



HELMUT SCHMIDT  
UNIVERSITÄT

Universität der Bundeswehr Hamburg

Simone Mesecke-Rischmann

# **Modellierung von flachen piezoelektrischen Schalen mit zuverlässigen finiten Elementen**

Bericht aus dem Institut für Mechanik  
Heft August 2004

© Simone Mesecke-Rischmann, 2004

---

Alle Rechte, insbesondere die Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu vervielfältigen.

Herausgeber:

---

Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Lammering  
Institut für Mechanik  
Helmut-Schmidt-Universität  
Universität der Bundeswehr Hamburg  
Hamburg, 2004.  
ISSN 0939-2343

Modellierung von flachen piezoelektrischen Schalen  
mit zuverlässigen finiten Elementen

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs  
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Simone Mesecke-Rischmann

aus Alfeld

Hamburg 2004

Referent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Lammering  
Korreferent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. U. Gabbert

Tag der mündlichen Prüfung: 24. August 2004

## Zusammenfassung

Die Arbeit stellt neue Möglichkeiten der Modellierung von dünnwandigen flachen Verbundschalen mit einem Sandwich-Aufbau vor, bei denen auf der Oberfläche einer passiven Mittelschicht dünne piezoelektrische Sensoren und Aktoren appliziert werden. Für die Berechnung dieser geschichteten aktiven Strukturen werden zuverlässige und robuste finite Schalenelemente entwickelt, die auch bei verzerrten Netzgeometrien keine Versteifungseffekte aufweisen und frei von Nullenergiemoden sind.

Ein besonderes Augenmerk gilt des Weiteren einer physikalisch präzisen Modellbildung, zum Einen hinsichtlich des elektrischen Potentials, zum Anderen hinsichtlich des piezoelektrischen Werkstoffverhaltens, insbesondere der auch im Kleinsignalbereich auftretenden Nichtlinearitäten. Verschiedene Varianten zur Modellverbesserung werden bei der Entwicklung von piezoelektrischen Sandwichelementen berücksichtigt und hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Strukturanalyse untersucht.

Im Einzelnen wird behandelt:

Für Aktoren und Sensoren, die auf die passive Struktur appliziert werden, ist eine diskrete Approximation des elektrischen Potentials in der Schalenebene durch einen konstanten Ansatz ausreichend. Die Unterschiede zu einer kontinuierlichen Beschreibung bei bilinearen Ansätzen werden aufgezeigt.

Im Gegensatz zur hauptsächlich verwendeten linearen Approximation für das elektrische Potential in der Dickenrichtung liefern analytische Untersuchungen einen quadratischen Verlauf. Dies wird bei der Entwicklung eines Schalenelementes berücksichtigt.

Für eine weitergehende Betrachtung der Auswirkungen der vollständigen elektromechanischen Kopplung wird eine erweiterte Variationsformulierung entwickelt. Durch die Einarbeitung der Beziehung zwischen dem elektrischen Potential und dem elektrischen Feld als Nebenbedingung ist diese nur noch in schwacher Form zu erfüllen, so dass bei Verwendung dieses Elementes alle Beiträge zur inneren Arbeit berücksichtigt werden, die aus der elektromechanischen Kopplung resultieren. Das sich hieraus ergebende Schalenelement mit erweiterten Ansätzen wird mit denen verglichen, die einen linearen und einen quadratischen Ansatz für das elektrische Potential verwenden. Hierdurch wird eine Abschätzung der für die Genauigkeit des mathematischen Modells notwendigen Approximation des elektrischen Potentials möglich.

Die schon im Kleinsignalbereich bei experimentellen Untersuchungen festgestellten nichtlinearen Effekte werden unter Verwendung einer konsistenten Linearisierung in eine Elementformulierung integriert. Schließlich werden die Unterschiede zwischen der linearen und nichtlinearen Modellierung des Werkstoffverhaltens anhand numerischer Beispiele untersucht.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole</b>	<b>VIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Adaptive Strukturen . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	3
1.2.1 Finite Elemente für flächige piezoelektrische Strukturen . . . . .	3
1.2.2 Methoden zur Entwicklung von zuverlässigen Schalenelementen . . . . .	5
1.2.3 Erweiterungen bei der Modellbildung . . . . .	6
1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Mechanische und elektrische Grundgleichungen</b>	<b>12</b>
2.1 Kontinuumsmechanische Betrachtungen . . . . .	12
2.1.1 Kinematik . . . . .	13
2.1.2 Bilanz- und Erhaltungssätze . . . . .	15
2.2 Elektrische Betrachtungen - Maxwellsche Gleichungen . . . . .	15
2.3 Mechanische und elektrische Randbedingungen . . . . .	18
2.4 Die schwache Form des Gleichgewichts - Variationsprinzipie . . . . .	19
2.4.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeiten . . . . .	19
2.4.2 Das Prinzip von Hamilton . . . . .	20
2.4.3 Mehrfeldvariationsprinzipie . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Theorie der Piezoelektrizität</b>	<b>24</b>
3.1	Phänomenologische Betrachtungen von Ferroelektrika . . . . .	24
3.1.1	Mikromechanische Betrachtungen . . . . .	25
3.1.2	Makromechanische Betrachtung . . . . .	26
3.2	Entwicklung von Materialmodellen . . . . .	28
3.2.1	Potenziale und Zustandsgleichungen . . . . .	29
3.2.2	Lineares Materialmodell für den Kleinsignalbereich . . . . .	31
3.2.3	Nichtlineare Modelle für den Kleinsignalbereich . . . . .	32
3.2.4	Nichtlineare Modelle für den Großsignalbereich . . . . .	35
3.2.5	Konjugierte Materialmodelle für den Kleinsignalbereich . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Theorie der flachen piezoelektrischen Schale</b>	<b>39</b>
4.1	Kinematik . . . . .	39
4.2	Elektrisches Potenzial . . . . .	41
4.3	Zweidimensionale Stoffgesetze für Piezoelektrika . . . . .	43
4.3.1	Lineares Stoffgesetz für den Kleinsignalbereich . . . . .	44
4.3.2	Nichtlineares Stoffgesetz für den Kleinsignalbereich . . . . .	45
4.3.3	Konjugiertes lineares Stoffgesetz für den Kleinsignalbereich . . . . .	46
4.4	Folgerungen für das elektrische Potenzial . . . . .	46
4.5	Schnittgrößen für Zweifeldvariationsformulierungen . . . . .	49
4.5.1	Lineare Schnittgrößen bei linearem elektrischem Potenzial . . . . .	49
4.5.2	Lineare Schnittgrößen bei quadratischem elektrischem Potenzial . . . . .	51
4.5.3	Nichtlineare Schnittgrößen bei linearem elektrischem Potenzial . . . . .	52
4.6	Lineare Schnittgrößen für Dreifeldvariationsformulierung . . . . .	53
4.7	Zweifeldvariationsformulierungen . . . . .	55
4.7.1	Lineare Schalenformulierung bei linearem elektrischem Potenzial . . . . .	55
4.7.2	Lineare Schalenformulierung bei quadratischem elektrischem Potenzial . . . . .	56
4.7.3	Nichtlineare Schalenformulierung bei linearem elektrischem Potenzial . . . . .	57
4.8	Lineare Dreifeldvariationsformulierung . . . . .	58

