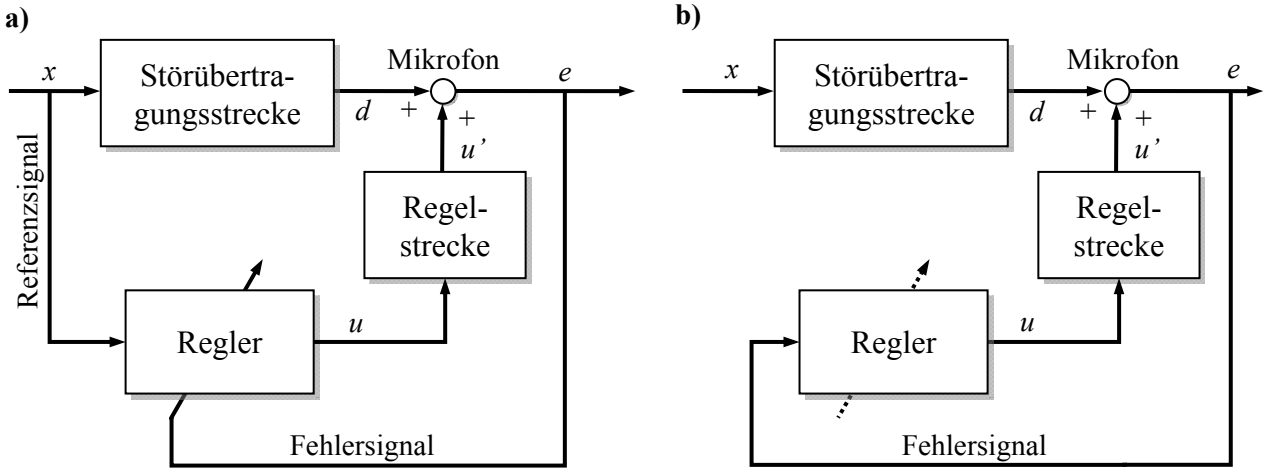


Abb. 1-2: Regelstrategien; a) adaptive Steuerung; b) adaptive oder nicht-adaptive Rückkopplungsregelung

Einen einführenden Überblick über die in den Reglern verwendeten Algorithmen gibt Kuo u.a. in [8]. Die Vielzahl an Algorithmen kann entsprechend Abb. 1-3 klassifiziert werden. Unterschieden wird nach Regelstrategie, der Umsetzung im Zeit- oder Frequenzbereich und nach der Art der verwendeten Filter. In Abb. 1-3 sind ausgewählte Algorithmen den entsprechenden Klassen zugeordnet.

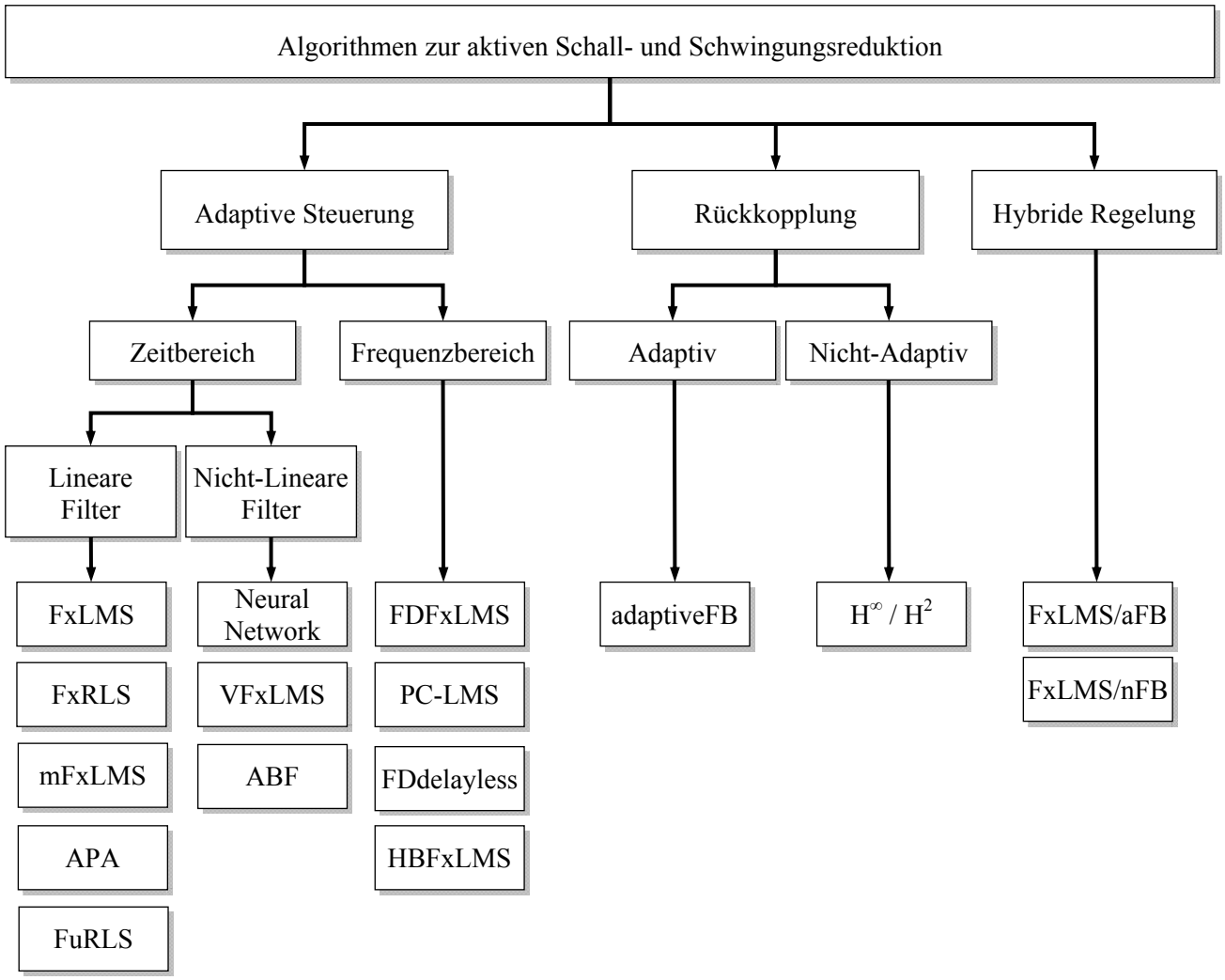


Abb. 1-3: Ausgewählte Algorithmen zur aktiven Schall- und Schwingungsreduktion

Der *filtered-reference least mean square Algorithmus* (FxLMS) ist der am häufigsten verwendete Algorithmus zur tonalen und breitbandigen aktiven Schallreduktion [5, 6]. Die Bezeichnung des Algorithmus beruht auf der Adaption eines FIR-Filters mittels least mean square (LMS) Verfahren und der Faltung des Referenzsignals mit einem Modell der Regelstrecke. Vorteile des Algorithmus sind dessen einfache Struktur und hohe Stabilität. Nachteilig ist dessen langsame Konvergenz und Folgegeschwindigkeit, diese hängt zudem von der Signalstatistik und der Regelstrecke ab. Zur Steigerung der Algorithmenleistung werden verschiedene Varianten, wie zum Beispiel der leaky FxLMS oder der normalized FxLMS, eingesetzt [5].

Der von Bjarnason [9] entwickelte *modified FxLMS Algortihmus* (mFxLMS) hat eine höhere, von der Regelstrecke unabhängige, Konvergenzgeschwindigkeit. Die numerische Komplexität ist größer als die des FxLMS, da das Ansteuerungssignal zusätzlich mit dem Regelstreckenmodell gefaltet wird. Für praktische Anwendungen ist der mFxLMS eine erprobte Alternative [10, 11]. Die Algorithmenstruktur des mFxLMS erlaubt es, komplexere Adaptionsverfahren einzusetzen. Sind hohe Konvergenzgeschwindigkeiten gefordert, kann der

recursive least square Algorithmus (FxRLS) angewandt werden. Dieser verfügt über eine sehr hohe numerische Komplexität aber nur eine geringe Stabilität [5].

Von Douglas u.a. [12] wurde der *affine Projektionsalgorithmus* (APA) an die Problemstellung der aktiven Schallreduktion angepasst. Methodisch gut beschrieben ist der Algorithmus in [13]. Die Arbeitsgruppe um Sayed [14-16] zeigte, dass der APA dem FxLMS und dem mFxLMS im Bezug auf Konvergenzgeschwindigkeit überlegen ist. Die numerische Komplexität ist etwa doppelt so groß wie die des FxLMS [17, 18].

Beim *filtered-u recursive least mean square Algorithmus* (FuRLS) wird ein IIR-Filter adaptiert [5]. Anwendung findet dieser, wenn die ANC-Lautsprecher auf das Referenzsignal zurückwirken oder hohe Filterordnungen notwendig sind. Problematisch ist die Stabilität und die Konvergenz des FuRLS [19-21]. Schirmacher [22] wendet diesen Algorithmus erfolgreich auf eine Dunstabzugshaube an.

Nichtlinearitäten der Regelstrecke werden nicht durch FIR- oder IIR-Filter modelliert. Dies beeinflusst die Leistung des Reglers negativ. Abhilfe können Regler mit dem *Volterra filtered reference least mean square Algorithmus* (VFxLMS) [23], mit dem *adaptiven Bilinear-Filtern* (ABF) [24, 25] oder mit *neuronalen Netzen* [26] schaffen. Kritisch sind die Stabilität und die lokalen Minima der Reglerkostenfunktion.

Für tonale Anwendungen kann der FxLMS im Frequenzbereich (FDFxLMS) realisiert werden [5]. Vorteilhaft ist die geringere numerische Komplexität. Außerdem werden die Approximationsgüte des Gradienten und die Konvergenzgeschwindigkeit gesteigert. Eine Variante tonaler Frequenzbereichsregler ist der *principal component Algorithmus* (PC-LMS) [27, 28]. Dieser basiert auf der Transformation der Eingangs- und Ausgangssignale des Reglers in die Regelhauptkoordinaten. Vorteile sind die reduzierte numerische Komplexität und die höhere Konvergenzgeschwindigkeit, nachteilig wirkt sich die zusätzliche Transformation in die Regelhauptkoordinaten aus. Für breitbandige Anwendungen ist die Implementierung des *verzögerungsfreien Frequenzbereichalgorithmus* (FDdelayless) notwendig [29]. Kuo u.a. [30] berichten über weitere Verbesserungen mit dem HBFxLMS Algorithmus.

Nicht-adaptive Rückkopplungsregelungen für breitbandige Störsignale werden mit dem H^2- bzw. H^∞- Entwurf realisiert [6, 31]. Für tonale Anwendungen sind auch *adaptive Rückkopplungsregelungen* (adaptiveFB) möglich [5]. Die Totzeit in der Regelstrecke schränkt die Anwendung der Rückkopplungsregelung ein.

Einen hybriden Regelalgorithmus, der den FxLMS Algorithmus mit einer adaptive Rückkopplung (FxLMS/aFB) verknüpft, beschreibt Kuo u.a. in [5]. Praktisch realisiert wurde dieser Algorithmus in [32]. In [33] wird eine Kombination mit nicht-adaptiver Rückkopplung (FxLMS/nFB) beschrieben. Mit diesen Algorithmen gelingt es, die Regelleistung im Vergleich zur reinen adaptiven Steuerung oder Rückkopplungsregelung zu verbessern. Der Implementierungsaufwand steigt jedoch an.

1.2.2 Systeme zur aktiven Schallreduktion

Neben den Regelalgorithmen unterscheiden sich ANC-Systeme auch durch ihren Einsatzbereich. In Flugzeugkabinen kann zwischen lokaler und globaler Schallreduktion unterschieden werden.

1.2.2.1 Lokale Schallreduktion

Die lokale Schallreduktion ist der einfachste Fall. Hier werden wenige Fehlermikrofone und Lautsprecher in direkter Nähe des menschlichen Ohres platziert. Der Wirkungsbereich hat etwa die Ausdehnung von einem Zehntel der Wellenlänge [34].

In erster Linie ist die Anwendung in Kopfhörern zu nennen. Sie sind als marktverfügbare Produkte erhältlich mit Sennheiser's NoiseGard®- [35] oder BOSE's Acoustic Noise Cancelling®-Technologie [36]. Die Forschung in diesem Anwendungsfeld befasst sich mit der Entwicklung hybrider Regleralgorithmen. Es werden breitbandige Schallpegelreduktionen zwischen 30 und 40 dB erreicht [32, 33, 37].

Zur lokalen Schallreduktion werden ebenso Lautsprecher-Mikrofon-Anordnungen in Form einer aktiven Kopfstütze gezählt. Teilweise sind diese für den Einsatz in Flugzeugen konzipiert [38]. Die Fehlermikrofone und Lautsprecher sind möglichst nah am Ohr platziert [6]. In aktuellen Arbeiten kommen sowohl adaptive Steuerungen [4, 11, 39-42] als auch Rückkopplungen [38, 43-45] zum Einsatz. Es werden bis zu 30 dB breitbandige und schmalbandige Schallpegelreduktionen erzielt. Um die Schallpegelreduktion am Ohr zu erhöhen, wurden so genannte virtuelle Mikrofone untersucht [40, 45-48]. Diese Methoden rekonstruieren über ein mathematisches Modell den Schalldruck an der virtuellen Sensorposition. Anschließend erfolgt die Regelung mit den virtuellen Mikrofonsignalen.

Gerner [4, 49] setzt einen semi-lokalen Ansatz in einem Flugzeug-Mock-up um. Um hier eine gute Beobachtbarkeit zu erreichen, werden die Fehlermikrofone an der Kopfstütze platziert. Die Lautsprecher sind dagegen an konstruktiv günstigen Positionen montiert. Die Funktionsfähigkeit einer solchen semi-lokalen Anordnung wird ebenso in einem Light Jet Mock-up mit breitbandigen Lärm demonstriert [11].

1.2.2.2 Globale Schallreduktion

Die globale Schallreduktion ist wesentlich komplexer als die lokale Schallreduktion. Im Allgemeinen werden hier eine große Anzahl an Lautsprechern und Mikrofonen benötigt. Die Wirkung der ANC-Systeme ist nicht mehr auf einzelne Punkte beschränkt, sondern bezieht sich auf Räume. Möglich wird dies durch den aktiven Eingriff in den Transmissionspfad [50] oder durch globales Verteilen von Lautsprechern und Mikrofonen.

In der Automobilindustrie geht die Forschung auf die Arbeiten von Nissan zurück [51], weitere Beispiele findet man in [52-55]. Die Umsetzung erfolgt mittels adaptiver Steuerung für die tonalen Anteile des Motorlärms. Die Regelung, des durch den Rad-Straße-Kontakt

verursachten breitbandigen Lärm, erfolgt mit adaptiver Steuerung oder durch Rückkopplungsregelung. Es wird eine Schallpegelreduktion von bis zu 10 dB erzielt. Anstatt die Schallpegelreduktion zu maximieren, setzt man beim aktiven *Sound Design* auf die Optimierung der Klangqualität [56-59]. Typische ANC-Systeme in Fahrzeugen bestehen aus bis zu sechs Lautsprechern und acht Fehlermikrofonen [60]. Problematisch ist die Platzierung der Referenzsensoren. Häufig werden mindestens vier Referenzsensoren eingesetzt [61]. Trotz der mehrfachen Demonstration der Machbarkeit, wurden bisher nur wenige kommerzielle Systeme umgesetzt (z.B. Honda Accord Sedan [62]). Sano u.a. diskutieren in [2] die Gründe dafür und bezeichnen die hohen Kosten, im Vergleich zum eigentlichen Wert, für den Kunden als entscheidenden Nachteil.

Über aktive Schallreduktion in Flugzeugen wird von Elliott u.a. in [63] berichtet. Zum Einsatz kommen 16 Lautsprecher und 32 Mikrofone. Sie erzielen bis zu 12 dB Schallreduktion. Anfang der neunziger Jahre wird mit dem europäischen Forschungsprojekt ASANCA (Advanced Study for Active Noise Control in Aircraft) [64] eine große Studie durchgeführt. Die ANC-Systeme werden in verschiedene Flugzeugmuster (Dornier 328, Fokker 100, Saab 340, ATR 42) eingerüstet, sie umfassen 32 Lautsprecher und 48 Fehlermikrofone. Gemittelt über die Fehlermikrofone werden 10 dB für 1xBPF, 8 dB für 2xBPF, 4 dB für 3xBPF gemessen [65]. Serienmäßig eingerüstet werden ANC-Systeme von *Ultra Electronics* in die bis 1999 [66] produzierten Propellerflugzeuge Saab 340 und Saab 2000 [67]. In der Saab 2000 werden 72 Fehlermikrofone und 36 Lautsprecher verwendet [68]. Außerdem liefert *Ultra Electronics* aktive Schallreduktionssysteme als Nachrüstsätze für das Cockpit der C130 Hercules [69] und die King Air Serie [67]. Für die Implementierung dieser ANC-Systeme werden akustische Übertragungsstrecken und Störschallfelder während Boden- und Flugtests gemessen. Die Lautsprecher- und Mikrofonpositionen werden anschließend optimiert [67-71]. Für dieses Verfahren veranschlagt *Ultra Electronics* etwa 5 Wochen [67].

Das Optimierungsverfahren *SaabOpt* bereitet die Messdaten über eine Singulärwertzerlegung auf und selektiert anschließend rangbasiert die Aktor- und Sensorpositionen [68]. In der Saab 2000 werden damit zwischen 8 und 14 dB für 1xBPF erzielt. Alle in [63] bis [68] vorgestellten ANC-Systeme sind in Propellerflugzeugen implementiert, ein Referenzsignal ist verfügbar. Es werden daher adaptive Steuerungen eingesetzt.

1.2.3 Robustheit der aktiven Systeme

Entsprechend Müller [72] gilt: „Regelungen, die eine quantitative Aussage über die tolerierbaren Modellunsicherheiten gestatten, werden als robuste Regelungen bezeichnet.“ Diese Definition bestimmt den Robustheitsbegriff nicht nur im Sinne der robusten Regelstabilität, sondern auch im Sinne der robusten Regelqualität. Es wird zwischen strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten unterschieden. Die Entwicklung robuster Regelungen beginnt in den 80er Jahre durch Zames [73, 74]. Der als H^{∞} bekannte Entwurf bezieht sich dabei nur auf robuste Rückkopplungsregelungen im Zeitbereich [75, 76].

Elliott [77] untersucht die Stabilität von Regelungen für ANC-Systeme. Er beschränkt sich auf den FxLMS und die adaptiven Rückkopplungsregler. Die Ursache der Instabilitäten ist hier die Abweichung zwischen Modell und realer Regelstrecke. Der Effekt dieser Unsicherheiten auf adaptive Steuerungen (FxLMS, FDFxLMS) wird von Omoto u.a. [78, 79] sowie Boucher u.a. [80] untersucht. Weitere Stabilitätsanalysen und Verbesserungen des FxLMS werden von Rupp und Sayed [81] sowie von Franje u.a. [82, 83] beschrieben. Die Stabilisierung kann auch durch Regularisierung mit einem Leakage-Faktor erreicht werden. Der Leakage-Faktor beeinflusst jedoch die Lautsprecheransteuerung u und den kleinsten verbleibenden Fehler e. Mit dem Problem der Balance zwischen größter Stabilität und kleinstem verbleibenden Fehler e befassen sich die Arbeiten von Elliott u.a. [84, 85], der Lord Corporation [86] und der K.U. Leuven [87]. Qiu und Hansen [88] stellen einen adaptiven Leakage-Faktor vor, um die maximale Lautsprecheransteuerung zu begrenzen.

Neben den algorithmischen Aspekten ist auch die Platzierung der Aktoren und Sensoren für einen robusten Systementwurf wichtig. In den Publikationen von Baek und Elliott [89-91] wird numerisch der Einfluss diffus reflektierender Objekte auf ein ANC-System in einem quaderförmigen Raum untersucht. Die Platzierung der Lautsprecher und Mikrofone erfolgt über naturanaloge Optimierungsverfahren. Dabei werden verschiedene Zielfunktionen untersucht. Die Studie zeigt, dass Lautsprecherpositionen, die zu kleinen Ansteuerungen führen, robuster sind als solche mit großer Ansteuerung.

1.3 Ziel und Inhalt der Arbeit

Der Stand der Technik zeigt, dass nur sehr wenige, mit der Problemstellung vergleichbare, Anwendungen umgesetzt wurden. Diese findet man vor allem in kleinen Flugzeugkabinen (Saab 2000 –Ø2.2 m x 16.7 m [92], Airbus A400M – 3.9 x 4.0 x 23.1 m³). Hieraus kann der Forschungsbedarf für die vorliegende Problemstellung abgeleitet werden.

1.3.1 Wesentliche Ziele

Hauptziel dieser Arbeit ist es, in einem Volumen innerhalb des Lademeisterbereichs eine robuste Schallpegelreduktion zu erzielen. Das Volumen ist bis zu einer Wellenlänge von den Fehlermikrofonen entfernt und umfasst den gesamten Bereich um den Kopf verschieden großer Lademeister (30 x 28 x 20 cm³).

Die konstruktiv vorgegebenen Lautsprecher- und Mikrofonpositionen müssen verwendet werden. Der Einsatz von Kopfstützenmikrofonen ist nicht vorgesehen. Es sollen die luftfahrt-zertifizierten Komponenten (16 Fehlermikrofone, 8 Lautsprecher, Verstärker, Verkabelung) des Prototypen eingesetzt werden.

Es sollen neue Parameter in den Regler integriert werden, welche die Optimierung der Lautsprecher und Mikrofonpositionen ersetzen. Dafür ist es notwendig, einen Regler zu imple-

mentieren, der die hohe Anzahl an Fehlermikrofon- und Lautsprechersignale in Echtzeit verarbeiten kann.

Für die neuen Reglerparameter ist im Sinne der Robustheitsdefinition von Müller [72] ein Entwurfsverfahren zu entwickeln. Es ist daher erforderlich, die robuste Regelstabilität und -qualität unter dem Einfluss quantifizierter Unsicherheiten sicherzustellen. In dieser Arbeit sollen die Unsicherheiten der Übertragungsstrecken aufgrund der Komponenten, der Änderung der Temperatur und der Position des Lademeisters berücksichtigt werden. Als Kriterien für die robuste Regelqualität werden die Schallpegelreduktion und das Einhalten der zulässigen Lautsprecheransteuerung festgelegt.

Die Methodik soll in einem realistischen Mock-up angewendet werden. Dies heißt, dass die akustischen Randbedingungen (Verkleidung, Geometrie) im Lademeisterbereich und im Laderaum zu modellieren sind. In diesem Mock-up ist die Funktionsfähigkeit der Methode unter dem Einfluss von Unsicherheiten nachzuweisen.

1.3.2 Gliederung der Arbeit

Nach dieser Einleitung wird im Kapitel 2 die mathematische Modellbildung erläutert. Zunächst wird die Modellierung der elektroakustischen Regelstrecke mittels komplexer Übertragungszahl eingeführt. Danach erfolgt die Beschreibung des ANC-Systems. Abschließend werden die Modelle für die strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten entwickelt.

Kapitel 3 behandelt den robusten Reglerentwurf. Einleitend wird der Regler erläutert, um im Anschluss die neuen Reglerparameter einzuführen. Der Einfluss der Parameter wird aufgezeigt. Der Kern des Kapitels ist die neue Entwurfsmethodik. Zunächst wird der Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke erklärt. Anschließend wird das Verfahren zum robusten Entwurf erweitert. Dieser berücksichtigt die robuste Regelstabilität und –qualität. Am Ende wird das Parameteroptimierungsproblem formuliert.

Kapitel 4 widmet sich der Lösung dieses Optimierungsproblems. Zu Beginn wird das Problem klassifiziert und eine Lösungsstrategie ausgewählt. Die problemspezifischen Anpassungen werden erörtert. Eine Methode zur Prüfung der Lösungsgüte wird skizziert.

In Kapitel 5 wird die neue Reglerentwurfsmethodik auf das aktive System im Lademeisterbereich des Airbus A400M angewandt. Zunächst erfolgt die Analyse des modalen und energetischen Verhaltens des Luftvolumens in der Flugzeugkabine, um somit einen realistischen Versuchsaufbau abzuleiten. Anschließend wird der Regler beschrieben und für zwei verschiedene Lastfälle ausgelegt. Die Auslegung basiert dabei auf zuvor gemessenen Unsicherheiten. Am Ende erfolgt der Nachweis der Funktionsfähigkeit im Experiment. Dabei wird die Robustheit des aktiven Systems numerisch und experimentell demonstriert.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung ab. Ergänzende Diagramme, Formeln und Parameter sind im Anhang aufgeführt.

2 Mathematische Modellbildung

In diesem Kapitel wird die mathematische Modellbildung beschrieben. Neben der Übertragungszahl der elektroakustischen Übertragungsstrecke werden Modelle für das aktive System und für die Unsicherheiten eingeführt. Da tonaler Lärm angenommen wird, erfolgt die Modellbildung im Frequenzbereich.

2.1 Übertragungsverhalten im Frequenzbereich

Abb. 2-1 zeigt die elektroakustische Übertragungsstrecke bestehend aus Tiefpassfilter, Leistungsverstärker, Lautsprecher, Luft, Mikrofon und Mikrofonverstärker. Jedes dieser Teilsysteme lässt sich durch eine lineare Differentialgleichung beschreiben. Im Falle des Verstärkers, des Filters, des Lautsprechers und des Mikrofons handelt es sich um Systeme mit konzentrierten Parametern; sie führen auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Das gasförmige Medium mit verteilten Parametern kann durch eine partielle Differentialgleichung, die Wellengleichung der Akustik, beschrieben werden.

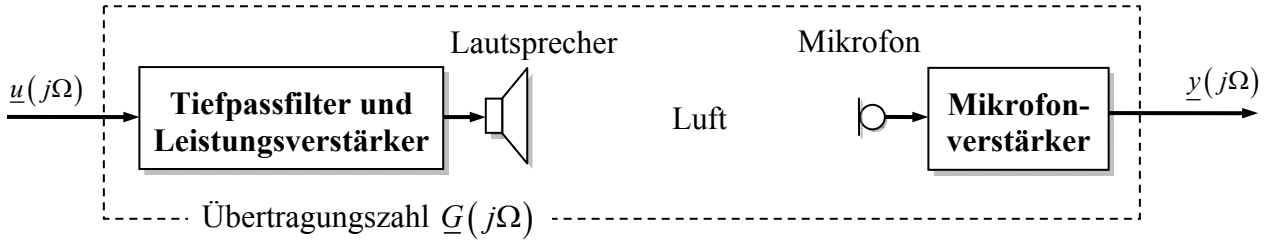


Abb. 2-1: Elektroakustische Übertragungsstrecke.

Wendet man die Euler'sche-Formel auf ein sinusförmiges Eingangssignal $u(t)$ einer bestimmten Kreisfrequenz Ω an, erhält man:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{u}e^{j\Omega t}\right\}. \tag{2.1}$$

Hier wird das sinusförmige Signal durch die komplexe Amplitude $\underline{u}$ und die zugehörige Kreisfrequenz Ω beschrieben. Als Kurzform schreibt man daher den komplexen Zeiger $\underline{u}(j\Omega)$.

Betrachtet man den Systemausgang für eine große Zeit t, so wird er nur noch von der stationären Bewegung des Systems beeinflusst. Die Einschwingvorgänge sind abgeklungen. Unter der Annahme eines linearen, zeitinvarianten Systems lässt sich am Systemausgang daher ebenfalls ein Signal $\underline{y}(j\Omega)$ entsprechend (2.1) messen.

Die Veränderung des periodischen Eingangssignals durch das System wird mit einer komplexen Übertragungszahl beschrieben. Diese Übertragungszahl wird definiert als der Quotient zwischen der komplexen Amplitude der Systemausgangs- und -eingangsgröße:

$$\underline{G}(j\Omega) = \frac{\underline{y}(j\Omega)}{\underline{u}(j\Omega)}. \tag{2.2}$$

Für die Definition der Übertragungszahl wird davon ausgegangen, dass das System keine Anfangsauslenkung besitzt. Misst man die sinusförmige Eingangs- und Ausgangsgröße der elektroakustischen Übertragungsstrecke, kann durch Bilden der komplexen Amplituden ein Modell für das Übertragungsverhalten berechnet werden. Die Eingangsgröße hat die Dimension Spannung; die Ausgangsgröße sei kalibriert und hat die Dimension Druck. Das Modell der Übertragungsstrecke hat die Dimension Druck/Spannung, die Einheit ist Pa/Volt.

Im weiteren Text wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die explizite Abhängigkeit der komplexen Amplitude und der Übertragungszahl von der Kreisfrequenz Ω weggelassen. Dies gilt auch für die Unterstriche zur Kennzeichnung der komplexen Größen.

2.2 Modell des aktiven Systems

Das aktive Schallreduktionssystem sei aufgebaut aus N_L Lautsprechern und N_E Fehlermikrofonen. Es wird eine einzelne monofrequente tonale Störschallquelle angenommen. Von der Störschallquelle sei über das Referenzsignal die Kreisfrequenz Ω der Störung bekannt.

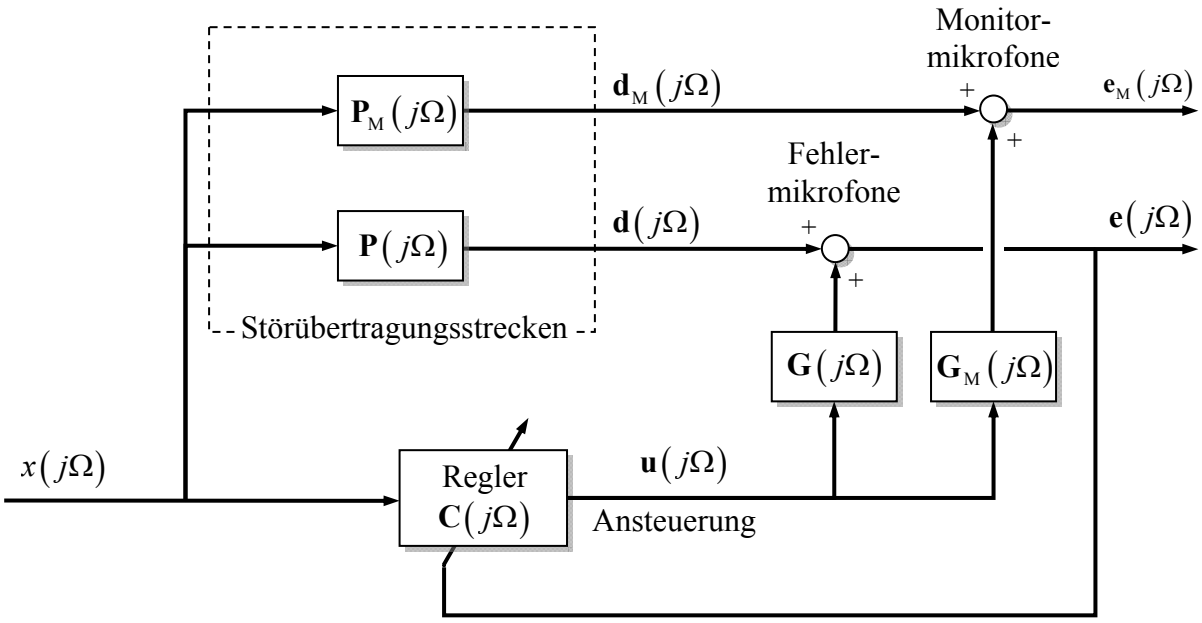


Abb. 2-2: Modell des Systems zur aktiven Schallreduktion.

Abb. 2-2 zeigt das Modell des aktiven Systems. Der an den Fehlermikrofonen bei einer Kreisfrequenz Ω gemessene Schalldruck berechnet sich aus der Summe des Produktes der komplexen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ mit der komplexen Ansteuerung $\mathbf{u}$ sowie dem komplexen Störschallfeld $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{e} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{d}. \tag{2.3}$$

Die komplexen Spaltenmatrizen in (2.3) ergeben sich durch die folgende Anordnung der skalaren Größen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \left[e_1, \quad \ldots \quad e_i, \quad \ldots \quad e_{N_\mathrm{E}} \right]^\mathrm{T}, \\ \mathbf{d} &= \left[d_1, \quad \ldots \quad d_i, \quad \ldots \quad d_{N_\mathrm{E}} \right]^\mathrm{T} \end{aligned} \tag{2.4}$$

sowie

$$\mathbf{u} = \left[u_1, \quad \ldots \quad u_i, \quad \ldots \quad u_{N_\mathrm{L}} \right]^\mathrm{T}. \tag{2.5}$$

Die komplexe Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ beschreibt das Übertragungsverhalten zwischen der Ansteuerung $\mathbf{u}$ aller Lautsprecher und allen Fehlermikrofonen und ist aufgebaut aus den zugehörigen skalaren Übertragungszahlen G_{ij}:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1j} & \cdots & G_{1N_\mathrm{L}} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ G_{i1} & & G_{ij} & & G_{iN_\mathrm{L}} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ G_{N_\mathrm{E}1} & \cdots & G_{N_\mathrm{E}j} & \cdots & G_{N_\mathrm{E}N_\mathrm{L}} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Die Ansteuerung bzw. Stellgröße $\mathbf{u}$ wird durch den digitalen Regler $\mathbf{C}$ berechnet. Dieser nutzt hierfür das Referenzsignal x und den zurückgeführten Fehler $\mathbf{e}$.

Zusätzlich zu den Fehlermikrofonen werden Monitormikrofone im Zielbereich der Regelung platziert. Hier überlagert sich das von den Lautsprechern erzeugte Schallfeld mit dem an den Monitormikrofonen anliegenden Störschallfeld $\mathbf{d}_\mathrm{M}$:

$$\mathbf{e}_\mathrm{M} = \mathbf{G}_\mathrm{M}\mathbf{u} + \mathbf{d}_\mathrm{M}. \tag{2.7}$$

In dieser Gleichung beschreibt die Matrix $\mathbf{G}_\mathrm{M}$ das Übertragungsverhalten zwischen der Lautsprecheransteuerung $\mathbf{u}$ und dem Druck an den Monitormikrofonen. Der Regelerfolg wird durch den an Monitormikrofonen resultierenden Schalldruck $\mathbf{e}_\mathrm{M}$ gemessen. Ziel der Regelung muss es daher sein, die Ansteuerung $\mathbf{u}$ so zu verändern, dass ein möglichst kleiner Schalldruck $\mathbf{e}_\mathrm{M}$ verbleibt.

2.3 Unsicherheitsmodelle

Das in Abschnitt 2.2 beschriebene aktive System enthält die Übertragungsmatrizen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_\mathrm{M}$ sowie die Störschallfelder $\mathbf{d}$ und $\mathbf{d}_\mathrm{M}$. Diese mathematischen Modelle beschreiben vereinfacht das komplexe dynamische Verhalten des realen zeitvarianten und schwach nicht-linearen Systems. Mit Blick auf die Übertragungstrecke in Abb. 2-1 können folgende Nichtlinearitäten und Zeitvarianzen aufgeführt werden:

- Parameterdrift oder Überschreiten des Betriebsbereichs der Bauteile in den elektroakustischen Komponenten
- Klirrverzerrungen der Lautsprecher durch das inhomogene Magnetfeld [93] oder die nichtlineare elastische Einspannung der Membran
- Volumen- oder Geometrieänderung des Luftvolumens
- Änderung der Schallgeschwindigkeit in der Luft durch Temperaturschwankungen

Dieses Verhalten wird nicht durch die oben beschriebenen linearen Modelle erfasst. Abhilfe kann durch Zerlegen des mathematischen Modells der realen Übertragungsstrecke geschaffen werden [72]:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \Delta\mathbf{G} \,. \tag{2.8}$$

Die Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_0$ repräsentiert die nominelle Übertragungsstrecke, sie wird als vollständig bekannt angenommen. Die Variable $\Delta\mathbf{G}$ beschreibt deren zugehörige additive Unsicherheit.

Entsprechende Zusammenhänge werden für die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}_\mathrm{M} = \mathbf{G}_\mathrm{M0} + \Delta\mathbf{G}_\mathrm{M} \tag{2.9}$$

sowie die Störschallfelder

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d} \tag{2.10}$$

und

$$\mathbf{d}_\mathrm{M} = \mathbf{d}_\mathrm{M0} + \Delta\mathbf{d}_\mathrm{M} \tag{2.11}$$

formuliert. Die Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}$, $\Delta\mathbf{G}_\mathrm{M}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_\mathrm{M}$ sind beliebig, von ihnen ist nur deren Norm bekannt. Ackermann [94] benennt eine solche Beschreibung treffend als *Familie von Regelstrecken*, bei ihm sind sie jedoch auf Zustandsraummodelle und Übertragungsfunktionen bezogen.

2.3.1 Unsicherheit der Übertragungsmatrizen $\Delta\mathbf{G}$ und $\Delta\mathbf{G}_\mathrm{M}$

Häufig haben die Unsicherheiten eine Struktur, da sie von Variationen bestimmter physikalischer Parameter verursacht werden. Man spricht dann von strukturierten Unsicherheiten. Andernfalls nennt man sie unstrukturierte Unsicherheiten.

Für die Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}$ und $\Delta\mathbf{G}_\mathrm{M}$ wird das in [78, 79, 89] vorgeschlagenen *singular perturbation model* eingesetzt. Dieses wird im Folgenden am Beispiel der Unsicherheit $\Delta\mathbf{G}$ erläutert.

Die Singulärwertzerlegung [95] der nominellen Übertragungsmatrix

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\mathrm{H} \tag{2.12}$$

liefert die unitären Matrizen $\mathbf{U}$ $\left(\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{E} \times N_\mathrm{E}}\right)$ und $\mathbf{V}$ $\left(\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{L} \times N_\mathrm{L}}\right)$. Die Matrix $\mathbf{\Sigma}$ $\left(\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N_\mathrm{E} \times N_\mathrm{L}}\right)$ hat die Form

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \sigma_i & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_{N_\mathrm{L}} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Die Einträge σ_i von $\mathbf{\Sigma}$ sind die Singulärwerte von $\mathbf{G}_0$. Für sie gilt: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{N_\mathrm{L}} \geq 0$.

Multipliziert man die additive Unsicherheitsmatrix $\Delta\mathbf{G}$ von rechts und links mit den unitären Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ resultiert daraus die Singulärwertstörungsmatrix $\Delta\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{U}^\mathrm{H} \Delta\mathbf{G} \mathbf{V} = \Delta\mathbf{\Sigma}. \tag{2.14}$$

Anders als die Matrix $\mathbf{\Sigma}$ ist die Singulärwertstörungsmatrix $\Delta\mathbf{\Sigma}$ $\left(\Delta\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{E} \times N_\mathrm{L}}\right)$ vollbesetzt. Die Singulärwertstörungsmatrix $\Delta\mathbf{\Sigma}$ kann wiederum in ein Produkt einer normierten Strukturmatrix $\Delta\mathbf{W}$ und der Frobeniusnorm $\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_\mathrm{F}$ [95] zerlegt werden:

$$\Delta\mathbf{\Sigma} = \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_\mathrm{F} \Delta\mathbf{W} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{W} = \frac{\Delta\hat{\mathbf{W}}}{\left\|\Delta\hat{\mathbf{W}}\right\|_\mathrm{F}} \quad \text{und} \quad \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_\mathrm{F} = \sqrt{\sum_{m=1}^{N_\mathrm{E}} \sum_{n=1}^{N_\mathrm{L}} \left|\Delta\sigma_{m,n}\right|^2}. \tag{2.15}$$

Hier erfasst $\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_\mathrm{F}$ die Größe der Unsicherheit und $\Delta\mathbf{W}$ beschreibt die Struktur der Unsicherheit. Substituiert man (2.15) in (2.14) erhält man:

$$\Delta\mathbf{G} = \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_\mathrm{F} \mathbf{U} \Delta\mathbf{W} \mathbf{V}^\mathrm{H}. \tag{2.16}$$

Im Kapitel 3 sieht man, dass für die Strukturmatrix $\Delta\mathbf{W}$ nur die Beträge relevant sind. Die Strukturmatrix $\Delta\mathbf{W}$ wird daher als reelle Größe festgelegt.

Entsprechend (2.16) wird die Unsicherheit $\Delta\mathbf{G}_\mathrm{M}$ mit der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{G}_{\mathrm{M}0} = \mathbf{U}_{\mathrm{M}0} \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{M}0} \mathbf{V}_{\mathrm{M}0}^\mathrm{H} \tag{2.17}$$

in das Produkt

$$\Delta\mathbf{G}_\mathrm{M} = \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}_\mathrm{M}\right\|_\mathrm{F} \mathbf{U}_\mathrm{M} \Delta\mathbf{W}_\mathrm{M} \mathbf{V}_\mathrm{M}^\mathrm{H} \tag{2.18}$$

zerlegt. Die in der Literatur [78, 79, 89] dargestellten Singulärwertstörungsmatrizen zeigen jeweils charakteristische Ausprägungen der Elementbeträge. Für sie müssten daher verschiedene normierte Gewichtungsmatrizen $\mathbf{\Delta W}$ bzw. $\Delta\mathbf{W}_\mathrm{M}$ gewählt werden.

2.3.2 Unsicherheit der Störschallfelder $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$

Auch die Störung der Störschallfelder kann eine spezielle Struktur besitzen. Befindet sich ein Mikrofon in der Nähe von Schall abstrahlenden Aggregaten, wie zum Beispiel Klimaanlagen oder Rechneranlagen, misst es diesen unkorrelierten Schall. Der Messfehler an diesem Mikrofon ist größer. Gleiches gilt, wenn Mikrofone unterschiedlicher Qualität eingesetzt werden.

Für die Unsicherheit des Störschallfeldes an den Fehlermikrofonen $\Delta\mathbf{d}$ wird deshalb mit der normierten Spaltenmatrix $\Delta\mathbf{w}$

$$\Delta\mathbf{d} = \left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2 \cdot \Delta\mathbf{w} \qquad \text{mit} \qquad \Delta\mathbf{w} = \frac{\Delta\hat{\mathbf{w}}}{\left\|\Delta\hat{\mathbf{w}}\right\|_2} \tag{2.19}$$

ein Strukturmodell angesetzt. Für die Reglerentwurfsmethodik werden von $\Delta\mathbf{w}$ wieder nur die Beträge benötigt, $\Delta\mathbf{w}$ wird deshalb als reelle Größe angenommen. Ein Strukturmodell für $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ ist nicht erforderlich.