---

<b>5</b>	<b>Finite Elemente für flache piezoelektrische Schalen</b>	<b>60</b>
5.1	Approximation der Kinematik . . . . .	61
5.2	Behandlung von Versteifungseffekten . . . . .	63
5.2.1	Phänomene . . . . .	63
5.2.2	Methoden zur Vermeidung von Versteifungseffekten . . . . .	65
5.2.3	Die Assumed Natural Strain Methode . . . . .	66
5.3	Finite Schalenelemente aus Zweifeldvariationsformulierung . . . . .	70
5.3.1	Lineares elektrisches Potenzial mit vier elektrischen Freiheitsgraden pro Schicht . . . . .	70
5.3.2	Lineares elektrisches Potenzial mit einem elektrischen Freiheitsgrad pro Schicht . . . . .	72
5.3.3	Quadratisches elektrisches Potenzial mit vier elektrischen Freiheits- graden pro Schicht . . . . .	73
5.3.4	Nichtlineare Schalenformulierung mit linearem elektri- schem Potenzial und vier elektrischen Freiheitsgraden pro Schicht . . . . .	74
5.4	Finite Schalenelemente aus Dreifeldvariationsformulierung . . . . .	77
5.5	Verfahren zur numerischen Berechnung . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Beispiele</b>	<b>83</b>
6.1	Ziele der numerischen Untersuchungen . . . . .	84
6.2	Aktorischer und sensorischer Betrieb eines geschichteten Kragträgers . . . . .	85
6.2.1	Aktorischer Betrieb . . . . .	86
6.2.2	Sensorischer Betrieb . . . . .	88
6.3	Eingespannte Platte bei aktorischem Betrieb . . . . .	89
6.4	Formadaption einer quadratischen Platte bei mechanischer Belastung . . . . .	92
6.4.1	Formkontrolle einer gelenkig gelagerten Platte . . . . .	92
6.4.2	Formkontrolle einer punktgelagerten Platte . . . . .	95
6.5	Schwingungsanalyse einer Rechteckplatte mithilfe von Sensoren . . . . .	96
6.6	Flach gekrümmte Schale unter Einzellast . . . . .	99
6.7	Physikalisch nichtlineare Strukturen . . . . .	102
6.7.1	Voruntersuchungen . . . . .	102
6.7.2	Geschichteter Balken im aktorischen Betrieb . . . . .	104
6.7.3	Gelenkig gelagerte Rechteckplatte im aktorischen Betrieb . . . . .	106

<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>108</b>
<b>A Identifikation der Langrangeschen Multiplikatoren</b>	<b>111</b>
<b>B Linearisierung</b>	<b>113</b>
B.1 Linearisierung von Materialgleichungen . . . . .	114
B.2 Linearisierung der Variationsformulierung . . . . .	115
<b>C Analytische Näherungslösung für Schwingungsanalyse</b>	<b>116</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>119</b>

# Bildverzeichnis

2.1	Darstellung eines materiellen Körpers $\mathcal{B}$ in der Referenz- und Momentan- konfiguration . . . . .	13
2.2	Elektrischer Hüllenfluss durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens . .	17
3.1	Schematische Darstellung einer Probe aus piezoelektrischem Material im depolarisierten Zustand unterhalb der Curietemperatur $T_c$ . . . . .	25
3.2	Schematische Darstellung einer Einheitszelle oberhalb und unterhalb der Curietemperatur $T_c$ . . . . .	25
3.3	Schematische Darstellung der dielektrischen Hysterese unter Angabe des jeweiligen Polarisationszustandes . . . . .	27
3.4	Schematische Darstellung der Schmetterlingshysterese unter Angabe des jeweiligen Polarisationszustandes . . . . .	28
3.5	Beispiel einer Balkenstruktur mit applizierten Keramiken mit nichtlinearem Verhalten der Piezoelektrika im Kleinsignalbereich, vgl. NGUYEN [89] . . .	33
4.1	Kinematische Größen für eine flache piezoelektrische Sandwichschale mit zwei aktiven Deckschichten und einer passiven Mittelschicht . . . . .	40
4.2	Randbedingungen zur Bestimmung des elektrischen Potentials . . . . .	42
4.3	Linearer Verlauf des elektrischen Potentials und konstanter Verlauf des elektrischen Feldes aufgetragen für die piezoelektrischen Schichten . . . . .	43
4.4	Quadratischer Verlauf des elektrischen Potentials und linearer Verlauf des elektrischen Feldes aufgetragen für die piezoelektrischen Schichten . . . . .	48
5.1	Isoparametrisches Element: Abbildung eines schiefwinkligen vier-Knotenele- mentes auf das Einheitsquadrat . . . . .	61
5.2	Allgemeines vier-Knotenelement im natürlichen $rs$ - und kartesischen $XY$ - Koordinatensystem . . . . .	67
5.3	Beispielhafte Darstellung einer linear-konstanten Ansatzfunktion für die $s$ -Richtung . . . . .	69

---

6.1	Geschichteter Kragträger mit entgegengesetzter Polarisierung . . . . .	85
6.2	Biegelinie des Kragträgers . . . . .	86
6.3	Finite-Elemente-Netz für verschieden starke Verzerrungen $e$ der Elemente .	87
6.4	Maximale Durchbiegung in Abhängigkeit von den Verzerrungen $e$ der Elemente . . . . .	88
6.5	Elektrisches Potenzial entlang der Balkenachse . . . . .	88
6.6	Allseitig eingespannte Stahlplatte mit applizierten piezoelektrischen Aktoren	89
6.7	Verschiebungen entlang der Linie $y = 0.0$ mm . . . . .	91
6.8	Verschiebungen entlang der Linie $y = 81.2$ mm . . . . .	91
6.9	Verzerrtes Netz mit $5 \times 5$ Elementen für ein Viertel des Systems . . . . .	93
6.10	Vergleich verschiedener Stadien der aktiven Formkontrolle für die Elemente SM2F $\Phi$ 1 und SM2F $\Phi$ 1red, dargestellt entlang der Symmetrieachse für ein unverzerrtes und ein verzerrtes FE-Netz . . . . .	94
6.11	Verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle einer gelenkig gelagerten Platte unter mittig angreifender Einzellast . . . . .	94
6.12	Vergleich der Elemente SM2F $\Phi$ 1 und SM3F $\Phi$ 1 für verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle entlang der Symmetrieachse einer punktgelagerten Platte bei gleichmäßiger Flächenlast . . . . .	95
6.13	Verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle einer punktgelagerten Platte unter gleichmäßiger Flächenlast . . . . .	96
6.14	Geometrie der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte mit beidseitig applizierten piezoelektrischen Sensoren . . . . .	97
6.15	Rezeptanz für den Referenzpunkt des Sensors . . . . .	98
6.16	Fouriertransformierte des elektrischen Potenzials für den Mittelpunkt des Sensors . . . . .	99
6.17	Ausschnitt einer flach gekrümmten piezoelektrischen Zylinderschale unter vertikaler Einzellast . . . . .	100
6.18	Vergleich der maximalen Verschiebungen für verschiedene Schlankeitsgrade $\lambda$ der Schale . . . . .	101
6.19	Geschichteter Kragbalken mit zwei piezoelektrischen Schichten . . . . .	102
6.20	Geschichteter Kragträger mit einer piezoelektrischen Schicht . . . . .	104
6.21	Maximale Auslenkung am Balkenende im aktorischen Betrieb bei einer Frequenz von $f = 10$ Hz . . . . .	105

---

6.22	Geometrie der allseitig gelagerten Stahlplatte mit piezoelektrischer Keramik	106
6.23	Verschiebungen $w$ entlang der Symmetrieachse $y = B/2$ . . . . .	107
B.1	Linearisierung einer skalarwertigen Funktion $f(x)$ an der Stelle $\bar{x}$ . . . . .	113

# Tabellenverzeichnis

6.1	Übersicht über die durchgeführten Untersuchungen für die jeweiligen Elemente durch Angabe der Kapitelnummer . . . . .	85
6.2	Geometrie- und Materialdaten für den geschichteten Kragträger . . . . .	86
6.3	Materialdaten für Stahlplatte und piezoelektrische Keramiken . . . . .	90
6.4	Geometrie- und Materialdaten für die quadratische Platte . . . . .	93
6.5	Geometrie- und Materialdaten für Rechteckplatte . . . . .	96
6.6	Geometrie- und Materialdaten für flache Schale . . . . .	100
6.7	Geometrie- und Materialdaten für geschichteten Kragträger . . . . .	105
6.8	Geometrie- und Materialdaten für Rechteckplatte . . . . .	107

# Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole

## Lateinische Kleinbuchstaben

$\bar{\mathbf{b}}$	Vektor der Volumenkraftdichte
$b$	Breite
$\mathbf{d}$	piezoelektrischer Koeffizient
$\check{\mathbf{d}}$	dielektrischer Verschiebungsvektor
$\bar{d}$	elektrische Oberflächenladungsdichte
$\mathbf{e}, \mathbf{e}^\sigma, \mathbf{e}^D$	linearer, nichtlinearer piezoelektrischer Modul
$\mathbf{e}^0$	piezoelektrischer Modul für konstanten Anteil
$\mathbf{e}^1$	piezoelektrischer Modul für linearen Anteil
$\check{\mathbf{e}}^{\text{el}}$	Schnittvektor für das elektrische Feld
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Einheitsvektoren in $x$ -, $y$ -, $z$ -Richtung
$f(x)$	skalarwertige Funktion
$\mathbf{g}$	elektrische Stromdichte
$\underline{g}_r, \underline{g}_s, \underline{g}^r, \underline{g}^s$	ko- und kontravariante Basisvektoren
$\mathbf{h}$	piezoelektrischer Modul
$\check{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{q}}$	Querkraftvektor
$\check{\mathbf{m}}, \check{\mathbf{m}}$	Momentenvektor
$\check{\mathbf{m}}^{\text{nl}}$	nichtlinearer Momentenvektor
$m$	Masse
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\check{\mathbf{n}}, \check{\mathbf{n}}$	Normalkraftvektor
$\check{\mathbf{n}}^{\text{nl}}$	nichtlinearer Normalkraftvektor
$r, s, z$	Koordinaten des natürlichen Koordinatensystems
$\bar{\mathbf{t}}$	Spannungsvektor
$t$	Zeit, Dicke der Laminatschicht
$\mathbf{u}, \underline{\hat{u}}$	Verschiebungsvektor, Knotenwerte
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	Verschiebungen der Schalenmittelfläche in $x$ -, $y$ -, $z$ -Richtung
$\mathbf{x}$	Ortskoordinate, beschreibt die räumliche Konfiguration
$x, y, z$	Koordinaten

## Lateinische Großbuchstaben

$\mathbf{A}, \underline{A}$	magnetisches Vektorpotenzial, Matrix der Laminat-Steifigkeit
$\mathcal{B}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_t$	materieller Körper, in der Referenz-, Momentankonfiguration
$\partial\mathcal{B}_u, \partial\mathcal{B}_\sigma$	Verschiebungsrand, Spannungsrand
$\partial\mathcal{B}_\Phi$	Rand mit vorgeschriebenem elektrischem Potenzial
$\partial\mathcal{B}_D$	Rand mit vorgeschriebener dielektrischer Verschiebung
$\mathbf{B}$	magnetische Induktion
$\underline{B}, \bar{B}$	Operatormatrix, modifizierte Operatormatrix
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^d$	Elastizitätstensor, Elastizitätstensor bei konjugiertem Stoffgesetz
$\mathbf{C}, \underline{C}$	Matrix der Laminat Koppelsteifigkeiten; Dämpfungsmatrix
$C_r$	Kapazität
$\mathbf{D}, \underline{D}, \hat{D}$	dielektrische Verschiebung, Knotenwerte
$\mathbf{D}, \underline{D}$	Matrix der Laminat-Plattensteifigkeit
$\mathbf{E}^{\text{el}}$	elektrische Feldstärke
$E_c^{\text{el}}$	Koerzitivfeldstärke, eindimensional
$\mathbf{E}^{\text{m}}, \mathbf{E}_{\text{nl}}^{\text{m}}$	linearer, nichtlinearer Greenscher Verzerrungstensor
$E_r^{\text{m}}, E_{\text{sat}}^{\text{m}}$	remanente Dehnung; Sättigungsdehnung, eindimensional
$\underline{\tilde{E}}^{\text{m}}$	Verzerrungen im natürlichen $rs$ -Koordinatensystem
$\mathbf{E}^{\text{mb}}, \mathbf{E}^{\text{b}}, \mathbf{E}^{\text{s}}$	Membran-, Biege-, Schubanteil der Verzerrungen
$\mathbf{F}$	materieller Deformationsgradient
$\underline{F}$	Lastvektor
$F$	diskrete Kraftanregung
$\mathbf{G}$	vektor- und tensorwertige Funktion
$\mathcal{G}$	gesamtes Potenzial
$\mathbf{H}$	magnetische Feldstärke
$H$	elektrische Enthalpiedichte, Rezeptanz
$I_y$	Flächenmoment 2. Ordnung
$J$	Jacobideterminante
$\underline{K}, K_T$	Steifigkeitsmatrix, tangentielle Steifigkeitsmatrix
$L$	Lagrangefunktion
$M$	materielle Punkte des Körpers $B$ , Biegemoment
$\underline{M}$	Massenmatrix
$\underline{N}$	Vektoren der Ansatzfunktionen
$N$	Normalkraft, Plattensteifigkeit
$\mathbf{P}$	Polarisation
$\mathbf{P}, \mathbf{P}_\beta, \underline{P}, \underline{P}_\beta$	Matrix der elektrischen Beiträge zur Steifigkeit
$P_r, P_{\text{sat}}$	remanente Polarisation; Sättigungspolarisation, eindimensional
$P_s$	spontane Polarisation
$R, \underline{R}$	Restglied
$S_y$	Flächenmoment 1. Ordnung
$T_c$	Curietemperatur
$\mathbf{U}$	Rechts-Streck-Tensor

$U$	innere Energiedichtefunktion
$U_{\text{out}}$	elektrische Ausgangsspannung
$W$	äußere Arbeit, Verschiebungsverteilung
$\mathbf{X}, \underline{X}, \hat{X}$	Ortskoordinate, beschreibt die materielle Konfiguration; Knotenwerte