3 Reglerentwurf

In diesem Kapitel wird die neue Reglerentwurfsmethode vorgestellt. Nach der Einführung des adaptiven Reglers wird dieser anhand der nominellen Übertragungstrecke entworfen. Anschließend wird das Entwurfsverfahren zum robusten Entwurf erweitert. Dieser berücksichtigt die Unsicherheiten in der Regelstrecke.

3.1 Der adaptive Regler mit Entwurfsparametern

Entsprechend dem Stand der Technik sind Regler mit adaptiver Steuerung für die Problemstellung gut geeignet. Eine Implementierung im Frequenzbereich bietet die Möglichkeit, die Reglerparameter frequenzweise auszulegen. Es wird daher von einem adaptiven Regler mit FDFxLMS Algorithmus ausgegangen.

3.1.1 Grundlagen des adaptiven Reglers

Für den FDFxLMS Algorithmus wird die folgende skalare Reglerkostenfunktion J_R angesetzt [6]:

$$J_{\mathrm{R}} = \mathbf{e}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{u}\,. \tag{3.1}$$

Diese entspricht einer quadratischen Form, die den komplexen Fehler an den Fehlermikrofonen $\mathbf{e}$ und die komplexe Lautsprecheransteuerung $\mathbf{u}$ erfasst. Die Gewichtung der einzelnen Terme erfolgt über die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$. Damit J_{R} eine skalare Kostenfunktion ist, müssen die Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ hermitesch sein.

Setzt man (2.3) in (3.1) ein, erhält man die Kostenfunktion

$$J_R\left(\mathbf{u},\mathbf{d},\mathbf{Q},\mathbf{R}\right) = \mathbf{u}^{\mathrm{H}}\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]\mathbf{u} + \mathbf{d}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{u}^{\mathrm{H}}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d} + \mathbf{d}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d} \tag{3.2}$$

in Abhängigkeit der Ansteuerung $\mathbf{u}$.

Differenziert man (3.2) nach dem Real- und Imaginärteil von $\mathbf{u}$, führt dies auf die erste Ableitung bzw. den Gradienten $\mathbf{g}$ der Kostenfunktion [6]:

$$\frac{\partial J_{\mathrm{R}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{R}}} + j\frac{\partial J_{\mathrm{R}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{I}}} = 2\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]\mathbf{u} + 2\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d} := \mathbf{g}\,. \tag{3.3}$$

Die zweite Ableitung lautet

$$\frac{\partial^2 J_{\mathrm{R}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{R}}^2} + j\frac{\partial^2 J_{\mathrm{R}}}{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{I}}^2} = 2\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]. \tag{3.4}$$

Aus ihr kann eine Bedingung für die konvexe Form der Reglerkostenfunktion abgeleitet werden. Die Kostenfunktion hat nur dann ein Minimum, wenn die zweite Ableitung positiv definit ist:

$$\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}+\mathbf{R}\right] \succ 0\,. \tag{3.5}$$

Das Formelzeichen $\succ$ bezieht sich auf die Eigenwerte der Matrix. Um sicherzustellen, dass die Matrix (3.5) positive Eigenwerte hat, müssen die Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ wiederum positiv definit sein.

Das Minimum der Reglerkostenfunktion erhält man durch Nullsetzen der ersten Ableitung (3.3). Wenn $\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}+\mathbf{R}\right]$ invertierbar ist, ergibt sich daraus die optimale Ansteuerung $\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}$ mit

$$\mathbf{u}_{\mathrm{opt}} = -\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}+\mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d}\,. \tag{3.6}$$

Ist die Kostenfunktion konvex, kann die optimale Ansteuerung durch das iterative Verfahren des steilsten Abstiegs gefunden werden. Das heißt, für den diskreten Zeitpunkt $n+1$ geht die Ansteuerung $\mathbf{u}(n+1)$ aus der aktuellen Ansteuerung $\mathbf{u}(n)$ und einem Schritt mit der Schrittweite μ in Richtung des absteigenden Gradienten $\mathbf{g}(n)$ hervor:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{u}(n) - \mu\mathbf{g}(n)\,. \tag{3.7}$$

Umstellen des Gradienten (3.3) liefert

$$\mathbf{g}(n) = 2\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\left[\mathbf{G}\mathbf{u}(n)+\mathbf{d}(n)\right] + 2\mathbf{R}\mathbf{u}(n)\,. \tag{3.8}$$

Da das Störschallfeld $\mathbf{d}(n)$ an den Fehlermikrofonen nicht messbar ist, muss diese Größe aus dem Fehler $\mathbf{e}(n)$ gewonnen werden:

$$\mathbf{G}\mathbf{u}(n)+\mathbf{d}(n) = \mathbf{e}(n)\,. \tag{3.9}$$

Mit (3.8) und (3.9) bestimmt man aus (3.7) die Iterationsgleichung des Reglers:

$$\mathbf{u}(n+1) = \left[\mathbf{I}-2\mu\mathbf{R}\right]\mathbf{u}(n) - 2\mu\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{e}(n)\,. \tag{3.10}$$

Diese Iterationsgleichung aktualisiert zu jedem Zeitschritt n mit Hilfe des Fehlersignals $\mathbf{e}$ die Ansteuerung $\mathbf{u}$. Diese und die optimale Ansteuerung $\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}$ sind abhängig von den Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$.

3.1.2 Die Reglergewichtungsmatrizen

Mit den in Abschnitt 3.1.1 eingeführten hermiteschen Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ stehen $N_{\mathrm{E}}^2 + N_{\mathrm{L}}^2$ frei wählbare Reglerparameter zur Verfügung, um die Reglermatrix der optimalen Ansteuerung

$$\mathbf{C} = -\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}+\mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q} \tag{3.11}$$

den Entwurfskriterien anzupassen. Die zugrunde liegende Idee beruht dabei auf der Verschiebung des Minimums der konvexen Kostenfunktion (3.1) durch die freien Parameter. Da eine Multiplikation der Kostenfunktion (3.1) mit einem beliebigen Skalar nicht maßge-

bend für die Lage des Minimums ist, ist eine Normierung erlaubt. Zur Darstellung der gesamten Gewichtungsvielfalt ist es daher ausreichend, dass die normierten freien Parameter auf dem Intervall $[0,1]$ variiert werden.

Durch die große Anzahl an Parametern ist der Entwurf des Reglers langwierig. Es werden deshalb im Weiteren zwei Gewichtungsvarianten vorgeschlagen, die nur $N_\mathrm{E} + N_\mathrm{L}$ bzw. N_L Parameter nutzen. Für den Vergleich wird als Referenz das aus der Literatur bekannte Verfahren mit einem Leakage-Faktor herangezogen [4, 60].

3.1.2.1 Referenzgewichtung mit skalarem Leakage-Faktor

In [4, 60] wird der skalare Leakage-Faktor γ eingesetzt, um die Balance zwischen Lautsprecheransteuerung und Regelerfolg zu finden. Diese Gewichtung mit Leakage-Faktor (GLF) wird als Referenz genutzt. Die Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{Q} = (1-\gamma)\mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = \gamma\mathbf{I} \tag{3.12}$$

ergeben mit (3.1) die Reglerkostenfunktion

$$J_\mathrm{R} = (1-\gamma)\mathbf{e}^\mathrm{H}\mathbf{e} + \gamma\mathbf{u}^\mathrm{H}\mathbf{u}\,. \tag{3.13}$$

Dies ist eine affine Kombination der Quadratsumme der Schalldrücke an den Fehlermikrofonen und der Lautsprecheransteuerung.

3.1.2.2 Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten

Eine naheliegende Möglichkeit ist die Gewichtung einzelner Mikrofone und Lautsprecheransteuerungen. Dies wird im Weiteren als Gewichtung in physikalische Koordinaten (GPK) bezeichnet. Setzt man in die Kostenfunktion (3.1) diagonale Gewichtungsmatrizen der Form

$$\mathbf{Q}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} q_{\mathrm{D}(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & q_{\mathrm{D}(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & q_{\mathrm{D}(N_\mathrm{E})} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{R}_\mathrm{D} = \begin{bmatrix} r_{\mathrm{D}(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & r_{\mathrm{D}(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_{\mathrm{D}(N_\mathrm{L})} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

ein, erhält man für die Reglerkostenfunktion:

$$J_\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{N_\mathrm{E}} q_{\mathrm{D}(i)} |e_i|^2 + \sum_{i=1}^{N_\mathrm{L}} r_{\mathrm{D}(i)} |u_i|^2\,. \tag{3.15}$$

Die quadrierten Beträge der Fehler e_i und der Ansteuerungen u_i werden hier durch die Gewichtungsfaktoren $q_{\mathrm{D}(i)}$ bzw. $r_{\mathrm{D}(i)}$ gewichtet.

3.1.2.3 Gewichtung in Regelhauptkoordinaten

Alternativ kann auch basierend auf der Singulärwertzerlegung (2.12) eine Gewichtung in Regelhauptkoordinaten (GHK) erfolgen. Wenn man in (2.3) die Singulärwertzerlegung einsetzt, erhält man

$$\mathbf{e} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{u} + \mathbf{d}\,. \tag{3.16}$$

Multiplikation von links mit $\mathbf{U}^{\mathrm{H}}$ und Ersetzen der Produkte mit

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{e}\,, \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{d} \tag{3.17}$$

durch die Hauptkoordinaten $\mathbf{y}$ $\left(\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{E}}\times 1}\right)$, $\mathbf{v}$ $\left(\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{L}}\times 1}\right)$ und $\mathbf{p}$ $\left(\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{E}}\times 1}\right)$ liefert die ungekoppelte Matrizengleichung

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v} + \mathbf{p}\,. \tag{3.18}$$

Setzt man vollbesetzte Gewichtungsmatrizen der Form

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{HK}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}\mathbf{U}^{\mathrm{H}} \text{ und } \mathbf{R}_{\mathrm{HK}} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{HK}}\mathbf{V}^{\mathrm{H}} \tag{3.19}$$

mit den Diagonalmatrizen

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{\mathrm{HK}(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \hat{q}_{\mathrm{HK}(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{q}_{\mathrm{HK}(N_{\mathrm{E}})} \end{bmatrix} \text{ und } \hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{HK}} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{\mathrm{HK}(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \hat{r}_{\mathrm{HK}(i)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{r}_{\mathrm{HK}(N_{\mathrm{L}})} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

voraus und setzt diese mit (2.12) in (3.11) ein, gelingt es auch die Reglermatrix $\mathbf{C}$ entsprechend einer Singulärwertzerlegung darzustellen:

$$\mathbf{C} = -\mathbf{V}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\,. \tag{3.21}$$

Die enthaltene Singulärmatrix $\boldsymbol{\Psi}$ $\left(\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{E}}\times N_{\mathrm{L}}}\right)$ wird mit

$$\boldsymbol{\Psi} = \left[\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}\boldsymbol{\Sigma} + \hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{HK}}\right]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}} \tag{3.22}$$

bestimmt. Sie hat die Form

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & & \psi_i & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \psi_{N_{\mathrm{L}}} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

und enthält die N_L Singulärwerte ψ_i der Reglermatrix $\mathbf{C}$. Die Zeilen $N_\mathrm{L}+1$ bis N_E in $\mathbf{\Psi}$ sind Null. Dies gilt ebenfalls für die Singulärmatrix $\mathbf{\Sigma}$. Es haben daher die Elemente $\hat{q}_{\mathrm{HK}(N_{\mathrm{L}+1})}$ bis $\hat{q}_{\mathrm{HK}(N_\mathrm{E})}$ der Matrix $\hat{\mathbf{Q}}_\mathrm{HK}$ keinen Einfluss auf die Singulärwerte ψ_i, vgl. (3.22).

Setzt man (3.21) mit (3.11) in (3.6) ein und wendet die Transformationen (3.17)[2] und (3.17)[3] an, erhält man die optimale Ansteuerung in Reglerhauptkoordinaten

$$\mathbf{v}_\mathrm{opt} = -\mathbf{\Psi}\mathbf{p}\,. \tag{3.24}$$

Setzt man diese wiederum in (3.18) ein, liefert dies für den Fehler in Reglerhauptkoordinaten

$$\mathbf{y} = \left\{\mathbf{I} - \mathbf{\Sigma}\mathbf{\Psi}\right\}\mathbf{p}\,. \tag{3.25}$$

Die größte mögliche optimale Ansteuerung $\mathbf{v}_\mathrm{opt}$, die den steuerbaren Anteil des Fehlers

$$\mathbf{y}_\mathrm{steuerbar} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_i & \cdots & y_{N_\mathrm{L}} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \tag{3.26}$$

zu Null setzt, erhält man wenn $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$ entspricht. Andererseits ist die optimale Ansteuerung $\mathbf{v} = 0$, falls $\mathbf{\Psi} = \mathbf{0}$ ist. Um die optimale Ansteuerung zwischen diesen Werten einzustellen, genügt es daher $\mathbf{\Psi}$ auf dem Intervall $\left[\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}^{-1}\right]$ zu variieren.

Dies kann durch die Gewichtungsparameter $\hat{q}_{\mathrm{HK}(i)}$ und $\hat{r}_{\mathrm{HK}(i)}$ realisiert werden, vgl. (3.22). Mit den Transformationsgleichungen

$$\hat{q}_{\mathrm{HK}(i)} = \varphi_i \quad \text{für} \quad 1 < i < N_\mathrm{L} \tag{3.27}$$

und

$$\hat{r}_{\mathrm{HK}(i)} = 1 - \varphi_i \quad \text{für} \quad 1 < i < N_\mathrm{L} \tag{3.28}$$

verbleiben N_L unabhängige Parameter φ_i. Sie sind nun auf dem Intervall $\left[0,1\right]$ zu variieren.

3.1.2.4 Einfluss der Gewichtung

Um den Einfluss der verschiedenen Gewichtungsvarianten entsprechend (3.12), (3.14) und (3.19) zu erläutern, wird die optimale Ansteuerung (3.6) herangezogen. Setzt man in (3.6) die Singulärwertzerlegung (2.12) und die Transformationen (3.17)[2] und (3.17)[3] ein, erhält man:

$$\mathbf{v}_\mathrm{opt} = -\left[\mathbf{\Sigma}^\mathrm{H}\mathbf{U}^\mathrm{H}\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{\Sigma} + \mathbf{V}^\mathrm{H}\mathbf{R}\mathbf{V}\right]^{-1}\mathbf{\Sigma}^\mathrm{H}\mathbf{U}^\mathrm{H}\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{p}\,. \tag{3.29}$$

Für die Referenz (3.12) mit GLF liefert (3.29)

$$\mathbf{v}_\mathrm{opt} = -\left[\gamma\mathbf{\Sigma}^\mathrm{H}\mathbf{\Sigma} + \left(1-\gamma\right)\mathbf{E}\right]^{-1}\gamma\mathbf{\Sigma}^\mathrm{H}\mathbf{p}\,. \tag{3.30}$$

Diese lineare Abbildung beinhaltet eine Diagonalmatrix. Die Ansteuerung der i-ten Hauptkoordinate $v_{\mathrm{opt}(i)}$ wird daher aus dem Element p_i der Spaltenmatrix $\mathbf{p}$ bestimmt:

$$v_{\mathrm{opt}(i)} = -\frac{\gamma\sigma_i^*}{\gamma\left(\left|\sigma_i\right|^2 - 1\right) + 1} p_i \,. \tag{3.31}$$

Gemäß dieser Gleichung sind die Regelhauptkoordinaten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{v}$ entkoppelt. Die Justierung der optimalen Ansteuerung $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ erfolgt jedoch für alle Reglerhauptkoordinaten über den gemeinsamen Leakage-Faktor γ.

Bei der GPK (3.14) ist die optimale Ansteuerung:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{opt}} = -\left[\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{\mathrm{D}}\mathbf{V}\right]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}\mathbf{U}\mathbf{p} \,. \tag{3.32}$$

Die Matrizenprodukte $\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}_{\mathrm{D}}\mathbf{V}$ in (3.32) sind vollbesetzte komplexe Matrizen. Sie koppeln die Regelhauptkoordinaten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{v}$ untereinander. Das Einstellen der optimalen Ansteuerung $\mathbf{v}_{\mathrm{opt}}$ erfolgt über die Parameter $q_{\mathrm{D}(i)}$ bzw. $r_{\mathrm{D}(i)}$.

Mit der GHK (3.19) geht (3.29) in

$$\mathbf{v}_{\mathrm{opt}} = -\left[\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}\boldsymbol{\Sigma} + \hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{HK}}\right]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{H}}\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}\mathbf{p} \tag{3.33}$$

über. Die Ansteuerung der i-ten Hauptkoordinate $v_{\mathrm{opt}(i)}$ wird mit

$$v_{\mathrm{opt}(i)} = -\frac{\varphi_i\sigma_i^*}{\varphi_i\left(\left|\sigma_i\right|^2 - 1\right) + 1} p_i \tag{3.34}$$

bestimmt. Die Justierung der Ansteuerung erfolgt im Vergleich zu (3.30) getrennt für jede einzelne Regelhauptkoordinate mit φ_i.

Um die Auswirkungen auf die optimale Ansteuerung zu visualisieren, wird ein beispielhaftes mehrkanaliges ANC-System $\left(N_{\mathrm{E}} = 6, N_{\mathrm{L}} = 3\right)$ angenommen. Die konkrete Übertragungsstrecke $\mathbf{G}$ und das Störschallfeld $\mathbf{d}$ sind im Anhang A.1 zu finden. Die komplexe Ansteuerung $\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}$ wird mit (3.6) berechnet. Für die GPK und GHK werden zwei verschiedene numerische Versuche angesetzt.

Im ersten Versuch werden einzelne Parameter variiert, um so Ortskurven der komplexen Ansteuerung zu erhalten. Bei den physikalischen Reglerkoordinaten wird ein einzelner Parameter aus $q_{\mathrm{D}(i)}$ bzw. $r_{\mathrm{D}(i)}$ von Null auf Eins erhöht, gleichzeitig werden umgekehrt alle übrigen Parameter $q_{\mathrm{D}(k)}$ bzw. $r_{\mathrm{D}(k)}$ von Eins auf Null verkleinert. Auf diese Weise ist es möglich, die Ortskurve mit dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ abzufahren. Da die GHK entkoppelt ist, genügt es hier, nur die Parameter φ_i zu variiert. Die anderen Parameter φ_k werden in der Mitte des Intervalls festgehalten. Um die beiden neuen Gewichtungsverfahren mit der Referenz zu vergleichen, wird der Leakage-Faktor γ ebenfalls auf dem Intervall $[0,1]$ verändert.

Im zweiten Versuch werden zufällige Parameter auf den zugehörigen Intervallen erzeugt.

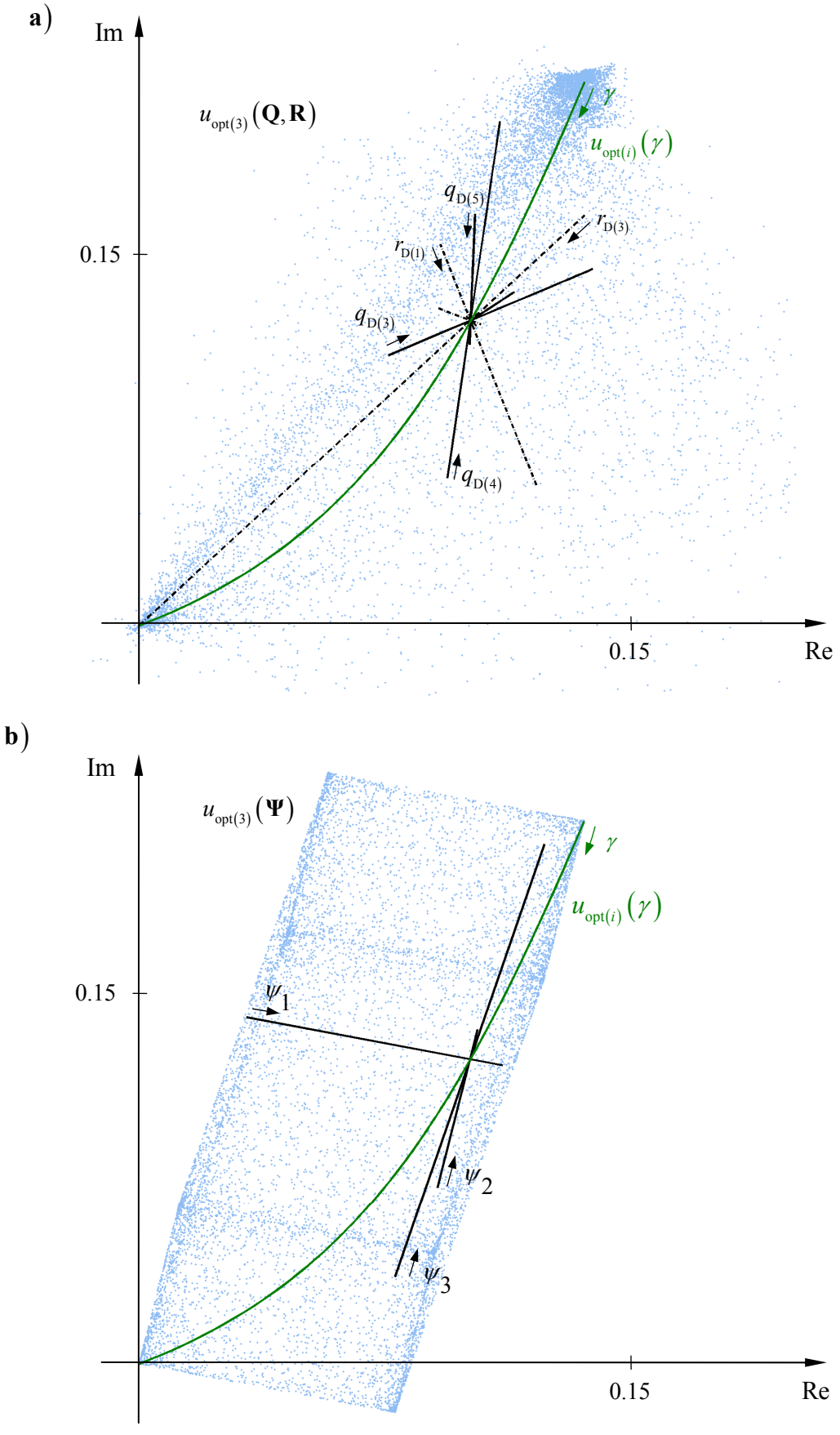


Abb. 3-1: Zeigerdiagramm der komplexen Lautsprecheransteuerung $u_{opt(3)}$; a) GPK; b) GHK

Abb. 3-1 zeigt die Zeigerdiagramme der optimalen Ansteuerung des dritten Lautsprechers. Jeder Punkt auf einer der Kurven und die blauen Punkte repräsentieren die Spitze eines komplexen Zeigers. Abb. 3-1a bezieht sich auf die GPK mit den diagonalen Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$. Die komplexen Zeiger in Abhängigkeit der vollbesetzten Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_\mathrm{HK}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{HK}$ sind in Abb. 3-1b dargestellt.

Die grüne Kurve in den Abbildungen 3-1a und b repräsentiert die Ortskurve der komplexen Ansteuerung, wenn die GLF verwendet wird, vgl. (3.13). Mit der Erhöhung des Leakage-Faktors bis auf Eins, nähert sich die komplexe Lautsprecheransteuerung dem Ursprung des Koordinatensystems. Im Koordinatenursprung ist sie Null. Die komplexe Lautsprecheransteuerung kann daher auf einem krummlinigen Gebiet der Dimension Eins eingestellt werden.

Jeder blaue Punkt in Abb. 3-1 steht für eine komplexe Ansteuerung in Abhängigkeit des zufällig gewählten Gewichtungsparametersatzes $\left(\mathbf{Q}_\mathrm{D}, \mathbf{R}_\mathrm{D}\right)$ bzw. $\left(\mathbf{Q}_\mathrm{HK}, \mathbf{R}_\mathrm{HK}\right)$.

Werden die diagonalen Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$ zufällig gewählt, ergibt sich eine großflächige Verteilung der komplexen Ansteuerung (blaue Punkte) um die Ortskurve der GLF. Die 9 schwarzen Kurven repräsentieren die Ortskurven bei Variation jeweils eines der $N_\mathrm{E} + N_\mathrm{L} = 9$ Gewichtungsparameter. Verändert man die Gewichtungsverhältnisse zwischen $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$ (in der Abb. 3-1a ist es $\mathbf{Q}_\mathrm{D} : \mathbf{R}_\mathrm{D} = 1:9$), verschiebt sich die Kurvenschar entlang der grünen Referenzkurve. Gleichzeitig verändern sich die Richtungen und Längen der Ortskurven. Dies ist zurückzuführen auf die Kopplung der Regelhauptkoordinaten. Die komplexe Lautsprecheransteuerung kann diesmal auf einem zweidimensionalen Gebiet eingestellt werden.

Verwendet man die GHK $\left(\mathbf{Q}_\mathrm{HK}, \mathbf{R}_\mathrm{HK}\right)$, sind komplexen Ansteuerungen (blaue Punkte) innerhalb eines begrenzten Gebietes, siehe Abb. 3-1b. Die Größe des Gebietes hängt vom transformierten Störschallfeld $\mathbf{p}$ ab, vgl. (3.33). Je größer die Elementbeträge p_i sind, desto größer ist auch die Ausdehnung des Gebietes, vgl. (3.34). Jede schwarze Ortskurve beschreibt die Variation eines Gewichtungsparameters. Im Unterschied zu den diagonalen Gewichtungsmatrizen in Abb. 3-1a bleiben die $N_\mathrm{L} = 3$ Ortskurven in Länge und Richtung erhalten, wenn die anderen Parameter verändert werden, vgl. (3.34). Auch mit dieser Gewichtung ist es möglich die komplexe Lautsprecheransteuerung auf einem zweidimensionalen Gebiet einzustellen.

Im Hinblick auf eine Parameteroptimierung werden die Eigenschaften der verschiedenen Gewichtungsvarianten entsprechend Tab. 3-1 verglichen. Am besten geeignet erscheint die Gewichtung in Regelhauptkoordinaten, da die Koordinaten entkoppelt sind. Vor allem wenn das aufgespannte Gebiet für die Lautsprecheransteuerung ausreichend groß ist, ist diese Gewichtung überlegen. Die Bewertung des Optimierungsaufwandes ergibt sich aus der Anzahl der Parameter und ihrer Kopplung.

Tab. 3-1: Vergleich der Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten (GPK), in Regelhauptkoordinaten (GHK) und mit Leakage-Faktor (GLF).

	GLF	GPK	GHK
Anzahl der Parameter	1	$N_\mathrm{E} + N_\mathrm{L}$	N_L
Kopplung der Hauptkoordinaten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{v}$ über $\mathbf{C}$	nein	ja	nein
Dimension des Gebietes möglicher Ansteuerung	1	2	2
Optimierungsaufwand	sehr klein	hoch	mittel

3.2 Reglerentwurf anhand der nominellen Regelstrecke

In diesem Abschnitt wird das Entwurfsverfahren für die verschiedenen Gewichtungsvarianten hergeleitet. Es wird von den nominellen Übertragungsstrecken und Störschallfeldern ausgegangen, die Unsicherheit ist Null:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \qquad \mathbf{G}_\mathrm{M} = \mathbf{G}_\mathrm{M0} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \qquad \mathbf{d}_\mathrm{M} = \mathbf{d}_\mathrm{M0}\,. \tag{3.36}$$

Um das Entwurfsproblem im Sinne eines Parameteroptimierungsproblems zu formulieren, werden Regelgüteforderungen als Funktionale beschrieben. Die Funktionale liefern Skalare. Die Güteforderungen sind die Regelstabilität und -qualität.

3.2.1 Nominale Regelstabilität

Um die Stabilität des adaptiven Reglers zu analysieren, wird die Iterationsgleichung (3.10) näher betrachtet. Setzt man den Gradient (3.3) in (3.7) ein, erhält man die folgende Form der Iterationsgleichung:

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{u}(n) - 2\mu\left[\left[\mathbf{G}_0^\mathrm{H}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]\mathbf{u}(n) + \mathbf{G}_0^\mathrm{H}\mathbf{Q}\mathbf{d}_0(n)\right]. \tag{3.37}$$

Ist die Iterationsgleichung stabil, konvergiert $\mathbf{u}$ zur optimalen Ansteuerung (3.6). Setzt man (3.6) in (3.37) ein, liefert dies

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathbf{u}(n) - 2\mu\left[\mathbf{G}_0^\mathrm{H}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]\left(\mathbf{u}(n) - \mathbf{u}_\mathrm{opt}\right). \tag{3.38}$$

Die Differenz $\mathbf{u}(n) - \mathbf{u}_\mathrm{opt}$ auf der rechten Seite von (3.38) kann als der momentane Abstand $\mathbf{x}(n)$ zum Gleichgewichtszustandes des Systems definiert werden:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{u}_\mathrm{opt}\,. \tag{3.39}$$

Subtrahiert man beiderseits von (3.38) $\mathbf{u}_\mathrm{opt}$ und setzt

$$\mathbf{u}(n+1) - \mathbf{u}_\mathrm{opt} = \mathbf{x}(n+1) \tag{3.40}$$

kann (3.38) in die Form

$$\mathbf{x}(n+1) = \left[\mathbf{I} - 2\mu\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]\right]\mathbf{x}(n) \tag{3.41}$$

umgestellt werden. Entsprechend Lunze [96] gilt als Bedingung für einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtszustand, dass für eine große Zeit n der Abstand $\mathbf{x}$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{x}(n)\right\| = 0 \tag{3.42}$$

verschwindet. Dies ist erfüllt, wenn mit jeder Iteration die Abweichung vom Gleichgewicht kleiner wird. Das heißt, dass entsprechend (3.41) für beliebige $\mathbf{x}$ die Beträge aller Eigenwerte der Matrix

$$\left[\mathbf{I} - 2\mu\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]\right] \tag{3.43}$$

kleiner als Eins sein müssen. Die symmetrische Matrix $\left[\mathbf{G}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]$ in (3.43) kann mit der Eigenwertzerlegung

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{X}^{-1} = \left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right] \tag{3.44}$$

als Produkt der Matrix der Eigenvektoren $\mathbf{X}$ und der Diagonalmatrix $\boldsymbol{\lambda}$ dargestellt werden. Die Diagonaleinträge in $\boldsymbol{\lambda}$ sind die Eigenwerte λ_i. Mit (3.44) diagonalisiert man (3.43) und erhält aus (3.42) die Bedingung:

$$\left|1 - 2\mu\lambda_i\right| < 1 \qquad \text{für alle } \lambda_i \in \mathbb{R}\,. \tag{3.45}$$

Für die positive Schrittweite μ muss der kleinste Eigenwert $\lambda_{\min}$ größer als Null sein:

$$0 < \lambda_{\min} \qquad \text{mit } \lambda_{\min} = \min_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}} \lambda_i \tag{3.46}$$

Dies entspricht der Forderung (3.5). Außerdem muss für das Produkt aus größtem Eigenwert $\lambda_{\max}$ und der Schrittweite μ die Bedingung

$$\mu\lambda_{\max} < 1 \qquad \text{mit } \lambda_{\max} = \max_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}} \lambda_i \tag{3.47}$$

gelten, vgl. (3.45). Bei der Wahl der Schrittweite ist man daher auf den Bereich

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \tag{3.48}$$

beschränkt. Die zur Herleitung der größten Schrittweite eingesetzten Frequenzbereichsgleichungen gelten für stationär harmonische Schwingungen. Können die Einschwingvorgänge daher nach jeder Iteration nicht abklingen, könnten trotzdem Instabilitäten auftreten [6]. Es wird deshalb ein Sicherheitsfaktor SF in die Bedingung (3.47) eingeführt [97]:

$$\mu = SF/\lambda_{\max}\,. \tag{3.49}$$

3.2.2 Nominale Regelqualität

Für die Regelqualität lassen sich zwei Forderungen formulieren. Erstens ist der Schallpegel an den Monitormikrofonen zu minimieren. Zweitens ist dabei die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung einzuhalten.

Die an den Monitormikrofonen gemessenen Schalldrücke werden durch die komplexen Amplituden $\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}$ beschrieben. Der mittlere räumliche Schallpegel für die näherungsweise zeitlich konstanten Schalldrücke wird entsprechend DIN 45641 [98] durch Pegeladdition mit

$$\bar{L}(\Omega) = 10\log_{10}\frac{\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}^{\mathrm{H}}\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}}{\sqrt{2}N_{\mathrm{M}}p_0^2}\,\mathrm{dB} = \left(10\log_{10}\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}\right\|_2^2 - 10\log_{10}\sqrt{2}N_{\mathrm{M}}p_0^2\right)\mathrm{dB} \tag{3.50}$$

berechnet. Der Schalldruck p_0 ist hierbei der Bezugsschalldruck.

Da das in Abschnitt 2.1 vorgestellte Modell Linearität voraussetzt, muss die Regelung die Auslenkung der Lautsprechermembran auf den linearen Bereich beschränken. Die Unterschreitung der maximal zulässigen Lautsprecheransteuerung wird als zweites Gütemaß für die Regelqualität formuliert. Die maximale Ansteuerung eines einzelnen Lautsprechers erhält man aus der Spaltenmatrix der optimalen Ansteuerung (3.6):

$$u_{\mathrm{opt0}}^{\max} = \max_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}}\left|u_{\mathrm{opt0}(i)}\right| \tag{3.51}$$

mit

$$\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}} = \begin{bmatrix} u_{\mathrm{opt0}(1)} & \dots & u_{\mathrm{opt0}(i)} & \dots & u_{\mathrm{opt0}(N_{\mathrm{L}})} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.52}$$

Der Abstand zur maximal zulässigen Lautsprecheransteuerung $u_{\mathrm{zul}}^{\max}$ wird durch die Differenz

$$u_{\mathrm{zul}}^{\max} - u_{\mathrm{opt0}}^{\max} \tag{3.53}$$

definiert. Um die maximal zulässige Ansteuerung zu unterschreiten, muss diese Differenz stets positiv sein.

3.2.3 Aufstellen des Parameteroptimierungsproblems

Für die optimalen Parameter $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ muss die Regelstabilität sichergestellt sein und gleichzeitig die beste Regelqualität erreicht werden. Diese Forderungen sind voneinander abhängig und können sich widersprechen. Ziel ist es daher, die beste Balance zwischen den einzelnen Forderungen zu finden. Dies lässt sich als mathematisches Optimierungsproblem formulieren.

Ziel der Optimierung ist die Minimierung des mittleren Schalldruckes an den Monitormikrofonen. Lässt man in (3.50) konstante Summanden weg, erhält man die Zielfunktion:

$$\underset{\mathbf{Q},\mathbf{R}}{\text{minimiere}} \quad 10\log_{10}\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}\right\|_2^2. \tag{3.54}$$

Die Regelstabilität (3.46) wird durch die erste Nebenbedingung f_1 beschrieben. Außerdem muss die maximale Lautsprecheransteuerung (3.53) kleiner als die zulässige Ansteuerung sein. Dies ist die zweite Nebenbedingung f_2. Die Nebenbedingung f_3 und f_4 erhält man aus (3.5). Mit den Gleichungen (2.7) und (3.6) lautet dann das Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{Q},\mathbf{R}}{\text{minimiere}} && f_0 := 10\log_{10}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M0}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right)+\mathbf{d}_{\mathrm{M0}}\right\|_2^2 \\
&\text{NB:} && f_1 := \lambda_{\min}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right) > 0 \\
&&& f_2 := u_{\mathrm{zul}}^{\max} - u_{\mathrm{opt}}^{\max}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right) > 0 \\
&&& f_3 := \mathbf{Q} \succ 0 \\
&&& f_4 := \mathbf{R} \succ 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Die positiv definiten Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sind die freien Parameter des Optimierungsproblems. Das Optimum hat den kleinsten Zielfunktionswert und erfüllt alle Nebenbedingungen. Die Optimierungsvariablen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ können die Gewichtungsmatrizen in physikalischen Reglerkoordinaten ($\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}$, $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$, siehe (3.14)) oder in Regelhauptkoordinaten ($\mathbf{Q}_{\mathrm{HK}}$, $\mathbf{R}_{\mathrm{HK}}$, siehe (3.19)) sein.

3.3 Erweiterung zum robusten Reglerentwurf

Im Unterschied zum nominellen Entwurf sind nun die Übertragungsstrecken und die Störschallfelder entsprechend (2.8) bis (2.11) mit begrenzter Norm gestört. Dies wird jetzt berücksichtigt und erweitert die Entwurfsmethodik zum robusten Reglerentwurf.

Die im Regler implementierte Iterationsgleichung (3.10) verwendet ein internes Model der Übertragungsstrecke $\hat{\mathbf{G}}$

$$\mathbf{u}\left(n+1\right) = \left[\mathbf{I}-2\mu\mathbf{R}\right]\mathbf{u}\left(n\right) - 2\mu\hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{e}\left(n\right). \tag{3.56}$$

Das interne Modell $\hat{\mathbf{G}}$ wird nicht mittels Systemidentifikationsroutine fortwährend an die reale physikalische Übertragungsstrecke angepasst. Es wird einmalig identifiziert und im Regler hinterlegt. Das interne Modell soll der nominellen Übertragungsstrecke entsprechen:

$$\mathbf{G}_0 = \hat{\mathbf{G}}. \tag{3.57}$$

Die reale physikalische Übertragungsstrecke weicht jedoch vom internen Modell um die Unsicherheit $\Delta\mathbf{G}$ ab, vgl. (2.8).

Setzt man in die Iterationsgleichung (3.56) die Gleichung (2.3) ein, lautet sie

$$\mathbf{u}\left(n+1\right) = \mathbf{u}\left(n\right) - 2\mu\left[\left(\hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}+\mathbf{R}\right)\mathbf{u}\left(n\right) + \hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d}\left(n\right)\right]. \tag{3.58}$$

Liegt Regelstabilität vor, erreicht der Iterationsalgorithmus den stabilen Gleichgewichtszustand; der Gradient ist Null. Die optimale Ansteuerung ist in diesem Fall

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = -\left[\hat{\mathbf{G}}^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]^{-1}\hat{\mathbf{G}}^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d} \tag{3.59}$$

bzw. mit (3.57)

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = -\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{d}\,. \tag{3.60}$$

Für den robusten Reglerentwurf werden nun die Gütefunktionale der robusten Regelstabilität und der robusten Regelqualität formuliert.

Die optimalen Parameter $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sind die, die die Regelstabilität und die Regelqualität für die gesamte normbegrenzte Familie der Übertragungsstrecken und Störschallfelder sicherstellt. Anstatt die Zielfunktion und die Nebenbedingung eines Optimierungsproblems der Form (3.55) für die gesamte Regelstreckenfamilie auszuwerten, werden nur die jeweils ungünstigsten Fälle herangezogen.

Die Gütefunktionale für die Regelstabilität und -qualität im jeweils ungünstigsten Fall werden in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 aufgestellt. Das mathematische Optimierungsproblem wird in Abschnitt 3.3.3 beschrieben.

3.3.1 Robuste Regelstabilität

Entsprechend der nominellen Regelstabilität aus Abschnitt 3.2.1 ist die Konvexität der Reglerkostenfunktion und die Einhaltung der maximalen Schrittweite sicherzustellen. Die Stabilitätsbedingungen werden aus den Eigenwerten der Matrix $\left[\mathbf{G}_0{}^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G} + \mathbf{R}\right]$ abgeleitet, vgl. (3.45) und (3.60). Setzt man (2.8) ein, folgt

$$\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]. \tag{3.61}$$

Die Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ dieser Matrix (3.61) sind nicht mehr rein reell, sie besitzen sehr kleine Imaginärteile $\text{Im}\left(\hat{\lambda}_i\right) \ll 1$. Aus der Forderung (3.45) für die Reglerstabilität

$$\left|1 - 2\mu\hat{\lambda}_i\right| < 1 \qquad \text{für alle } \hat{\lambda}_i \in \mathbb{C} \tag{3.62}$$

ergibt sich für positive reelle Schrittweiten μ mit

$$\sqrt{\left(1 - 2\mu\,\text{Re}\left(\hat{\lambda}_i\right)\right)^2 + \text{Im}\left(\hat{\lambda}_i\right)^2} < 1 \qquad \text{für alle } \hat{\lambda}_i \in \mathbb{C} \tag{3.63}$$

die Bedingung

$$0 < \text{Re}\left(\hat{\lambda}_{\text{min}}\right). \tag{3.64}$$

Durch Quadrieren von (3.62) und Auflösen nach μ, erhält man eine zweite Bedingung:

$$0 < \mu < \frac{1}{\hat{\lambda}_{\max}}. \tag{3.65}$$

Um diese Bedingungen auszuwerten, wird eine Schätzung der Eigenwerte der Matrix (3.61) im ungünstigsten Fall für die gesamte Regelstreckenfamilie gesucht.

Stuart und Sun [99] schreiben: Ist λ_i ein Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$, mit den rechts und links Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{y}_i$, und $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}$ eine Störung von $\mathbf{A}$, dann ist $\hat{\lambda}_i$ ein Eigenwert von $\hat{\mathbf{A}}$ mit

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \frac{\mathbf{y}_i^{\mathrm{H}} \Delta\mathbf{A}\mathbf{x}_i}{\mathbf{y}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_i} + O\left(\left\|\Delta\mathbf{A}\right\|^2\right). \tag{3.66}$$

Um dies auf das obige Problem anzuwenden, vernachlässigt man alle quadratischen Glieder $O\left(\left\|\Delta\mathbf{A}\right\|^2\right)$ und setzt

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right] \tag{3.67}$$

und

$$\Delta\mathbf{A} = \mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}. \tag{3.68}$$

Es folgt aufgrund der hermiteschen Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]$ mit $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$ und $\mathbf{x}_i^{\mathbf{H}}\mathbf{y}_i = 1$ die Eigenwertschätzung

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_i + \tau_i. \tag{3.69}$$

Die Größe τ_i ist komplex und abhängig von der Unsicherheit $\Delta\mathbf{G}$

$$\tau_i = \mathbf{x}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\mathbf{x}_i. \tag{3.70}$$

Dies bedeutet, dass der Eigenwert $\hat{\lambda}_i$ auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt λ_i und dem Radius $|\tau_i|$ liegen muss, siehe Abb. 3-2.