### Griechische Symbole

$\alpha$	Parameter für Rayleighsche Dämpfung
$\beta$	Impermittivitätstensor
$\beta$	Parameter für Newmarkverfahren; Parameter für Rayleighsche Dämpfung
$\gamma$	Parameter für Newmarkverfahren
$\varepsilon$	Permittivitätstensor
$\varepsilon_0$	Dielektrizitätskonstante des Vakuums
$\eta_r$	modaler Verlustfaktor
$\kappa$	Krümmung
$\lambda$	Lagrangescher Multiplikator
$\lambda, \bar{\lambda}$	Skalierungsfaktor, für bestimmtes Lastniveau
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi, \eta$	Koordinaten des Bildbereichs
$\xi$	modaler Dämpfungsparameter
$\rho_0$	Massendichte
$\rho_e$	elektrische Raumladungsdichte
$\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor
$\Phi, \hat{\Phi}$	skalares elektrisches Potenzial, Knotenwerte
$\phi$	Eigenfunktion
$\chi_0, \chi_t$	Abbildung von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}_0$ , von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}_t$
$\Psi$	Deformationsabbildung von $\mathcal{B}_0$ nach $\mathcal{B}_t$
$\psi_x, \psi_y, \hat{\psi}$	Rotation um die $y$ - bzw. $x$ -Achse, Knotenwerte
$\omega$	Eigenfrequenz

### Operatoren

Div	Divergenz bzgl. der materiellen Koordinaten $\mathbf{X}$
Grad	Gradient bzgl. der materiellen Koordinaten $\mathbf{X}$
Rot	Rotation bzgl. der materiellen Koordinaten $\mathbf{X}$
$\partial$	partieller Differenzialoperator
$d$	Differenzialoperator
$\delta$	Variation
$D$	Ableitung einer Funktion nach $x$ bei Linearisierung

$(\cdot), (\ddot{\cdot})$	erste, und zweite Ableitung nach der Zeit
$\Delta$	Differenzenoperator
$\cdot, :$	einfaches und zweifaches inneres Produkt bei Tensoren
$(\bar{\cdot})$	Mehrfeldvariationsprinzip: angenommene Größen; Linearisierung: Größen, deren Werte bei definiertem Deformations- / Spannungszustand bekannt
$L[\cdot]$	Linearisierung von skalarwertigen Funktionen
$\mathbf{L}[\cdot]$	Linearisierung von vektor- und tensorwertigen Funktionen

### Indizierung

D, d	von der dielektrischen Verschiebung abhängig
el	elektrisch
HW	beruht auf dem Prinzip von Hu-Washizu
int	innere Arbeit
k	von der Vorkrümmung abhängig
l	untere Schicht
m	mechanisch
nl	nichtlinear
p	piezoelektrisch
quad	quadratischer Ansatz von $\Phi$ in Dickenrichtung
s	vom Schubzustand abhängig
u	vom Membranzustand abhängig, obere Schicht
$\phi, \Phi$	vom elektrischen Potenzial abhängig
$\psi$	vom Biegezustand abhängig
0	Ausgangszustand, konstanter Anteil
*	modifizierte Materialparameter, Steifigkeitssubmatrizen

### Wichtige Abkürzungen

ANS	Assumed Natural Strain
DSG	Discrete-Shear-Gap
EAS	Enhanced Assumed Strain
elm	Element
nel	Knotenanzahl des Elementes
PVDF	Polyvinylidenfluoride
PZT	Blei-Zirkonat-Titanat
SMF	Schalenmittelfläche
SM2F $\Phi$	Zweifeldvariationsformulierung mit elektrischem Potenzial

---

SM2F $\Phi$ 1	ANS-basiertes piezoelektrisches Schalenelement mit linearem elektrischem Potenzial in Dickenrichtung und bilinearem Ansatz für $\Phi$ in der $xy$ -Ebene
SM2F $\Phi$ 1k	ANS-basiertes piezoelektrisches Schalenelement mit linearem elektrischem Potenzial in Dickenrichtung und konstantem Ansatz für $\Phi$ in der $xy$ -Ebene
SM2F $\Phi$ 2	ANS-basiertes piezoelektrisches Schalenelement mit quadratischem elektrischem Potenzial in Dickenrichtung und bilinearem Ansatz für $\Phi$ in der $xy$ -Ebene
SM2F $\Phi$ 1n	Physikalisch nichtlineares ANS-basiertes piezoelektrisches Schalenelement mit linearem elektrischem Potenzial in Dickenrichtung und bilinearem Ansatz für $\Phi$ in der $xy$ -Ebene
SM2F $\Phi$ 1red	wie SM2F $\Phi$ 1 nur mit reduzierter Integration der Schubterme, vgl. LAMMERING [71]
SM3F $\Phi$	Dreifeldvariationsformulierung mit elektrischem Potenzial und dielektrischer Verschiebung
SM3F $\Phi$ 1	ANS-basiertes piezoelektrisches Schalenelement mit linearem elektrischem Potenzial in Dickenrichtung und bilinearem Ansatz für $\Phi$ in der $xy$ -Ebene, sowie konstantem Ansatz für die dielektrische Verschiebung in der $xy$ -Ebene



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Adaptive Strukturen

Steigende Anforderungen an Funktionalität, Wirtschaftlichkeit und Sicherheit für Mensch und Umwelt führen zu einer zunehmenden Optimierung von Konstruktionen, oftmals bei Minimierung des Materialeinsatzes. Im Zuge dieser Entwicklung ist die Verwendung neuer Technologien und Werkstoffe für die Realisierung maßgeschneiderter Lösungen auf hohem technischem Niveau von immer größerer Bedeutung. Insbesondere durch die Integration von adaptiven Strukturen in die Konstruktion eröffnen sich Möglichkeiten, die Zielvorgaben effizient zu erreichen und damit neuartige Konzepte zu verwirklichen, vgl. CHEE ET AL. [29]. Der Einsatz dieser adaptiven Systeme bietet sich immer dann an, wenn die Umsetzung mit passiven Strukturen nicht oder nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand realisierbar ist.