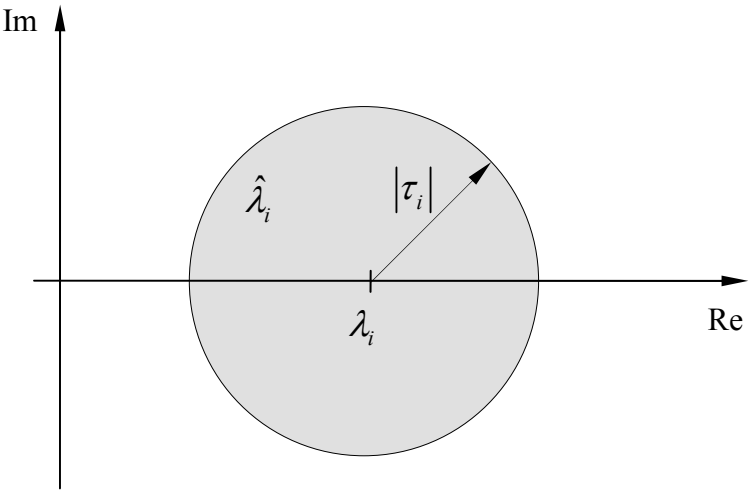


Abb. 3-2: Lage der Eigenwerte $\hat{\lambda}_i$ der Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]$

Mit (2.16) für $\Delta\mathbf{G}$, kann der Radius näher bestimmt werden:

$$\tau_i = \left\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \mathbf{x}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{U}\Delta\mathbf{W}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_i\,. \tag{3.71}$$

Hierbei handelt es sich bei $\Delta\mathbf{W}$ um die in Abschnitt 2.3.1 eingeführte Unsicherheitsstrukturmatrix. Sie ist reell und ist mit der Frobeniusnorm normiert. Mit den Abkürzungen $\mathbf{a}_i = \mathbf{x}_i^{\mathrm{H}}\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{U}$ und $\mathbf{b}_i = \mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_i$ wird eine obere Schranke für den Radius $\left|\tau_i\right|$ berechnet:

$$\begin{aligned}\tau_i &= \left\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \left|\mathbf{a}_i\Delta\mathbf{W}\mathbf{b}\right| \\ &\le \left\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{E}}}\left|a_{i(k)}\right|\left|\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{L}}}\Delta w_{(k,j)}\right|\left|b_{i(j)}\right| =: \tau_i^{\max}.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Eine untere Schranke für den kleinsten Eigenwert findet man dann am linken Rand des in Abb. 3-2 dargestellten Kreises. Eine obere Schranke des größten Eigenwertes entsprechend am rechten Rand. Die Schätzung für den kleinsten und größten Eigenwert der gesamten Matrizenfamilie (3.61) lautet

$$\hat{\lambda}_{\min}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\right) \ge \min_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}}\left\{\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) - \tau_i^{\max}\right\} \tag{3.73}$$

und

$$\hat{\lambda}_{\max}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\right) \le \max_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}}\left\{\mathrm{Re}\left(\lambda_i\right) + \tau_i^{\max}\right\}. \tag{3.74}$$

Die Schätzungen basieren auf den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ der Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]$. Sie sind also nur abhängig von gegebenen bzw. messbaren Größen. Mit der Bedingung (3.64) wird dann ein skalares Gütemaß für die robuste Regelstabilität angegeben. Die Schrittweite wird mit dem Sicherheitsfaktor *SF*

$$\mu = SF \big/ \hat{\lambda}_{\max} \tag{3.75}$$

und (3.65) festgelegt.

3.3.2 Robuste Regelqualität

Die Regelqualität des robusten Reglers wird über den verbleibenden Schallpegel an den Monitormikrofonen und über die maximale Lautsprecheransteuerung ausgedrückt.

3.3.2.1 Bestimmung der Schallpegelreduktion im ungünstigsten Fall

Der Schallpegel an den Monitormikrofonen im ungünstigsten Fall wird durch den größten Fehler $\mathbf{e}_{\mathrm{M}}$ vorgegeben, vgl. (3.50). Für eine optimale Ansteuerung $\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}$ ist dieser abhängig von den Unsicherheiten der Übertragungsmatrix $\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}$ und des Störschallfeldes $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$:

$$\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2 = \max_{\mathbf{u},\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}},\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}}\left\|\left(\mathbf{G}_{\mathrm{M}} + \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\right)\mathbf{u}_{\mathrm{opt}} + \mathbf{d}_{\mathrm{M}} + \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2. \tag{3.76}$$

Für die optimale Ansteuerung (3.60) gilt mit den Unsicherheiten (2.8) und (2.10):

$$\mathbf{u}_{\text{opt}} = \mathbf{u}_{\text{opt0}} + \Delta\mathbf{u}_{\text{opt}} = -\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]^{-1}\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\left(\mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}\right). \tag{3.77}$$

Um die nominelle Ansteuerung $\mathbf{u}_{\text{opt0}}$ zu separieren, kann man die Sherman-Morrison-Woodbury Formel anwenden [100]. Diese lautet für die invertierbaren Matrizen $\mathbf{A}$ und $\left[\mathbf{A} + \mathbf{O}\mathbf{P}^{\text{H}}\right]$:

$$\left[\mathbf{A} + \mathbf{O}\mathbf{P}^{\text{H}}\right]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}\left[\mathbf{I} + \mathbf{P}^{\text{H}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{O}\right]^{-1}\mathbf{P}^{\text{H}}\mathbf{A}^{-1}. \tag{3.78}$$

Setzt man gemäß (3.77) für

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{O} = \mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q} \tag{3.79}$$

und

$$\mathbf{P}^{\text{H}} = \Delta\mathbf{G} \tag{3.80}$$

ein, erhält man

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]^{-1} = \\
&\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]^{-1} - \\
&\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\left[\mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\right]^{-1}\Delta\mathbf{G}\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Mit der Abkürzung

$$\mathbf{C}_0 = -\left[\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{G}_0^{\text{H}}\mathbf{Q} \tag{3.82}$$

kann die optimale Ansteuerung (3.77) entsprechend

$$\mathbf{u}_{\text{opt0}} + \Delta\mathbf{u}_{\text{opt}} = \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \Delta\mathbf{d} + \mathbf{C}_0\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1}\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 \cdot \left(\mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}\right) \tag{3.83}$$

umgeformt werden. Für die in (3.83) zu invertierende Matrix $\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]$ kann die Sherman-Morrison-Woodbury Formel ein weiteres Mal angewendet werden. Dies führt zu folgender Rekursion:

$$\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1} = \mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1}\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0. \tag{3.84}$$

Diese Rekursion wird durch Einsetzen in sich selbst aufgelöst

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1} &= \left\{\begin{aligned}&\mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \\ &+\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1}\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\end{aligned}\right\} \\
&= \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right)^i.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Zu weiteren Vereinfachung von (3.85) kann folgende Überlegung angewandt werden: Setzt man (3.6) und (3.82) in (2.3) ein, lautet der Fehler

$$\mathbf{e} = \left[\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \mathbf{I}\right]\mathbf{d}\,. \tag{3.86}$$

Damit der Fehler $\mathbf{e}$ kleiner als das Störschallfeld $\mathbf{d}$ ist, müssen alle Eigenwerte von $\left[\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \mathbf{I}\right]$ kleiner als Eins sein. Dies wird durch die Spektralnorm [95] dieser Matrix beschrieben:

$$\left\|\mathbf{G}\mathbf{C}_0 + \mathbf{I}\right\|_2 < 1\,. \tag{3.87}$$

Aufgrund der negativen Eigenwerte von $\mathbf{C}_0$ ist dies erfüllt, wenn

$$\left\|\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right\|_2 < 1 \tag{3.88}$$

zutrifft. Mit der Dreiecksungleichung $\left\|\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right\|_2 < \left\|\mathbf{G}\right\|_2 \left\|\mathbf{C}_0\right\|_2$ und $\left\|\Delta\mathbf{G}\right\|_2 \ll \left\|\mathbf{G}\right\|_2$ führt dies auf die Relation

$$\left\|\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right\|_2 < \left\|\Delta\mathbf{G}\right\|_2 \left\|\mathbf{C}_0\right\|_2 \ll \left\|\mathbf{G}\right\|_2 \left\|\mathbf{C}_0\right\|_2\,. \tag{3.89}$$

Mit (3.88) und (3.89) wird $\left\|\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right\|_2 \ll 1$ angenommen. Die Summenglieder in (3.85) werden deshalb mit höherer Ordnung schnell klein. Vernachlässigt man alle Glieder $i > 1$ erhält man daher als Näherung für die Inverse

$$\left[\mathbf{I} - \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right]^{-1} \approx \mathbf{I} + \Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\,. \tag{3.90}$$

Setzt man (3.90) in (3.83) ein und vernachlässigt alle quadratischen Glieder von Δ, liefert dies die Näherungslösung für die optimale Ansteuerung

$$\mathbf{u}_{\text{opt0}} + \Delta\mathbf{u}_{\text{opt}} \approx \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{d}_0 + \mathbf{C}_0 \cdot \Delta\mathbf{d} + \mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{d}_0\,. \tag{3.91}$$

Die Ansteuerung (3.83) lässt sich somit zerlegen in die nominelle Ansteuerung

$$\mathbf{u}_{\text{opt0}} = \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{d}_0 \tag{3.92}$$

und die Unsicherheit der Ansteuerung

$$\Delta\mathbf{u}_{\text{opt}} \approx \mathbf{C}_0 \cdot \Delta\mathbf{d} + \mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{\text{opt0}}\,. \tag{3.93}$$

Führt man (3.92) und (3.93) in die Ausgangsgleichung (3.76) ein und vernachlässigt alle quadratischen Glieder von Δ, lautet sie

$$\begin{aligned}\max\left\|\mathbf{e}_{\text{M}}\right\|_2^2 &= \max_{\mathbf{u},\Delta\mathbf{G}_{\text{M}},\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}} \left\|\left(\mathbf{G}_{\text{M}} + \Delta\mathbf{G}_{\text{M}}\right)\left(\mathbf{u}_{\text{opt0}} + \Delta\mathbf{u}_{\text{opt}}\right) + \mathbf{d}_{\text{M}} + \Delta\mathbf{d}_{\text{M}}\right\|_2^2 \\ &\approx \max_{\mathbf{u},\Delta\mathbf{G}_{\text{M}},\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}} \left\|\begin{matrix}\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{u}_{\text{opt0}} + \mathbf{d}_{\text{M}} + \Delta\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{u}_{\text{opt0}} + \\ +\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{C}_0 \cdot \Delta\mathbf{d} + \mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_{\text{opt0}} + \Delta\mathbf{d}_{\text{M}}\end{matrix}\right\|_2^2.\end{aligned} \tag{3.94}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung wie folgt aufgegliedert werden:

$$\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2 \le \left\{\begin{array}{l}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}+\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2 + \\ +\max\limits_{\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}}\left\|\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|_2+\max\limits_{\Delta\mathbf{d}}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{C}_0\cdot\Delta\mathbf{d}\right\|_2+ \\ +\max\limits_{\Delta\mathbf{G}}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|_2+\max\limits_{\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}}\left\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2\end{array}\right\}^2. \tag{3.95}$$

In (3.95) müssen jetzt noch die einzelnen Summanden der Form $\max\left\|...\right\|_2$ bestimmt werden. Zunächst kann dazu aus allen Summanden die Norm der Unsicherheit herausgezogen werden. Für den ersten Summanden unter Verwendung von (2.18) erhält man dann:

$$\max_{\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}}\left\|\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|_2=\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{M}}\right\|_{\mathrm{F}}\cdot\max_{\mathbf{W}_{\mathrm{M}}}\left\|\mathbf{U}_{\mathrm{M}}\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{M}}\mathbf{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|_2. \tag{3.96}$$

Mit der Formel (A.8) aus dem Anhang lässt sich das verbleibende Maximum schätzen. Mit $\left\|\mathbf{U}_{\mathrm{M}}\right\|_2=1$ für die unitäre Matrix $\mathbf{U}_{\mathrm{M}}$, ergibt sich für (3.96)

$$\max_{\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}}\left\|\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|_2\le\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{M}}\right\|_{\mathrm{F}}\cdot\left\|\left|\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{M}}\right|\cdot\left|\mathbf{V}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right|\right\|_2. \tag{3.97}$$

Die Betragsstriche $\left|...\right|$ stehen hierbei für die Betragsbildung der Matrixelemente gemäß Formel (A.8).

Gleiches Vorgehen liefert für den zweiten Summanden mit (2.19) und (A.9) die folgende Abschätzung:

$$\max_{\Delta\mathbf{d}}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{C}_0\cdot\Delta\mathbf{d}\right\|_2\le\left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2\cdot\left\|\left|\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\mathbf{C}_0\right|\left|\Delta\mathbf{w}\right|\right\|_2. \tag{3.98}$$

Für den dritten und vierten Summanden gilt

$$\max_{\Delta\mathbf{G}}\left\|\mathbf{G}_{\mathrm{M0}}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right\|\le\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}}\cdot\left\|\left|\mathbf{G}_{\mathrm{M0}}\mathbf{C}_0\mathbf{U}\right|\cdot\Delta\mathbf{W}\cdot\left|\mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}\right|\right\|_2 \tag{3.99}$$

und

$$\max_{\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}}\left\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2=\left\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2. \tag{3.100}$$

Die Gleichungen (3.97) bis (3.99) sind abhängig von der optimalen Ansteuerung $\mathbf{u}_{\mathrm{opt0}}$ und den Eigenwerten der Reglermatrix $\mathbf{C}_0$. Sind diese klein, wird auch die Unsicherheit von (3.95) geringer. Für ein robustes System sind daher kleine Ansteuerungen und Reglerverstärkungen anzustreben.

Mit Hilfe der Pegeladdition kann schließlich der maximale Schallpegel an den Monitormikrofonen geschätzt werden. Der mittlere räumliche Schallpegel der zeitlich konstanten Schalldrücke lautet:

$$\hat{\bar{L}} = 10\log_{10}\frac{\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2}{\sqrt{2}N_{\mathrm{M}}\cdot p_0^2} = 10\log_{10}\left(\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2\right) - 10\log_{10}\sqrt{2}N_{\mathrm{M}}p_0^2 . \tag{3.101}$$

Für $\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2$ setzt man (3.95) und (3.97) bis (3.100) ein. Der Schallpegel (3.101) ist dann abhängig von den Normen der Unsicherheiten $\left\|\Delta\mathbf{G}\right\|_{\mathrm{F}}$, $\left\|\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\right\|_{\mathrm{F}}$, $\left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2$ und $\left\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2$.

3.3.2.2 Bestimmung der maximalen Ansteuerung im ungünstigsten Fall

Gemäß (3.91) wird die Ansteuerung durch die Unsicherheiten beeinflusst. Für eine bestimmte Konfiguration $\left(\mathbf{G},\mathbf{G}_{\mathrm{M}},\mathbf{d},\mathbf{d}_{\mathrm{M}},\mathbf{Q},\mathbf{R}\right)$ lautet die maximale Amplitude der Ansteuerung im ungünstigsten Fall des i-ten Lautsprechers:

$$\left|u_{\mathrm{opt}(i)}\right| = \left|u_{\mathrm{opt}0(i)}\right| + \max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right| . \tag{3.102}$$

Die enthaltenen Variablen $\left|u_{\mathrm{opt}0(i)}\right|$ und $\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right|$ sind die Elemente der Spaltenmatrizen

$$\left|\mathbf{u}_{\mathrm{opt}0}\right| = \left[\left|u_{\mathrm{opt}0(1)}\right| \quad \ldots \quad \left|u_{\mathrm{opt}0(i)}\right| \quad \ldots \quad \left|u_{\mathrm{opt}0(\mathrm{N_L})}\right|\right]^{\mathrm{T}} \tag{3.103}$$

und

$$\left|\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{opt}}\right| = \left[\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(1)}\right| \quad \ldots \quad \left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right| \quad \ldots \quad \left|\Delta u_{\mathrm{opt}(\mathrm{N_L})}\right|\right]^{\mathrm{T}} . \tag{3.104}$$

Ersetzt man in der Näherung (3.93) die Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}$ und $\Delta\mathbf{d}$ mit den Unsicherheitsmodellen (2.16) und (2.19), liefert dies

$$\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{opt}} \approx \left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2 \mathbf{C}_0\Delta\mathbf{w} + \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \mathbf{C}_0\mathbf{U}\Delta\mathbf{W}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt}0} . \tag{3.105}$$

Hier wird die Unsicherheit der Ansteuerung durch die Reglerverstärkung und die nominelle Ansteuerung festgelegt. Mit den Abkürzungen $\mathbf{A} = \mathbf{C}_0\mathbf{U}$ und $\mathbf{b} = \mathbf{V}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{opt}0}$ lässt sich das Maximierungsproblem in (3.102) elementweise ausschreiben:

$$\max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right| \approx \max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2 \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{E}}} C_{0(i,j)}\Delta w_{(j)} + \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{E}}} A_{(i,j)} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{L}}} \Delta w_{(j,k)} b_{(k)}\right| . \tag{3.106}$$

Die Größen $C_{0(i,j)}$ und $A_{(i,j)}$ sind dabei die Elemente der Matrizen $\mathbf{C}_0$ und $\mathbf{A}$.

Eine Schätzung des Maximums (3.106) wird durch Anwendung der Dreiecksungleichung auf die einzelnen Matrizenelemente errechnet

$$\max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right| \le \left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2 \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{E}}}\left|C_{0(i,j)}\right|\left|\Delta w_{(j)}\right| + \left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\mathrm{F}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{E}}}\left|A_{(i,j)}\right| \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{L}}} \Delta w_{(j,k)}\left|b_{(k)}\right| . \tag{3.107}$$

Mit (3.102) und (3.107) findet man schließlich die größte Ansteuerung aller Lautsprecher durch

$$\max_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}}\left|u_{\mathrm{opt}(i)}\right| \le \max_{i=1}^{N_{\mathrm{L}}}\left\{\left|u_{\mathrm{opt}0(i)}\right| + \max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\Delta u_{\mathrm{opt}(i)}\right|\right\} . \tag{3.108}$$

Für diese wird die Abkürzung

$$\hat{u}_{\text{opt}}^{\max}\left(\mathbf{G},\Delta\mathbf{G},\mathbf{d},\Delta\mathbf{d}\right)=\max_{i=1}^{N_{\text{L}}}\left\{\left|u_{\text{opt}0(i)}\right|+\max_{\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}}\left|\Delta u_{\text{opt}(i)}\right|\right\} \tag{3.109}$$

eingeführt. Der Abstand zur maximal zulässigen Lautsprecheransteuerung $u_{\text{zul}}^{\max}$ lautet

$$u_{\text{zul}}^{\max}-\hat{u}_{\text{opt}}^{\max}\,. \tag{3.110}$$

Diese skalare Größe dient nun als Regelgütemaß der Lautsprecheransteuerung.

3.3.3 Aufstellen des Parameteroptimierungsproblems

Ziel dieser Optimierung ist die Minimierung des Schalldruckpegels an den Monitormikrofonen im ungünstigsten Fall. Lässt man in (3.101) die konstanten Summanden weg, lautet die Zielfunktion:

$$\underset{\mathbf{Q},\mathbf{R}}{\text{minimiere}}\qquad 10\log_{10}\left(\max\left\|\mathbf{e}_{\text{M}}\right\|_2^2\right). \tag{3.111}$$

Die einzuhaltende Nebenbedingung f_1 ist die robuste Regelstabilität (3.73). Die Bedingung f_2 gewährleistet das Unterschreiten der maximalen Lautsprecheransteuerung (3.110) im ungünstigsten Fall. Aus (3.5) resultieren die Nebenbedingungen f_3 und f_4. Mit (3.6), (3.95) und (3.97) bis (3.101), erhält man das Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned}
&\underset{\mathbf{Q},\mathbf{R}}{\text{minimiere}}\qquad f_0 := 10\log_{10}\left\{\begin{array}{l}\left\|\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{u}_{\text{opt}0}+\mathbf{d}_{\text{M}}\right\|_2+\\ +\max\limits_{\Delta\mathbf{G}_{\text{M}}}\left\|\Delta\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{u}_{\text{opt}0}\right\|_2+\max\limits_{\Delta\mathbf{d}}\left\|\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{C}_0\cdot\Delta\mathbf{d}\right\|_2+\\ +\max\limits_{\Delta\mathbf{G}}\left\|\mathbf{G}_{\text{M}}\mathbf{C}_0\Delta\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}_{\text{opt}0}\right\|_2+\max\limits_{\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}}\left\|\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}\right\|_2\end{array}\right\}^2\\
&\text{NB:}\qquad f_1 := \hat{\lambda}_{\min}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\mathbf{G}\right)>0\\
&\qquad\quad f_2 := u_{\text{zul}}^{\max}-\hat{u}_{\text{opt}}^{\max}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d}\right)>0\\
&\qquad\quad f_3 := \mathbf{Q}\succ 0\\
&\qquad\quad f_4 := \mathbf{R}\succ 0
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Die positiv definiten Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sind die Optimierungsvariablen. Zusätzlich zu den Problemeingangsgrößen des nominellen Entwurfs werden hier die Normen der Unsicherheiten $\left(\left\|\Delta\mathbf{G}\right\|_{\text{F}},\left\|\Delta\mathbf{G}_{\text{M}}\right\|_{\text{F}},\left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2,\left\|\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}\right\|_2\right)$ und die Unsicherheitsstrukturen $\left(\Delta\mathbf{W},\Delta\mathbf{W}_{\text{M}},\Delta\mathbf{w}\right)$ benötigt.

4 Lösen des Optimierungsproblems

Dieses Kapitel beschreibt das Lösungsverfahren für die in Kapitel 3 aufgestellten Optimierungsprobleme. Zunächst wird das Problem klassifiziert und ein Lösungsverfahren ausgewählt. Anschließend wird die Umsetzung des Lösungsverfahrens beschrieben.

4.1 Klassifizieren des Problems und Auswahl eines Lösungsverfahrens

Die in Abschnitt 3.2.3 und 3.3.3 aufgestellten Optimierungsprobleme sind von der Form

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{Q},\mathbf{R}}{\text{minimiere}} && f_0(\mathbf{Q},\mathbf{R}) \\ &\text{NB:} && f_i(\mathbf{Q},\mathbf{R}) \geq 0, i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Gesucht ist das globale Optimum. Diese Optimierungsprobleme lassen sich wie folgt klassifizieren, vgl. [101]:

I. Aufgrund $N_\mathrm{E} + N_\mathrm{L}$ bzw. N_L der Parameter in $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ ist der Lösungsraum der Zielfunktion $f_0(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ mehrdimensional.

II. Die freien Parametern von $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sind auf einem kontinuierlichen Intervall zuvariieren, vgl. Abschnitt 3.1.2. Der Lösungsraum ist daher kontinuierlich. Es handelt sich um ein kontinuierliches bzw. numerisches Optimierungsproblem.

III. Die Gleichung (3.6) der optimalen Ansteuerung $\mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ ist nicht-homogen:

$$\begin{aligned} \kappa_1 \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R}) &\neq \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\kappa_1\mathbf{Q},\mathbf{R}) \\ \kappa_2 \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R}) &\neq \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\kappa_2\mathbf{R}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Außerdem ist die Additivität nicht erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q}_1+\mathbf{Q}_2,\mathbf{R}) &\neq \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q}_1,\mathbf{R}) + \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q}_2,\mathbf{R}) \\ \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2) &\neq \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R}_1) + \mathbf{u}_\mathrm{opt}(\mathbf{Q},\mathbf{R}_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Daher ist die Gleichung für die optimale Ansteuerung (3.6) nicht-linear. Dies gilt dann auch für die Zielfunktion $f_0(\mathbf{Q},\mathbf{R})$, da diese von der optimalen Ansteuerung abhängt.

IV. Die Zielfunktion $f_0(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ ist nur abhängig von deterministischen Größen. Mit den Normen der Unsicherheiten und den Unsicherheitsstrukturen ist sie effizient numerisch auswertbar.

V. Aufgrund der Nebenbedingungen $f_i(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ ist der Lösungsraum beschränkt.

VI. Der kleinste Eigenwert muss für die Nebenbedingungen $f_1(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ bestimmt werden, vgl. (3.46). Auch für $f_2(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ müssen Beträge gebildet und Maximierungsprobleme gelöst werden, vgl. (3.51). Diese Operationen sind nicht-homogen und nicht-additiv. Die Nebenbedingungen sind deshalb ebenfalls nicht-linear.

Aufgrund der obigen Klassifizierung sind die vorliegenden Optimierungsprobleme nicht mittels linearer Optimierer lösbar [102]. Deshalb wird ein Lösungsweg über ein heuristisches Suchverfahren eingeschlagen. Ausgewählt wird der genetische Algorithmus (GA). Dieser ist der einfachste der evolutionären Algorithmen und basiert auf der wiederholten Auswertung der Zielfunktion. Dabei werden verschiedene an die natürliche Evolution angelehnte Operatoren angewendet. Er bietet die Möglichkeit einer hohen Parallelisierbarkeit, wodurch eine effiziente Implementierung auf Standard-PC's mit dualcore- oder quadcore-Prozessoren möglich ist.

Als Lösungswerkzeug wird die Standardsoftware Matlab® mit *Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox* verwendet. Diese bietet die wichtigsten Möglichkeiten genetischer Algorithmen und kann um problemspezifische Funktionen erweitert werden.

4.2 Ablauf der genetischen Optimierung

Abb. 4-1 zeigt den Aufbau des verwendeten genetischen Algorithmus. Er beinhaltet alle wichtigen Operatoren und dient als Ausgangspunkt für die folgenden Erläuterungen.

Zum Programmstart werden zunächst die Individuen der Startpopulation mittels problemspezifischen Verfahren erstellt, dieses Verfahren wird im Abschnitt 4.3.3.1 näher erläutert. Anschließend werden mit der Zielfunktion den Individuen Fitnesswerte zugewiesen. Jedes Individuum erhält dabei einen skalaren Wert, der dessen Güte im Bezug auf das Optimierungsproblem beschreibt. Dies bildet die Grundlage für die Erzeugung der nächsten Generation von Kinderindividuen durch die verschiedenen evolutionären Operatoren.

Die globale Gesamtpopulation ist in Anz_{UnPop} regionale Unterpopulationen mit jeweils N_{UnPop} Individuen unterteilt. Dabei entwickeln sich die Individuen eine Zeit lang isoliert voneinander, um die Verschiedenartigkeit der Gesamtpopulation hoch zuhalten. Dies hat den Vorteil, dass die Zielfunktion weniger häufig ausgewertet werden muss, um ein gleichwertiges Ergebnisses zu erreichen [103]. Gleichzeitig kann die Berechung der Fitnesswerte der Individuen auf mehreren Prozessoren verteilt werden.

Um einen Austausch zwischen den regionalen Unterpopulationen alle N_{Mig} Generationen zu gewährleisten, wird der Migrations-Operator angewendet. Dieser ersetzt die schlechtesten Individuen einer Unterpopulation mit den besten Individuen der jeweils benachbarten Unterpopulation. Die Nachbarschaft der regionalen Unterpopulationen entspricht einer Ringtopologie, der Austausch findet in beide Richtungen dieses Ringes statt. Der Anteil der wandernden Unterpopulation wird mit dem Parameter r_{Mig} bestimmt.

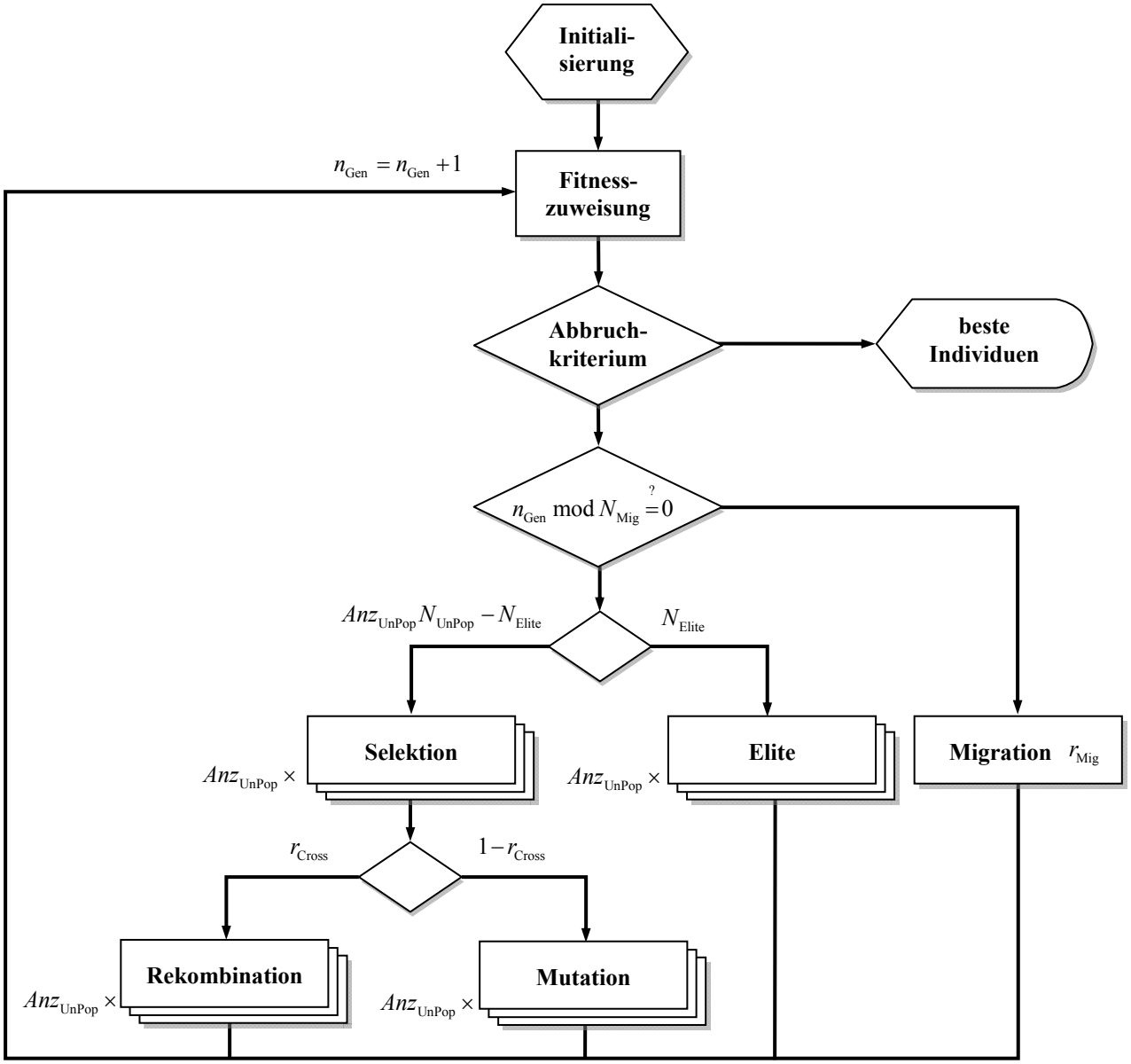


Abb. 4-1: Aufbau des verwendeten genetischen Algorithmus.

Für die nächste Generation werden in jeder Unterpopulation Elternindividuen selektiert. Als Selektionsverfahren wird die Turnierselektion angewendet. Hier werden N_{Tour} Turnierteilnehmer gleichmäßig aus der jeweiligen Unterpopulation entnommen und miteinander verglichen. Es wird dann das Individuum ausgewählt, welches über die beste Fitness verfügt. Um sicherzustellen, dass die besten Individuen der Unterpopulationen auf jeden Fall überleben, werden N_{Elite} Elite-Individuen direkt in die nächste Generation eingefügt.

Die selektierten Elternindividuen bilden anschließend durch Rekombination oder Mutation die Kinderindividuen. Der Anteil der durch die Rekombination erzeugten Kinderindividuen wird durch den Parameter r_{Cross} geregelt.

Als Rekombinationsoperator wird die in Matlab® bereits implementierte intermediäre Rekombination verwendet. Diese ist für reelle Variablen gut geeignet [103]. Die Nachkommen

werden durch zufällige Gewichtung des Mittelwertes eines Elternpaares bestimmt. Die Nachkommen liegen damit innerhalb eines durch das Elternpaar aufgespannten Hyperwürfels. Durch diese Mittelwertbildung nimmt jedoch im Laufe der Optimierung die Diversität der Population ab.

Der Anteil der nicht zur Rekombination genutzten Elternindividuen wird durch Mutation verändert. Im Gegensatz zur Rekombination soll die Mutation die Diversität der Population hoch halten. Die *Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox* bietet jedoch für beschränkte Optimierungsprobleme nur den Mutations-Operator *adaptive feasible* an. Dieser bietet keinen Parameter, um das Mutationsverhalten zu beeinflussen. Wendet man ihn auf das vorliegende Problem an, nimmt die Diversität der Population sehr schnell ab. Es besteht daher die Gefahr, dass der Optimierer in einem lokalen Minimum hängen bleibt. Aus diesem Grund wird ein problemspezifischer Mutations-Operator angewendet, welcher die Populationsdiversität besser beeinflussen kann; siehe Abschnitt 4.3.3.2.

Die mit Hilfe des Rekombinations- und Mutations-Operator erzeugten Individuen bilden mit den Elite-Individuen die neue Generation. Im nächsten Schritt werden diesen Individuen wieder Fitnesswerte zugeordnet. Der Ablauf beginnt von neuem und wird solange fortgeführt, bis das Abbruchkriterium erfüllt ist. Als Abbruchkriterium gilt das Erreichen der N_{Gen} – ten Generation.

4.3 Umsetzung des Lösungsverfahrens

Als nächstes wird die problemspezifische Umsetzung des Lösungsverfahrens beschrieben. Sie gliedert sich in die Kodierung der Optimierungsvariablen und der Zielfunktion. Die Anpassung der Operatoren wird erläutert.

4.3.1 Kodierung der Optimierungsvariablen

Die Optimierungsvariablen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ sind hermitesche Matrizen. Im Allgemeinen werden die Optimierungsvariablen genetischer Algorithmen als Zeilenmatrix verarbeitet und gespeichert. Aus diesem Grund und wegen der besseren Lesbarkeit wird im Weiteren zwischen Phänotyp und Genotyp gemäß K. Weicker [104] unterschieden.

Der Phänotyp ist die Repräsentation des Individuum im Raum der konkreten Problemstellung, in dem es gilt, die Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ zu optimieren. Der Genotyp ist die eindeutige Repräsentation des Individuums im Lösungsraum des GA. Der Genotyp und der Phänotyp sind mittels einer Dekodierungsvorschrift miteinander verknüpft. Um z.B. die Fitness eines als Genotyp vorliegenden Individuums zu bewerten, ist das Individuum zunächst zu dekodieren. Dieser Zusammenhang wird in Abb. 4-2 verdeutlicht.

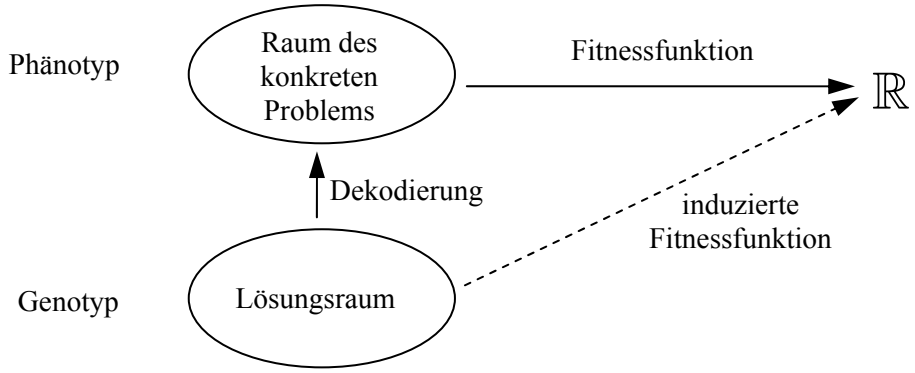


Abb. 4-2: Repräsentation des Individuums als Genotyp und Phänotyp (Abb. nach K. Weicker [104]).

4.3.1.1 Kodierung der Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten

Der Phänotyp für die Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten sind die Optimierungsvariablen $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$. Entsprechend (3.14) sind deren Matrixdiagonalelemente zu optimieren. Um sicherzustellen, dass die optimalen Lösungen für $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$ die gleiche Größenordnung haben, wird ähnlich der GLF im Abschnitt 3.1.2.1 eine zusätzliche Optimierungsvariable χ eingeführt. Diese Variable verteilt alle Gewichtungsparameter gleichmäßig auf dem Intervall $[0,1]$. Extrem kleine oder große Gewichtungsparameter werden vermieden. Der Genotyp wird als Zeilenmatrix mit den Diagonalelementen von $\mathbf{Q}_\mathrm{D}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{D}$ angeordnet. Die Optimierungsvariable χ wird an letzter Stelle angefügt, vgl. Abb. 4-3.

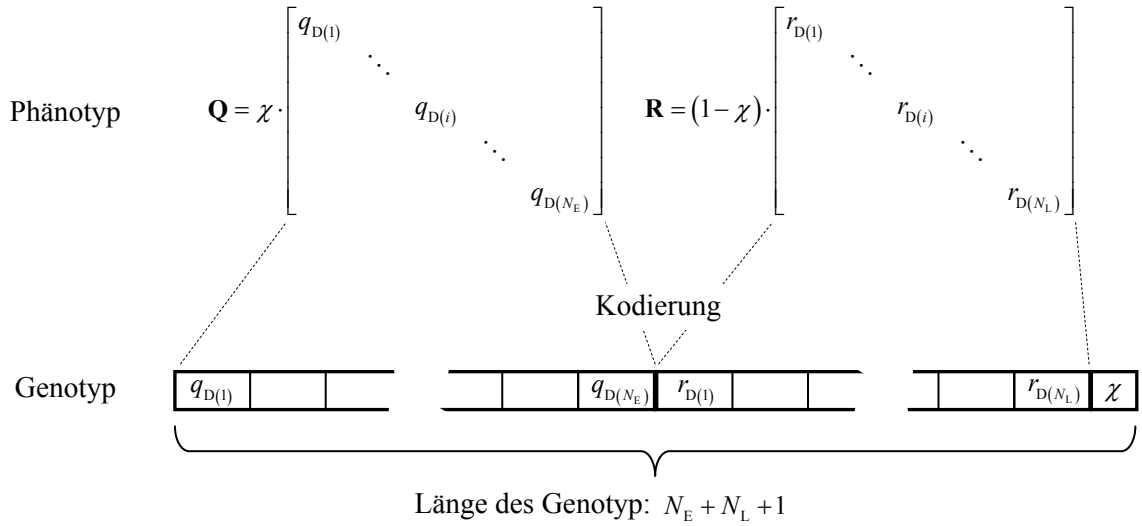


Abb. 4-3: Kodierungsvorschrift für die Gewichtung der physikalischen Reglerkoordinaten.

4.3.1.2 Kodierung der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten

In ähnlicher Weise wird gemäß Abschnitt 3.1.2.2 der Phänotyp der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten realisiert. Die hermiteschen Gewichtungsmatrizen werden mit $\mathbf{Q}_\mathrm{HK} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{Q}}_\mathrm{HK}\mathbf{U}^\mathrm{H}$ und $\mathbf{R}_\mathrm{HK} = \mathbf{V}\hat{\mathbf{R}}_\mathrm{HK}\mathbf{V}^\mathrm{H}$ dargestellt. Sie lassen sich eindeutig beschreiben durch die Diagonalmatrizen $\hat{\mathbf{Q}}_\mathrm{HK}$ und $\hat{\mathbf{R}}_\mathrm{HK}$. Die unitären Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ sind mit der Matrix $\mathbf{G}_0$ bekannt. Mit den Transformationsgleichungen (3.27) und (3.28) werden die

Diagonalmatrizen $\mathbf{Q}_{\mathrm{HK}}$ und $\mathbf{R}_{\mathrm{HK}}$ zu N_{L} reellen Optimierungsvariablen φ_i zusammengefasst, vgl. Abb. 4-4.

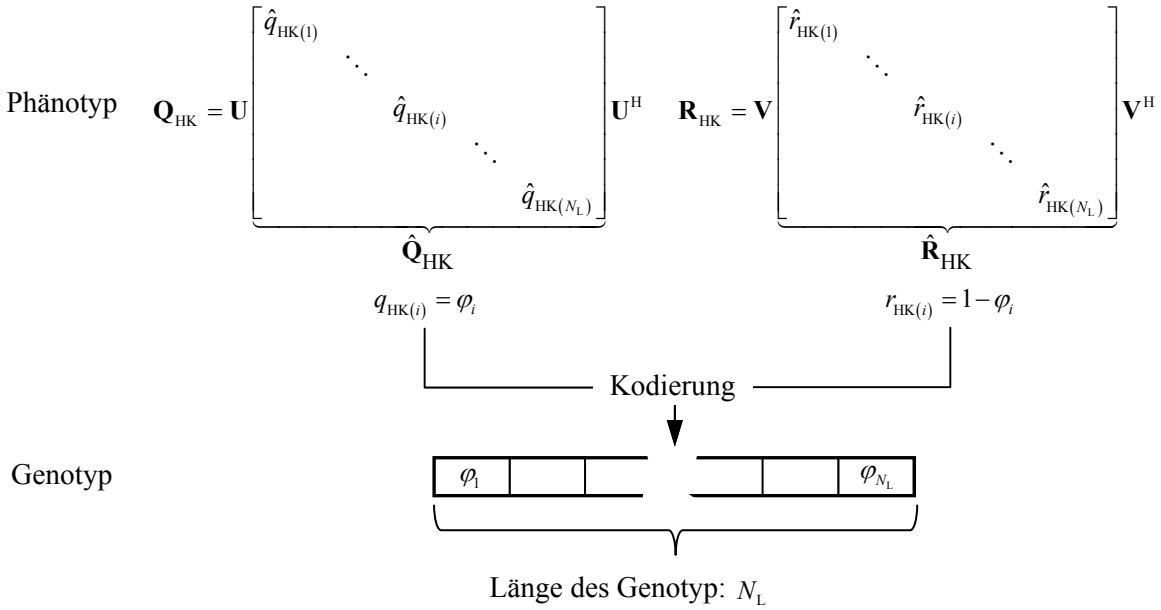


Abb. 4-4: Kodierungsvorschrift für die Gewichtung der Regelhauptkoordinaten.