Adaptive Strukturen, auch Smart Structures genannt, stellen eine Synthese aus konventionellen passiven Strukturen und Sensoren und Aktoren als aktive Bauteile dar. Die entstehenden Systeme können sich unter Einbeziehung eines geeigneten Reglers selbsttätig an wechselnde Betriebs- und Umweltbedingungen anpassen, vgl. u.a. CRAWLEY [32], ELSPASS [37], JANOCHA [57] und ROGERS [92]. Werkstoffe oder Bauteile werden als multifunktional bezeichnet, wenn sie als Sensoren oder Aktoren eingesetzt werden und darüber hinaus eine tragende oder schützende Funktion wahrnehmen. Ein wichtiges Ziel in der Entwicklung adaptiver Strukturen besteht darin, Sensoren und Aktoren in den Kraftfluss zu integrieren. Die wichtigsten Vertreter multifunktionaler Werkstoffe lassen sich je nach Verwendungsmöglichkeiten in verschiedene Gruppen unterteilen, vgl. JENDRITZA ET AL. [58]:

- magnetostriktive und piezoelektrische Werkstoffe
- Formgedächtnislegierungen
- Elektro- und magnetorheologische Flüssigkeiten

- elektrochemische und chemomechanische Energiewandler

Wie in vielen Bereichen wird auch bei der Entwicklung adaptiver Strukturen die Natur zum Vorbild genommen und versucht, auf diese Weise die Beschränkungen von konventionellen Konzepten zu durchbrechen. Wie das Nervensystem von Lebewesen so übernehmen bei adaptiven Strukturen Sensoren die Funktion der Wahrnehmung, während die Muskeln durch die Aktoren repräsentiert werden. Durch ihr Zusammenspiel ist die Kontrolle des Lebewesens durch das Gehirn bzw. des aktiven Systems unter Einbeziehung eines Reglers möglich. Voraussetzung ist ein hohes Maß an Integration der verschiedenen Komponenten in die Gesamtkonstruktion. Dies ist schon beim Entwurf zu berücksichtigen, indem das passive Systemverhalten der konventionellen Struktur um die mechanischen und elektrischen, gegebenenfalls magnetischen Eigenschaften der verwendeten Sensoren und Aktoren erweitert wird.

Vielfache Verwendung finden gegenwärtig dünnwandige Strukturen, die jedoch selbst bei kleinen örtlich begrenzten Störungen zu großflächigen Strukturschwingungen neigen. Damit geht meist eine unerwünschte Schallabstrahlung einher, der durch eine Kombination von aktiven und auch passiven Dämpfungsmaßnahmen entgegengewirkt werden sollte. Durch die Integration von Sensoren und Aktoren direkt in die Konstruktion oder ihre Applikation auf die Oberfläche von Strukturen kann auf diese Schwingungen und die daraus resultierende Schallemission aktiv eingewirkt werden, vgl. z.B. JANOCHA [57], SUNAR UND RAO [102] und WIESEMANN [122]. Damit sind adaptive Systeme in vielfältiger Weise einsetzbar, u.a. für Überwachungsaufgaben und Schadenserkennung, um z.B. ein durch Alterung der eingesetzten Werkstoffe geändertes Strukturverhalten zu detektieren. Des Weiteren kann die Form von Strukturen unter mechanischer oder auch thermischer Belastung aktiv kontrolliert und damit die Funktionalität bei Einsatz von hochpräzisen Bauteilen gewährleistet werden. Damit ergeben sich als Hauptanwendungsgebiete von adaptiven Strukturen vor allem Leichtbaukonstruktionen aus den Bereichen der Aeronautik, der Medizintechnik, der Robotertechnik und dem Automobilbau, vgl. u.a. CRAWLEY [32], JANOCHA [57] und PREUMONT [90].

Der Einsatz von Piezoelektrika bei adaptiven Strukturen ist weit verbreitet, da sowohl mechanische als auch elektrische Energie leicht erzeugt werden kann und daher piezoelektrische Werkstoffe leicht als Aktoren und Sensoren verwendbar sind. Der Berechnung dieser gekoppelten elektromechanischen Systeme sind jedoch gegenwärtig in kommerziellen FE-Programmsystemen noch Grenzen gesetzt. Die Berücksichtigung der Koppelterme ist in Softwareprodukten wie z.B. ANSYS oder ABAQUS bislang nur für Volumenelemente umgesetzt worden. Die Verwendung dieser Elemente ist bei der Berechnung der meist dünnwandigen adaptiven Strukturen jedoch mit einem sehr hohen Aufwand verbunden.

Im Gegensatz dazu kann bei der Entwicklung von Schalenelementen der geschichtete Aufbau einer Struktur schon berücksichtigt werden. Für die Berechnung von dünnwandigen Strukturen bieten Schalenelemente zudem eine von der Schichtdicke unabhängige zweidimensionale Formulierung bzgl. einer Schalenmittelfläche, so dass eine dem Pro-

blem angepasste Diskretisierung erfolgen kann. Daher ist der Einsatz von piezoelektrischen Schalenelementen insbesondere bei gekoppelten elektromechanischen Problemen dünnwandiger Strukturen sinnvoll. Eine Erweiterung bestehender mechanischer Schalenelemente ist deswegen ein notwendiger Schritt zur effizienten Behandlung von adaptiven Systemen.