4.3.2 Kodierung der Zielfunktion und Nebenbedingungen

Die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems (4.1) müssen so kodiert werden, dass eine Optimierung mit der *Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox* durchgeführt werden kann. Die nichtlinearen Zielfunktionen

$$f_0 = 10\log_{10}\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M0}}\right\|_2^2 \quad \text{bzw.} \quad f_0 = 10\log_{10}\left(\max\left\|\mathbf{e}_{\mathrm{M}}\right\|_2^2\right), \tag{4.4}$$

vgl. (3.54) und (3.111), werden als problemspezifische Funktion programmiert. Für die nichtlinearen Nebenbedingungen könnten ähnliche problemspezifische Funktionen programmiert werden, jedoch müsste dabei die optimale Ansteuerung mehrfach in unterschiedlichen Funktionen berechnet werden. Dies kann vermieden werden, wenn die Nebenbedingungen mit der Zielfunktion über Strafterme verknüpft werden.

Die nichtlinearen Nebenbedingungen

$$f_1 = \lambda_i\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f_1 = \hat{\lambda}_i\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\right) > 0 \tag{4.5}$$

und

$$f_2 = u_{\mathrm{zul}}^{\max} - u_{\mathrm{opt}}^{\max}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right) > 0 \quad \text{bzw.} \quad f_2 = u_{\mathrm{zul}}^{\max} - \hat{u}_{\mathrm{opt}}^{\max}\left(\mathbf{Q},\mathbf{R},\Delta\right) > 0 \tag{4.6}$$

werden daher implizit mit der nichtlinearen Zielfunktion des Optimierungsproblems (4.4) verbunden. Anwendung findet eine Indikator- bzw. Barrierefunktion:

$$f_0' = f_0 + I\left\{f_1\right\} + I\left\{f_2\right\}, \tag{4.7}$$

vgl. [102]. Als Indikatorfunktion $I(z)$ wird

$$I(z) = \begin{cases} 0 & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

definiert. Eine Approximation von (4.8) ist

$$\hat{I}(z) = \frac{1}{t} e^{-tz} . \tag{4.9}$$

Abb. 4-5 zeigt diese Indikatorfunktion und deren Approximation im Vergleich. Mit größerem Parameter t steigt die Approximationsgüte; für $t = 200$ nähert sich die Approximation $\hat{I}(z)$ bis auf Strichstärke der Indikatorfunktion $I(z)$ an. Die Indikatorfunktion bestraft die Verletzung der Nebenbedingungen mit sehr großen Zielfunktionswerten. Außerdem erlaubt die Krümmung im Bereich $z > 0$ den Individuen zu erkennen, in welche Richtung die Ergebnisse weiter verbessert werden können.

Die Optimierungsvariablen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ müssen positiv definit sein:

$$f_3 = \mathbf{Q} \succ 0 \text{ und } f_4 = \mathbf{R} \succ 0 . \tag{4.10}$$

Diese Nebenbedingung wird durch positive Diagonaleinträge in den Matrizen $\mathbf{Q}_D$ und $\mathbf{R}_D$ sowie $\hat{\mathbf{Q}}_{HK}$ und $\hat{\mathbf{R}}_{HK}$ sichergestellt, vgl. (3.14) und (3.19). Dies wird auch durch die problemspezifische Anpassung der genetischen Operatoren gewährleistet.

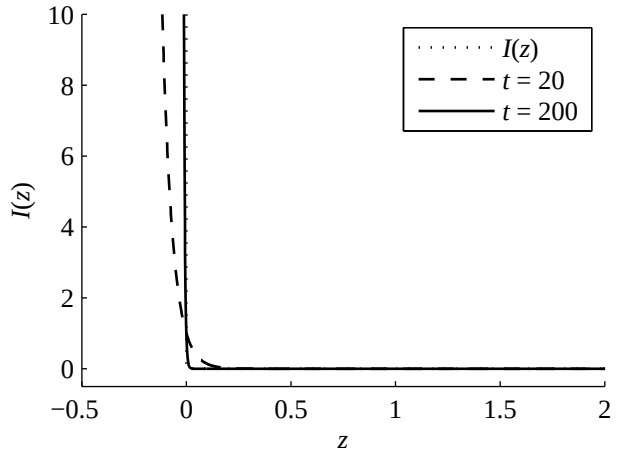


Abb. 4-5: Indikatorfunktion $I(z)$ und Approximation $\hat{I}(z)$.

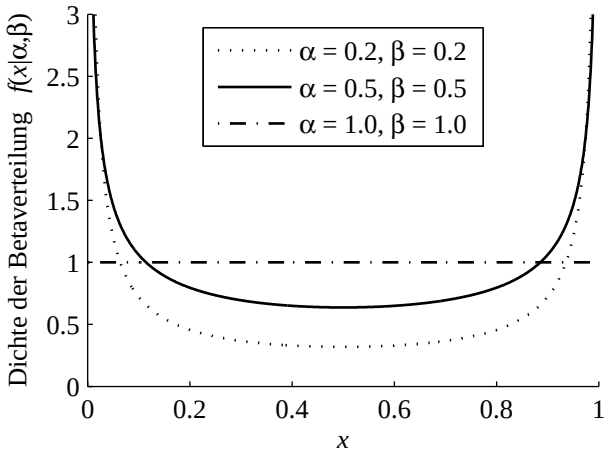


Abb. 4-6: Dichte der Beta-Verteilung.

4.3.3 Operator-Anpassungen

Um eine schnelle Konvergenz und hohe Lösungsgüte zu erreichen, ist die Diversität der Individuen entscheidend. Es ist deshalb vorteilhaft, durch die Mutation und die Startpopulation zunächst eine hohe Diversität zu realisieren, um somit verstärkt an den Ränder des Lösungsraums zusuchen. Durch die Rekombination soll dann vermehrt eine Suche im Zentrum des Lösungsraums stattfinden. Diese Aufgabenteilung wird durch die problemspezifische Anpassung der Erstellung der Startpopulation und des Mutationsoperatoren eingepflegt.

4.3.3.1 Erstellen der Startpopulation

Um für die Startpopulation verstärkt Individuen an den Rändern des Parameterintervalls zu generieren, wird mittels Beta-Verteilung [105] der Genotyp erzeugt. Die Verteilungsdichtefunktion $f(x|\alpha,\beta)$ der Beta-Verteilung ist auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt und abhängig von den Parametern α und β:

$$f(x|\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad \text{mit } B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ 0\le x\le 1. \tag{4.11}$$

Das Symbol Γ beschreibt dabei die Gamma-Funktion [105]. Für verschiedene Parameter α und β ist die Dichtefunktion in Abb. 4-6 dargestellt. Mit den Parametern $\alpha=\beta=0.5$ besteht eine hohe Wahrscheinlichkeit, dass Genotypen an den Grenzen des Intervalls generiert werden. Wählt man α und β zu klein, werden dagegen zu wenige Genotypen in der Intervallmitte erzeugt. Sind α und β gleich Eins, entspricht die Beta-Verteilung der Gleichverteilung. Für die Startpopulation werden daher die Gene mit den Parametern $\alpha=\beta=0.5$ gebildet.

Damit die Individuen der Startpopulation nicht zu weit außerhalb des durch die Nebenbedingungen beschränkten Lösungsraums befinden, wird für sie der Fitnesswert berechnet. Ist dieser Fitnesswert aufgrund der Strafterme sehr groß, wird ein neues Individuum generiert.

4.3.3.2 Mutations-Operator

Der Mutationsoperator ändert ein einzelnes Gen des Genotyps zufällig. Er steuert damit die Diversität der Population im Verlauf der Optimierung. Am Anfang der Optimierung soll die Diversität hoch sein, um vielversprechende Bereiche des Lösungsraums zu entdecken. Dagegen sollen am Ende der Optimierung lokale Lösungen verbessert werden.

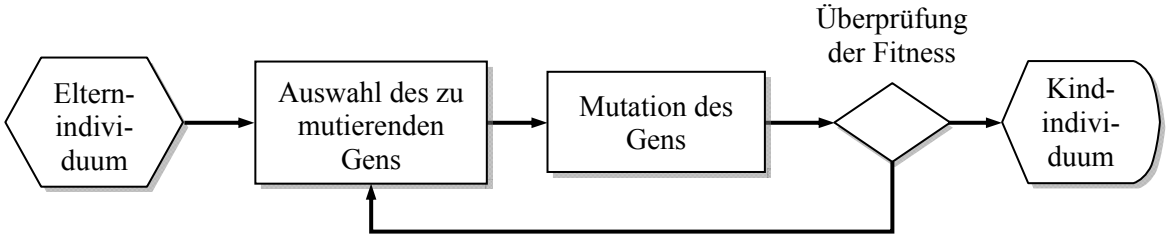


Abb. 4-7: Ablauf der Mutation eines einzelnen Individuums.

Ein Mutationsoperator, der diese Anforderungen erfüllt, ist in Abb. 4-7 dargestellt. Aus einem vom Selektionsoperator zur Mutation bestimmten Elternindividuum wird ein einzelnes Gen zur Mutation ausgewählt. Hierbei erfolgt die Auswahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Gene.

Anschließend wird das Gen mit einer parametrischen Beta-Verteilung auf dem Intervall $[-0.5,0.5]$ zufällig additiv mutiert. Liegt das neue Gen außerhalb der Intervallgrenzen $[0,1]$, werden die Vorkommastellen abgeschnitten. Dies entspricht einer Ringtopologie des Inter-

valls. Am Ende der Optimierung (>80 % Optimierungszeit) wird auf die Intervallgrenzen gerundet, sodass die Gene ebenfalls genau auf den Intervallgrenzen liegen können. Sie können somit einer exakten Eins oder Null entsprechen. Dies ist zum Beispiel wichtig für die Entscheidung, ob gegebenenfalls Mikrofone überflüssig sind.

Die Parameter der Beta-Verteilung werden im Laufe der Optimierung so geändert, dass am Anfang mit hoher Wahrscheinlichkeit große und am Ende kleine Mutationsschritte erfolgen. In Abb. 4-8 ist als Beispiel der Kurvenverlauf der Parameter α und β für eine Optimierung über 1000 Generationen gezeigt. Zusätzlich sind die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Mutationsschritte an die Kurve angetragen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ähnelt anfangs einer Gleichverteilung und im mittleren Bereich einer Normalverteilung. Am Ende des Optimierungslaufs wird die Standardabweichung immer kleiner, es können jedoch mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit immer noch große Mutationsschritte erfolgen. Damit wird zunächst global optimiert und im weiteren Verlauf lokal. Die Lage des Kurvenknicks bei Generation 450 wird durch den einstellbaren Parameter *bend* vorgegeben. Für das unten dargestellte Beispiel wurde der Parameter $bend = 1/3$ verwendet.

Nach der Mutation wird dem neuen Individuum ein Fitnesswert zugewiesen. Individuen mit sehr großen Fitnesswerten liegen weit außerhalb des beschränkten Suchraumes. Diese Mutationen werden verworfen und anschließend wiederholt. Somit wird sichergestellt, dass die Population nicht mit sehr schlechten Individuen kontaminiert wird.

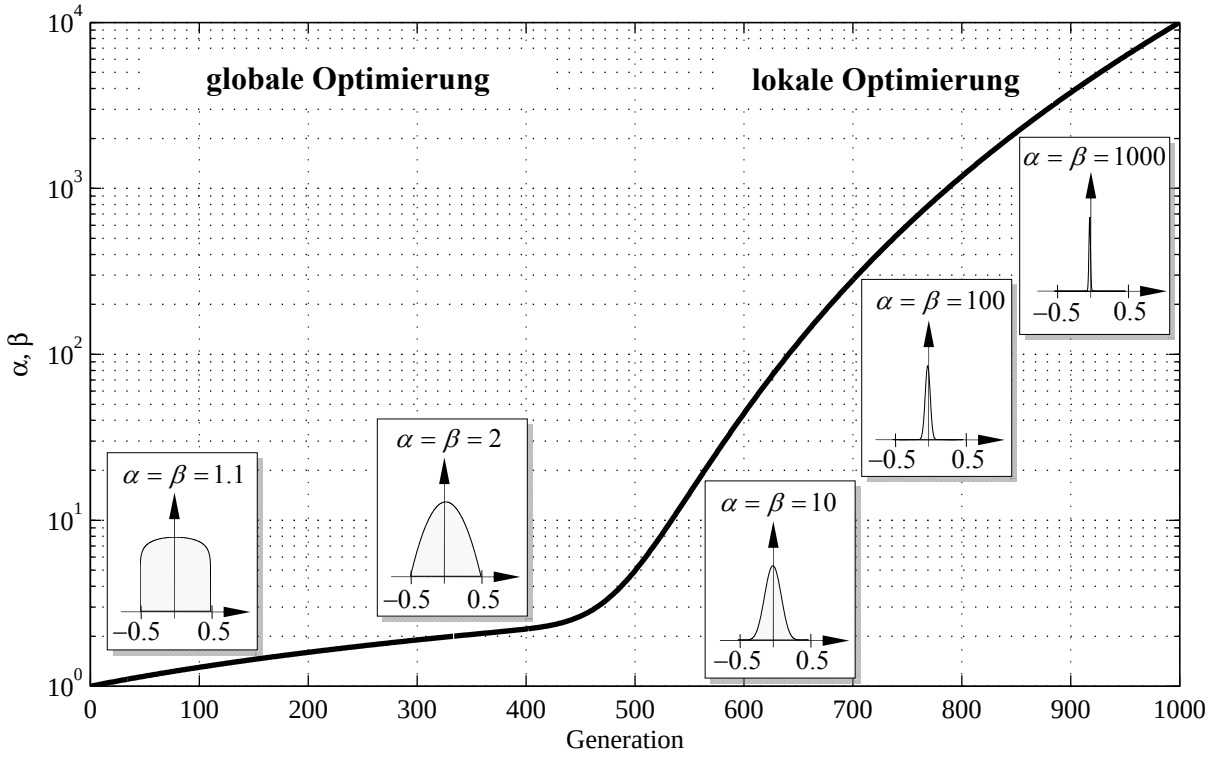


Abb. 4-8: Parameter α und β der Beta-Verteilung zur zufälligen Erzeugung des Mutationsschritts sowie ausgewählte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen auf dem Intervall $[-0.5, 0.5]$.

4.4 Überprüfen der Lösungsgüte

Im Anschluss an die Optimierung wird geprüft, ob das Ergebnis ein Optimum ist oder eine vorzeitige Konvergenz vorliegt. Vorzeitige Konvergenz bedeutet das Beenden der Optimierung an einem Hang des Kostengebirges. Dies tritt z.B. ein, wenn die Diversität der Population zu schnell abnimmt.

Ob die Lösung an einem Hang liegt, kann bei Annahme einer stetigen Kostenfunktion um die Lösung wie folgt überprüft werden: Geht man von der Lösung jeweils einen Schritt $\Delta x = 1/100$ in alle möglichen Richtungen und muss dabei stets bergauf gehen, befindet man sich in einem Tal des Kostengebirges. Das Optimum muss dann innerhalb des mit dem Radius $\Delta x = 1/100$ abgeschrittenen Raums liegen. Geht man in eine Richtung bergab, so befindet man sich an einem Hang des Kostengebirges. Mathematisch lässt sich mittels Differenzenquotient die Steigung des Kostengebirges am Lösungspunkt berechnen. Der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotient ist bei einer kleinen Änderung Δx eines Gens x des Genotyps wie folgt definiert:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_0(x+\Delta x) - f_0(x)}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_0(x-\Delta x) - f_0(x)}{\Delta x}. \tag{4.12}$$

Der Steigungswinkel wird mit Hilfe der Tangens-Funktion bestimmt; positive Steigungswinkel bedeuten ein Ansteigen der Kostengebirges in die entsprechende Richtung.

Ob die Lösung des Optimierers ein lokales oder globales Optimum ist, kann durch wiederholtes Ausführen des genetischen Algorithmus abgeschätzt werden. Erhält man immer die gleiche Lösung, kann gefolgert werden, dass es sich dabei um ein globales Minimum handelt.

5 Anwendung auf den Lademeisterbereich

Die neue Reglerentwurfsmethodik wird auf den Lademeisterbereich des propellergetriebenen Transportflugzeugs Airbus A400M angewendet. Der Lademeisterbereich hat ungefähr die Größe eines Bildschirmarbeitsplatzes und ist mit einer offenen Grenzfläche mit dem Laderaum gekoppelt. Die experimentelle Überprüfung soll in einem realistischen Experiment erfolgen.

Das ANC-System für den Lademeisterbereich wird für zwei Lastfälle ausgelegt. Die Lastfälle orientieren sich an typischen Flugbedingungen, sind jedoch aufgrund von Vertraulichkeitsvereinbarungen fiktiv. Als fiktive Lastfälle werden zwei stationäre Flugzustände angenommen, denen jeweils verschiedene Propellerdrehzahlen zugeordnet sind. Alle Harmonischen der Rotorblattfolgefrequenz bis 300 Hz werden im Reglerentwurf berücksichtigt. Als Störschallfeldpegel werden für alle Harmonischen 80 dB(A) am Lademeisterkopf eingestellt. Vergleichsmessungen in der C130 Hercules zeigen [69], dass dieser Pegel für die erste Harmonische realistisch ist. Für die zweite und dritte Harmonische werden dagegen im Vergleich zur ersten Harmonischen kleinere Pegel (-15 dB) erwartet. Der Pegel von 80 dB(A) ist daher eine konservative Annahme.

Tab. 5-1: Angenommene Lastfälle

	1. Harmonische (1xBPF)		2.Harmonische (2xBPF)		3. Harmonische (3xBPF)	
Lastfall I	92 Hz	80 dB(A)	184 Hz	80 dB(A)	276 Hz	80 dB(A)
Lastfall II	97 Hz	80 dB(A)	194 Hz	80 dB(A)	291 Hz	80 dB(A)

Die Frequenzen und Pegel der beiden Lastfälle sind in Tab. 5-1 zusammengefasst. Im Weiteren werden die Frequenzen mit römischen Ziffern für die Lastfälle und mit arabischen Ziffern für die Harmonische gekennzeichnet (Beispiel I.1: Lastfall I, 1. Harmonische).

Ziel des Reglerentwurfes ist die Bestimmung der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$. Die Parameteroptimierung wird separat für jede Frequenz durchgeführt. Die Lösung ist somit unabhängig von einer bestimmten spektralen Färbung. Eine gemeinsame Optimierung wäre nur dann sinnvoll, wenn ein nichtlineares Modell der Lautsprecherverzerrungen vorhanden wäre. Dieses würde die Wechselwirkungen der Harmonischen untereinander berücksichtigen.

Der Reglerentwurf soll robust gegenüber Störungen durch Ausrüstungsgegenstände oder Personen im Lademeisterbereich erfolgen. Die Drift der Komponenten, der Übertragungsfunktionen und der Störschallfelder zwischen verschiedenen Tagen wird berücksichtigt. Der Regler soll somit auch längere Zeit ohne Neuentwurf bzw. Wartung betrieben werden können.

Im Folgenden werden zunächst die raumakustischen Anforderungen an eine Versuchsumgebung analysiert. Nach der Erläuterung der experimentellen Umsetzung werden die Messungen der Übertragungsfunktionen, der Störschallfelder und deren Unsicherheiten beschrieben. Anschließend erfolgt die Reglerauslegung und die Diskussion der Entwurfsergebnisse anhand numerischer Untersuchungen. Abschließend wird der Entwurf im Experiment überprüft.

5.1 Raumakustische Anforderungen an die Versuchsumgebung

Der Lademeisterbereich ist ein relativ kleines Luftvolumen, welches an das große Luftvolumen des Laderaums ankoppelt. Die wesentlichen physikalischen Effekte eines solchen gekoppelten Systems werden an einem vereinfachten Modell analysiert. Schlussfolgerungen für den Versuchsaufbau werden gezogen.

5.1.1 Modellbildung

Abb. 5-1 stellt den Laderaum als rechteckigen Raum (Volumen $V_1 \approx 405\ \mathrm{m}^3$) dar. Der Lademeisterbereich (Volumen $V_1 \approx 4.5\ \mathrm{m}^3$) ist über die gemeinsame Kopplungsfläche (Fläche $S_{12} \approx 2.6\ \mathrm{m}^2$) an den Laderaum gekoppelt. Die gekrümmte Außenhaut im Lademeisterbereich wird über eine abgeschrägte Kante modelliert. Die Nachhallzeit in den Volumina wird vergleichbar zur Nachhallzeit im realen Flugzeug angenommen.

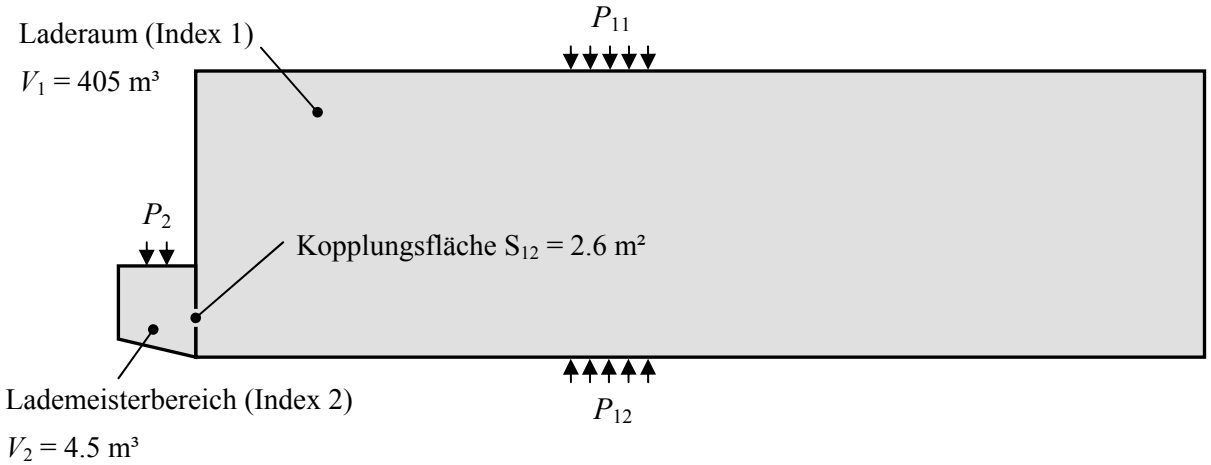


Abb. 5-1: Vereinfachtes Modell des gekoppelten Systems.

Die Anregung des Schallfeldes erfolgt jeweils durch zwei Propeller an den linken und rechten Tragflächen des Flugzeugs, vgl. Abb. 1-2. Entsprechend den numerischen Berechnungen und der Experimente durch Meyer und Neumann [106], wird der Schall der Grundharmonischen im Wesentlichen in der Propellerebene abgestrahlt. Es ist deshalb zu erwarten, dass hauptsächlich auch die Rumpfstruktur in der Propellerebene angeregt wird. Die Frequenz des Grundtons (blade passing frequency – BPF) berechnet sich multiplikativ aus der Anzahl der Propellerblätter und der Propellerdrehzahl. Außer der Grundharmonischen sind auch höhere Harmonische (2xBPF, 3xBPF, usw.) vorhanden. Deren Anzahl und Schallleis-

tung steigt an, je näher die Propellerblattspitzengeschwindigkeit sich der Schallgeschwindigkeit nähert [106]. Für die Höherharmonischen erwartet man, dass diese in einem größeren Bereich auch hinter der Propellerebene die Rumpfstruktur anregen. Aufgrund der stets vorhandenen Unwucht der Propeller werden weitere tonale Anregungen über die Triebwerksaufhängungen übertragen.

Neben dem tonalen Spektrum gibt es ein breitbandiges Spektrum, welches von Wirbelablösungen an den Propellerblättern hervorgerufen wird. Dieses wird jedoch im Wesentlichen senkrecht zur Propellerebene abgestrahlt [106]. Weitere breitbandige Anregungen durch Grenzschichtlärm und Nebenaggregate bleiben unberücksichtigt.

Für das Modell wird daher angenommen, dass eine tonale Anregung der Rumpfstruktur hauptsächlich in der Propellerebene stattfindet. Die Propeller laufen auf der rechten und linken Flugzeugseite gegenläufig und sind synchronisiert. Es wird deshalb von einer phasengleichen Störschallfeldanregung P_{11} und P_{12} beiderseits des Rumpfes ausgegangen.

Durch die vibro-akustische Kopplung der Rumpfstruktur mit dem Luftvolumen der Flugzeugkabine erfolgt die Anregung eines tonalen Schallfeldes im Laderaum. Das Schallfeld im Lademeisterbereich wird wiederum über die gemeinsame Kopplungsfläche S_{12} angeregt. Im Reiseflug wird das Schallfeld bezüglich Frequenz und räumlicher Verteilung näherungsweise als konstant angenommen. Die Dissipation des Schalls erfolgt durch Absorption an den Wänden, die Fluid-Reibung ist vernachlässigbar klein. Der akustische Leistungseintrag des ANC-Systems wird mit P_2 bezeichnet.

In den Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 wird dieses vereinfachte Modell eingesetzt, um Folgerungen für einen Versuchsaufbau zu treffen.

5.1.2 Schallenergiefluss durch die Kopplungsfläche

Zunächst interessiert der Schallenergiefluss im System. Für diese Analyse werden die Volumina und die Absorptionsflächen des Modells aus Abschnitt 5.1.1 benötigt.

Die akustische Leistungsbilanz für den Laderaum (Index 1) und dem Lademeisterbereich (Index 2) lautet [107]:

$$\begin{aligned} P_1 - \frac{c_\mathrm{s}}{4} A_{10} E_1 - \frac{c_\mathrm{s}}{4} S_{12} E_1 + \frac{c_\mathrm{s}}{4} S_{12} E_2 &= 0 \\ P_2 - \frac{c_\mathrm{s}}{4} A_{20} E_2 + \frac{c_\mathrm{s}}{4} S_{12} E_1 - \frac{c_\mathrm{s}}{4} S_{12} E_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die Leistungsgrößen $P_1 = P_{11} + P_{12}$ und P_2 stehen für die Störschall- und Sekundärfeldanregung. Die zum Schalldruckquadrat p^2 proportionalen Größen E_1 und E_2 repräsentieren die akustischen Energiedichten im Laderaum bzw. im Lademeisterbereich. Alle absorbierenden Flächen des Laderaums und des Lademeisterbereiches sind zu äquivalenten Absorptionsflächen A_{10} bzw. A_{20} zusammengefasst. Der Energieaustausch zwischen dem Laderaum und

dem Lademeisterbereich erfolgt über die Koppelfläche S_{12}. Die Schallgeschwindigkeit wird mit c_s angegeben. Mit den Abkürzungen $A_{11} = A_{10} + S_{12}$ und $A_{22} = A_{20} + S_{12}$ wird die Leistungsbilanz (5.1) umformuliert:

$$\begin{aligned} \frac{4}{c_s} P_1 - A_{11} E_1 + S_{12} E_2 &= 0 \\ \frac{4}{c_s} P_2 - A_{22} E_2 + S_{12} E_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Im Folgenden wird zwischen der Störschallfeldanregung und der Sekundärschallfeldanregung unterschieden.

5.1.2.1 Störschallfeldanregung

Die Anregung des Störschallfeldes erfolgt allein über den akustischen Leistungseintrag in der Propellerebene $(P_2 = 0)$. Damit erhält man aus (5.2) die Energiedichte im Laderaum:

$$E_1 = \frac{4}{c_s} \frac{P}{A_{10} + \dfrac{S_{12}}{A_{22}} A_{20}} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{A_{10} + k_1 A_{20}}. \tag{5.3}$$

Der Kopplungsfaktor $k_1 = S_{12} / A_{22}$ im Nenner reduziert den Beitrag der akustischen Absorptionsfläche A_{20} zur Energiedichte im Laderaum. Betrachtet man den Grenzwert des zweiten Summanden im Nenner, ergibt sich für einen ideal schallweichen Lademeisterbereich:

$$\lim_{A_{20} \to \infty} \frac{S_{12}}{A_{20} + S_{12}} A_{20} = S_{12}. \tag{5.4}$$

Für den ideal schallharten Lademeisterbereich liefert der Grenzwert des Kopplungsfaktors:

$$\lim_{A_{20} \to 0} \frac{S_{12}}{A_{20} + S_{12}} = 1. \tag{5.5}$$

Setzt man die Grenzwerte in (5.3) ein, ergeben sich die Energiedichten im Lademeisterbereich. Für den schallweichen Grenzfall E_1^{ss} ist diese

$$E_1^{ss} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{A_{10} + S_{12}} \tag{5.6}$$

und den schallharten Grenzfall E_1^{sh}

$$E_1^{sh} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{A_{10} + A_{20}}. \tag{5.7}$$

An (5.6) erkennt man, dass im schallweichen Grenzfall die Kopplungsfläche als voll absorbierende Fläche anzusehen ist. Der Koppelfaktor k_1 ist S_{12} / A_{20} und somit stets kleiner als Eins. Im schallharten Grenzfall ist der Koppelfaktor k_1 gleich Eins.

Die akustische Energiedichte im Lademeisterbereich kann gemäß (5.2) mit

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{S_{12}}{A_{22}} = k_1 \tag{5.8}$$

berechnet werden. Ist der Kopplungsfaktor nahe Eins, wird die akustische Energiedichte im Laderaum und im Lademeisterbereich gleich groß. Ist dagegen der Kopplungsfaktor klein, wird die akustische Energiedichte im Lademeisterbereich kleiner sein als im Laderaum.

5.1.2.2 Schallfeldanregung durch das aktive System

Im Falle einer Schallfelderregung über die Lautsprecher des ANC-Systems, werden die Energieeinträge $P_2 \neq 0$ und $P_1 = 0$ gesetzt. Die Energiedichte kann über das Gleichungssystem (5.2) berechnet werden:

$$E_2 = \frac{4}{c_s} \frac{P}{\frac{S_{12}}{A_{11}} A_{10} + A_{20}} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{k_2 A_{10} + A_{20}}. \tag{5.9}$$

Ähnlich dem Ergebnis aus (5.3) zeigt der Nenner den Beitrag der Absorptionsfläche A_{10} zur Energiedichte im Lademeisterbereich E_2. Der Beitrag reduziert sich abhängig vom Kopplungsfaktor $k_2 = S_{12}/A_{11}$. Die Grenzwertbetrachtung für einen ideal schallweichen Laderaum liefert

$$E_2^{ss} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{S_{12} + A_{20}} \tag{5.10}$$

und für einen ideal schallharten Laderaum

$$E_2^{sh} = \frac{4}{c_s} \frac{P}{A_{10} + A_{20}}. \tag{5.11}$$

Der Kopplungsfaktor k_2 ist bei einem schallweichen Laderaum gleich S_{12}/A_{10} und somit sehr klein. Für einen schallharten Laderaum ist der Kopplungsfaktor $k_2 = 1$.

Das Verhältnis der Energiedichten kann wie zuvor aus dem Gleichungssystem (5.2) ermittelt werden. Es ist

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{S_{12}}{A_{11}} = k_2. \tag{5.12}$$

Mit dieser Gleichung kann aus den Verhältnissen der Absorptionsflächen das Energiedichtenverhältnis abgeschätzt werden.

5.1.3 Modales Verhalten im Lademeisterbereich

Als nächstes werden die Schwingungsformen des Schallfeldes analysiert. Dazu wird das Schallfeld im Lademeisterbereich für niedrige Frequenzen wellentheoretisch beschrieben. Diese Beschreibung basiert auf der linearen Überlagerung mehrerer orthogonaler Schwingungsmoden und wird aus der akustischen Wellengleichung abgeleitet:

$$\frac{1}{c_s^2 \rho_0} \frac{\partial^2 p\left(x_1, x_2, x_3, t\right)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial p\left(x_1, x_2, x_3, t\right)}{\partial x_i} . \tag{5.13}$$

In der Wellengleichung ist p der akustische Schallwechseldruck und ρ_0 die Luftdichte. Die kartesischen Koordinaten sind mit x_i bezeichnet. Das Produkt $c_s^2 \rho_0$ spezifiziert das adiabatische Kompressionsmodul.

Die Wellengleichung (5.13) kann mit der Finiten-Element-Methode (FEM) diskretisiert werden. Man erhält eine Gleichung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}} = 0 \tag{5.14}$$

mit der Massenmatrix $\mathbf{M}$, der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und dem akustischen Wechseldruck

$$\hat{\mathbf{p}} = \left[\hat{p}_1, \quad \hat{p}_2, \quad \ldots, \quad \hat{p}_N\right] \tag{5.15}$$

an den N FE-Knoten. Für die numerische Lösung der homogenen Differentialgleichung ist es sinnvoll, die Dimensionsfaktoren $\tilde{m}\left(\mathbf{M} = \tilde{m}\tilde{\mathbf{M}}\right)$ and $\tilde{k}\left(\mathbf{K} = \tilde{k}\tilde{\mathbf{K}}\right)$ sowie die dimensionslose Zeit $\tilde{t} = \omega_{\mathrm{R}} t$ mit $\omega_{\mathrm{R}}^2 = \tilde{k}/\tilde{m}$ einzuführen [108]. Dies führt auf die homogene Differentialgleichung:

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\hat{\hat{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} . \tag{5.16}$$

Die zweite Ableitung nach der dimensionslosen Zeit ist mit $\hat{}$ gekennzeichnet. Zur Modellierung von Dämpfungseffekten wird die homogene Differentialgleichung (5.16) mit der Dämpfungsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ erweitert:

$$\tilde{\mathbf{M}}\,\hat{\hat{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{B}}\,\dot{\hat{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} . \tag{5.17}$$

Für die innere Reibung im Fluid setzt man eine kleine steifigkeitsproportionale Dämpfung

$$\tilde{\mathbf{B}} = \alpha\tilde{\mathbf{K}} \tag{5.18}$$

an.

Die homogene Differentialgleichung (5.17) kann in folgender Weise zerlegt werden (Netzfreiheitsgrade im Laderaum: Index 1, Netzfreiheitsgrade im Lademeisterbereich: Index 2, Netzfreiheitsgrad in der Koppelfläche: Index c):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & 0 & \tilde{\mathbf{M}}_{1C} \\ 0 & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \tilde{\mathbf{M}}_{2C} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{1C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{M}}_{2C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{M}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}^{\circ\circ} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 & 0 & \tilde{\mathbf{B}}_{1C} \\ 0 & \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{B}}_{2C} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{1C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{B}}_{2C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}^{\circ} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_1 & 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{1C} \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_2 & \tilde{\mathbf{K}}_{2C} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{1C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{K}}_{2C}^{\mathrm{T}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_1 \\ \hat{\mathbf{p}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

Die Spaltenmatrix des Druckes $\hat{\mathbf{p}}$ ist so umsortiert, dass zunächst die Netzfreiheitsgrade der Laderaumsubstruktur $\hat{\mathbf{p}}_1$ und dann die Netzfreiheitsgrade des Lademeisterbereichs $\hat{\mathbf{p}}_2$ aufgeführt werden. Die Freiheitsgrade in der Kopplungsfläche $\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{C}}$ sind am Ende der Spaltenmatrix angefügt. Durch diese Sortierung zerfallen die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix in die entsprechenden Matrizen der Substrukturen. Setzt man die Koppelfreiheitsgrade $\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{C}}$ zu Null, kann die Differentialgleichung (5.19) in zwei Gleichungen für die Substrukturen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_1 \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_1 \dot{\hat{\mathbf{p}}}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_1 \hat{\mathbf{p}}_1 &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_2 \dot{\hat{\mathbf{p}}}_2 + \tilde{\mathbf{K}}_2 \hat{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Löst man die Eigenwertprobleme der gekoppelten Gesamtstruktur (5.19) und der beiden Substrukturen (5.20), erhält man die Modalmatrizen des gekoppelten Systems

$$\mathbf{\Phi} = \left[\hat{\mathbf{x}}_{01},\ \hat{\mathbf{x}}_{02},\ ...,\ \hat{\mathbf{x}}_{0N} \right] \quad (5.21)$$

und der Substrukturen

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_1 &= \left[\hat{\mathbf{x}}_{11},\ \hat{\mathbf{x}}_{12},\ ...,\ \hat{\mathbf{x}}_{1N} \right] \\ \mathbf{\Phi}_2 &= \left[\hat{\mathbf{x}}_{21},\ \hat{\mathbf{x}}_{22},\ ...,\ \hat{\mathbf{x}}_{2N} \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Spaltenmatrizen $\hat{\mathbf{x}}_i$, $\hat{\mathbf{x}}_{1i}$ und $\hat{\mathbf{x}}_{2i}$ sind die steifigkeitsnormierten reellen Eigenmoden. Folgt man der Nomenklatur von Craig [109], sind die Substrukturmoden $\hat{\mathbf{x}}_{1i}$ und $\hat{\mathbf{x}}_{2i}$ als *fixed-interface modes* zu bezeichnen. Diese entsprechen den Moden zweier separater Räume mit einem schallweichen Rand an der Kopplungsfläche S_{12}.

Die zugehörigen komplexen Eigenwerte $\left(\omega_i = \omega_R \tilde{\omega}_i \right)$ enthalten die gedämpften Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems

$$\left[\omega_{01},\ \omega_{02},\ ...,\ \omega_{0N} \right] \quad (5.23)$$

und der Substrukturen

$$\begin{aligned} &\left[\omega_{11},\ \omega_{12},\ ...,\ \omega_{1N} \right] \\ &\left[\omega_{21},\ \omega_{22},\ ...,\ \omega_{2N} \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Zur Analyse des modalen Verhaltens im kleinen Lademeisterbereich wird das in Abb. 5-1 dargestellte 2D-Modell herangezogen. Aussagen über die Eigenfrequenzen und Moden der realen Flugzeugkabine können mit diesem Modell jedoch nicht getroffen werden.

Zu diesem Zweck wird das in Abb. 5-1 dargestellte Modell mit der Finite-Element-Software COMSOL Multiphysics® diskretisiert. Insgesamt werden 1793 lineare Lagrange-Elemente verwendet, wobei 43 Elemente auf den Lademeisterbereich entfallen. Bis zu einer Frequenz von 300 Hz werden damit mindesten fünf Netzknoten pro Wellenlänge verwendet. Mit der Exportfunktion von COMSOL Multiphysics® wird die Massenmatrix $\mathbf{M}$ und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ exportiert und anschließend in MATLAB® importiert. Der Dämpfungsparameter α wird auf 2% gesetzt. Mit den Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{K}$ sowie (5.19) bis (5.24) werden abschließend die Eigenmoden und Eigenfrequenzen berechnet.

Im Liniendiagramm in der Mitte der Abb. 5-2 sind die Eigenfrequenzen bis 300 Hz der Substruktur des Lademeisterbereichs und des gekoppelten Systems visualisiert. Wie erwartet steigt die Anzahl der Eigenfrequenzen mit der Größe des Raumes. Die Substruktur des kleinen Lademeisterbereichs hat bis 300 Hz gerade sechs Eigenfrequenzen; das gekoppelte Gesamtsystem hat bereits 242 Eigenfrequenzen.

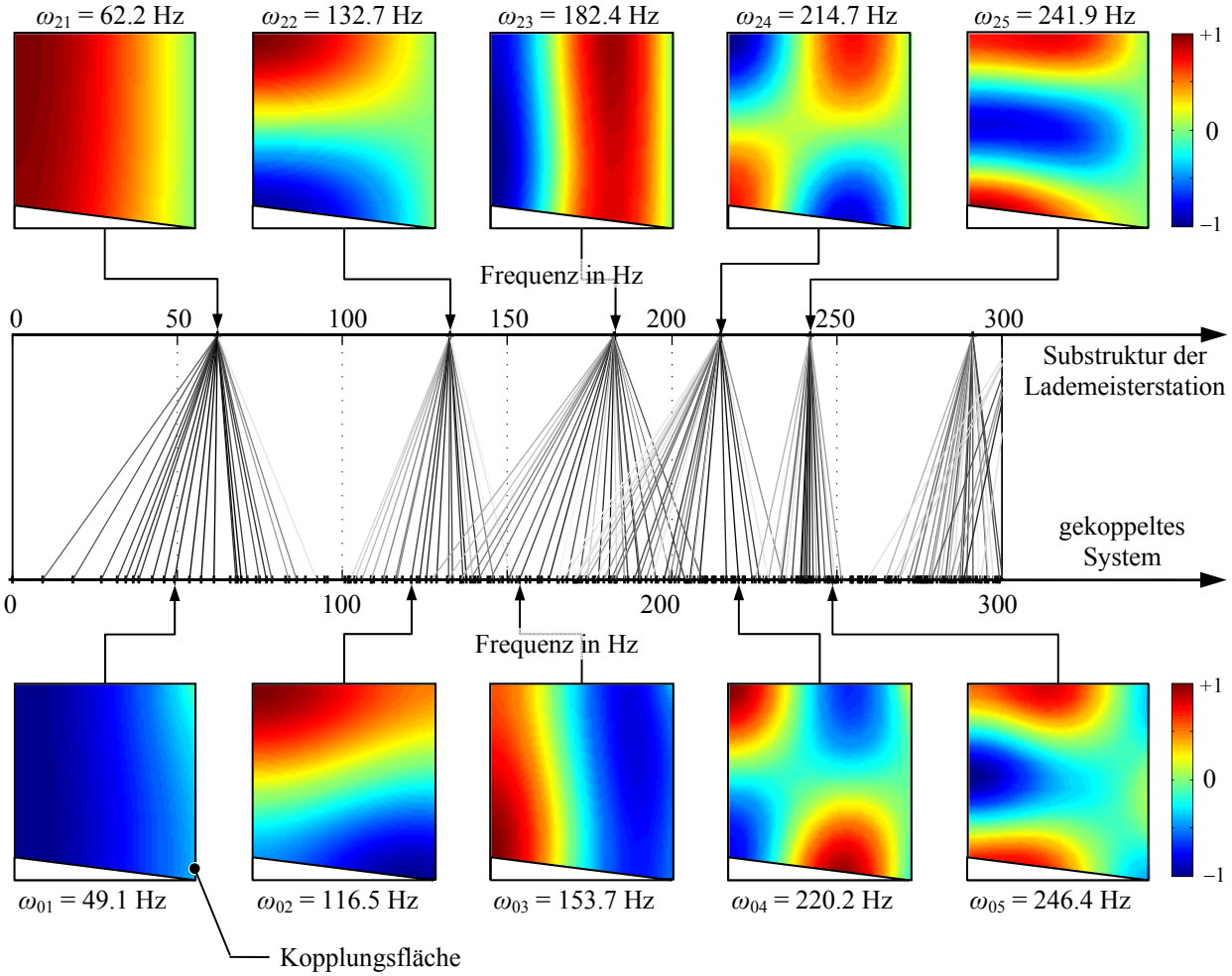


Abb. 5-2: Schallwechseldruckmoden des vereinfachten Modells; Substruktur des Lademeisterbereichs (oben); gekoppeltes Gesamtsystem (unten); Zuordnung über MAC-Werte (Mitte).

Die Mode-Formen der Substruktur und des gekoppelten Systems werden mit dem *modal assurance criterion* (MAC) verglichen. In der Mitte der Abb. 5-2 sind die Eigenfrequenzen mit MAC-Werten größer als 0.75 mit Linien verbunden. Die Graustufe der Linien variiert entsprechend dem zugehörigen MAC-Wert (MAC = 0.75 – weiße Linie; MAC = 1.0 – schwarze Linie). Die Grafik zeigt, dass die lokalen Formen der Moden für das gekoppelte Modell und der Substruktur ähnlich sind. Die Ähnlichkeit folgt dabei einem klaren Muster, wobei die Form der Substruktureigenmoden jeweils lokal im gekoppelten Gesamtmodell wieder gefunden werden kann. Die Kopplung der Längsmoden (z.B. ω_{23}) ist stärker als die Kopplung der Quermoden (z.B. ω_{25}).

Für einen visuellen Vergleich der Mode-Formen ist eine Auswahl der lokalen Moden in Abb. 5-2 dargestellt. Zur Interpolation werden die berechneten Eigenvektoren und die in MATLAB verfügbare *griddata*-Funktion eingesetzt. Vergleicht man die Mode-Formen, findet man eine sehr hohe Korrelation zwischen den Moden des gekoppelten und des ungekoppelten Systems vor. Nur an der Kopplungsfläche treten kleine Unterschiede auf. Dies ist auf die Verwendung der *fixed-interface modes* zurückzuführen.

5.1.4 Folgerungen

Aus den obigen Analysen lassen sich grundlegende Anforderungen und Grenzen eines Versuchsaufbaus folgern. Für die A400M wird angenommen, dass ein offenes Lining im Laderaum und ein schallhartes Lining im Lademeisterbereich montiert wird. Der Lademeisterbereich kann als schallhart im Vergleich zum Laderaum betrachtet werden. Für die äquivalenten Absorptionsflächen gilt $A_{10} \gg A_{20}$ sowie $S_{12} > A_{20}$. Für die Volumen und Flächen gelten die Angaben entsprechend Abb. 5-1.

Für die Störschallfeldanregung ist der Kopplungsfaktor $k_1 = S_{12}/A_{22}$ etwas kleiner als Eins; die Energiedichten im Laderaum und des Lademeisterbereichs werden sich bei Störschallanregung ähneln. Es ist zu erwarten, dass hohe Schallpegel im Laderaum ebenso hohe Schallpegel im Lademeisterbereich verursachen; der Impedanzsprung an der Kopplungsfläche S_{12} hat einen geringen Einfluss. Dieser Fakt motiviert die Installation eines ANC-Systems.

Aus Sicht der ANC-Lautsprecheranregung kann die Kopplungsfläche S_{12} als voll absorbierende Fläche angesehen werden. Der Kopplungsfaktor $k_2 = S_{12}/A_{11}$ ist klein; eine starke Rückwirkung in den Laderaum ist nicht zu erwarten. Trotz der schallharten Oberflächen ist der Lademeisterbereich ein stark bedämpftes Luftvolumen. Dies hat zwei entscheidende Konsequenzen. Erstens werden die Übertragungsfunktionen zwischen den ANC-Lautsprechern und Fehlermikrofonen weniger stark ausgeprägte Resonanzüberhöhungen aufzeigen als in einem schallharten Raum. Änderungen der Umgebungsbedingungen werden sich daher weniger stark auf die Übertragungsfunktionen auswirken. Zweitens erscheint der Einsatz leistungsfähiger Lautsprecher sinnvoll, da nicht nur signifikante Raumresonanzen bedämpft werden müssen.

Die Analyse des modalen Verhaltens eines solchen gekoppelten Systems offenbart, dass vergleichbar wenige verschiedene lokale Mode-Formen im Lademeisterbereich auftreten. Die Modendichte wird der des gekoppelten Systems entsprechen. Die lokale Mode-Form wird im Wesentlichen durch die Geometrie des Lademeisterbereichs bestimmt. Die Form des Laderaumes, wird nur einen begrenzten Einfluss auf das lokale Verhalten im Lademeisterbereich haben.

5.2 Versuchsanordnung für die experimentelle Umsetzung

In diesem Abschnitt wird die Versuchsumgebung skizziert. Zunächst wird auf die Nachbildung der raumakustischen Situation im Flugzeug eingegangen. Dann werden die elektroakustischen Komponenten des ANC-Systems sowie weitere zum Versuchsstand gehörende Komponenten aufgeführt. Im Abschnitt 5.2.3 wird der auf einer rapid-prototyping Hardware realisierte Regler beschrieben.

5.2.1 Nachbildung der Raumakustik

Aufgrund der Folgerungen des Abschnittes 5.1 kann die Raumakustik der Flugzeugkabine mit einem Versuchsaufbau nachgebildet werden; Flugtests sind zunächst nicht notwendig. Der Versuchsaufbau muss die Akustik im Lademeisterbereich möglichst gut wiedergeben. Der Laderaum ist weniger relevant. Daher werden die geometrischen Verhältnisse im Lademeisterbereich entsprechend der kleinsten Wellenlänge mit einem Mock-up wiedergegeben. Abb. 5-3 zeigt dieses Mock-up.

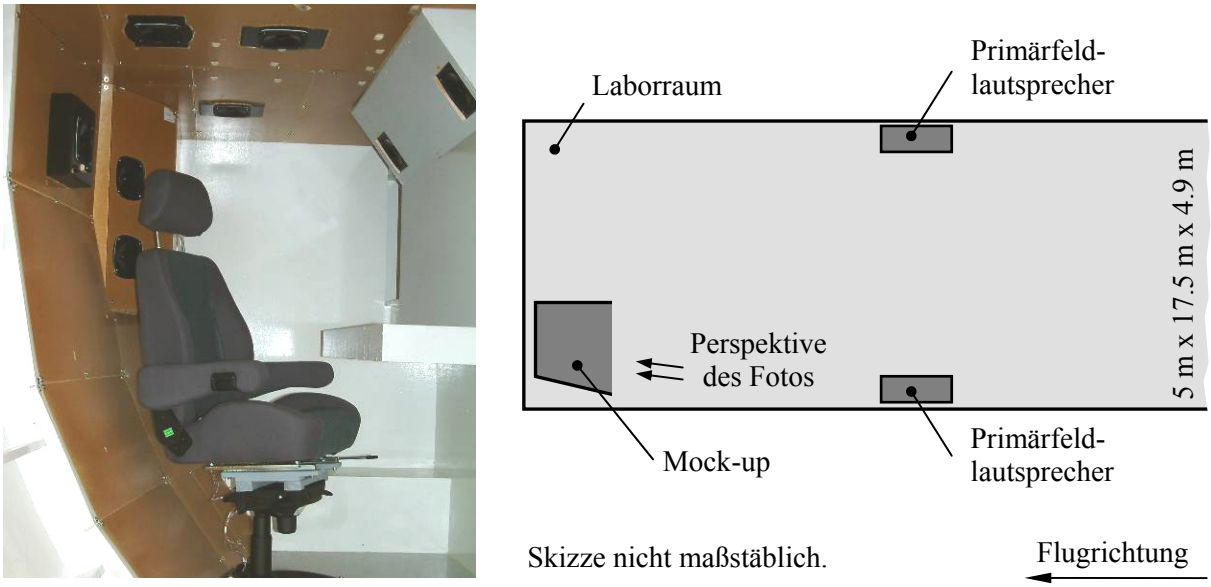


Abb. 5-3: Im Laborraum aufgestelltes Mock-up des Lademeisterbereichs.

Das Mock-up wird aus den originalen Konstruktionsdaten des Airbus A400M CAD-Modell konstruiert. Da das Luftvolumen im Lademeisterbereich über die Koppelfläche angeregt

wird, erfolgt die Fertigung aus Holz. Eine teuere vibro-akustische Nachbildung ist nicht notwendig. Die akustischen Randbedingungen im Lademeisterbereich werden über luftfahrttypische Lining-Paneele modelliert. Für den Laderaum muss im Wesentlichen die Modendichte nachgestellt werden. Daher wird das Mock-up in einem Labor mit vergleichbaren Dimensionen aufgestellt. Die Störschallfeldanregung der Propeller wird durch Lautsprecher simuliert. Diese werden in der Propellerebene im Abstand von 6m auf beiden Seiten des Labors aufgestellt.

5.2.2 Elektro-akustische Komponenten

Abb. 5-4 stellt die Versuchsanordnung der elektro-akustischen Komponenten im Überblick dar. Im Versuchsstand erfolgt eine strikte Trennung zwischen den zum ANC-System gehörenden und den für den Betrieb des Versuchsstandes notwendigen Komponenten. Die Steuerung des Versuchstandes und die Verarbeitung der Messdaten erfolgt zentral an einem Prüfstandrechner. Aufwendige Experimente werden skriptbasiert mit Matlab® automatisiert. Abb. 5-4 zeigt die Versuchsanordnung für den Reglerbetrieb. Bei der Identifikation der Übertragungsstrecken und beim Messen des Regelerfolgs wird wahlweise ein B&K-Frontend zu geschaltet.

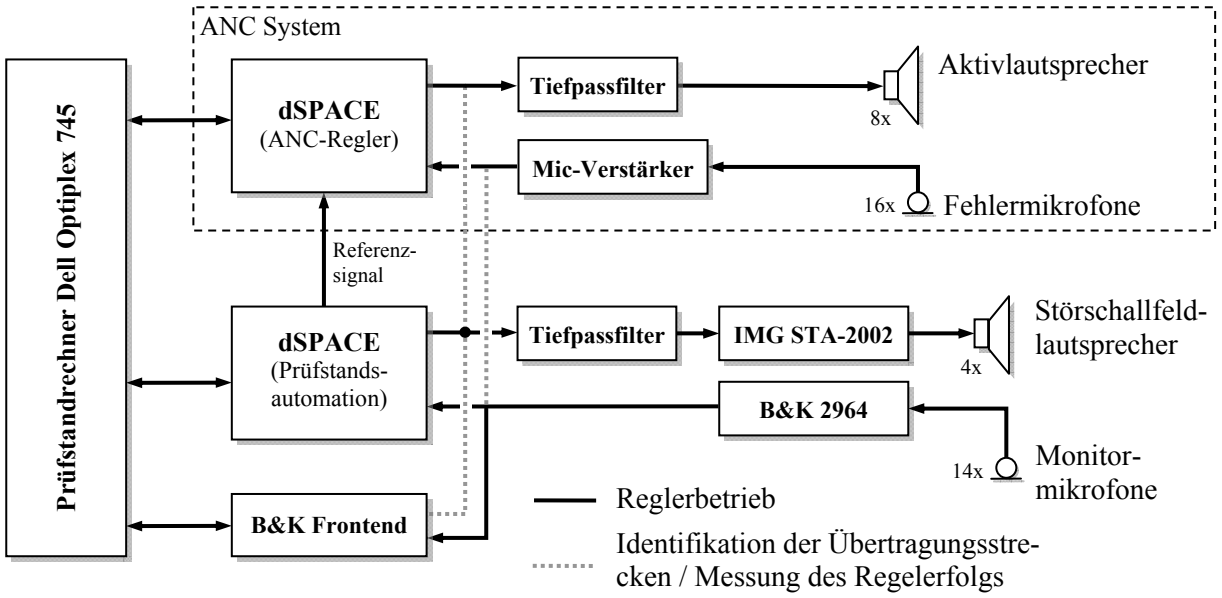


Abb. 5-4: Versuchsanordnung im Überblick

5.2.2.1 ANC-System

Das ANC-System besteht aus 8 Aktiv-Lautsprechern und 16 Fehlermikrofonen. Diese Komponenten sind luftfahrttypisch, ein ähnliches System ist in [69] beschrieben. In den Leichtbau-Lautsprechergehäusen ist jeweils ein Leistungsverstärker mit Signalkonditionierung eingebaut, die elektrische Versorgung erfolgt über 28 V Gleichspannung. Die Lautsprecher sind an der Kabinenwand bzw. Decke des Mock-up montiert, siehe Abb. 5-3. Die Mikrofonkapseln sind in einem Plastikgehäuse integriert und ebenfalls mit elektrischer Span-

nungsversorgung und Signalkonditionierung ausgestattet. Die Mikrofone sind von hinten mit den Lining-Paneelen verklebt. Durch Bohrungen im Lining sind sie mit dem Luftvolumen der Kabine verbunden. Die Platzierung im Mock-up ist im Anhang in Abb. A.1 angezeigt.

Die Reglersoftware, siehe Abschnitt 5.2.3, ist auf einem dSPACE 1103 implementiert. Das dSPACE 1103 verfügt über einen PowerPC Prozessor PPC-750GX mit 1 GHz Taktrate. Als lokaler Programmspeicher stehen 32 MB zur Verfügung. Die Steuerung des dSPACE 1103 erfolgt über den Prüfstandrechner.

5.2.2.2 Störschallfeldanregung

Wie im Abschnitt 5.2.1 angedeutet, wird das Störschallfeld durch vier PA-Lautsprecher angeregt. Jeweils ein PSUB-515 Tieftöner und ein Mittenfrequenzlautsprecher PAB-515 von IMG State Line sind zu einer Gruppe zusammengefasst. Angesteuert werden die Lautsprecher mit der ersten bis dritten Harmonischen (1xBPF, 2xBPF, 3xBPF, vgl. Tab. 5-1) durch einen IMG STA-2002 Leistungsverstärker. Die Eingangssignale des Leistungsverstärker werden wiederum durch einen KEMO-BF8 Tiefpassfilter (f<800 Hz) gefiltert. Die Generierung des Störschallsignals erfolgt durch ein weiteres dSPACE 1103. Dies stellt gleichzeitig das Referenzsignal für den ANC-Regler zur Verfügung. Das Referenzsignal beinhaltet nur die auf die Amplitude Eins normierte Grundharmonische.

5.2.2.3 Monitormikrofone

Für die Messung der Schallpegelreduktion im Zielbereich der Regelung sind 14 Mikrofone in einem quaderförmigen Monitorvolumen (30 x 28 x 20 cm) arrangiert, siehe Abb. A.2 im Anhang. Davon sind 12 B&K 4188 Mikrofone an den Ecken und ausgewählten Quaderflächenmittelpunkten platziert. Zusätzlich werden zwei Ohrmikrofone eines Kunstkopfes (HeadAcoustics HMS.II) verwendet. Der geringe Abstand zwischen den Mikrofonen erlaubt es, den lokalen räumlichen mittleren Schalldruckpegel gemäß DIN 45641 zu berechnen [98]. Die Mikrofonsignale werden durch ein dSPACE 1103 und/oder durch ein B&K LAN-XI Frontend verarbeitet.

5.2.3 Implementierung des Reglers

Der in Kapitel 3.1 vorgestellte Regler wird als Echtzeitanwendung auf der rapid-prototyping Hardware dSPACE DS1103 realisiert. Die Steuerung des Reglers erfolgt mit der Software ControlDesk. Die Grundharmonische (1xBPF) und die beiden ersten Höherharmonischen (2xBPF und 3xBPF) werden separat geregelt.

Der prinzipielle Aufbau des Reglers ist innerhalb des grauen Kastens in Abb. 5-5 dargestellt. Als Eingangssignale werden dem Regler die Zeitsignale des Referenzsignals $x(t)$ und die Fehlersignale $\mathbf{e}(t)$ zugeführt. Die Fehlersignale werden mittels Fast-Fourier-Transformation (FFT) in den Frequenzbereich transformiert. Zu jedem diskreten Zeitschritt

n werden mit Hilfe des Referenzsignals aus dem Fehlersignalspektren die zu 1xBPF $(i=1)$, 2xBPF $(i=2)$ und 3xBPF $(i=3)$ gehörenden komplexen Werte entnommen. Anschließend werden diese zu Spaltenmatrizen $\mathbf{e}_i(n)$ zusammengefasst:

$$\mathbf{e}_i(n)=\left[e_i^1(n),\ \ ...,\ \ e_i^k(n),\ \ ...,\ \ e_i^{N_\mathrm{E}}(n)\right]^\mathrm{T}. \tag{5.25}$$

In den Controllern $\mathbf{C}_i$ werden die Spaltenmatrizen der Lautsprecheransteuerung $\mathbf{u}_i(n)$ entsprechend der Minimierung der Reglerkostenfunktion $J_{i\mathrm{R}}$, vgl. (3.1),

$$J_{i\mathrm{R}}=\mathbf{e}_i^\mathrm{H}\mathbf{Q}_i\mathbf{e}_i+\mathbf{u}_i^\mathrm{H}\mathbf{R}_i\mathbf{u}_i \tag{5.26}$$

berechnet. Die Berechung erfolgt über die Iterationsgleichung

$$\mathbf{u}_i(n+1)=\left[\mathbf{I}-2\mu_i\mathbf{R}_i\right]\mathbf{u}_i(n)-2\mu_i\hat{\mathbf{G}}_i^\mathrm{H}\mathbf{Q}_i\mathbf{e}_i(n). \tag{5.27}$$

In der Iterationsgleichung werden für jede Frequenz verschiedene Schrittweiten μ_i, Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_i$ und $\mathbf{R}_i$ sowie Sekundärstreckenmodelle $\hat{\mathbf{G}}_i$ verwendet. Diese Daten werden im Regler abgespeichert und abhängig von der Referenzsignalfrequenz umkopiert. Die Schrittweiten μ_i sind entsprechend der maximalen Schrittweite aus Abschnitt 3.2.1 bzw. 3.3.1 gewählt und mit einem Sicherheitsfaktor $SF=25\%$ versehen.

Die komplexen Spaltenmatrizen der Lautsprecheransteuerungen $\mathbf{u}_i(n)$ werden über eine inverse Fast-Fourier-Transformation (iFFT) zurück transformiert und zu je einem Zeitsignal für jeden Lautsprecher zusammengefasst. Die zugehörige Frequenz wird aus dem Referenzsignal $x(t)$ bestimmt.

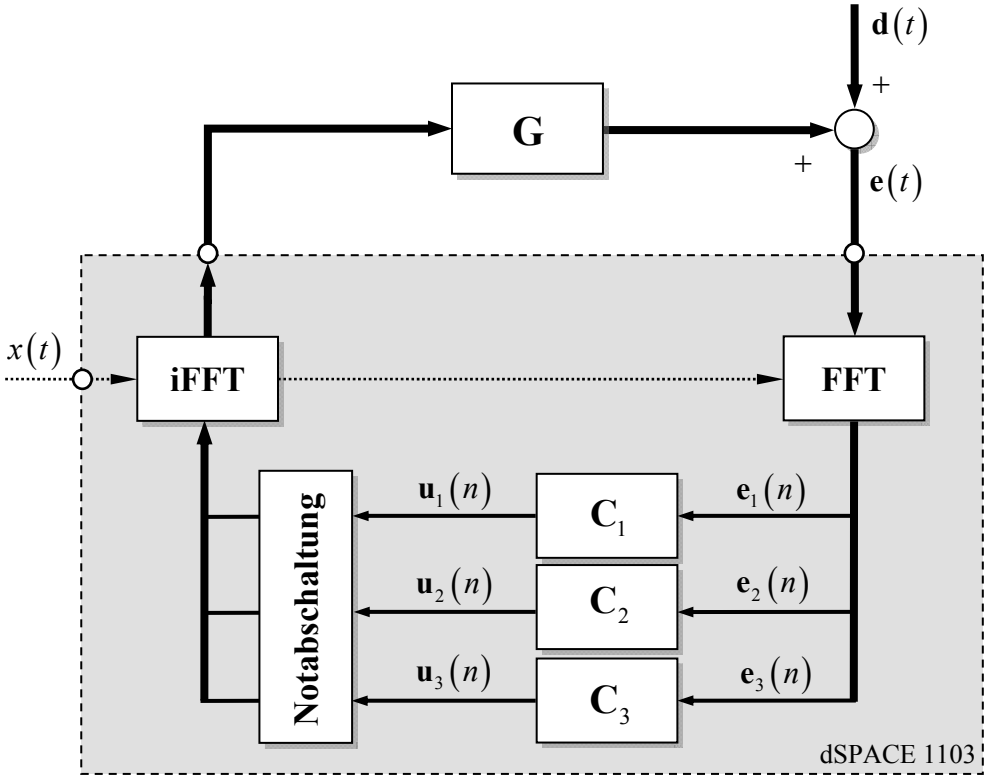


Abb. 5-5: Aufbau des auf dem dSPACE 1103 implementierten Reglers.

Eine Notabschaltung gewährleistet den sicheren Betrieb des Versuchsaufbaus. Dieser schaltet im Falle von Bedienfehlern oder Instabilitäten den Regler ab. Sie prüft dazu nach jedem Iterationsschritt, ob die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung überschritten wird. Alternativ kann auch ein Limiter zugeschaltet werden, der einen Betrieb an der maximal zulässigen Lautsprecheransteuerung zulässt [110, 111].

Die Echtzeitanwendung wird auf dem dSPACE 1103 mit einer Abtastfrequenz von 4096 Hz ausgeführt. Die Update-Rate f_{update} der Lautsprecheransteuerung hängt von den Einstellungen der FFT ab. Im Experiment wird ein Hamming-Fenster mit 2048 Koeffizienten und eine ¾ Überlappung eingesetzt. Daraus resultiert eine Update-Rate f_{update} von 8 Hz, welche für sich langsam ändernde Versuchsbedingungen ausreicht. Die Echtzeitanwendung lastet den Prozessor des verwendeten dSPACE1103 zu etwa 27% aus, der Speicherbedarf umfasst etwa 1.5 MB.

5.3 Ermittlung der Unsicherheit

Zu Beginn dieses Kapitels wird gefordert, den Regler robust bezüglich Störungen durch Personen und Ausrüstungsgegenständen zu entwerfen. Die Messung dieser Unsicherheiten wird im Folgenden beschrieben. Aus den Messdaten wird im Anschluss ein Unsicherheitsmodell abgeleitet.

5.3.1 Messung der Übertragungsfunktionen und des Störschallfelds

Die Unsicherheiten ermittelt man durch mehrfaches Messen der Übertragungsfunktionen und Störschallfelder im Mock-up. Es werden die 8 ANC-Lautsprecher, die 16 Fehlermikrofone, die 14 Monitormikrofone sowie die Lautsprecher für die Störschallfeldanregung verwendet. Die Lautsprecher werden mit bandbegrenztem weißen Rauschen angesteuert. Anschließend werden aus den Übertragungsfunktionen die komplexen Übertragungszahlen der sechs Lastfallfrequenzen (I.1, II.1, I.2, II.2, I.3, II.3) extrahiert.

In der ersten Messreihe gilt es, die Schwankungen der Übertragungsfunktion im klimatisierten Laborraum ohne bewussten Störeinfluss zu ermitteln. Aus dieser Messreihe werden die nominellen Übertragungsfunktionen und das nominelle Störschallfeld ermittelt. Die zweite Messreihe zielt auf das bewusste Einbringen einer Störung in die Übertragungsfunktionen ab. Hierzu werden die Störungen, welche durch Ausrüstungsgegenstände bzw. Personen im Lademeisterbereich verursacht werden, durch diffus reflektierende Störkörper simuliert.

5.3.1.1 Nominelle Messreihe

Für die nominelle Messreihe werden insgesamt 34 Messdurchläufe innerhalb einer Woche durchgeführt. Durch Mittelwertbildung werden die nominellen Übertragungsmatrizen $\mathbf{G}_0$ und $\mathbf{G}_{\text{M0}}$ sowie die nominellen Störschallfelder $\mathbf{d}_0$ und $\mathbf{d}_{\text{M0}}$ bestimmt. Anschließend werden die Unsicherheiten $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\text{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}$ aus den Messdaten entsprechend den Gleichungen des Abschnitt 2.3 berechnet.

Abb. 5-6 zeigt die gemessenen Unsicherheitsnormen der Singulärwertstörungsmatrizen $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$ sowie der Störschallfelder $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ als Kistendiagramm über der Frequenz aufgetragen. In jedem Diagramm ist der Medianwert der Norm als roter Balken dargestellt, das obere und untere Quartil wird durch die blaue Box gekennzeichnet. Normen die weiter als das 2.5fache der Standardabweichung vom Mittelwert abweichen, sind als Ausreißer markiert (rotes Kreuz – Frequenz I.2).

Die Messabweichungen sind im Allgemeinen kleiner als 10%, über der Frequenz sind sie relativ konstant. Davon abweichend sind die Unsicherheitsnormen des Störschallfeldes bei der Frequenz II.2. Dies ist zurückzuführen auf die schwache Anregung des Störschallfeldes bei dieser Frequenz. Im Versuchsaufbau verteilen sich die Messfehler in etwa zu gleichen Teilen auf die elektroakustischen Komponenten und die akustische Übertragungsstrecke. Es treten systematische Messabweichung zwischen mehreren Messtagen auf, vgl. [112].

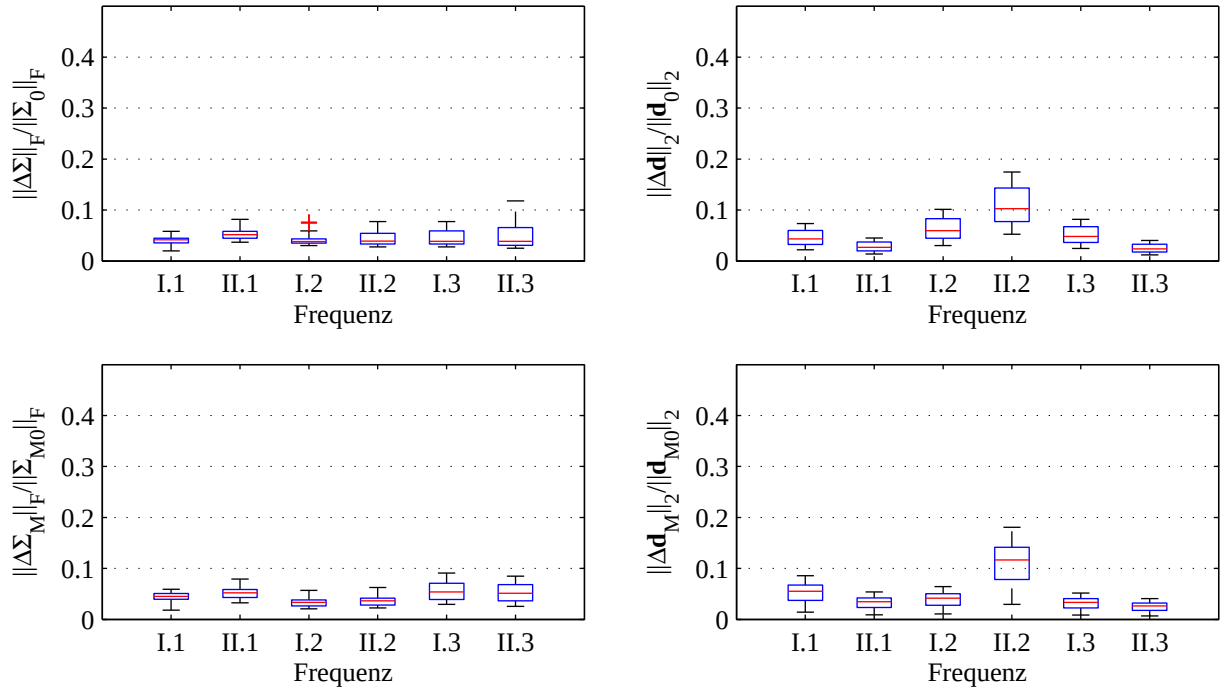


Abb. 5-6: Kistendiagramme der gemessenen Unsicherheitsnormen aufgrund der Schwankungen in der nominellen Messreihe.

5.3.1.2 Messreihe mit bewusst eingebrachten Störungen

Um die Störungen durch Personen und Ausrüstungsgegenstände zu simulieren, werden im Lademeisterbereich verschiedene Störkörper aufgehängt, vgl. Abb. 5-7. Die Aufhängepunkte werden dabei möglichst so gewählt, dass große Störungen erzeugt werden. Die Störkörper I und II orientieren sich dabei an den Abmaßen eines Oberkörpers bzw. des Kopfes einer Person. Da die größte Störkörperabmessung kleiner als die Schallwellenlänge ist, sind vornehmlich Beugungseffekte zu beobachten [93, 106].

Für die Messungen der gestörten Übertragungsfunktionen und Störschallfelder werden bis zu drei Störkörper in 17 verschiedene Konfigurationen im Lademeisterbereich aufgehängt.

Die Messungen erfolgen innerhalb einer Woche und werden jeweils zweifach mit der gleichen Konfiguration wiederholt. Durch Mittelwertbildung zweier Messungen bei gleicher Konfiguration ergeben sich 17 gestörte Übertragungsfunktionen und Störschallfelder. Um den Effekt der Störkörper weitestgehend isoliert zu erfassen, werden die systematischen Messabweichungen zwischen mehreren Tagen korrigiert. Dazu werden die Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}$, $\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ mit zeitlich direkt anschließenden Messungen ohne Störkörper berechnet.

Abb. 5-7: Lademeisterbereich mit Störkörper (links); Abmaße der Störkörper I bis III (rechts).

Die gemessenen Normen der Unsicherheiten $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ sowie der Singulärwertstörungsmatrizen $\Delta\mathbf{\Sigma}$ und $\Delta\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{M}}$ sind in Abb. 5-8 über der Frequenz aufgetragen. Die Unsicherheitsnormen sind dabei deutlich größer als die der nominellen Messreihe.

Tendenziell nimmt mit steigender Frequenz der Medianwert der Unsicherheitsnorm zu. Im Mittel sind die Normen stets unter 15%. Abgesehen von wenigen Ausnahmen sind die Normen kleiner als 30%. Vor allem bei niedrigen Frequenzen ist die Schiefe der Verteilung groß. Dies resultiert daher, dass bei niedrigen Frequenzen der modale Charakter des Schallfeldes überwiegt; es dominieren einzelne Moden. Ein Umschlagen der dominanten Moden verändert das Schallfeld signifikant. Bei hohen Frequenzen überwiegt der diffuse Charakter des Schallfeldes, die Beeinflussung einzelner Moden ist weniger relevant.

Die drei Ausreißer bei Frequenz I.1 (92 Hz) sind auf Messungen zurückzuführen, in der alle Störkörper im hinteren Teil des Lademeisterbereichs aufgehängt sind. Dies liegt an der gu-

ten Einkopplung in die Raummoden. Würde man diese extremen Experimente ausschließen, wären die relativen Unsicherheitsnormen für $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ deutlich kleiner.

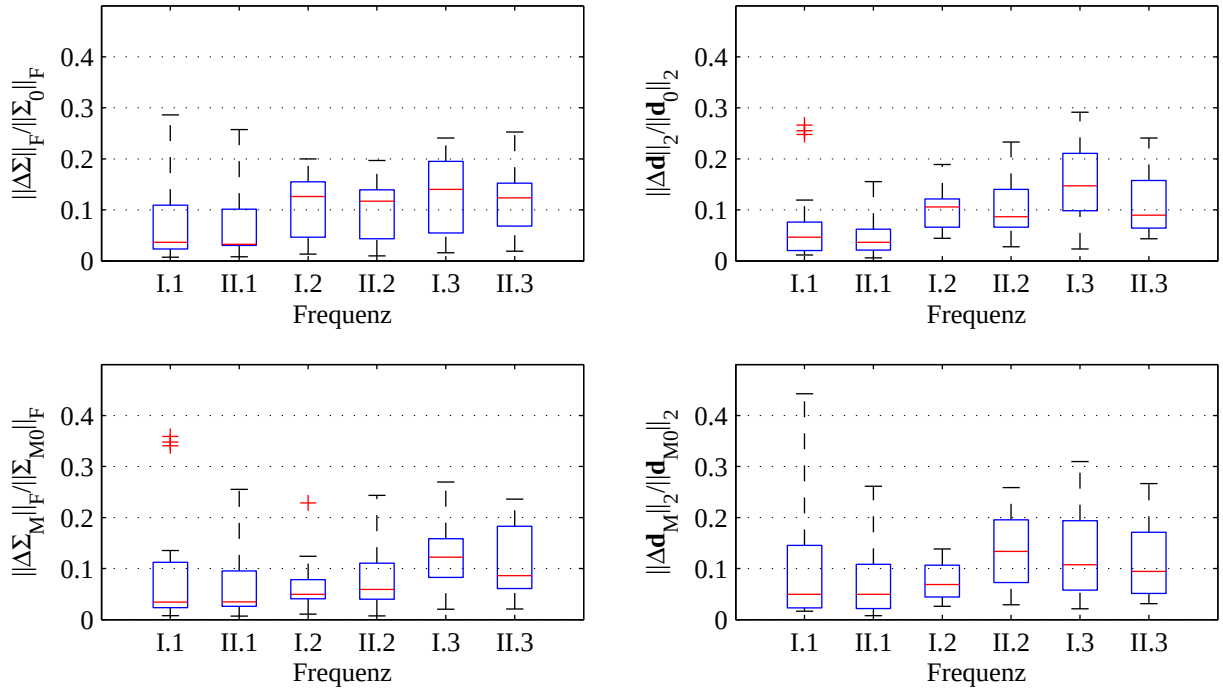


Abb. 5-8: Kistendiagramm der bezogenen Normen der aufgrund der Störkörper verursachte Unsicherheiten $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$.

5.3.2 Ableiten eines Unsicherheitsmodells aus den Messreihen

Die durchgeführten Messreihen liefern Stichproben zufälliger Prozesse. Aus ihnen sollen die für den Reglerentwurf benötigten Normen $\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}\|_{\mathrm{F}}$, $\|\Delta\mathbf{d}\|_2$, $\|\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{F}}$ und $\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\|_2$ sowie die Struktur der Singulärwertstörungsmatrizen $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$ ermittelt werden.

Eine Möglichkeit ist die Unsicherheit so anzugeben, dass sie *sicher* oder *konservativ* ist. Das heißt sie darf niemals in Richtung eines zu kleinen Wertes fehlerhaft sein. Die Messung des absolut schlechtesten Falls ist jedoch problematisch.

Alternativ kann ein Wert für die *realistische* Unsicherheit angegeben werden. Dies entspricht auch der Sichtweise der DIN V ENV 13005, dem Leitfaden zur Angabe von Unsicherheiten beim Messen [113]. Dort gilt es, die Balance zwischen einer zu geringen Unsicherheit (dies führt zu übermäßigen Vertrauen in die Messwerte) und einer absichtlich zu groß gewählten Unsicherheit (dies führt zum Verschenken von Leistungsreserven des ANC-Systems) zu finden.

Im Weiteren wird daher auf die Angabe einer *realistischen* Unsicherheit gesetzt. Sie soll im Mittel die additive Unsicherheit einer möglichst breiten statistischen Basis beschreiben. Im Hinblick auf das Reglerentwurfsverfahren ist dies möglich, da die robusten Regelstabilitäts- und -qualitätsmaße durch das wiederholte Anwenden der Dreiecksungleichung bereits konservativ sind. Als Maß für die Unsicherheit wird der robuste Median eingesetzt. In diesem

Fall liegen 50% aller gemessenen Unsicherheiten oberhalb und unterhalb dieses Wertes. Der bezogene Medianwert der Unsicherheit aufgrund der Störkörper ist in Tab. 5-2 gezeigt.

Tab. 5-2: Bezogener Medianwert der durch die Störkörper verursachten Unsicherheiten $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$.

	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3
$\lVert\Delta\boldsymbol{\Sigma}\rVert_{\mathrm{F}}/\lVert\boldsymbol{\Sigma}_0\rVert_{\mathrm{F}}$	0,037	0,033	0,126	0,117	0,140	0,124
$\lVert\Delta\mathbf{d}\rVert_2/\lVert\mathbf{d}_0\rVert_2$	0,047	0,036	0,106	0,087	0,147	0,089
$\lVert\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}\rVert_{\mathrm{F}}/\lVert\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M0}}\rVert_{\mathrm{F}}$	0,034	0,035	0,050	0,059	0,122	0,086
$\lVert\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\rVert_2/\lVert\mathbf{d}_{\mathrm{M0}}\rVert_2$	0,049	0,049	0,068	0,133	0,107	0,094

Aus Tab. 5-2 liest man ab, dass der Median der Unsicherheit stets kleiner als 15% ist. Im Vergleich zur Unsicherheit der nominellen Messreihe aus Abschnitt 5.3.1.1 ist sie deutlich größer, vgl. Tab. A-1 im Anhang. Dies bedeutet, dass die Berücksichtigung der Unsicherheiten aufgrund der Störkörper die Schwankung der nominellen Übertragungsstrecken einschließt. Es genügt im Weiteren die Betrachtung der größten Unsicherheit.

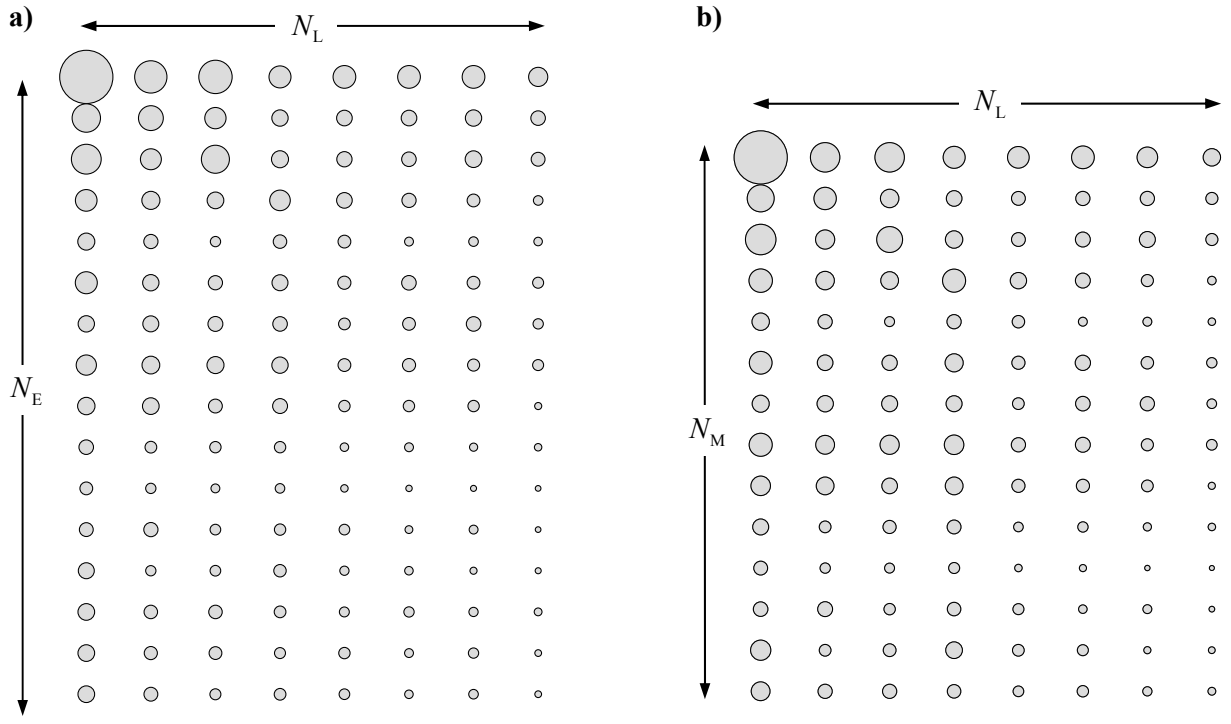


Abb. 5-9: Blasendiagramm der mittlere Matrixelementbeträge von a) $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und b) $\Delta\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{M}}$.

Die Struktur der Unsicherheit wird entsprechend Abschnitt 2.3.1 modelliert. Es wird für alle Frequenzen ein gemeinsames Strukturmodell $\Delta\mathbf{W}$ verwendet. Durch Betragsbildung aller gemessenen Singulärwertstörungsmatrizen $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ und Normierung auf das jeweils größte Matrixelement erhält man die gemessenen Strukturen. Mit diesen wird für jedes Matrixelement

der Mittelwert gebildet. Abb. 5-9a zeigt als Blasendiagramm die mittleren Beträge der Matrixelemente von $\Delta\mathbf{\Sigma}$. Sie sind in der linken oberen Ecke am größten und fallen zur rechten unteren Ecke ab. Für die Störung der nominellen Messreihe ergibt sich ein ähnliches Bild.

Diese Struktur wird gemäß (2.15) mit $\Delta\mathbf{W}$ approximiert. Die Matrixelemente $\Delta\hat{w}_{(i,j)}$ werden mit

$$\Delta\hat{w}_{(i,j)} = \sqrt{\frac{1}{i^2 + j^2}} \quad \text{für } i = 1...N_{\mathrm{E}},\ j = 1...N_{\mathrm{L}} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{W} = \frac{\Delta\hat{\mathbf{W}}}{\left\|\Delta\hat{\mathbf{W}}\right\|_{\mathrm{F}}} \tag{5.28}$$

festgelegt.

Abb. 5-9b zeigt die gemittelte Struktur für $\Delta\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{M}}$. Sie ist ähnlich zu $\Delta\mathbf{\Sigma}$. Es wird deshalb ein Strukturmodell $\Delta\mathbf{W}_{\mathrm{M}}$ gemäß (5.28) verwendet.

Eine Analyse der Störschallfelder $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ zeigte keine signifikante Struktur. Die Störungen verteilen sich gleich auf alle Mikrofone. Es werden daher für die Unsicherheit $\Delta\mathbf{d}$ mit (2.19) die Elemente in

$$\Delta\hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{w}_1 & \Delta\hat{w}_i & \Delta\hat{w}_{N_{\mathrm{E}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.29}$$

zu

$$\Delta w_i = 1 \quad \text{für alle } i = 1...N_{\mathrm{E}} \tag{5.30}$$

gesetzt. Man erhält die Struktur $\Delta\mathbf{w}$. Ein Strukturmodell für $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ wird nicht benötigt.