## 1.2 Stand der Forschung

Eine der ersten Arbeiten, die sich mit der numerischen Berechnung von gekoppelten elektromechanischen Systemen mithilfe der Finite-Elemente-Methode befasste, wurde von ALLIK UND HUGHES [1] vorgestellt und behandelt Tetraederelemente. Die elektrischen Freiheitsgrade werden bei dieser Elementformulierung durch eine statische Kondensation eliminiert, so dass eine Kopplung an rein mechanische Elemente einfach möglich ist. Eine Übersicht über die weiteren Entwicklungen auf diesem Gebiet ist bei BENJEDDOU [15] und MACKERLE [77, 78] zusammenfassend dargestellt.

Ein Überblick über finite Elemente zur Berechnung von adaptiven flächigen Strukturen wird im Folgenden gegeben und die Methoden zur Entwicklung von zuverlässigen und robusten Platten- und Schalenelementen diskutiert. Danach werden verschiedene Möglichkeiten zur Verbesserung der Modellbildung von piezoelektrischen Strukturen vorgestellt, die eine möglichst genaue Approximation des tatsächlichen Systemverhaltens ermöglichen.

### 1.2.1 Finite Elemente für flächige piezoelektrische Strukturen

Für die Analyse von dünnwandigen Strukturen eignen sich insbesondere Platten- und Schalenelemente. Geschichtete Plattenelemente mit aktiven Schichten sind in der Literatur schon recht zahlreich vertreten. Das von HWANG UND PARK [52] entwickelte bilineare Element beruht auf der klassischen Laminattheorie, bei dem nur drei mechanische Freiheitsgrade am Knoten definiert sind. Die Wirkung von Aktoren wird durch äquivalente Momente mit einbezogen. Ein ähnliches Vorgehen findet sich bei CHANDRASHEKHARA UND TENNETI [27], die piezoelektrische Schichten und außerdem Temperatureinflüsse nur durch die Verwendung von äquivalenten Normalkräften und Biegemomenten in der Modellierung berücksichtigen. Elektrostatische Effekte der piezoelektrischen Schichten werden jedoch bei dem vorgestellten schubelastischen Plattenelement mit biquadratischen Ansatzfunktionen vernachlässigt. Eine Reissner-Mindlin-Kinematik verwendet ebenfalls DETWILER ET AL. [34], wobei für bis zu zwei piezoelektrische Schichten jeweils ein elektrischer Freiheitsgrad im Element vorgesehen wird. Eine statische Kondensation dieser zusätzlichen Freiheitsgrade wird auf Elementebene durchgeführt.

Bei CARRERA [25], VARADARAJAN ET AL. [114], und YIN UND SHEN [131] werden die elektrischen Freiheitsgrade bei den schubelastischen Plattenelementen an jedem Knoten vorgesehen, so dass eine Eliminierung der elektrischen Freiheitsgrade erst nach der

Assemblierung erfolgen kann. YIN UND SHEN [131] entwickeln außerdem Übergangselemente zwischen Volumen- und Plattenelementen. Eine genauere Beschreibung von aktiven geschichteten Platten wird bei CARRERA [25] und SARAVANOS ET AL. [93] durch die Verwendung von Laminattheorien höherer Ordnung erreicht, indem die Schubverzerrungen entlang der Dickenrichtung nur schichtweise kontinuierlich approximiert werden.

Eine Sonderstellung nehmen die so genannten Volumen-Schalen-Elemente ein. Mithilfe dieser speziellen Volumenelemente werden einzelne, auch dünne Schichten modelliert. Damit ist eine bessere Approximation des Strukturverhaltens zu erzielen, wie dies auch durch die Verwendung von Laminattheorien höherer Ordnung bei Platten- und Schalenelementen möglich ist. Im Vergleich zu den herkömmlichen Schalenelementen ist jedoch ein weitaus höherer numerischer Aufwand erforderlich. Das Dreieckselement von TZOU UND YE [113] besitzt biquadratische Ansätze in der Schalenebene und lineare Ansätze in der Dickenrichtung sowohl für mechanische als auch für elektrische Freiheitsgrade. Eine Weiterentwicklung findet sich bei KÖPPE ET AL. [69] für degenerierte Viereck-Schalenelemente. Ein versteifungsfreies Volumen-Schalen-Element mit acht Knoten wird von SZE ET AL. [104] für gekoppelte elektromechanische Probleme unter Verwendung von hybriden Methoden formuliert. Als unabhängige Variablen werden die Spannungen und das elektrische Potenzial gewählt. Eine zuverlässige Formulierung ergibt sich durch die Verwendung der Assumed Natural Strain Methode (ANS), die zusätzlich zur Vermeidung von Versteifungseffekten bei verzerrten Elementgeometrien eingesetzt wird.