5.4 Überprüfen der Regelgütemaße des robusten Entwurfs

Die für die robuste Regelstabilität und -qualität in Abschnitt 3.3.1 und Abschnitt 3.3.2 hergeleiteten Regelgütemaße werden anhand von Monte-Carlo-Simulationen überprüft. Als Datenbasis dienen die in Abschnitt 5.3 ermittelten komplexen Übertragungsmatrizen beider Lastfälle. Im Abschnitt 5.4.1 wird die Monte-Carlo-Simulation allgemein erklärt. Die Visualisierung der Ergebnisse erfolgt getrennt für die beiden Gewichtungsvarianten in den Abschnitten 5.4.2 bis 5.4.4.

5.4.1 Validierung mittels Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulationen werden 100mal mit zufällig generierten Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ durchgeführt. Damit ist es möglich, zunächst Aussagen für beliebige Gewichtungsmatrizen zu treffen. Es wird einzeln der Einfluss der gemessenen Medianwerte der Unsicherheiten $\left\|\Delta\mathbf{G}\right\|_{\mathrm{F}}$, $\left\|\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}\right\|_{\mathrm{F}}$, $\left\|\Delta\mathbf{d}\right\|_2$ und $\left\|\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right\|_2$ untersucht. Abb. 5-10 zeigt den prinzipiellen Ablauf für eine von 100 Monte-Carlo-Simulation. Die Initialisierung der zufällig gewählten Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ erfolgt dabei so, dass nur nominell stabile Regler generiert werden $\left(\mathrm{Re}\left\{\lambda_{\min}\right\} \geq 0.05\right)$. Die Bedingung $\left\|\Delta\mathbf{G}\mathbf{C}_0\right\| < 1$, entsprechend Glei-

chung (3.89), wird erfüllt. Die maximale Ansteuerung ist auf sinnvolle Größen beschränkt $\left(u_{\text{zul}}^{\max} = 3\,\text{V}\right)$.

Anschließend werden die zufälligen Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}$, $\Delta\mathbf{G}_{\text{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}$ erzeugt. Dies wird nun am Beispiel der Unsicherheit $\Delta\mathbf{G}$ erläutert:

$$\Delta\mathbf{G} = \mathbf{U}\Delta\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\text{H}} \qquad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{\Sigma} = E\left(\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\text{F}}\right)\Delta\mathbf{W} \circ \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \left\|\mathbf{A}\right\|_{\text{F}} = 1. \tag{5.31}$$

Der Erwartungswert der Norm $E\left(\left\|\Delta\mathbf{\Sigma}\right\|_{\text{F}}\right)$ entspricht dem gemessenen Medianwert der Unsicherheit. Um die Schiefe der gemessenen Verteilung zu simulieren, wird eine Beta-Verteilung $\left(\alpha = 1.5, \beta = 3.0\right)$ angesetzt. Die Matrix $\Delta\mathbf{W}$ stimmt mit der festgelegten Struktur aus Abschnitt 5.3.2 überein. Die normierte Matrix $\mathbf{A}$ hat normalverteilte komplexe Elemente. Der Operator $\circ$ steht für die elementweise Multiplikation der Matrizen. Sinngemäß werden auch die Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}_{\text{M}}$, $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{d}_{\text{M}}$ erzeugt.

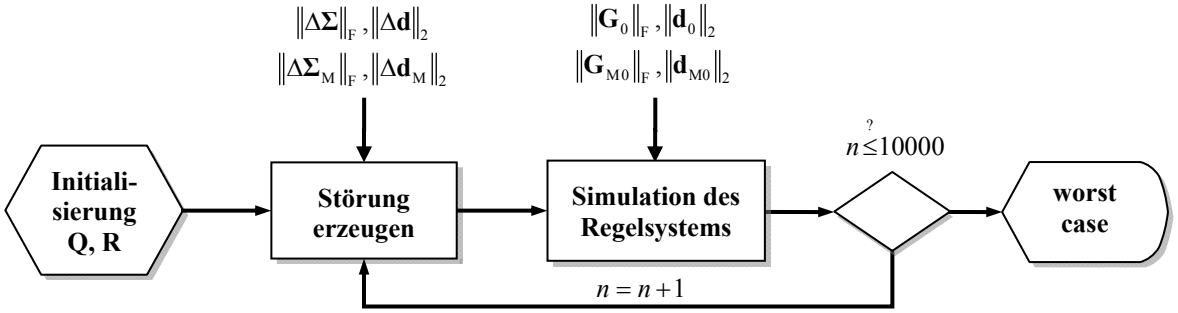


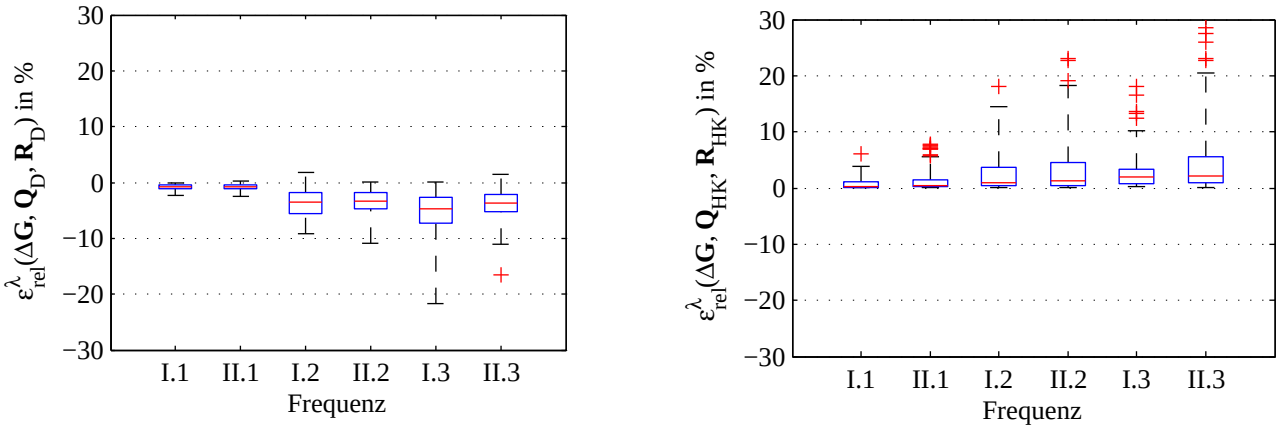
Abb. 5-10: Ablauf einer von hundert Monte-Carlo-Simulationen zur stochastischen Bestimmung der Stabilität, der Schallreduktion und der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall.

Mittels numerischer Simulation mit (2.7) bis (2.11) und (3.60) wird die Schalldruckreduktion an den Monitormikrofonen, die Stabilität und die maximale Lautsprecheransteuerung berechnet. Die Generierung der Unsicherheiten und die numerische Simulation wird 10000mal mit dem gleichen Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ wiederholt. Abschließend wird der kleinste Realteil aller Eigenwerte $\text{Re}\left\{\tilde{\lambda}_{\min}\right\}$, der größte verbleibende Schallpegel $\tilde{\tilde{L}}$ und die größte maximale Lautsprecheransteuerung $\tilde{u}_{\text{opt0}}^{\max}$ aller 10000 Versuche extrahiert. Dies ist eine stochastische Schätzung der ungünstigsten Fälle für die Regelstabilität und -qualität.

Die Ergebnisse werden mit den Regelgütemaßen (3.73), (3.95) und (3.109) verglichen. Für den Vergleich dient der relative Schätzfehler ε.

5.4.2 Gütemaß der robusten Regelstabilität

Zunächst wird mit der in Abschnitt 5.4.1 beschriebenen Methode die robuste Regelstabilität überprüft. Der relative Schätzfehler $\varepsilon_{\text{rel}}^{\lambda}\left(\mathbf{G}\Delta, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\right)$ ist in Abb. 5-11 als Kistendiagramm dargestellt. Bei einem Stichprobenumfang von 100 sind mit 99-prozentiger Sicherheit Werte, die mehr als das 3.5fache der Standardabweichung vom Mittelwert abweichen, als Ausreißer zu bezeichnen, vgl. [114]. Diese Ausreißer sind als rote Kreuze markiert.



$$\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{\lambda}\left(\mathbf{G}\Delta\right) = \frac{\mathrm{Re}\left\{\hat{\lambda}_{\min}\left(\mathbf{G}\Delta\right)\right\} - \mathrm{Re}\left\{\tilde{\lambda}_{\min}\right\}}{\left|\mathrm{Re}\left\{\tilde{\lambda}_{\min}\right\}\right|}$$

Abb. 5-11: Schätzfehler des kleinsten Eigenwertrealteils der Matrix $\left[\mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\mathbf{G}_0 + \mathbf{R} + \mathbf{G}_0^{\mathrm{H}}\mathbf{Q}\Delta\mathbf{G}\right]$; rechts – GPK; links – GHK.

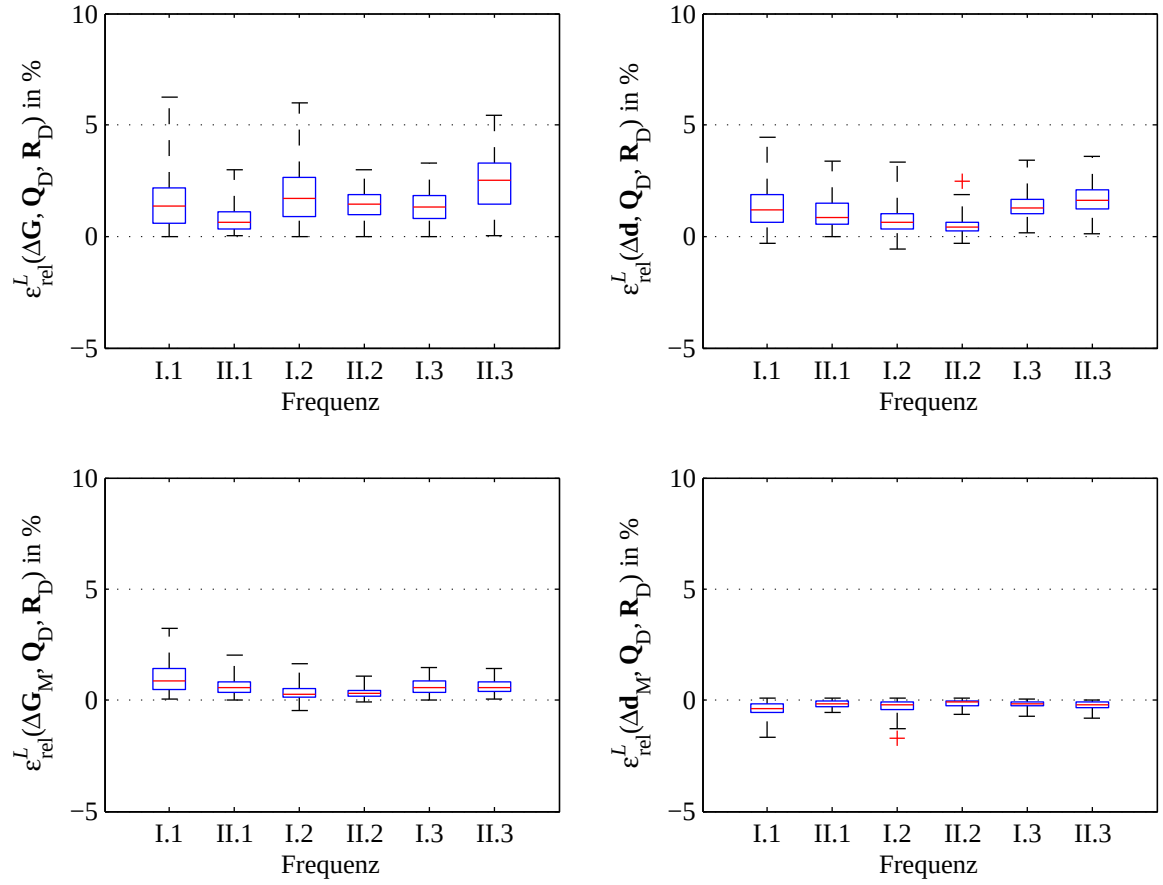
Im Mittel sind die Schätzfehler kleiner als 5%. Für die Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten liegt der überwiegende Anteil der relativen Fehler im Negativen und somit auf der konservativen Seite.

Bei Gewichtung in Regelhauptkoordinaten ist der Schätzfehler positiv. Er ist maximal 30% groß. Das Gütemaß überschätzt somit den Realteil des kleinsten Eigenwerts. Dies ist jedoch nicht kritisch, da instabile Regler nicht fälschlicherweise als stabil bewertet werden. Dies ist erst ab einem Schätzfehler größer 100% möglich.

5.4.3 Gütemaß der robusten Schallpegelreduktion

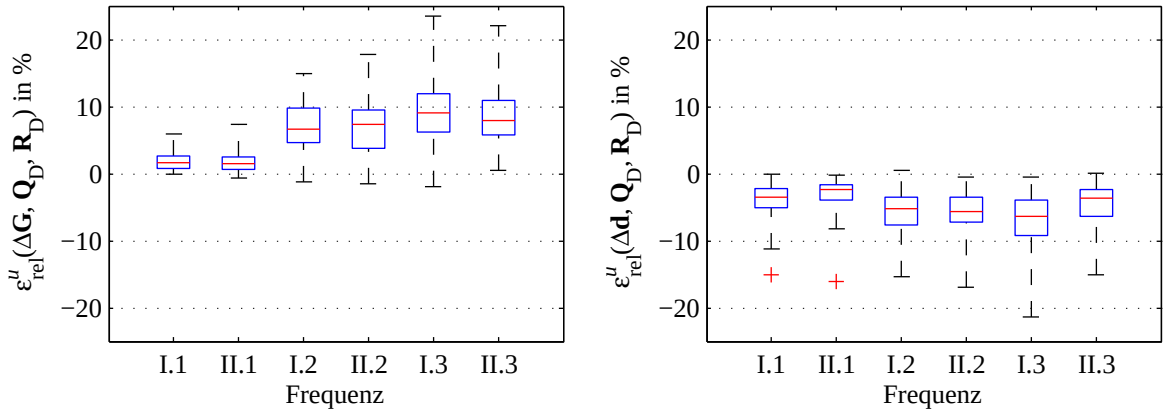
Der Schätzfehler der Schallpegelreduktion $\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{L}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}, \mathbf{Q}_{\mathrm{D}}, \mathbf{R}_{\mathrm{D}}\right)$ bei Gewichtung in physikalischen Koordinaten ist in Abb. 5-12 dargestellt. Im Diagramm sind die Schätzfehler im Mittel kleiner als 2.5%. In Abhängigkeit der Unsicherheiten $\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}$ liegen die Schätzfehler auf der konservativen Seite. Der Einfluss der Unsicherheit $\Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}$ auf die Schallpegelreduktion wird unterschätzt. Dieser Schätzfehler ist jedoch sehr klein; er wird in einem realen System durch die Überschätzung der anderen Einflüsse ausgeglichen. Die größten Schätzfehler treten bei instabilen Reglern auf [115].

Die Auswertung des Schätzfehlers $\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{L}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}, \mathbf{Q}_{\mathrm{HK}}, \mathbf{R}_{\mathrm{HK}}\right)$ bei Gewichtung in Regelhauptkoordinaten zeigt ähnliche Ergebnisse. Das zugehörige Kistendiagramm ist im Anhang in Abb. A.3 dargestellt.



$$\varepsilon^{L}_{\mathrm{rel}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right) = \frac{\hat{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right) - \tilde{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right)}{\tilde{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right)}$$

Abb. 5-12: Schätzfehler des Schalldruckpegels im ungünstigsten Fall bei GPK.



$$\varepsilon^{u}_{\mathrm{rel}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right) = \frac{\hat{u}^{\max}_{\mathrm{opt}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right) - \tilde{u}^{\max}_{\mathrm{opt0}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right)}{\tilde{u}^{\max}_{\mathrm{opt0}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right)}$$

Abb. 5-13: Relativer Schätzfehler der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall bei GPK.

5.4.4 Gütemaß der robusten Lautsprecheransteuerung

Für die Gewichtung in physikalischen Koordinaten ist in Abb. 5-13 der Schätzfehler der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall $\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{u}\left(\Delta\mathbf{G},\Delta\mathbf{d},\mathbf{Q}_{\mathrm{D}},\mathbf{R}_{\mathrm{D}}\right)$ dargestellt. Im Mittel ist dieser zwischen 5 und 10%. Es findet eine Über- und Unterschätzung statt. Im praktischen Einsatz werden sich diese Schätzfehler gegenseitig ausgleichen. Vergleichbares gilt für die Gewichtung in Regelhauptkoordinaten. Das entsprechende Kistendiagramm befindet sich im Anhang in Abb. A.4.

5.4.5 Folgerungen

Im Vergleich zu den Ergebnissen aus der Monte-Carlo-Simulation liefern die Schätzformeln gute Ergebnisse. Teilweise ergeben sich Unter- als auch Überschätzungen, welche sich im praktischen Einsatz ausgleichen. Die Stabilität des Systems kann sehr gut vorhergesagt werden, vgl. auch [115].

Die Bestimmung der Stabilität, der Schallpegelreduktion und der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall mittels Monte-Carlo-Simulation für einen einzelnen Parametersatz $\left(\mathbf{Q},\mathbf{R}\right)$ dauert auf einem DesktopPC Dell Optiplex GX745 mit Matlab Version 2008a mehrere Minuten. Die Berechnung mittels Schätzformeln ist in weniger als einer Sekunde möglich.

Da die auf den Schätzformeln basierenden Regelgütemaße gute Vorhersageergebnisse liefern und die Berechnung nur sehr wenig Zeit benötigt, sind diese für die Optimierung mittels GA geeignet.

5.5 Reglerentwurf

Im Anschluss an die Messung der Unsicherheiten wird der Reglerentwurf durchgeführt. Da die Übertragungsstrecken und Störschallfelder der nominellen Messreihe aus der Messung mit dem B&K-Frontend stammen, wird diese Messung mit der Reglerhardware dSPACE 1103 wiederholt. Die zuvor ermittelten Medianwerte der Unsicherheitsnormen werden für den Reglerentwurf übernommen.

Der Reglerentwurf erfolgt einzeln für jede Harmonische beider Lastfälle und wird in den folgenden fünf Varianten durchgeführt (vgl. Abschnitt 3.1.2):

- Referenzverfahren mit skalaren Leakage-Faktor (GLF)
- Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke mit Gewichtung in physikalischen Koordinaten (nGPK)
- robuster Entwurf mit Gewichtung in physikalischen Koordinaten (rGPK)
- Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke mit Gewichtung in Regelhauptkoordinaten (nGHK)
- robuster Entwurf mit Gewichtung in Regelhauptkoordinaten (rGHK)

Die erste Variante dient als Vergleichsverfahren, der Leakage-Faktor wird dabei durch das von Gerner [4] beschriebene p-q-Kurvenverfahren bestimmt. Die Nebenbedingungen wie die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung und die Reglerstabilität werden nicht explizit berücksichtigt.

Für die Gewichtung in physikalischen Koordinaten werden diagonal besetzte Matrizen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\mathrm{D}}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{D}}$ entworfen. Im Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke werden die Unsicherheitsnormen zu Null gesetzt. Im robusten Entwurf werden die gemessenen Unsicherheiten aus Tab. 5-2 eingesetzt. Der Entwurf mit der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten gliedert sich ebenfalls in einen nominellen Entwurf und einen robusten Entwurf. Es werden jedoch vollbesetzte Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\mathrm{HK}}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathrm{HK}}$ verwendet. Für die neuen Gewichtungsverfahren wird das in Kapitel 3 beschriebene Entwurfsverfahren angewendet und entsprechend Kapitel 4 gelöst.

Aus jedem Entwurf erhält man für jede Harmonische i die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_i$ und $\mathbf{R}_i$ sowie die Schrittweite μ_i. Aus der Messung übernimmt man die zugehörige Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_i$ und bildet einen zusammenhängenden Parametersatz für den Betrieb des Reglers.

5.5.1 Durchführung der Reglerparameteroptimierung

Die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_i$ und $\mathbf{R}_i$ werden für die GPK und GHK durch Lösen der Optimierungsprobleme (3.55) bzw. (3.112) bestimmt. Als Löser wird das in Kapitel 4 vorgeschlagene genetische Optimierungsverfahren eingesetzt. Ein Überblick über die eingestell-

ten Verfahrensparameter ist in Tab. A-3 gegeben. Die Auswahl der Parameter orientiert sich an der Literatur [103, 116, 117]. Die Anzahl der Generationen N_{Gen} wird für den Entwurf in physikalischen Reglerkoordinaten auf 5000 festgelegt; für den Entwurf in Regelhauptkoordinaten sind $N_{\mathrm{Gen}} = 500$ ausreichend.

Mit dem im Abschnitt 4.4 beschriebenen Verfahren kann die Lösung bezüglich vorzeitiger Konvergenz beurteilt werden. Dies geschieht über die Bestimmung der Steigung des Kostengebirges am Lösungspunkt. Exemplarisch sind in Tab. 5-3 die Steigungswinkel an der Lösung des nominellen Entwurfs bei der GPK und GHK angegeben. Die Ergebnisse des robusten Entwurfs findet man in Tab. A-4 des Anhangs.

Tab. 5-3: Steigungswinkel des Kostengebirges an den Lösungen des nominellen Reglerentwurfs; Optimierungszeit in Minuten.

Nomineller Reglerentwurf												
Steigungs-winkel	GPK						GHK					
	I.1	I.1	I.1	I.1	I.1	I.1	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3
kleinster	-0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	-0.0°	-1.3°	-0.8°	-0.1°	-0.0°
mittlerer	45.9°	21.4°	21.4°	21.4°	21.4°	21.4°	21.4°	32.4°	49.8°	50.4°	40.4°	32.8°
größter	90.0°	89.5°	89.5°	89.5°	89.5°	89.5°	89.5°	89.6°	89.6°	89.9°	89.8°	89.8°
Optimierungszeit in Minuten	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	2.9	30.2	29.0	30.0	30.5	29.6	29.8

Die Mittelwerte der Steigungswinkel zeigen, dass sich die Lösungen der Optimierung in einer Senke des Kostengebirges befinden. Am größten Steigungswinkel erkennt man die zu einigen Seiten steil ansteigenden Flanken. Dies wird auf die Strafterme der Nebenbedingungen zurückgeführt. Die Lösung liegt daher an einer Grenze des Lösungsraums.

Die kleinsten Steigungswinkel der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten sind Null. Die Lösung der Optimierung wird daher in der Nähe des Optimums liegen. Bei der GPK treten sehr kleine negative Steigungswinkel auf. Diese deuten darauf hin, dass nicht das Optimum gefunden wurde. Die Steigung ist allerdings gering (1° bedeuten bei einem Schritt von $\Delta x = 1/100$ eine Erhöhung der Schallpegelreduktion um etwa $1.7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{dB}$). Die gefundene Lösung wird deshalb als ausreichend gut betrachtet.

Weiterhin sind in Tab. 5-3 und Tab. A-4 die Laufzeiten des Optimierers angegeben. Diese dienen der Orientierung und hängen von der eingesetzten PC-Hardware ab. Die angegebenen Werte gelten für einen Dell Optiplex GX745 mit Matlab Version 2008a. Die Optimierungsläufe dauern für die GHK bis zu 6 Minuten, siehe Tab. A-4. Für die GPK werden bis zu 54 Minuten benötigt, siehe Tab. A-4.

Vergleicht man Lösungszeit und –güte ist der Entwurf einer GHK ein schnelleres und besser zu lösendes Problem als der Entwurf mittels GPK. Dies entspricht den Überlegungen aus Abschnitt 3.1.2.4.

5.5.2 Ergebnisse der Optimierung

5.5.2.1 Gewichtung in physikalischen Regelkoordinaten

Bei der Optimierung der GPK $\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}, \mathbf{R}_{\mathrm{D}}\right)$ werden Gewichtungsfaktoren für die einzelnen Lautsprecher und Mikrofone bestimmt. In Abb. 5-14 sind die Gewichtungsfaktoren der Matrix $\mathbf{Q}_{\mathrm{D}}$ als Balkendiagramm beider Lastfälle (I, II) über den Mikrofonnummern aufgetragen. Die Ordinate ist quadratisch verzerrt, um Unterschiede zwischen kleinen und großen Gewichtungsfaktoren darzustellen.

Das Diagramm in Abb. 5-14a zeigt die Gewichtung des Entwurfs anhand der nominellen Regelstrecke. Es werden einzelne Mikrofone besonders stark gewichtet. Andere Mikrofone werden zu Null gesetzt und somit aus der Regelung ausgeschlossen. Abb. 5-14b stellt die Gewichtung des robusten Entwurfs dar. Die Mikrofone werden gleichmäßiger gewichtet, nur wenige Mikrofone werden aus der Regelung ausgeschlossen.

Im robusten Entwurf wird das Mikrofon 14 häufig zu Null gesetzt. Dieses Mikrofon befindet sich weder im Übergangsbereich zwischen Lademeisterbereich und Laderaum noch in der Nähe des Monitorvolumens. Dies ist plausibel, da es weder der Mikrofonanordnung einer aktiven akustischen Barriere [50] noch der Platzierungsoptimierung von Gerner [4] entspricht. Des Weiteren wird ein robuster Regler möglichst alle zur Verfügung stehenden Informationen nutzen und wird deshalb auch weniger Mikrofone mit Null gewichten.

Abb. 5-15 stellt die Diagonalelemente der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{R}_{\mathrm{D}}$ über der Lautsprechernummer dar. Abb. 5-15a bezieht sich auf den nominellen Entwurf, Abb. 5-15b auf den robusten Entwurf. Um kleine und große Gewichtungsfaktoren darzustellen, ist auch hier die Ordinate verzerrt. Für Gewichtungsfaktoren kleiner Eins ist sie linear, für Gewichtungsfaktoren größer Eins ist sie quadratisch.

Im nominellen Entwurf werden viele Lautsprecheransteuerungen nur sehr schwach gewichtet. Diese Lautsprecher werden daher auch sehr stark angesteuert. Im robusten Entwurf sind dagegen alle Lautsprecheransteuerungen stark gewichtet. Die Lautsprecheransteuerung wird insgesamt kleiner ausfallen. Bereits Gleichung (3.95) zeigte, dass ein robustes System mit kleinen Ansteuerungen einhergeht. Dies ist deshalb plausibel.

Die Ansteuerung des Lautsprechers Nr. 7 wird im nominellen und im robusten Entwurf nur sehr wenig gewichtet. Er leistet daher einen großen Beitrag zur Pegelreduktion. Dieser Lautsprecher befindet sich im Eingangsbereich über dem Kopf des Lademeisters. Dies ist verständlich, denn dieser Lautsprecher entspricht am besten der Anordnung aus der Platzierungsoptimierung von Gerner [4].

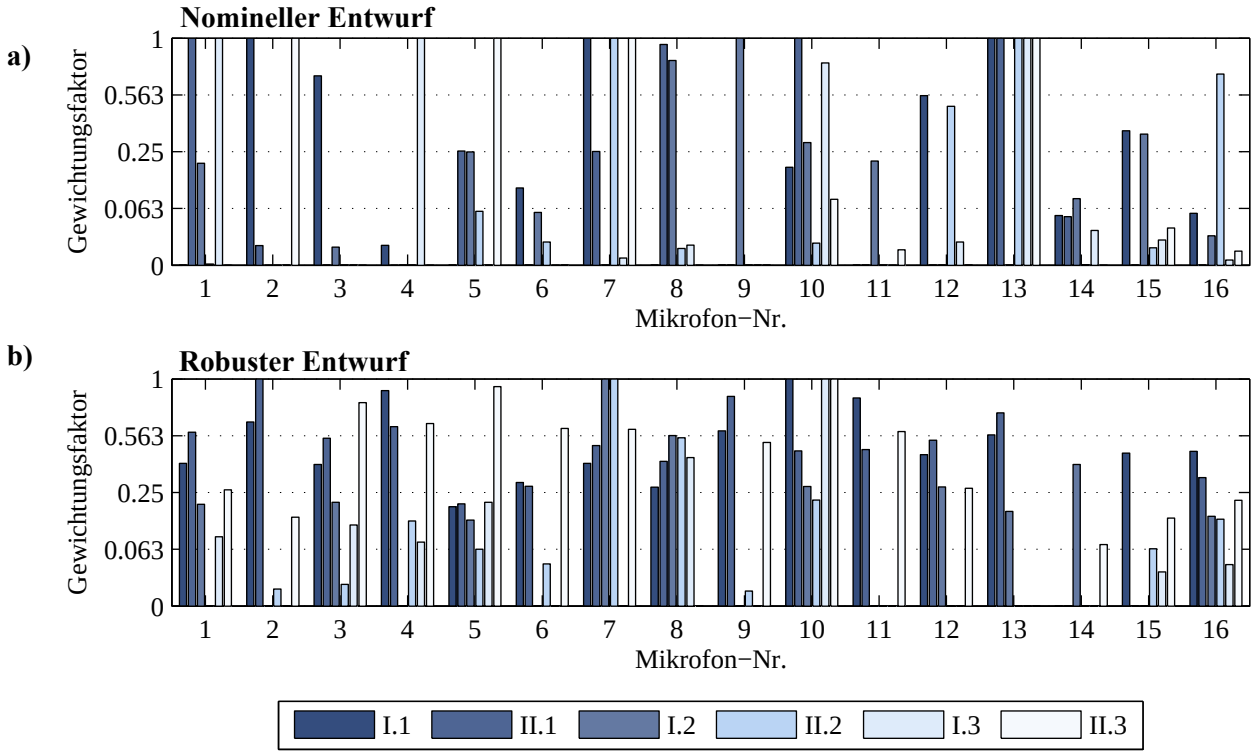


Abb. 5-14: Diagonalelemente der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_D$ für beide Lastfälle (I, II); a) nomineller Reglerentwurf; b) robuster Reglerentwurf.

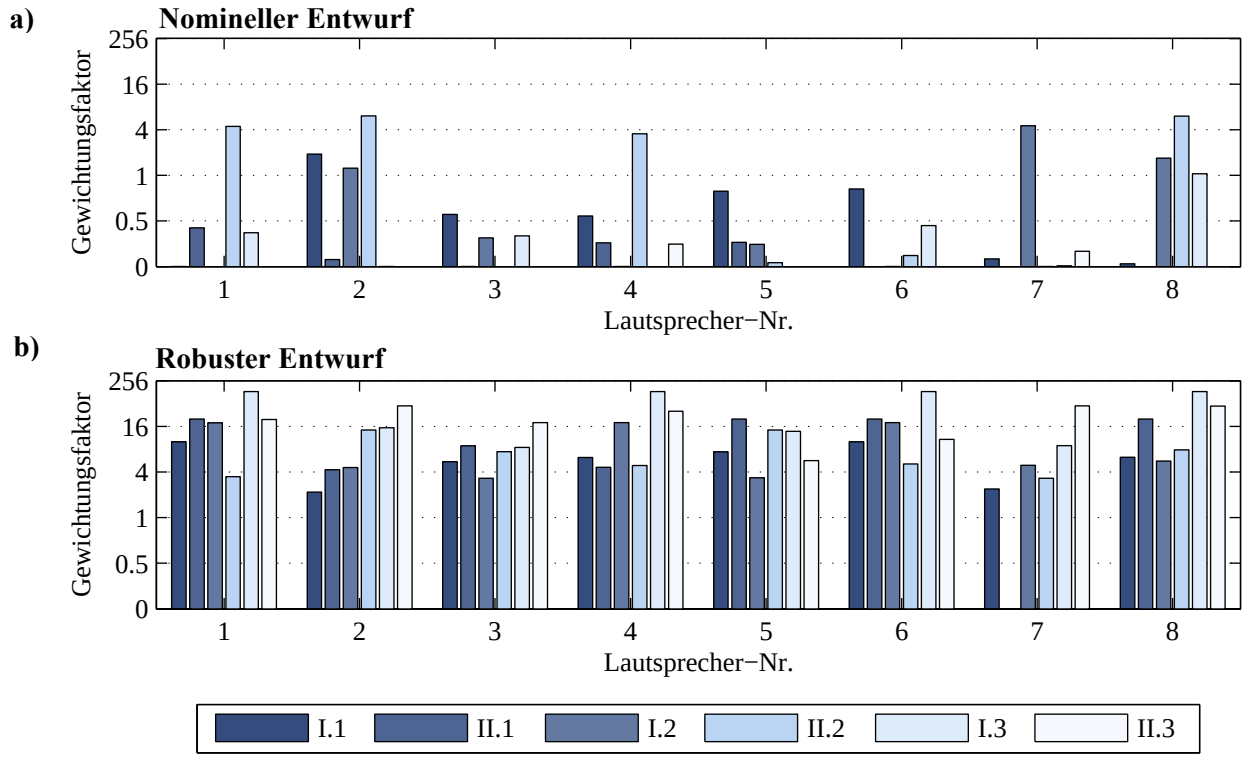


Abb. 5-15: Diagonalelemente der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{R}_D$ für beide Lastfälle (I, II); a) nomineller Entwurf; b) robuster Entwurf.

5.5.2.2 Gewichtung in Regelhauptkoordinaten

Die Optimierung der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten wirkt sich direkt auf die Singulärwerte der Reglermatrix $\mathbf{C}_0$ aus, vgl. Gleichung (3.21). In Abb. 5-16 sind für den nominellen Entwurf und robusten Entwurf die Gewichtungsparameter $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}$ gemäß (3.20) dargestellt. Die Gewichtungsparameter $\hat{\mathbf{R}}_{\mathrm{HK}}$ können aus $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}$ mit (3.27) und (3.28) berechnet werden.

In beiden Entwürfen sind viele Gewichtungsfaktoren $\hat{q}_{\mathrm{HK}(i)}$ gleich Eins. Die zugehörigen Regelhauptkoordinaten gehen vollständig in die Regelung ein. Andere Gewichtungsfaktoren gehen nur zu einem kleinen Teil in die Regelung ein oder werden zu Null gesetzt. Im nominellen Entwurf wird je nach Frequenz auf das gesamte Spektrum der Regelhauptkoordinaten zurückgegriffen. Beim robusten Entwurf werden nur die ersten Regelhauptkoordinaten vollständig im Entwurf berücksichtigt.

Den ersten Regelhauptkoordinaten sind die größten Singulärwert σ_i der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ zugeordnet. Diese beschreiben die wesentlichen Systemeigenschaften [118]. Den kleineren Singulärwerten sind nicht dominante Systemeigenschaften zugeordnet. Im robusten Entwurf werden hauptsächlich nur die dominanten Systemeigenschaften beeinflusst. Die nicht-dominanten Systemeigenschaften sind aufgrund der Unsicherheiten veränderlich.

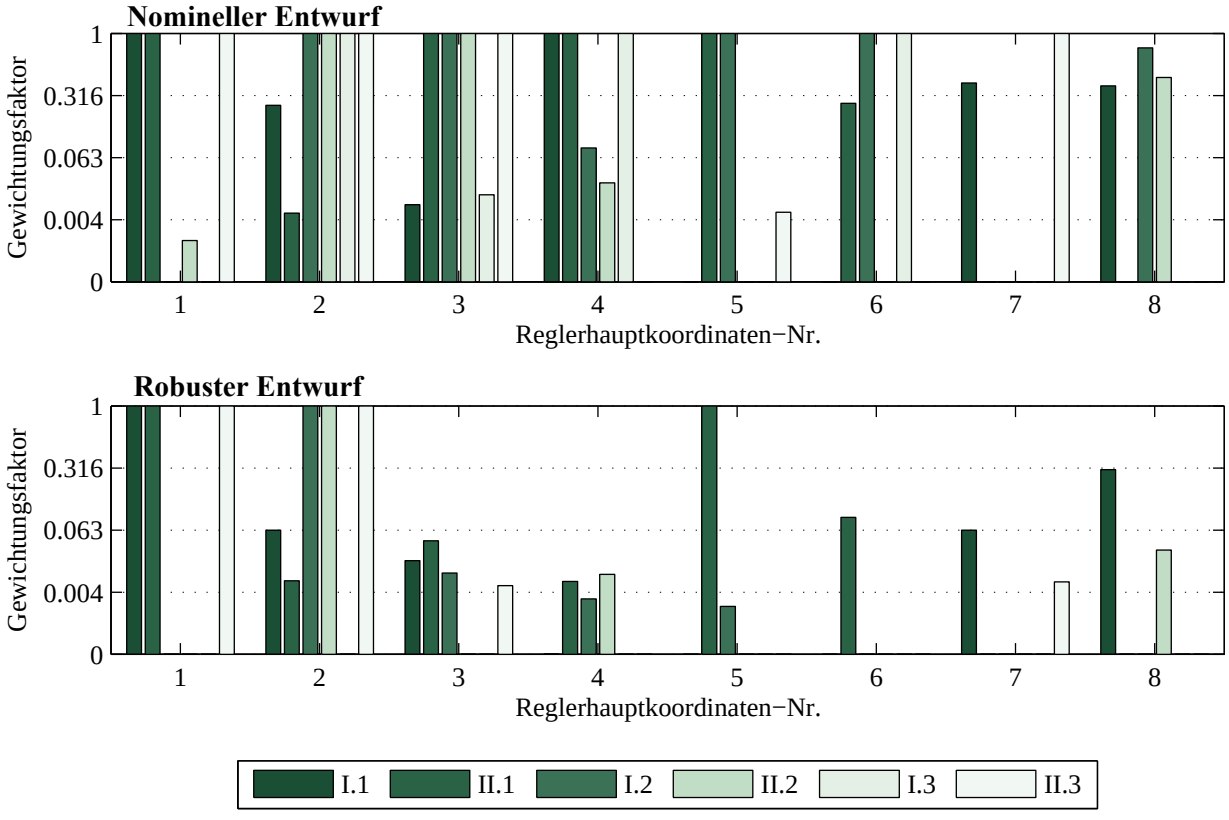


Abb. 5-16: Diagonalelemente $\hat{q}_{\mathrm{HK}(i)}$ der Gewichtungsmatrizen $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathrm{HK}}$ für beide Lastfälle.

5.5.3 Ergebnisse des Reglerentwurfs

Mit den im Abschnitt 5.5.2 vorgestellten optimalen Gewichtungsparametern wird die zu erwartende Schallpegelreduktion und Lautsprecheransteuerung berechnet. Basis bilden die Gleichungen aus Kapitel 2.2 und 3.1.

5.5.3.1 Nominelle Schallpegelreduktion

Die erwartete nominelle Schallpegelreduktion lässt sich mit den Gleichungen (2.7) und (3.6) numerisch berechnen. Das Maß für die Schallpegelreduktion ist der räumliche energetische Mittelwert entsprechend Gleichung (3.50). Abb. 5-17 stellt die erwartete Schallpegelreduktion bezüglich eines Störschallfeldes von 80 dB(A) gegenüber.

Das Referenzgewichtungsverfahren erreicht eine maximale Schallpegelreduktion von 8 dB. Diese fällt mit steigender Frequenz ab. Für die Frequenz I.3 wird keine Schallpegelreduktion erreicht.

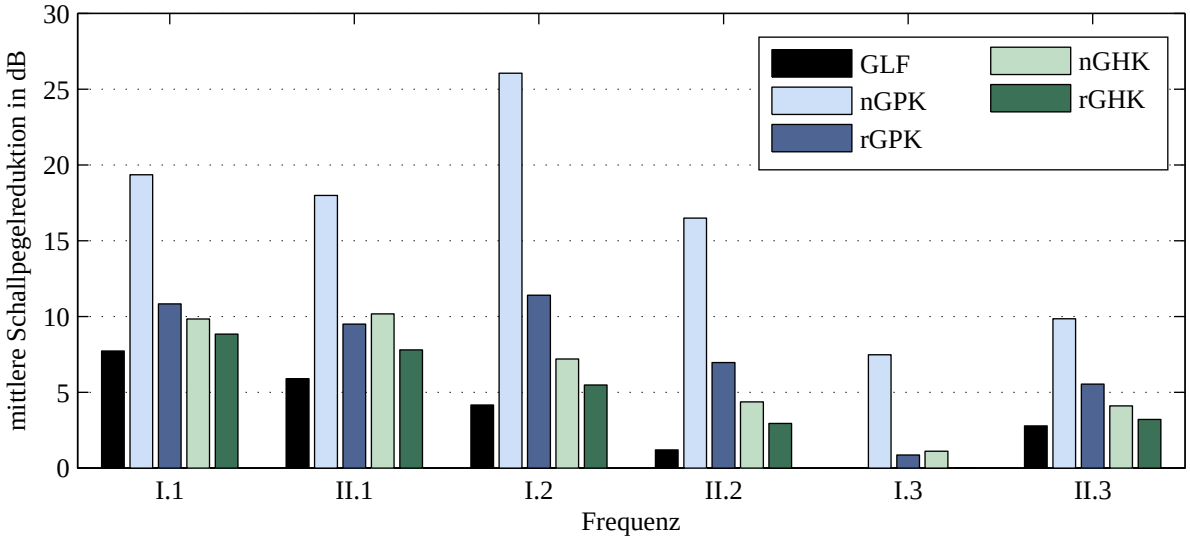


Abb. 5-17: Erwartete mittlere Schallpegelreduktion im Monitorvolumen.

Die Gewichtung in physikalischen Regelkoordinaten kann mit dem Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke eine Schallpegelreduktion von über 26 dB erreichen. Im folgenden Abschnitt wird man sehen, dass für die ersten Harmonischen beider Lastfälle (I.1, II.1) die Pegelreduktion durch die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung begrenzt ist. Durch die Berücksichtigung der Unsicherheiten im robusten Entwurf reduziert sich die Schallpegelreduktion. Für die angenommenen Unsicherheiten erreicht man hier bis zu 11 dB.

Mit der Gewichtung in Regelhauptkoordinaten ist eine Reduktion der Schallpegel auf dem Niveau des robusten Entwurfs mit physikalischen Reglerkoordinaten möglich. Der Unterschied zwischen robustem Entwurf und nominellem Entwurf fällt jedoch weniger deutlich aus. Die insgesamt geringere Schallpegelreduktion kann auf die entkoppelte Gewichtung zurückgeführt werden. Wenn große Anteile des transformierten Störschallfeldes auf die nicht-steuerbaren Reglerkoordinaten entfallen, vgl. (3.25) und (3.26), dann können diese

auch nicht geregelt werden. Gelöst werden kann dieses Problem, wenn genauso viele Mikrofone verwendet werden, wie Lautsprecher zur Verfügung stehen.

In Bezug auf die Schallpegelreduktion übertreffen im nominellen und im robusten Entwurf die beiden neuen Gewichtungsverfahren das Referenzverfahren.

5.5.3.2 Nominelle Lautsprecheransteuerung

Die nominelle Lautsprecheransteuerung wird mit der Gleichung (3.6) für die optimale Ansteuerung berechnet. Abb. 5-18 stellt die Beträge der komplexen Ansteuerung über dem zugehörigen Lautsprecher dar. Die sechs Frequenzen der beiden Lastfälle sind mittels Farben kodiert. Die Ordinaten der Diagramme sind quadratisch verzerrt.

Abb. 5-18a zeigt die Ansteuerung des Referenzgewichtungsverfahren mit skalaren Leakage-Faktor. Die Ansteuerung liegt stets unter 1.25 V. Sie fällt mit steigender Frequenz ab. Die Lautsprecher im Bedienpult (Nr. 5 u. 2) sowie an der Außenwand (Nr. 3) werden am stärksten angesteuert. Die Lautsprecher Nr. 1 und Nr. 6 werden am geringsten angesteuert, da sie nah beieinander platziert sind.

Abb. 5-18b und c fasst die Ansteuerung für die Gewichtung in physikalischen Koordinaten zusammen. Da diese Gewichtung die Schallpegel am höchsten reduziert, sind die Lautsprecheransteuerungen auch am größten. Beim Entwurf anhand der nominellen Regelstrecke erreichen die Lautsprecher Nr. 3 und 8 die Grenze der maximal zulässigen Lautsprecheransteuerung $\left(u_{\mathrm{zul}}^{\max} = 2\,\mathrm{V}\right)$. Dies bedeutet, dass die Pegelreduktion weiter gesteigert werden könnte, wenn höhere Lautsprecheransteuerungen zulässig wären. Dies gilt auch für den Lautsprecher Nr. 7 beim robusten Entwurf. Im robusten Entwurf sind die Lautsprecher an der Decke oberhalb des Übergangbereichs zwischen Laderaum und Lademeisterbereich wichtiger als an anderen Positionen. Dies stimmt mit den Ergebnissen der Platzierungsoptimierung von Gerner [4] überein.

Es zeigt sich, dass alle Lautsprecher bei allen Frequenzen in der Regelung berücksichtigt werden; kein Lautsprecher wird vollständig ausgeschlossen. Dies bedeutet, dass die Lautsprecher gut über die große Membranfläche in das Luftvolumen einkoppeln können. Dagegen werden die Mikrofone teilweise mit Null gewichtet und somit aus der Regelung ausgeschlossen.

Die Lautsprecheransteuerung bei Gewichtung in Reglerhauptkoordinaten ist in Abb. 5-18d und e dargestellt. Diese Gewichtung führt auf eine wesentlich gleichmäßigere Auslastung aller Lautsprecher ($u_5^{\max} = 1.04\,\mathrm{V}$). Sie ist kleiner als die Ansteuerung bei der GLF ($u_5^{\max} = 1.11\,\mathrm{V}$). Sie erreicht aber trotzdem eine größere Schallpegelreduktion. Dies kann sich vorteilhaft im Bezug auf Verschleiß und Ausfallwahrscheinlichkeit der Lautsprecher auswirken.

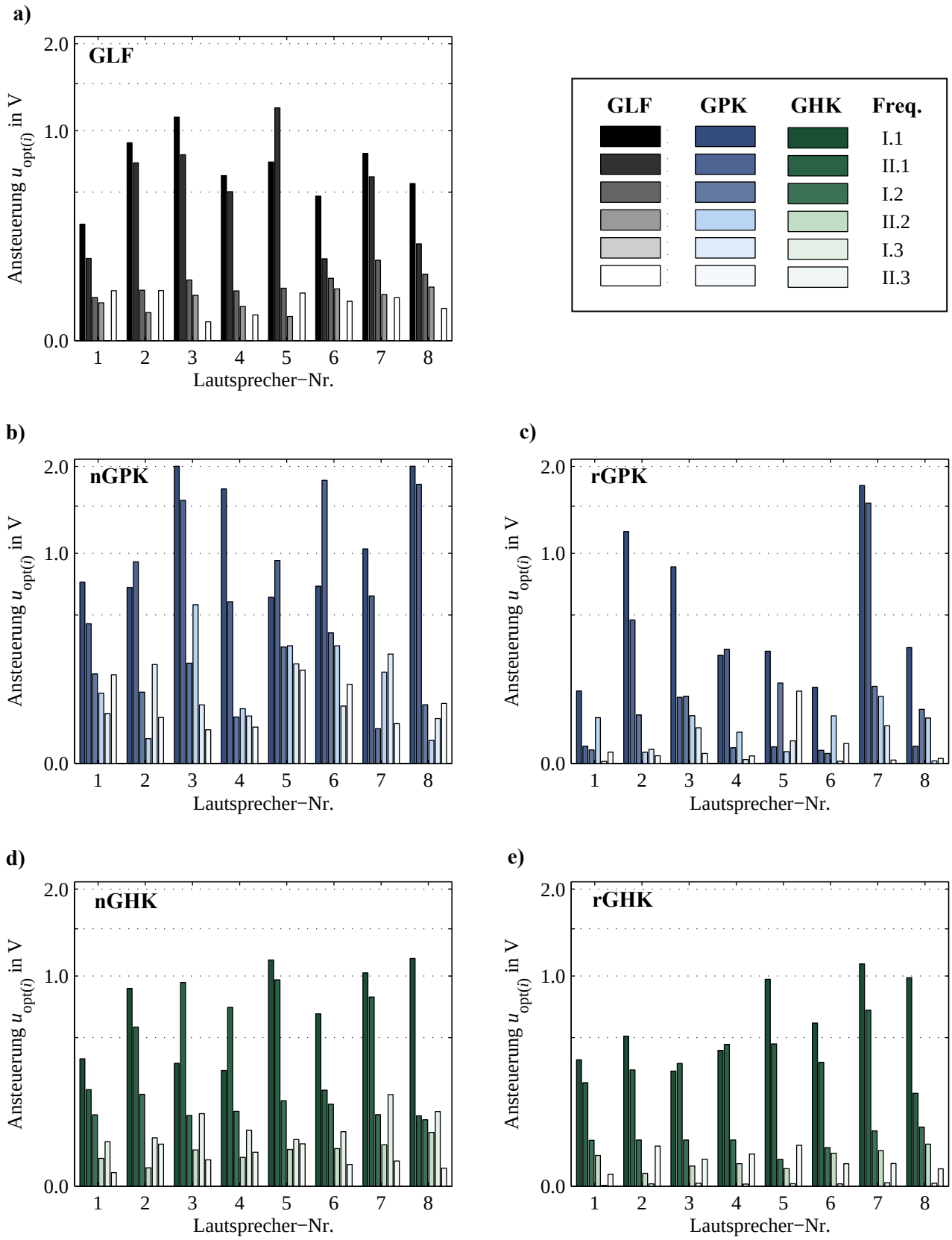


Abb. 5-18: Erwartete Amplitude der Lautsprecheransteuerung; a) GLF b), c) GPK; d), e) GHK.

5.5.4 Analyse der Robustheit

Die Robustheit der entworfenen ANC-Regler wird mittels Monte-Carlo-Simulation untersucht. Die Unsicherheit der Übertragungsstrecken und der Störschallfelder wird schrittweise bis zur doppelten gemessenen Unsicherheit erhöht. Für jede Unsicherheit werden insgesamt 10000 Simulationen mit zufällig gestörten Übertragungsstrecken und Störschallfeldern durchgeführt. Die Modellierung der Unsicherheiten entspricht dem Abschnitt 5.4.1.

5.5.4.1 Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten

Abb. 5-19 zeigt die Simulationsergebnisse für die Gewichtung in physikalischen Reglerkoordinaten. In jedem Diagramm ist die Schallpegelreduktion über der bezogenen Unsicherheit aufgetragen. Eine bezogene Unsicherheit von Null entspricht dabei dem nominellen Fall $\left(\Delta\mathbf{G} = \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}} = \Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}} = 0\right)$. Ist die bezogene Unsicherheit Eins, stimmt sie mit der gemessenen Unsicherheit überein. Eine bezogene Unsicherheit von zwei entspricht der doppelten gemessenen Unsicherheit.

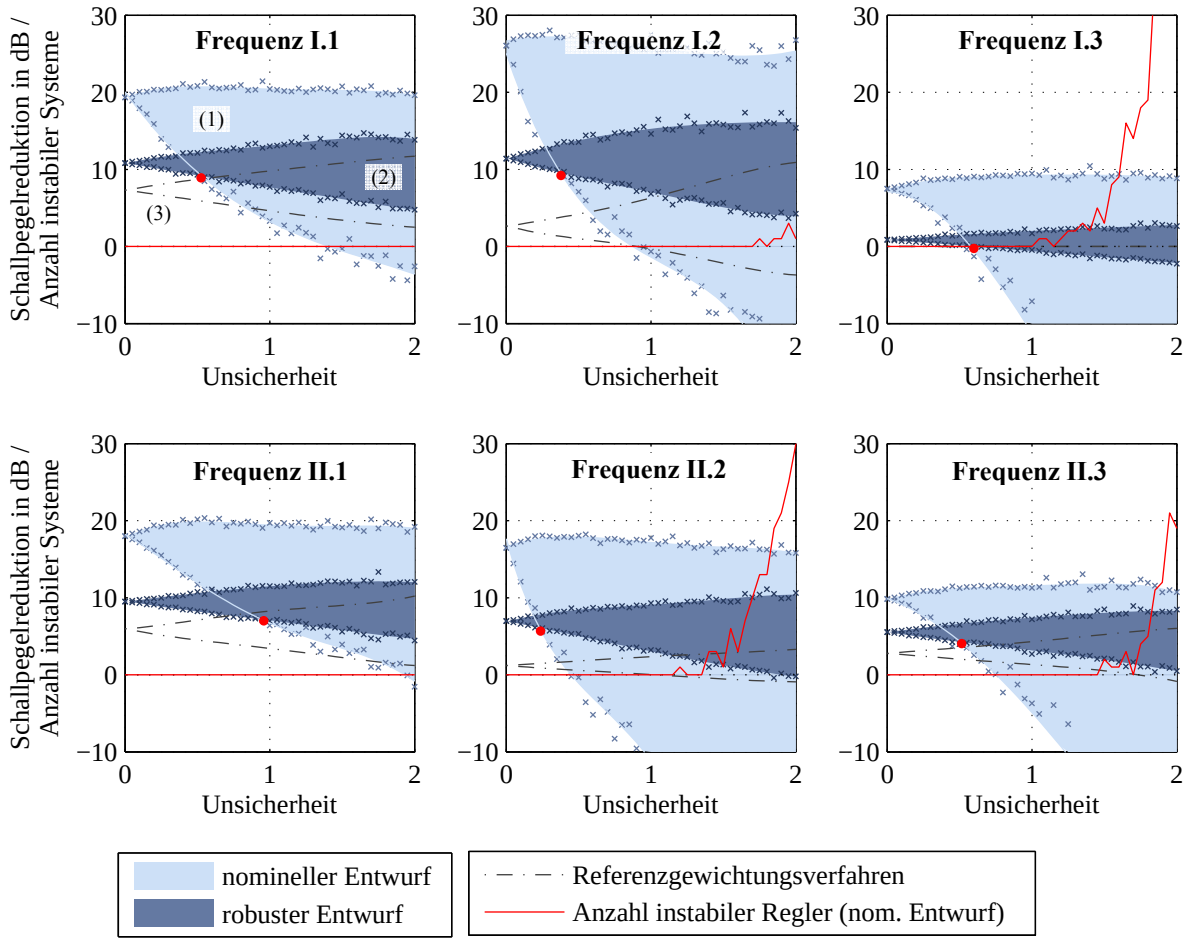


Abb. 5-19: Schallpegelreduktion mit GPK bei schrittweiser Erhöhung der bezogenen Unsicherheit.

Die maximale und die minimale Schallpegelreduktion aus jeweils 10000 Simulationsläufen sind jeweils als Kreuze angedeutet. Im eingefärbten Bereich dazwischen liegen die Schallpegelreduktionen aller übrigen Simulationsläufe. Der hellblau gefärbte Bereich (1) zeigt die Verteilung der Schallpegelreduktion des nominellen Entwurfs, der dunkelblaue Bereich (2) die Verteilung der Schallpegelreduktion des robusten Entwurfs. Zum Vergleich sind für das Referenzgewichtungsverfahren die obere und untere Grenze der Schallpegelreduktion durch die schwarze Strich-Punkt-Linie (3) im Graph gezeigt.

Die Schallpegelreduktion des nominellen Entwurfs schwankt mit zunehmender Unsicherheit sehr stark. Die Schallpegelreduktion des robusten Reglers schwankt wesentlich geringer. Im Vergleich zum Referenzverfahren ist die Schwankungsbreite etwa gleich groß, trotz der deutlich höheren Schallpegelreduktion.

Die Kurven der Schallpegelreduktion im schlechtesten Fall schneiden sich am rot markierten Punkt. Ab diesem Unsicherheitsschwellwert ist der robuste Entwurf besser als der nominelle Entwurf. Dieser Schwellwert ist jeweils kleiner als die gemessene Unsicherheit. Ein Vergleich mit dem Referenzgewichtungsverfahren bestätigt die Überlegenheit des robusten Entwurfs.

Während der Simulation werden die instabilen Regler mit negativen Eigenwerten gezählt, vgl. (3.61) und (3.64). Nur für den nominellen Entwurf wird die Verletzung der Stabilitätsbedingung festgestellt. Die Anzahl der instabilen Regler wird in Abb. 5-19 durch eine rote Kurve abgebildet. Das Diagramm zeigt, dass bei der zweiten und dritten Harmonischen des nominellen Entwurfs der Regler instabil werden kann. Dies tritt bereits knapp oberhalb der gemessenen Unsicherheit ein. Es kann daher auch im Experiment passieren, dass der Regler des nominellen Entwurfs instabil wird.

5.5.4.2 Gewichtung in Reglerhauptkoordinaten

Äquivalent zu Abschnitt 5.5.4.1 sind in Abb. 5-20 die Ergebnisse für die Gewichtung in Regelhauptkoordinaten angegeben. Die Schwankung der Schallpegelreduktion des nominellen Entwurfs (1) ist größer als die des robusten Entwurfs (2). Abgesehen von der Frequenz I.2, fallen die Unterschiede deutlich geringer aus als in Abb. 5-19. Dies liegt einerseits an der geringeren nominellen Schallpegelreduktion, andererseits an den geringeren Unterschieden zwischen dem Ergebnis des nominellen und des robusten Entwurfs. Nur für die Frequenz I.1 und I.2 ist der robuste Entwurf im ungünstigsten Fall besser als der nominelle Entwurf. Für die Frequenz I.3 zeigt der Graph eine Schallpegelerhöhung im Vergleich zum nominellen Störschallfeld. Da die Ansteuerung bei dieser Frequenz sehr klein ist, ist die Pegelerhöhung hauptsächlich auf die Schwankung des unsicheren gegenüber dem nominellen Störschallfeld zurückzuführen. Instabilitäten wie bei der GPK werden nicht beobachtet.

Im Vergleich zum Referenzverfahren ist die GHK stets als besser zu bewerten, da die Pegelreduktion im Mittel und im ungünstigsten Fall höher ist.

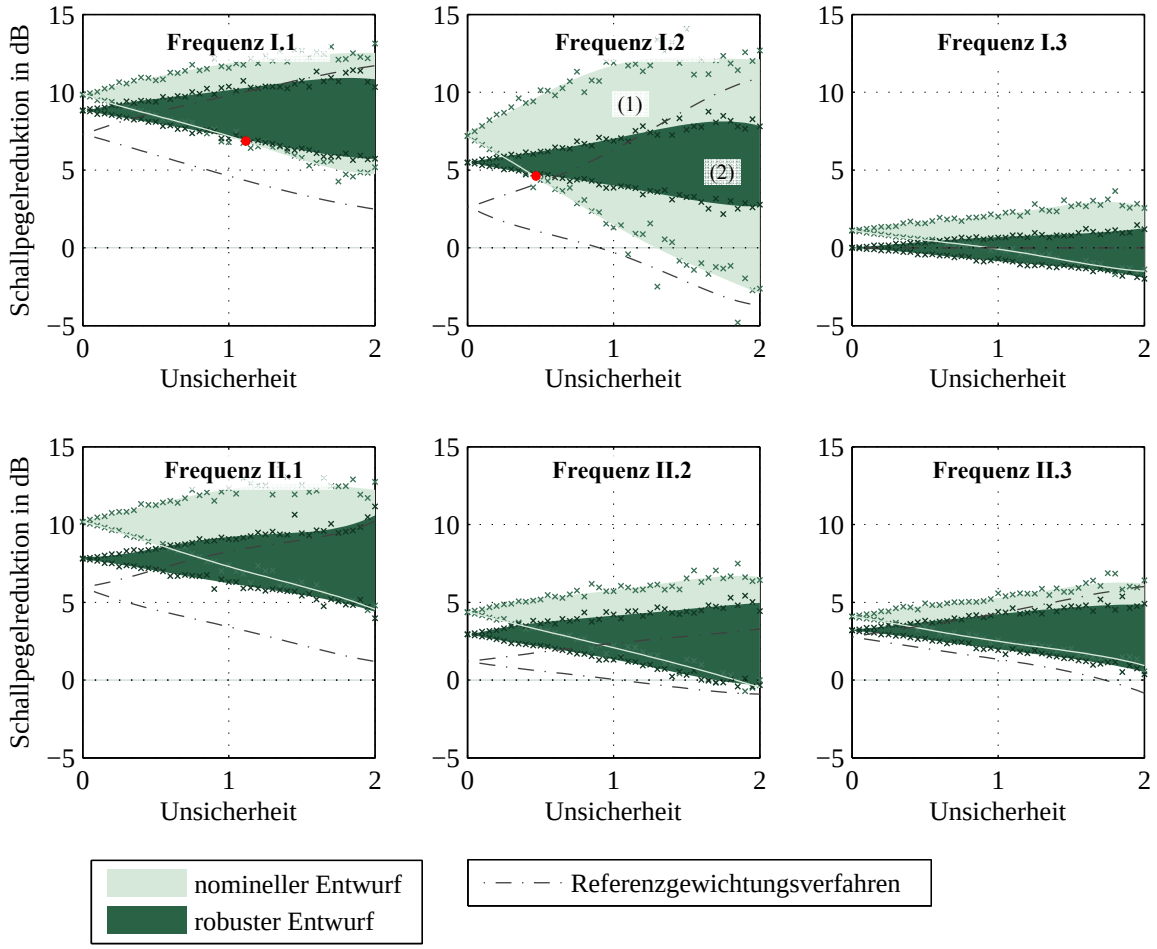


Abb. 5-20: Schallpegelreduktion mit GHK bei schrittweiser Erhöhung der bezogenen Unsicherheit.

5.5.5 Folgerungen

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass die Schallpegelreduktion bei GPK und GHK höher ist als beim Referenzverfahren. Für die GPK wird die höchste Pegelreduktion erwartet. Durch die Berücksichtigung der Unsicherheiten ist die Schallpegelreduktion des robusten Entwurfs geringer als die des nominellen Entwurfs. Im ungünstigsten Fall ist der robuste Entwurf jedoch besser wie der nominelle Entwurf. Die Lautsprecheransteuerung ist bei der GPK am höchsten.

Die GHK liefert besonders gleichmäßige Ansteuerungen. Der robuste Entwurf weißt ähnliche Schwankungen der Schallpegelreduktion auf wie das Referenzverfahren. Die Schallpegelreduktion ist im ungünstigsten Fall jedoch höher als die des Referenzverfahrens.

Zusammenfassend stellt man fest, dass die GPK Vorteile gegenüber der GHK hat. Beide Varianten sind besser als das Referenzverfahren.

5.6 Überprüfen des Reglerentwurfs im Experiment

Der im vorhergehenden Abschnitt 5.5 beschriebene Reglerentwurf wird nun im Experiment überprüft. Die Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_i$ und $\mathbf{R}_i$ sowie die zugehörige Schrittweite μ_i und Übertragungsmatrix $\mathbf{G}_i$ werden in den Regler importiert. Die Importierung und Regelung erfolgt für die drei Harmonischen eines Lastfalls (I oder II) zusammen.

Im Experiment wird zunächst jeweils ein nomineller Regelfall ermittelt. Dieser schließt sich direkt an die Messung der Übertragungsstrecken und Parameteroptimierung an; die Unsicherheit der Übertragungsstrecken und Störschallfelder ist klein. Anschließend wird der Versuch mehrfach wiederholt. Dabei werden bis zu drei Störkörper, vgl. Abb. 5-7, an verschieden Positionen im Lademeisterbereich aufgehängt.

Die Versuche finden an mehreren Tagen unter Beibehaltung der ursprünglichen Parametersätze statt. Damit werden die Unsicherheiten durch zeitliche Drift der Regelstrecke erfasst. Zwischen dem ersten Versuch und dem letzten Versuch liegen 10 Tage. Die Versuchsreihen der Referenz und des Entwurfs in Reglerhauptkoordinaten beinhalten jeweils 18 Versuche, für den Entwurf in physikalischen Reglerkoordinaten werden 44 Versuche durchgeführt.

Die Messung des Regelerfolges startet eine Minute nach dem Neustart des Reglers. Offensichtliche Reglerinstabilitäten werden in allen Versuchen nicht beobachtet.

Im Experiment zeigen die Unsicherheiten der Übertragungsstrecken einen zufälligen Charakter. Die Unsicherheiten aus den Versuchen im Abschnitt 5.3 können daher nicht exakt eingestellt werden.

5.6.1 Ermitteln der Schallpegelreduktion

Die gemessene mittlere Schallpegelreduktion im Monitorvolumen (vgl. Abb. A.2) ist für den Lastfall I in Abb. 5-21a und für den Lastfall II in Abb. 5-21b aufgetragen. Über die Farben sind die Gewichtungsverfahrenen kodiert. Die Pegelreduktion des nominellen Regelfalls ohne Störkörper ist durch eine rote Linie gekennzeichnet. Die Medianwerte aller gemessenen Schallpegel sind jeweils als Balken dargestellt. Die Variation der Messergebnisse unter dem Einfluss der Unsicherheiten wird durch einen Fehlerbalken angezeigt. Die Quartile sind durch schwarz umrandete Rechtecke abgesetzt. Die Vorhersage aus der numerische Berechnung, vgl. Abb. 5-17, ist durch ein Dreieck markiert.

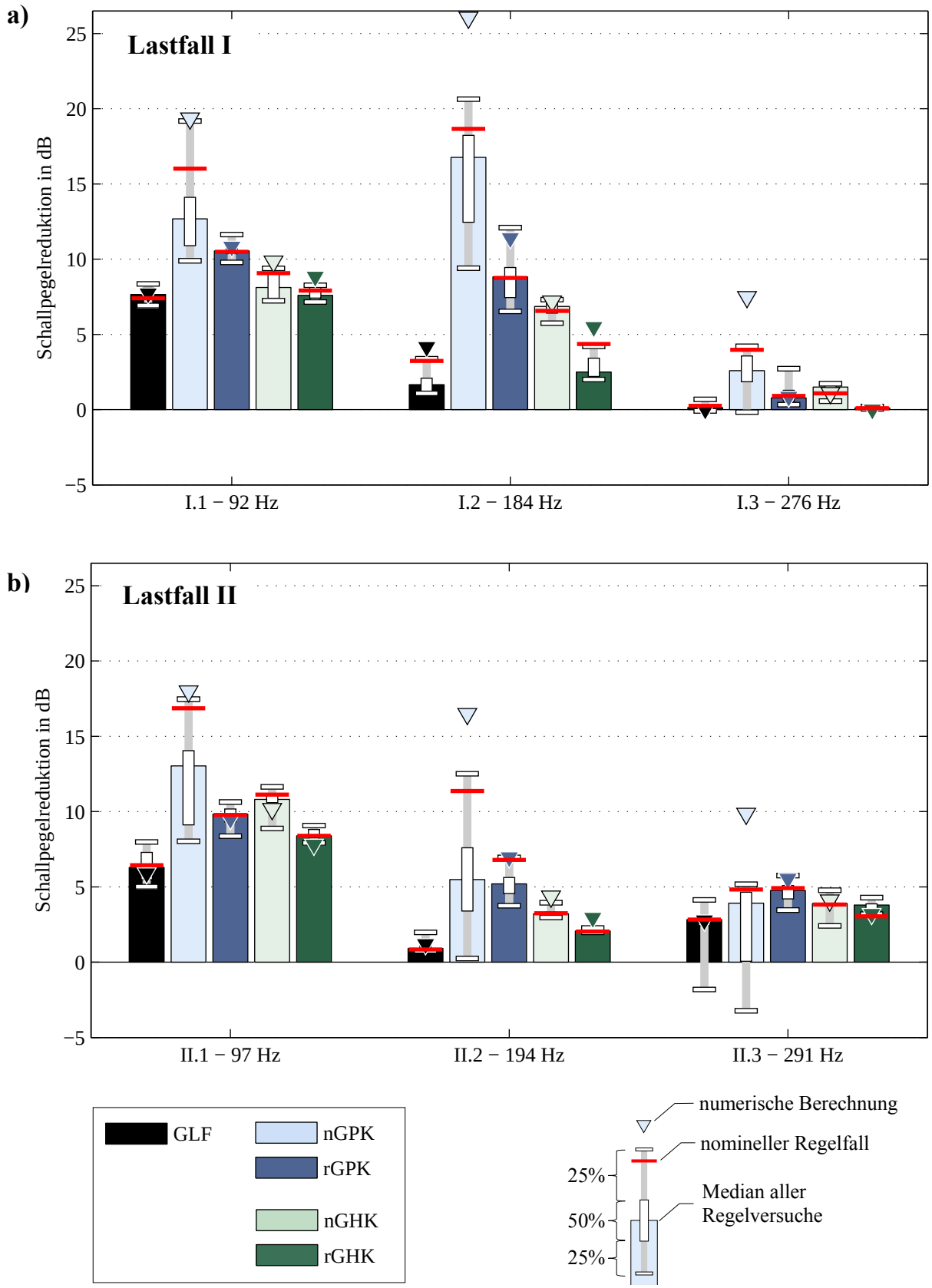


Abb. 5-21: Gemessene mittlere Schallpegelreduktion im Monitorvolumen für den a) Lastfall I und den b) Lastfall II.

Vergleicht man die mit roten Linien markierten *nominellen Regelfälle* ohne Störkörper erkennt man, dass mit dem Referenzverfahren bei beiden Lastfällen und allen Harmonischen die geringste Schallpegelreduktion erzielt wird. Der nominelle Entwurf mit GPK erreicht die größte Pegelreduktion. Dies zeigt sich besonders für die ersten beiden Harmonischen mit bis zu 18 dB. Bei der Frequenz II.3 ist die Schallpegelreduktion des nominellen Entwurfs mit der des robusten Entwurfs vergleichbar. Die Reduktion bei der GHK ist geringer als bei der GPK. Bei der GHK fällt der Unterschied zwischen robusten und nominellen Entwurf am kleinsten aus.

Ein Vergleich der in Abb. 5-21 dargestellten *Medianwerte und der zugehörigen Variation* zeigt, dass die Medianwerte im Vergleich zum nominellen Regelfall abfallen. Beim nominellen Entwurf mit GPK ist die Variationsbreite am höchsten. Für die Frequenz I.2 liegt sie zwischen 9 dB und über 20 dB. Der nominelle Entwurf mit GPK ist daher am sensitivsten. Alle anderen Entwurfsvarianten erzielen nur geringe Abweichungen zwischen dem nominellen Regelfall und dem Medianwert.

Beim robusten Entwurf mit GPK ist die *kleinste Schallpegelreduktion* höher als beim nominellen Entwurf (vgl. I.1, I.3, II.1, II.2, II.3). Dies wird bei der GHK nur für die Frequenzen I.1 und II.3 beobachtet. Bei der GLF und dem nominellen Entwurf mit GPK erhöht sich im ungünstigsten Fall der Schallpegel gegenüber dem Störschallfeld (vgl. Frequenz II.3). Dies wird bereits bei der Robustheitsanalyse im Abschnitt 5.5.4 vorausgesagt. Dagegen werden im Experiment für die Frequenz I.1 und II.2 deutlich kleinere Variationen beobachtet, als über die Numerik vorausgesagt. Dies könnte bedeuten, dass die angenommenen Unsicherheiten bei diesen Frequenzen zu groß gewählt sind.

Im Diagramm ist ebenfalls die *numerische Vorhersage* der Schallpegelreduktion angegeben. Vor allem der nominelle Entwurf mit GPK erreicht im Experiment nicht die hohe vorhergesagte Schallpegelreduktion. Alle übrigen Gewichtungsvarianten zeigen eine gute Vorhersagbarkeit durch die Numerik.

Je höher die Schallpegel sind, desto größer sind auch unerwünschte Höherharmonische bzw. Klirrverzerrungen. Durch die simultane Regelung der drei Harmonischen eines Lastfalles entstehen Wechselwirkungen, welche die Schallpegelreduktion besonders der 2. und 3. Harmonischen verringern. Eine separate Regelung kann etwa eine 5 dB höhere Pegelreduktionen für die 2. und 3. Harmonische erreichen, siehe [119]. Als Beispiel für die Anregung Harmonischer wird in Abb. 5-22 ein am rechten Kunstkopfmikrofon gemessenes Schallpegelspektrum gezeigt. Vor allem im geregelten Schallfeld werden die 4. bis 8. Harmonischen angeregt. Abhilfe kann durch leistungsfähigere ANC-Lautsprecher geschaffen werden. Außerdem ist bei der Montage der ANC-Lautsprecher und der Lining-Paneele auf eine akustisch gute Lagerung zu achten, da die Vibrationsgeräusche nicht mehr durch den tonalen Lärm maskiert werden.

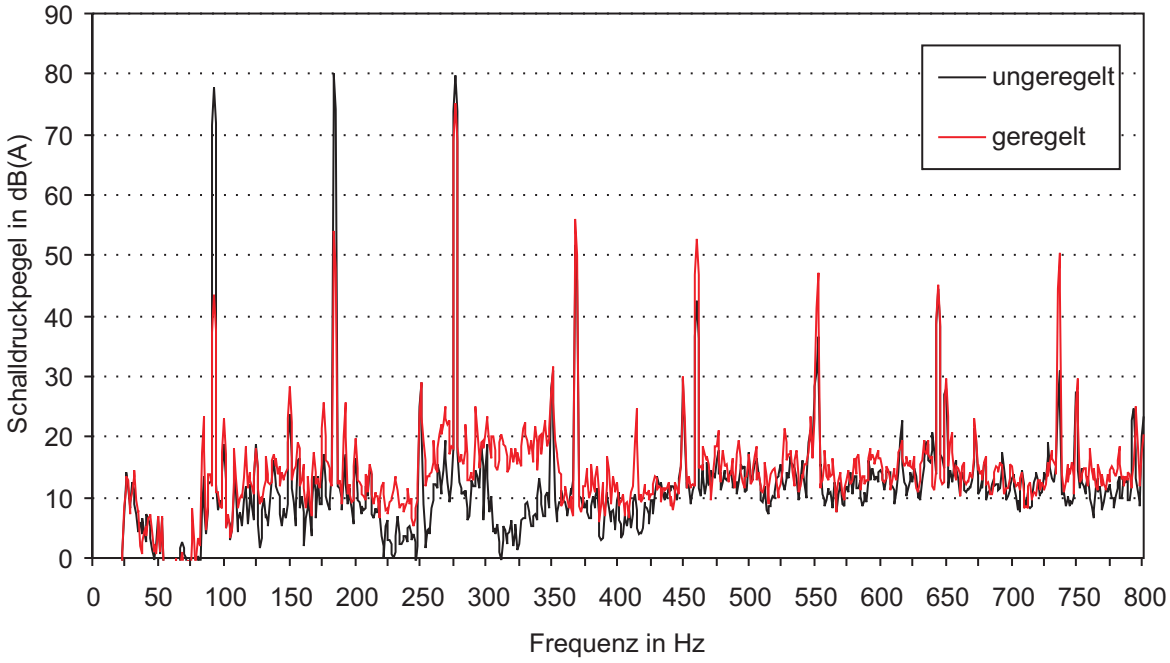


Abb. 5-22: Am rechten Kunstkopfmikrofon gemessenes Schallpegelspektrum im Lastfall I bei nGPK.

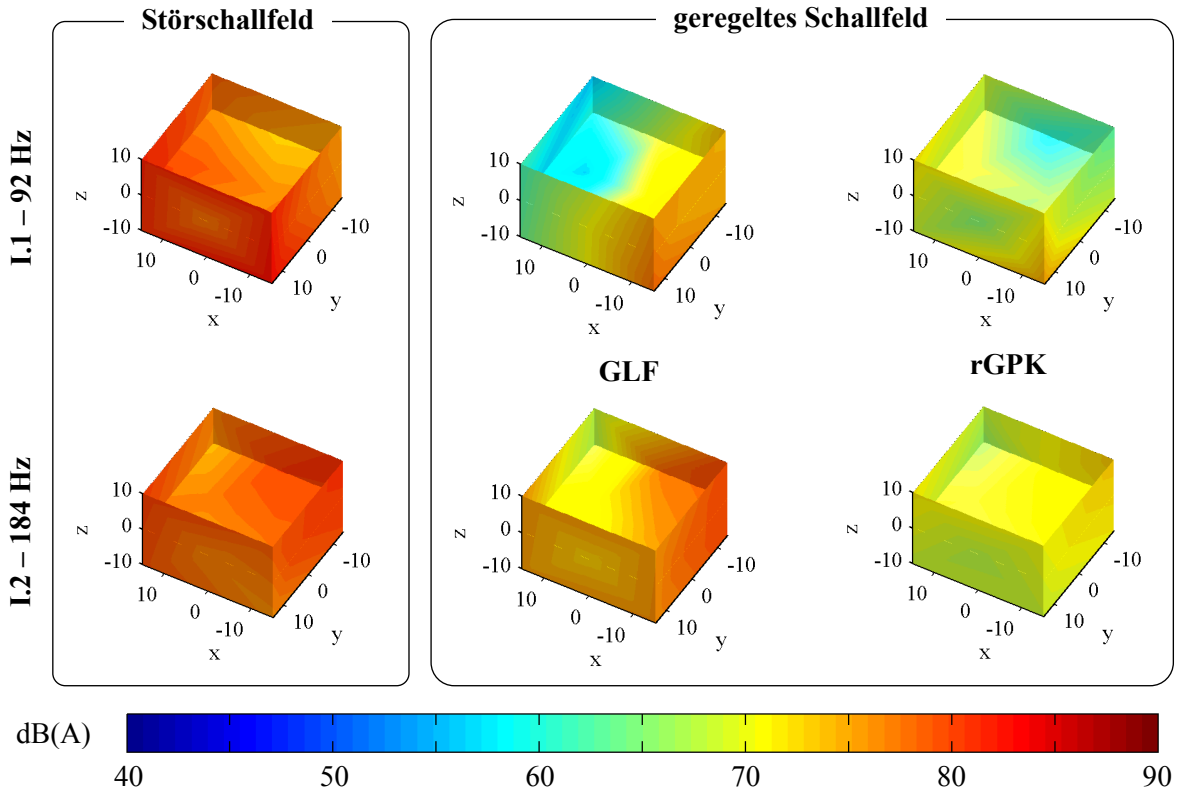


Abb. 5-23: Das Schallfeld im Monitorvolumen im Vergleich.

Abb. 5-23 zeigt den Einfluss des Gewichtungsverfahrens auf die Ausprägung des Schallfeldes im Monitorvolumen, vgl. Anhang A.3. Das geregelte Schallfeld der Referenz mit GLF zeigt große Pegelunterschiede zwischen der rechten und linken Seite des Monitorvolumens. Am Kopf des Lademeisters ergeben sich damit hohe interaurale Pegeldifferenzen. Beim robusten Entwurf mit GPK ergibt sich ein gleichmäßiges Schallfeld im gesamten Monitorvolumen. Dies wird auch bei den übrigen Frequenzen und bei der GHK beobachtet.

Aufgrund der Wellenlänge erstreckt sich das gleichmäßig niedrige Schallfeld weit über das Monitorvolumen hinaus. Die Schallpegelreduktion hat daher einen globalen Charakter im Lademeisterbereich. Dies wird auch im Experiment beobachtet.

5.6.2 Überprüfen der Lautsprecheransteuerung

Gemäß der numerischen Berechnung (vgl. Abb. 5-18) sind die Lautsprecher mit den Nummern 3, 4, 6, 7 und 8 bei GPK kritisch. Bei GLF und GHK wird die maximal zulässige Ansteuerung $\left(u_{\mathrm{zul}}^{\max} = 2\,\mathrm{V}\right)$ deutlich unterschritten. Um dies experimentell zu überprüfen, wird in jedem Versuch die komplexe Amplitude der Lautsprecheransteuerung gespeichert. In Tab. 5-4 sind die kritischen Ansteuerungen der ersten Harmonischen angegeben. Beim nominellen Entwurf wird durch den Lautsprecher 3 im Lastfall I die zulässige Ansteuerung überschritten. Insgesamt trifft dies auf 25% aller Versuche zu. Die gemessenen Medianwerte des nominellen Entwurfs liegen unterhalb der numerisch berechneten Werte (vgl. Abb. 5-18).

Beim robusten Entwurf wird die zulässige Ansteuerung niemals überschritten. Der Interquartils-abstand ist sehr klein. Die Übereinstimmung zwischen numerischer Berechnung und Experiment ist gut.

Tab. 5-4: Ausgewählte Ansteuerungen mit Angabe des Minimums, des Medians, des Maximums und des Interquartilsabstands (QA) .

nGPK – I.1					rGPK – I.1				
LS-Nr.:	Min.	Median	Max.	QA	LS-Nr.:	Min.	Median	Max.	QA
3	1.73 V	1.88 V	2.19 V	0.23 V	7	1.58 V	1.73 V	1.90 V	0.09 V
4	1.22 V	1.56 V	1.74 V	0.20 V					
8	0.85 V	1.31 V	1.78 V	0.14 V					
nGPK – II.1					rGPK – II.1				
LS-Nr.:	Min.	Median	Max.	QA	LS-Nr.:	Min.	Median	Max	QA
3	0.86 V	1.09 V	1.30 V	0.15 V	7	1.20 V	1.35 V	1.46 V	0.10 V
6	0.62 V	0.90 V	1.61 V	0.38 V					
8	1.07 V	1.25 V	1.47 V	0.17 V					

5.6.3 Schlussfolgerung

Die Versuchsreihen bestätigen die Funktionsfähigkeit des ANC-Systems. Zusammenfassend werden hier nun die experimentellen Ergebnisse anhand der Schallpegelreduktion und der Lautsprechersprecheransteuerung bewertet. Die Stabilität wird nicht beurteilt, da keine Instabilitäten im Experiment beobachtet wurden.

Für die hier verwendete Lautsprecher-Mikrofon-Anordnung wird eine Schallpegelreduktion im Monitorvolumen bei beiden Lastfällen erreicht. Im robusten Mittel werden für 1xBPF 10 dB, für 2xBPF 8 dB und für 3xBPF 3 dB erzielt. Die höchste Schallpegelreduktion wird mit der GPK erreicht. Der Regler mit GHK reduziert den Pegel etwa auf das Niveau des robusten Entwurfs mit GPK. Die Referenzgewichtung erreicht insgesamt die kleinste Pegelreduktion. Ihr geregeltes Schallfeld ist dabei ungleichmäßiger gegenüber den beiden neuen Gewichtungsvarianten.

Im ungünstigsten Fall wird mit dem robusten Entwurf der GPK die höchste Schallpegelreduktion erzielt. Es wird zu keiner Zeit der Schallpegel durch die Regelung erhöht, die Schwankung der Pegelreduktion ist gering. Gleiches gilt für die GHK, die Pegelreduktion ist jedoch kleiner. Beim robusten Entwurf kann die Numerik die experimentellen Ergebnisse sehr gut vorhersagen. Die hohe berechnete Pegelreduktion des nominellen Entwurfs mit GPK wird nicht erreicht.

Die maximale Lautsprecheransteuerung ist bei der GHK am kleinsten. Alle Lautsprecher werden dabei gleichmäßig ausgelastet. Dies reduziert die Ausfallwahrscheinlichkeit und den Verschleiß. Demgegenüber weißt die GPK die größten Lautsprecheransteuerungen auf. Sie begrenzt besonders den maximal möglichen Regelerfolg bei 1xBPF. Unter dem Einfluss von Unsicherheiten kann der Regler beim nominellen Entwurf nicht die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung einhalten. Dies gelingt jedoch mit dem robusten Entwurf.

Insgesamt wird die Regelqualität des ANC-Systems durch Einführung von Gewichtungsmatrizen gesteigert. Mit dem robusten Entwurf gelingt es zudem, den Regler robust gegenüber den gemessenen Störungen zu entwerfen. Der Regler kann nun mit einmal identifizierten Übertragungsstrecken und Gewichtungsmatrizen längere Zeit betrieben werden. Für diese spezifische Lautsprecher-Mikrofon-Anordnung ist insgesamt die Gewichtung in physikalischen Koordinaten am besten geeignet.

Das hier eingesetzte ANC-System hat doppelt so viele Mikrofone wie Lautsprecher. Zukünftig sollten etwa zweieinhalb bis dreimal so viele Mikrofone wie Lautsprecher verwendet werden. Deren Positionen könnte man frühzeitig konstruktiv festlegen. Die zusätzlichen Kosten, der notwendige Einbauraum und der Verkablungsaufwand sind bei Mikrofonen vergleichsweise gering. Jedoch vergrößert dies die Entwurfsfreiheit, die Schallpegelreduktion könnte somit noch weiter erhöht werden.

6 Zusammenfassung

Rotierende Maschinen und Propeller können zu hohen tonalen Lärmpegeln führen. Durch die Ansprüche an Komfort und Arbeitsschutz sind Schalldämmmaßnahmen ein wichtiger Bestandteil jedes technischen Systems. Die schweren passiven Maßnahmen für den niedrigen Frequenzbereich sind jedoch im Widerspruch zum konsequenten Leichtbau. Deshalb kommt die Technologie der aktiven Schallreduktion zunehmend zum Einsatz. Sie basiert auf dem Prinzip der Interferenz des Störschallfelds mit einem Sekundärschallfeld.

Ein Anwendungsbeispiel ist der Lademeisterbereich im Laderaum des Airbus A400M. Hier soll mit einem aktiven System der Schallpegel um den Kopf des Lademeisters reduziert werden. Das System besteht aus 8 Lautsprechern und 16 Fehlermikrofonen. Deren Positionen sind konstruktiv an der Kabinenwand und –decke festgelegt, eine Optimierung der Positionen ist nicht möglich. Der zugehörige adaptive Regler reduziert den Schallpegel an den Fehlermikrofonen. Von diesen ist jedoch der Kopf des Lademeisters eine Wellenlänge entfernt. Aus diesem Grund sowie durch Änderung der Temperatur, der Schwankung der elektroakustischen Komponenten und anderen Einflüssen resultieren große Unsicherheiten in der Regelstrecke. Ziel muss es daher sein, die Unsicherheiten zu berücksichtigen, um damit eine robuste Schallpegelreduktion am Kopf des Lademeisters zu erreichen.

Zur Lösung des Problems werden hier Parameter in Form von Gewichtungsmatrizen in den Regelalgorithmus eingeführt. Für den Entwurf dieser Gewichtungsmatrizen wird ein neues Verfahren entwickelt, welches die gemessenen Unsicherheiten berücksichtigt. Hierzu werden für die robuste Regelstabilität und -qualität Gütemaße formuliert. Diese erfassen die Reglergüte für den jeweils ungünstigsten Fall aufgrund der gemessenen Unsicherheiten. Anschließend wird die Reglergüte mit einem genetischen Algorithmus optimiert.

Die Methodik wird in einem Mock-up des Lademeisterbereichs des Airbus A400M angewendet. Die raumakustische Modellbildung wird über das modale und energetische Verhalten des Luftvolumens begründet. Die notwendigen Randbedingungen im Lademeisterbereich werden dann durch die Originalgeometrie und Verkleidung nachgebildet. Der Laderaum und die Anregung durch die Propeller werden modelliert. Im Mock-up werden luftfahrt-zertifizierte Komponenten (16 Fehlermikrofone, 8 Lautsprecher, Verstärker, Verkabelung) des Prototypen eingerüstet. Ein echtzeitfähiger Frequenzbereichsregler zu Ansteuerung der Lautsprecher wird implementiert.

Im Experiment und in numerischen Versuchen wird gezeigt, dass die robuste Schallpegelreduktion bei der ersten und zweiten Harmonischen um bis zu 7 dB gesteigert wird. Bei der dritten Harmonischen wird nur für einen Lastfall eine hohe Schallpegelreduktion erzielt. Die Schallpegelreduktion ist jedoch stets höher, als die des Referenzverfahrens ohne Gewich-

tungsmatrizen. Auch die maximal zulässige Lautsprecheransteuerung und die Regelstabilität werden nun bei großen Unsicherheiten eingehalten.

Die hier vorgestellte Entwurfsmethodik löst das Problem allein über Reglerparameter, teures Umplatzieren von Lautsprechern und Mikrofonen entfällt. Mit den in Matlab® implementierten Algorithmen kann der Regler beim Erstentwurf oder bei Änderung der Anforderungen konfiguriert werden. Dies erhöht die Schallpegelreduktion unter Einsatzbedingungen und senkt die Entwicklungskosten.

A Anhang

A.1. Übertragungsmatrix und Störschallfeld des Abschnitts 3.1.2.4

Die Übertragungsstrecke $\mathbf{G}$ und das Störschallfeld $\mathbf{d}$, des in Abschnitt 3.1.2.4 angenommenen ANC-Systems, sind $\left(N_{\mathrm{E}} = 6, N_{\mathrm{L}} = 3\right)$:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ j4 & 2 & 2.3 \\ -3 & 1 & j4 \\ 1 & j & 4 \\ 2 & j & .2 \\ 1 & -j2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.2853 + j0.2811 \\ -0.6161 + j0.3654 \\ 0.1578 - j0.8879 \\ -0.2233 - j0.7886 \\ 0.4929 + j0.1556 \\ 0.2597 + j0.2682 \end{bmatrix}. \qquad .(A.1)$$

A.2. Maximum eines Matrix-Vektor-Produkts

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b}$ beliebige Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,n)} & \cdots & a_{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{(m,1)} & & a_{(m,n)} & & a_{(m,N)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{(M,1)} & \cdots & a_{(M,n)} & \cdots & a_{(M,N)} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{(1)} \\ \vdots \\ b_{(n)} \\ \vdots \\ b_{(N)} \end{bmatrix}. \qquad (A.2)$$

Dann ist

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \left[\sum_{n=1}^{N} a_{(1,n)} \cdot b_{(n)} \quad \cdots \quad \sum_{n=1}^{N} a_{(m,n)} \cdot b_{(n)} \quad \cdots \quad \sum_{n=1}^{N} a_{(M,n)} \cdot b_{(n)} \right]^{\mathrm{T}} \qquad (A.3)$$

das ausgeschriebene Matrix-Vektor-Produkt und

$$\left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} a_{(m,n)} \cdot b_{(n)} \right)^2} \qquad (A.4)$$

dessen Euklidsche Norm.

Für Maximierungsprobleme der Form

$$\max_{\mathbf{A}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\|_2 \qquad \text{oder} \qquad \max_{\mathbf{b}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\|_2 \qquad (A.5)$$

in Abhängigkeit der Matrix $\mathbf{A}$ oder der Spaltenmatrix $\mathbf{b}$, lässt sich unter Anwendung der Dreiecksungleichung [95] eine obere Schranke für das Maximum angeben:

$$\max_{\mathbf{A}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\|_2 \leq \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| a_{(m,n)} \right| \cdot \left| b_{(n)} \right| \right)^2} \tag{A.6}$$

bzw.

$$\max_{\mathbf{b}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\| \leq \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| a_{(m,n)} \right| \cdot \left| b_{(n)} \right| \right)^2} \,. \tag{A.7}$$

Als abkürzende Schreibweise wird

$$\max_{\mathbf{A}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\| \leq \left\| \left| \mathbf{A} \right| \cdot \left| \mathbf{b} \right| \right\| \tag{A.8}$$

bzw.

$$\max_{\mathbf{b}} \left\| \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \right\| \leq \left\| \left| \mathbf{A} \right| \cdot \left| \mathbf{b} \right| \right\| \tag{A.9}$$

eingeführt. Die Betragsstriche $\left| \ldots \right|$ stehen für die Betragsbildung aller Elemente der Matrix- bzw. Spaltenmatrixelemente.

A.3. Lautsprecher- und Mikrofonpositionen

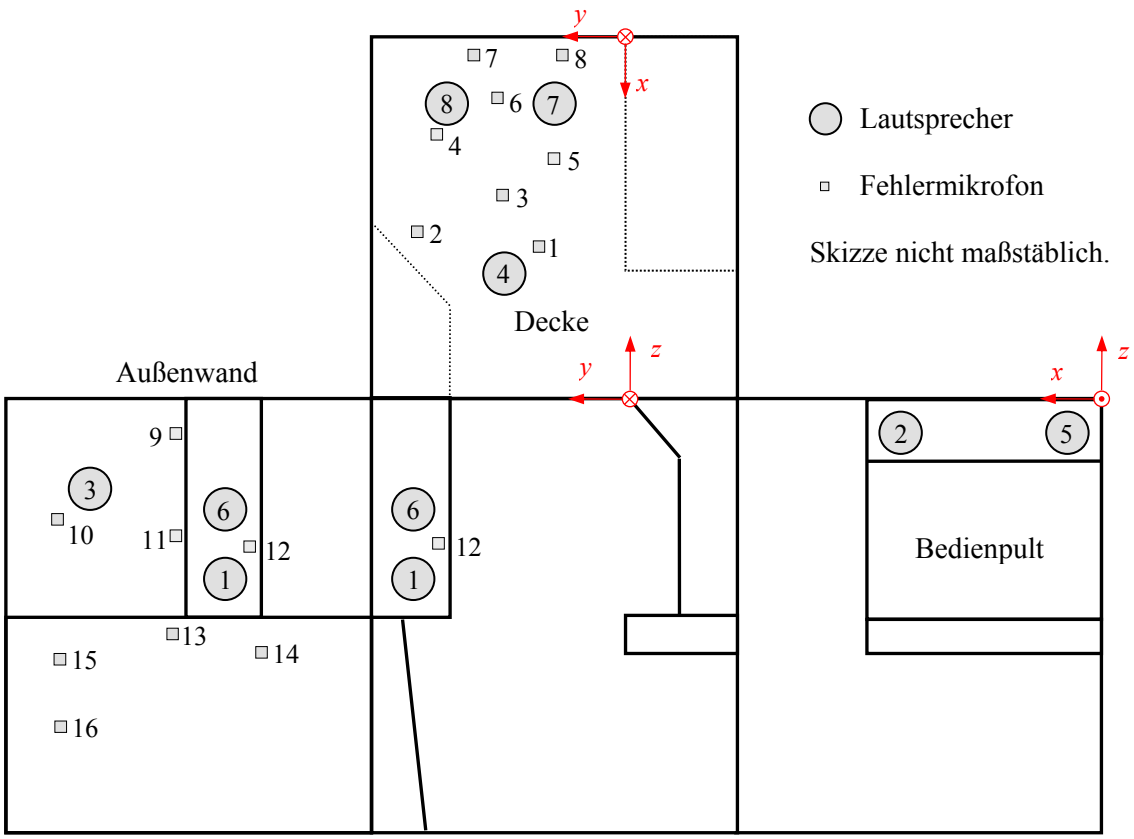
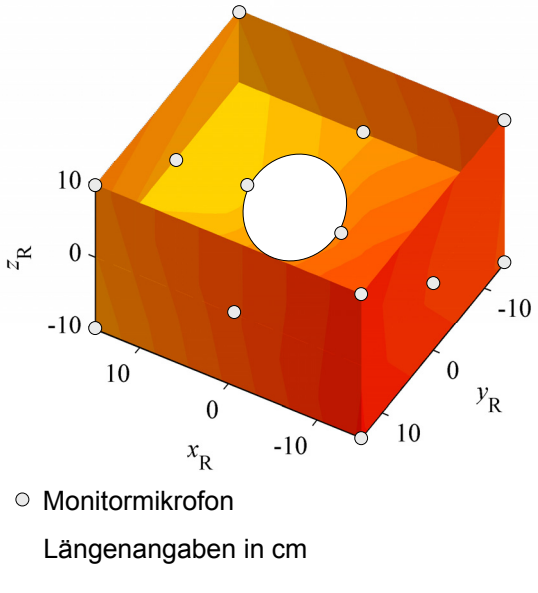


Abb. A.1: Positionen der Lautsprecher und Fehlermikrofone im Mock-up.



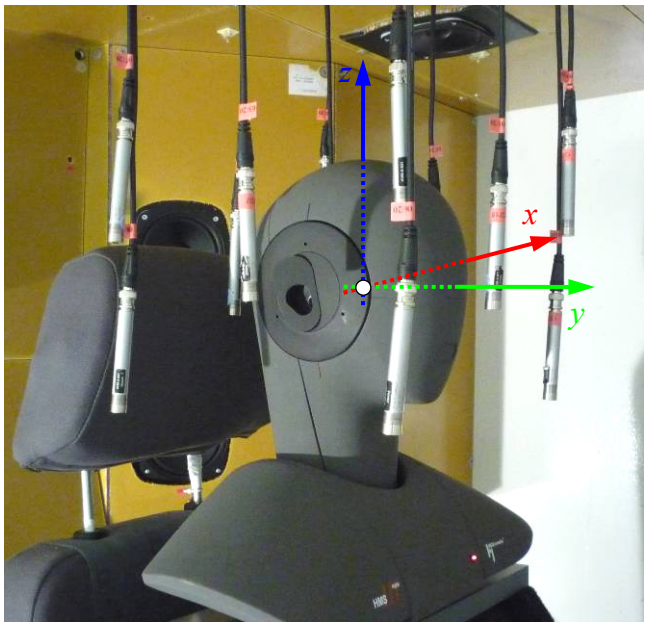


Abb. A.2: Anordnung der Monitormikrofone im Mock-up; Der Koordinatenursprung liegt in der Mitte der Verbindungsachse beider Kunstkopfohren.

A.4. Gemessene Unsicherheitsnormen

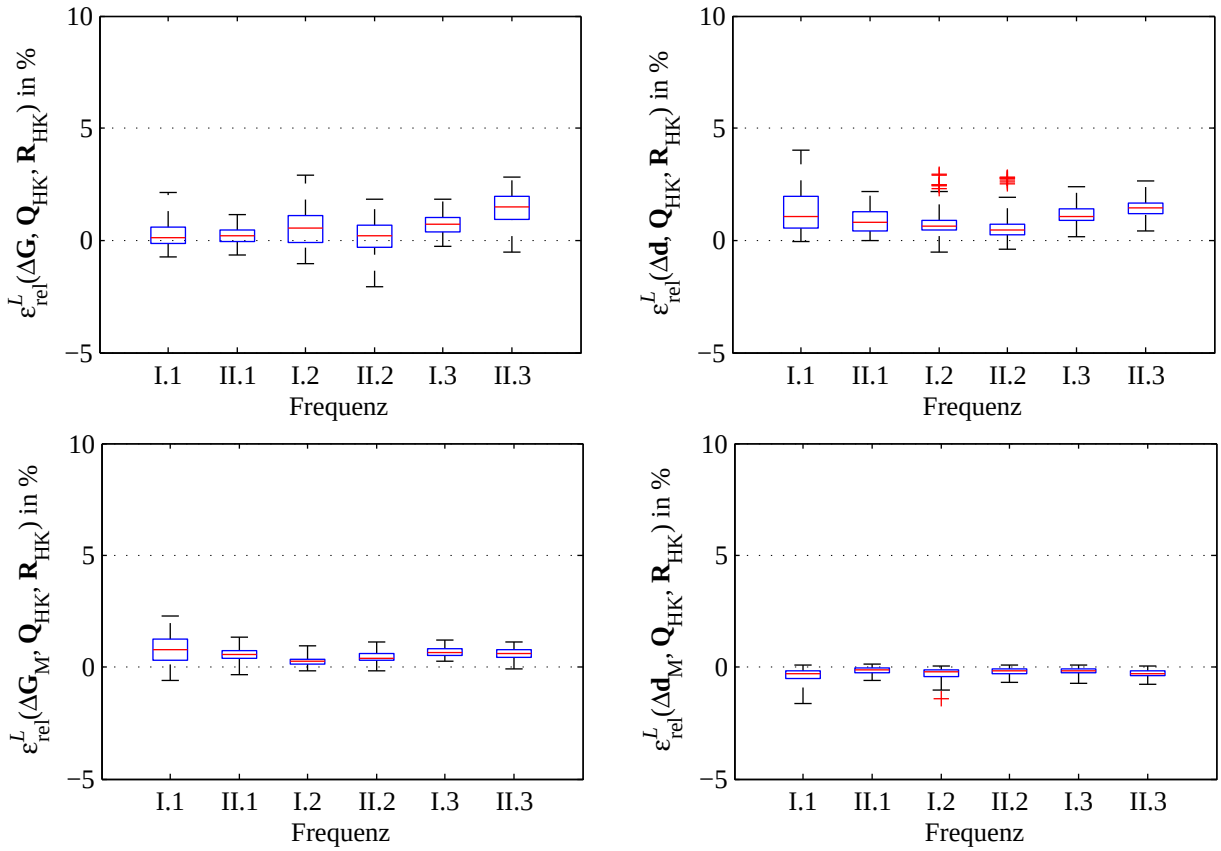
Tab. A-1: Bezogener Median der Unsicherheitsnorm aufgrund der Abweichung in den nominellen Messungen.

bezogener Median der Unsicherheitsnorm	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3
$\|\Delta\mathbf{\Sigma}\|_F / \|\mathbf{\Sigma}_0\|_F$	0,042	0,052	0,038	0,039	0,039	0,039
$\|\Delta\mathbf{d}\|_2 / \|\mathbf{d}_0\|_2$	0,043	0,027	0,060	0,103	0,048	0,024
$\|\Delta\mathbf{\Sigma}_M\|_F / \|\mathbf{\Sigma}_{M0}\|_F$	0,045	0,052	0,033	0,036	0,054	0,051
$\|\Delta\mathbf{d}_M\|_2 / \|\mathbf{d}_{M0}\|_2$	0,055	0,035	0,041	0,116	0,033	0,026

Tab. A-2: Bezogener Median der Unsicherheitsnorm aufgrund der Abweichungen in den Messungen mit den Störkörpern.

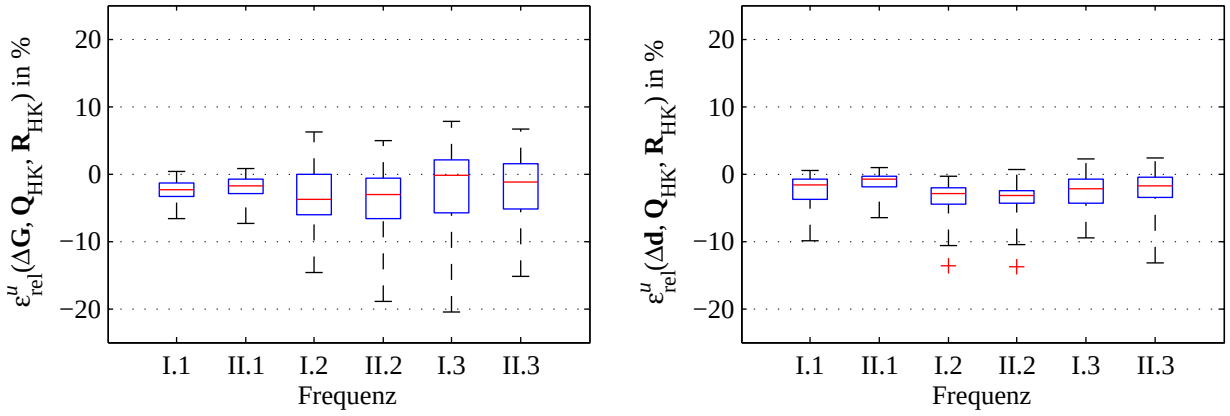
Bezogener Median der Unsicherheitsnorm	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3
$\|\Delta\mathbf{\Sigma}\|_F / \|\mathbf{\Sigma}_0\|_F$	0,037	0,033	0,126	0,117	0,140	0,124
$\|\Delta\mathbf{d}\|_2 / \|\mathbf{d}_0\|_2$	0,047	0,036	0,106	0,087	0,147	0,089
$\|\Delta\mathbf{\Sigma}_M\|_F / \|\mathbf{\Sigma}_{M0}\|_F$	0,034	0,035	0,050	0,059	0,122	0,086
$\|\Delta\mathbf{d}_M\|_2 / \|\mathbf{d}_{M0}\|_2$	0,049	0,049	0,068	0,133	0,1070	0,094

A.5. Ergänzende Diagramme zur Bewertung der Regelgütemaße



$$\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{L}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right) = \frac{\hat{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right) - \tilde{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right)}{\tilde{\tilde{L}}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}, \Delta\mathbf{G}_{\mathrm{M}}, \Delta\mathbf{d}_{\mathrm{M}}\right)}$$

Abb. A.3: Relativer Schätzfehler des Schalldruckpegels im ungünstigsten Fall bei GHK.



$$\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{u}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right) = \frac{\hat{u}_{\mathrm{opt}}^{\max}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right) - \tilde{u}_{\mathrm{opt0}}^{\max}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right)}{\tilde{u}_{\mathrm{opt0}}^{\max}\left(\Delta\mathbf{G}, \Delta\mathbf{d}\right)}$$

Abb. A.4: Relativer Schätzfehler der Lautsprecheransteuerung im ungünstigsten Fall bei GHK.

A.6. Parameter des genetischen Optimierungsverfahrens

Tab. A-3: Verwendete Parameter des genetischen Optimierungsverfahren

Parameter	Wert
Anzahl der Unterpopulationen Anz_{UnPop}	12
Generationen N_{Gen} (GHK / GPK)	500/5000
Anzahl der Individuen pro Unterpopulation N_{UnPop}	50
Migrationsintervall $N_{\mathrm{Migration}}$	50
Migrationsanteil r_{Mig}	0.2
Rekombinationsanteil r_{Cross}	0.5
Größe der Tournamentselektion N_{Tour}	4
Anzahl der Eliteindividuen N_{Elite}	2
Intervall für globale Optimierung *bend*	1/3

A.7. Ergänzende Ergebnisse des Reglerentwurfsbeispiels

Tab. A-4: Steigungswinkel des Kostengebirges an den Lösungen des robusten Reglerentwurfs.

Robuster Reglerentwurf												
Steigungs-winkel	GHK						GPK					
	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3	I.1	II.1	I.2	II.2	I.3	II.3
kleinster	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	0.0°	-0.0°	-0.1°	-0.1°	-0.0°	-0.0°	-0.0°
mittlerer	32.1°	32.4°	45.7°	40.5°	43.5°	31.0°	12.6°	17.1°	26.5°	11.3°	14.8°	10.6°
größter	87.9°	88.3°	89.3°	89.5°	89.4°	87.5°	90.0°	86.3°	89.8°	89.9°	89.9°	89.9°
Optimierungszeit in Minuten	5.0	5.2	5.0	4.6	3.7	5.3	51.5	53.5	52.8	52.2	53.6	53.0

Literaturverzeichnis

1. Wall, R., *Airbus Refines A30X Design.* Aviation Week, 2009.
2. Sano, H., T. Yamashita, und Y. Nakamura, *Recent Applications of Active Noise and Vibration Control to Automobiles*, in *ACTIVE 2002*. 2002: Southampton.
3. *RICHTLINIE 2003/10/EG DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES über Mindestvorschriften zum Schutz von Sicherheit und Gesundheit der Arbeitnehmer vor der Gefährdung durch physikalische Einwirkungen (Lärm).* Amtsblatt der Europäischen Union, 2003. **42**(38).
4. Gerner, C., *Optimale aktive Geräuschreduzierung in Flugzeugkabinen für hohe tonale Lärmpegel*, in *Professur für Mechatronik*. 2005, Helmut-Schmidt-Universität: Hamburg.
5. Kuo, S.M. und D.R. Morgan, *Active Noise Control Systems: Algorithms and DSP Implementations*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing. 1996, New York: John Wiley & Sons, Inc.
6. Elliott, S., *Signal Processing for Active Control*. Signal Processing and its Applications. 2001, London: Academic Press.
7. Hansen, C.H., *Current and Future Industrial Applications of Active Noise Control*, in *ACTIVE 2004*. 2004: Williamsburg.
8. Kuo, S.M. und D.R. Morgan, *Review of DSP Algorithms for Active Noise Control*, in *International Conference on Control Applications*. 2000: Anchorage, Alaska.
9. Bjarnason, E. *Active noise cancellation using a modified form of the filtered-x LMS algorithm*. in *6th European Signal Processing Conference*. 1992.
10. Kochan, K., D. Sachau, und T. Kletschkowski. *Regelalgorithmen zur Schallreduktion*. in *34th German Annual Conference on Acoustics, DAGA 2008*. 2008. Dresden.
11. Pabst, O., T. Kletschkowski, und D. Sachau. *Combined Active Noise Control and Audio in a Light Jet*. in *16. International Congress on Sound and Vibration*. 2009. Krakow.
12. Douglas, S.C. *The fast affine projection algorithm for active noise control*. 1995.
13. Hänsler, E. und G. Schmidt, *Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach*. Wiley Series in Adaptive and Learning Systems for Signal Processing. 2004, Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
14. Hyun-Chool, S. und A.H. Sayed. *Transient behavior of affine projection algorithms*. 2003.
15. Hyun-Chool, S. und A.H. Sayed, *Mean-square performance of a family of affine projection algorithms.* Signal Processing, IEEE Transactions on [see also Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on], 2004. **52**(1): p. 90-102.
16. Hyun-Chool, S., S. Woo-Jin, und A.H. Sayed, *Mean-square performance of data-reusing adaptive algorithms.* Signal Processing Letters, IEEE, 2005. **12**(12): p. 851-854.
17. Bouchard, M., *Multichannel affine and fast affine projection algorithms for active noise control and acoustic equalization systems.* Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on, 2003. **11**(1): p. 54-60.
18. Bouchard, M. und F. Albu. *The multichannel Gauss-Seidel fast affine projection algorithm for active noise control*. 2003.
19. Snyder, S.D. *Active control using IIR filters-a second look*. 1994.
20. Crawford, D.H. und R.W. Stewart, *Adaptive IIR filtered-v algorithms for active noise control.* Journal of Acoustical Society of America, 1997. **101**(4): p. 2097-2103.
21. Jacobson, C.A., et al., *Stability of active noise control algorithms.* Signal Processing Letters, IEEE, 2001. **8**(3): p. 74-76.

22. Schirmacher, R., *Schnelle Algorithmen für adaptive IIR-Filter und ihre Anwendung in der aktiven Schallfeldbeeinflussung*, in *Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Fachbereich*. 1995, Georg-August-Universität: Göttingen.

23. Sicuranza, G.L. und A. Carini, *Filtered-X affine projection algorithm for multichannel active noise control using second-order Volterra filters.* Signal Processing Letters, IEEE, 2004. **11**(11): p. 853-857.

24. Kuo, S.M. und W. Hsien-Tsai. *Active noise control systems with adaptive nonlinear filters*. 2004.

25. Kuo, S.M. und W. Hsien-Tsai, *Nonlinear adaptive bilinear filters for active noise control systems.* Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on [Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on], 2005. **52**(3): p. 617-624.

26. Bouchard, M., B. Paillard, und D. Chon Tan Le, *Improved training of neural networks for the nonlinear active control of sound and vibration.* Neural Networks, IEEE Transactions on, 1999. **10**(2): p. 391-401.

27. Cabell, R., D. Palumbo, und J. Vipperman, *A principal component feedforward algorithm for active noise control: flight test results.* Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 2001. **9**(1): p. 76-83.

28. Cabell, R.H. und C.R. Fuller, *A PRINCIPAL COMPONENT ALGORITHM FOR FEEDFORWARD ACTIVE NOISE AND VIBRATION CONTROL.* Journal of Sound and Vibration, 1999. **227**(1): p. 159-181.

29. Kuo, S.M., R.K. Yenduri, und A. Gupta, *Frequency-domain delayless active sound quality control algorithm.* Journal of Sound and Vibration, 2008. **318**(4-5): p. 715-724.

30. Das, D.P., G. Panda, und S.M. Kuo, *New block filtered-X LMS algorithms for active noise control systems.* Signal Processing, IET, 2007. **1**(2): p. 73-81.

31. Rafaely, B. und S.J. Elliott, *H^2/H^∞ active control of sound in a headrest: design and implementation.* Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 1999. **7**(1): p. 79-84.

32. Ray, L.R., et al., *Hybrid feedforward-feedback active noise reduction for hearing protection and communication.* The Journal of the Acoustical Society of America, 2006. **120**(4): p. 2026-2036.

33. Graf, J. *Feedback Control for Active Noise Reduction in Headsets*. in *NAG/DAGA 2009 International Conference on Acoustics*. 2009. Rotterdam.

34. Nelson, P.A. und S. Elliott, *Active Control of Sound*. 2000, San Diiego: Academic Press.

35. *PXC 250: Wellness für die Ohren http://www.sennheiser.com/sennheiser/home_de.nsf /root/press_archive_3_2002_pxc250*. 2002 [zitiert 2009 27.05.].

36. *BOSE - Acoustic Noise Cancelling Headphones http://www.bose.de/DE/de/home-entertainment/personal-audio/headphones/acoustic-noise-cancelling-headphones/index.jsp*. 2009 [zitiert 2009 27.05.].

37. Foudhaili, H., et al. *Feedback-Feedforward aktive Lärmkompensation für den Kopfhörer*. in *DAGA 2007 - 33. Jahrestagung für Akustik*. 2007. Stuttgart.

38. Hinchliffe, R., et al., *Broadband Active Control in Practice*, in *ACTIVE 2004*. 2004: Williamsburg, Virginia.

39. Sachau, D., T. Kletschkowski, und K. Kochan. *Active Noise Reduction in Bedrooms*. in *IMAC Conference and Exposition on Structural Dynamics*. 2008. Orlando, Florida.

40. Kletschkowski, T., D. Sachau, und S. Böhme. *Aktive Lärmminderung in Schlafräumen mit realen und virtuellen Fehlersensoren*. in *DAGA 2007 - 33. Jahrestagung für Akustik*. 2007. Stuttgart.

41. Romeu, J., et al. *Local Active Noise Attenuation for Passengers in small Aircraft*. in *11. International Congress on Sound and Vibrations*. 2004. St. Petersburg.

42. Viscardi, M., N. Rusciano, und L. Lecce. *Active Noise Control within a General Aviation Aircraft*. in *11. International Congress on Sound and Vibration*. 2004. St. Petersburg.

43. Elliott, S.J. und M. Jones, *An active headrest for personal audio.* The Journal of the Acoustical Society of America, 2006. **119**(5): p. 2702-2709.

44. Matthew, J. und S.J. Elliott. *An Active Headrest for Personal Audio*. in *International Workshop on Acoustic and Echo Noise Control*. 2005. Eindhoven.

45. Pawelczyk, M., *Adaptive noise control algorithms for active headrest system.* Control Engineering Practice, 2004. **12**(9): p. 1101-1112.

46. Cazzolato, B. *An adaptive LMS virtual Microphone*. in *ACTIVE 2002*. 2002. Southhampton.

47. Garcia-Bonito, J., S.J. Elliott, und C.C. Boucher, *Generation of zones of quiet using a virtual microphone arrangement.* The Journal of the Acoustical Society of America, 1997. **101**(6): p. 3498-3516.

48. Pawelczyk, M., *Design and Analysis of A Virtual-Microphone Active Noise Control System*, in *Twelfth International Congress on Sound and Vibration*. 2005: Lissabon.

49. Böhme, S., D. Sachau, und H. Breitbach. *Optimization of actuator and sensor positions for an active noise reduction system*. in *Smart Structures and Materials 2006: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*. 2006. San Diego, CA, USA: SPIE.

50. Sachau, D., et al., *Vorrichtung und Verfahren zur aktiven Schalldämpfung in einem geschlossenen Innenraum*, in *08.01.2009*, D.P.-u. Markenamt, Editor. 2009: Deutschland.

51. Hasegawa, S., et al., *The Development of an Active Noise Control System for Automobiles.* Society of Automotive Engineers, 1992. **101**(6): p. 1482-1491.

52. Sas, P. und W. Dehandschutter. *Active Structural and Acoustic Control of Structure-borne Road Noise in a Passenger Car*. in *ISAAC 19*. 2008. Leuven.

53. Scheuren, J., R. Lippold, und J. Winkler, *Implementation of an Active Noise Control System in a Van*, in *ACTIVE 97*. 1997: Budapest.

54. Sano, H., et al., *Active control system for low-frequency road noise combined with an audio system.* Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on, 2001. **9**(7): p. 755-763.

55. Schirmacher, R., et al., *Practical Aspects of Implementing Car Interior Active Noise Control Systems*, in *Acoustics 08*. 2008: Paris.

56. Ji, M.J. und S.M. Kuo. *An active harmonic noise equalizer*. in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1993. ICASSP-93., 1993 IEEE International Conference on*. 1993.

57. Scheuren, J., R. Schirmacher, und J. Hobelsberger, *Active Design of Automotive Engine Sound*, in *INTERNOISE 2002*. 2002: Dearborn, Michigan.

58. Rees, L.E. und S.J. Elliott, *Adaptive algorithms for active sound-profiling.* Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on, 2006. **14**(2): p. 711-719.

59. Kobayashi, Y., et al., *Active Sound Control in Automobiles*, in *INTERNOISE 2008*. 2008: Shanghai.

60. Mackay, A. und S. Kenchington, *Active Control of Noise and Vibration - a Review of Automotive Applications*, in *ACTIVE 2004*. 2004: Williamsburg, Virginia.

61. Oh, S.-H., H.-s. Kim, und Y. Park, *Active control of road booming noise in automotive interiors.* The Journal of the Acoustical Society of America, 2002. **111**(1): p. 180-188.

62. *Honda Accord Interior*. 2007.

63. Elliott, S.J., et al., *In-flight Experiments on the Active Control of Propeller-Induced Cabin Noise.* Journal of Sound and Vibration, 1990. **140**(2): p. 219-238.

64. Borchers, I.U., et al., *Advanced Study for Active Noise Control in Aircraft (ASANCA)*, in *DGLR/AIAA 14th Aeroacoustics Conference*. 1992: Aachen.

65. Borchers, I.U., et al., *Selected Flight Test Data and Control System Results of the CEC BRITE/EURAM ASANCA Study*, in *INTERNOISE 93*. 1993: Leuven, Belgien.

66. *Flugzeug-Lexikon: Saab 2000*. 2009 [zitiert 2009 27. April]; Zugriff über: http://www.airliners.de/industrie/flugzeuglexikon/description.php?aircraftid=80&manufacturerid=26.

67. Jackson, P.J. und C.F. Ross, *Application of Active Noise Control in Corporate Aircraft*, in *ASME International Congress and Exposition, Active Control of Vibration and Noise*. 1996: Atlanta, GA, USA.

68. Leth, S. und G.H. William, *Optimization Methods for Actuator and Sensor Positions in ANC Systems for Aircraft*, in *INTERNOISE 99*. 1999: Fort Lauderdale.

69. Gorman, J., R. Hinchliffe, und I. Stothers, *Active Sound Control on the Flight Deck of a C130 Hercules*, in *Active 04*. 2004: Williamsburg, Virgina.

70. Emborg, U., *Cabin Noise Control in the Saab 2000 high-speed Turboprop Aircraft*, in *ISMA 23 International Conference on Noise and Vibration Engineering*. 1998: Leuvem.

71. Emborg, U., et al., *Active and Passive Noise Control in Practice on the Saab 2000 high speed turboprop*, in *4th AIAA/CEAS Aeronautics Conference*. 1998: Toulouse.

72. Müller, K., *Entwurf robuster Regelungen*. 1996, Stuttgart: Teubner Verlag.

73. Zames, G., *On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems Part one: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity.* Automatic Control, IEEE Transactions on, 1966. **11**(2): p. 228-238.

74. Zames, G. und B. Francis, *Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness.* Automatic Control, IEEE Transactions on, 1983. **28**(5): p. 585-601.

75. Doyle, J. und G. Stein, *Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis.* Automatic Control, IEEE Transactions on, 1981. **26**(1): p. 4-16.

76. Doyle, J.C., et al., *State-space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems.* Automatic Control, IEEE Transactions on, 1989. **34**(8): p. 831-847.

77. Elliott, S.J., *Adaptive Methods in Active Control*, in *MOVIC 98*. 1998: Zürich.

78. Omoto, A. und S.J. Elliott. *The effect of structured uncertainty in multichannel feedforward control systems*. in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996. ICASSP-96. Conference Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*. 1996.

79. Omoto, A. und S.J. Elliott, *The effect of structured uncertainty in the acoustic plant on multichannel feedforward control systems.* Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on, 1999. **7**(2): p. 204-212.

80. Boucher, C.C., S.J. Elliott, und P.A. Nelson, *Effect of errors in the plant model on the performance of algorithms for adaptive feedforward control.* Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F, 1991. **138**(4): p. 313-319.

81. Rupp, M. und A.H. Sayed, *Robust FxLMS algorithms with improved convergence performance.* Speech and Audio Processing, IEEE Transactions on, 1998. **6**(1): p. 78-85.

82. Fraanje, R., S.J. Elliott, und M. Verhaegen, *Robustness of the Filtered-X LMS Algorithm - Part II: Robustness Enhancement by Minimal Regularization for Norm Bounded Uncertainty.* Signal Processing, IEEE Transactions on, 2007. **55**(8): p. 4038-4047.

83. Fraanje, R., M. Verhaegen, und S.J. Elliott, *Robustness of the Filtered-X LMS Algorithm— Part I: Necessary Conditions for Convergence and the Asymptotic Pseudospectrum of Toeplitz Matrices.* Signal Processing, IEEE Transactions on, 2007. **55**(8): p. 4029-4037.

84. Elliott, S.J. und K.H. Back, *Effort constraints in adaptive feedforward control.* Signal Processing Letters, IEEE, 1996. **3**(1): p. 7-9.

85. Elliott, S.J. und J. Rex. *Adaptive algorithms for underdetermined active control problems*. in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1992. ICASSP-92., 1992 IEEE International Conference on*. 1992.

86. Rossetti, D.J., M.R. Jolly, und S.C. Southward, *Control effort weighting in feedforward adaptive control systems.* The Journal of the Acoustical Society of America, 1996. **99**(5): p. 2955-2964.

87. De Fonseca, P., P. Sas, und H. Van Brussel, *Robust Design and Robust Stability Analysis of Active Noise Control Systems.* Journal of Sound and Vibration, 2001. **243**(1): p. 23-42.

88. Qiu, X. und C.H. Hansen, *Applying effort constraints on adaptive feedforward control using the active set method.* Journal of Sound and Vibration, 2003. **260**(4): p. 757-762.

89. Baek, K.H. und S.J. Elliott, *The Effects of Plant and Disturbance Uncertainties in Active Control Systems on the Placement of Transducers.* Journal of Sound and Vibration, 2000. **230**(2): p. 261-289.

90. Kim, S. und Y. Park, *Comments on "The effects of plant and disturbance uncertainties in active control systems on the placement of transducers".* Journal of Sound and Vibration, 2004. **278**(1-2): p. 445-446.

91. Baek, K.H. und S.J. Elliott. *Unstructured uncertainty in transducer selection for multi-channel active control systems*. in *IEE Colloquium On Active Sound And Vibration Control*. 1997.

92. *Saab 2000 Typical Layout*. 2009 [zitiert 2009 05.06.2009]; Zugriff über: http://www.saabaircraftleasing.com/prod/layout.asp?Mod=2000.

93. Veit, I., *Technische Akustik*. Kamprath-Reihe. 2005, Würzburg: Vogel Verlag.

94. Ackermann, J., *Robuste Regelung: Analyse und Entwurf von linearen Regelsystemen mit unsicheren physikalischen Parametern*. 1993, Berlin: Springer Verlag.

95. Hoffmann, A., B. Marx, und W. Vogt, *Mathematik für Ingenieure I*. 2005, München: Pearson Studium.

96. Lunze, J., *Regelungstechnik I*. 2006, Berlin: Springer Verlag.

97. Kochan, K., et al. *Active Noise Control in a semi-closed Aircraft Cabin*. in *International Conference on Noise & Vibration Engineering*. 2008. Leuven, Belgium.

98. *DIN 45641 Mittelung von Schallpegeln*. 1990, Beuth Verlag: Berlin.

99. Stewart, G.W. und J.-g. Sun, *Matrix Perturbation Theory*. Computer Science and Scientific Computing. 1990, San Diego: Academic Press, Inc.

100. Golub, G.H. und C.F.v. Loan, *Matrix Computation*. 3 ed. 1996, London: The Johns Hopkins University Press.

101. Schwehm, M., *Globale Optimierung mit massiv parallelen genetischen Algorithmen*, in *Institu für mathematische Maschinen und Datenverarbeitung (Informatik)*. 1997, Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg: Erlangen.

102. Boyd, S. und L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. 2004, Cambridge: Cambridge University Press.

103. Pohlheim, H., *Evolutionäre Algorithmen*. 1999, Berlin: Springer Verlag.

104. Weicker, K., *Evolutionäre Algorithmen*. 2002, Stuttgart: Teubner Verlag.

105. Pal, N., C. Jin, und W. Lim, *Handbook of Exponential and Related Distributions for Engineers and Scientists*. 2006, Boca Raton, USA: Taylor & Francis Group, LLC.

106. Meyer, E. und E.-G. Neumann, *Physikalische und Technische Akustik*. 1979: Vieweg Verlag.

107. Cremer, L. und H.A. Müller, *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik*. Vol. I. 1978, Stuttgart: Hirzel Verlag.

108. Brommundt, E. und D. Sachau, *Schwingungslehre mit Maschinendynamik*. 2008, Wiesbaden: Teubner Verlag.

109. Craig, R.R. *Coupling of Substructures for Dynamic Analyses: An Overview*. in *AIAA Dynamics Specialists Conference*. 2000. Atlanta, GA.

110. Qiu, X. und C.H. Hansen, *Applying effort constrints on adaptive feedforward control using the active set method.* Journal of Sound and Vibration, 2003. **260**(4).

111. Zölzer, U., *Digitale Audiosignaleverarbeitung*. 1997, Wiesbaden: Teubner Verlag.

112. Weizel, E., *Robuste Auslegung eines ANC-Reglers mit Gewichtungsmatrix*, in *Diplomarbeit*. 2009, Helmut-Schmidt-Universität: Hamburg.

113. *DIN V ENV 13005 Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* 1999, Beuth Verlag: Berlin.

114. Kühlmeyer, M., *Statistische Auswertungsmethoden für Ingenieure*. 2001, Berlin: Springer Verlag.

115. Kochan, K., E. Weizel, und D. Sachau, *Evaluation of the Stability and Performance of an uncertain Active Noise Control System*, in *Active 2009*. 2009: Ottawa, Canada.

116. de Jong, K.A., *Evolutionary Computation: A unified approach*. 2006, Cambridge, MA, USA: MIT Press.

117. The MathWorks. *Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox™ 2 User's Guide*. 2008 [zitiert 2009 14.04.].

118. Harrer, H., *Ordnungsreduktionsverfahren*. 2002, München: Richard Pflaum GmbH.

119. Kochan, K. und D. Sachau, *Robust Parameter Design of an Adaptive Multi-Channel Active Noise Controller*, in *Internationalen Konferenz für Akustik NAG/DAGA 2009*. 2009: Rotterdam, Niederlande.

Lebenslauf

Kay Kochan

22.10.1978	geboren in Zwickau
1985 – 1992	Grundschule in Zwickau
1992 – 1995	Realschule in Zwickau
1995 – 1998	Technisches Gymnasium Werdau Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
seit 07/1998	Dienst bei der Bundeswehr Laufbahn: Offizier des Truppendienst im Heer
10/2001 – 04/2005	Maschinenbau Studium Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg Vertiefungsrichtung: Angewandte Mechanik Abschluss: Diplom-Ingenieur
09/2004 – 04/2005	Auslandsstudium am Dartmouth College Hanover, NH, USA DAAD-Stipendium
05/2005 – 06/2006	Verwendung in der Instandsetzungstruppe
07/2006 – 06/2009	Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. D. Sachau Professur für Mechatronik Fakultät Maschinenbau Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
seit 07/2009	Rüstungsoffizier im Heeresamt in Köln