Bei geschichteten Schalenelementen kommen hauptsächlich biquadratische Ansätze zum Einsatz, durch die krummlinig berandete Systeme besser approximiert werden können. Ein weiterer Vorteil dieser höheren Ansätze ist, dass sich Versteifungseffekte bei Verschiebungselementen nicht so stark auswirken. So wird von THIRUPATHI ET AL. [107] ein schubelastisches acht-Knoten Sandwichelement mit piezoelektrischer Ober- und Unterschicht zur Modellierung von Turbinenschaufeln entwickelt. Der inverse piezoelektrische Effekt wird jedoch nur durch eine Vorverformung der Struktur berücksichtigt. Ebenfalls ein acht-Knoten Schalenelement mit Reissner-Mindlin-Kinematik wird von SULEMAN [100] für die Berechnung von adaptiven Strukturen zur aktiven Lärmbekämpfung in Flugzeugkabinen verwendet. Für jede piezoelektrische Schicht wird ein elektrischer Freiheitsgrad vorgesehen, der jedoch nicht auf Elementebene eliminiert wird. Die Elimination von elektrischen Freiheitsgraden wird jedoch von BALAMURUGAN UND NARAYANAN [6, 7] für ein schubelastisches neun-Knoten Schalenelement mit beliebiger Schichtung umgesetzt. Von CHEN ET AL. [30] werden wiederum nur ein Aktor und ein Sensor in einem schubelastischen acht-Knoten Schalenelement vorgesehen, wobei jedoch elektrische Freiheitsgrade an jedem Knoten angesetzt werden. Zusätzlich wird zur Verbesserung des Elementverhaltens eine reduzierte Integration verwendet.

Von LEE ET AL. [74] wird ein auf dem Variationsprinzip von Hellinger-Reissner beruhendes schubelastisches Schalenelement mit neun Knoten entwickelt, so dass Versteifungseffekte weitestgehend vermieden werden. Die Autoren berücksichtigen jedoch nur den inversen piezoelektrischen Effekt. Die Vernachlässigung des direkten piezoelektrischen Effekts ist auch bei dem vier-Knoten Schalenelement von IOZZI UND GAUDENZINI

[56] und der Erweiterung auf neun bzw. 16 Knoten von ZALLO UND GAUDENZI [132] zu finden. Hier wird eine versteifungsfreie Formulierung mithilfe der ANS Methode entwickelt.

Das von HEYLIGER ET AL. [45] entwickelte neun-Knoten Schalenelement legt eine Laminattheorie höherer Ordnung für die Approximation von sowohl mechanischen als auch elektrischen Komponenten zugrunde. Eine gemischte Laminattheorie hingegen verwendet SARAVANOS [93] für sein acht-Knoten Schalenelement. Dabei wird für die Kinematik die Schubdeformationstheorie erster Ordnung vorausgesetzt, während das elektrische Potenzial schichtweise kontinuierlich approximiert wird. Eine Erweiterung dieses Elements für thermopiezoelektrische Probleme wird von LEE UND SARAVANOS [73] vorgestellt. Deutliche Unterschiede zu den bisher vorgestellten Elementen weist das von LIN ET AL. [76] diskutierte Schalenelement auf. Mithilfe der elektrischen Komplementärenergie wird eine Formulierung eines schubstarreren Schalenelementes mit acht Knoten entwickelt, bei der die dielektrische Verschiebung einen elektrischen Freiheitsgrad am Knoten darstellt, während das elektrische Potenzial als eine abhängige Größe behandelt wird.

Eines der wenigen Schalenelemente mit bilinearen Ansätzen wird von LAMMERING [71] vorgestellt, bei der die elektrischen Freiheitsgrade für die piezoelektrische Ober- und Unterschicht an jedem Knoten vorgesehen werden. Die in Biegeproblemen auftretenden Versteifungseffekte werden mit selektiv reduzierter Integration der Schubterme vermieden, wobei dadurch jedoch das Auftreten von Nullenergiemoden möglich ist. Eine versteifungsfreie Schalenformulierung mithilfe des Mixed Interpolated Tensorial Components Approach (MITC) sowohl für vier-Knoten als auch für neun-Knoten Schalenelemente ist von KÖGL UND BUCALEM [67] erst kürzlich entwickelt worden, wobei jedoch eine Weiterentwicklung für geschichtete Strukturen noch aussteht.

### 1.2.2 Methoden zur Entwicklung von zuverlässigen Schalenelementen

Die Methoden zur Formulierung von versteifungsfreien Elementen sind von den rein mechanischen finiten Elementen her bekannt. Dieses Wissen ist jedoch bisher nur in wenigen Fällen in die Entwicklung von gekoppelten elektromechanischen finiten Elementen mit eingeflossen, was die obige Darstellung der bisher erzielten Forschungsergebnisse verdeutlicht. Daher wird zunächst ein Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten bei der Formulierung von zuverlässigen, rein mechanischen Schalenelementen gegeben. Aufgrund der großen Anzahl an bereits vorhandenen mechanischen Schalenelementen wird hier jedoch nur auf die wesentlichen Entwicklungen hingewiesen. Eine sehr umfangreiche Übersicht über die bereits existierenden Schalenelemente findet sich bei YANG ET AL. [127, 126].

Schubelastische Schalenelemente, die auf der Basis von Verschiebungsmethoden formuliert werden, neigen insbesondere bei biegedominanten Problemen und großem Schlankheitsgrad zum Versteifen. Dabei existieren zwei verschiedene Arten von Versteifungseffekten, die durch das Auftreten von parasitären Schubspannungen bzw. Membranspannungen

gen entstehen: Membran- und Schubversteifungen. Mit der Einführung von reduzierten Integrationstechniken, vgl. u.a. ZIENKIEWICZ ET AL. [133], war zwar das Problem der zu hohen Systemsteifigkeit behoben, was jedoch zum Entstehen von Nullenergiemoden führte. Durch die Verwendung von zusätzlichen Stabilisierungstechniken konnte eine Verbesserung des Elementverhaltens erzielt werden, vgl. u.a. ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134] für einen Überblick. Diese Methoden verlangen jedoch vom Anwender Erfahrung und sind für die allgemeine Verwendung wenig robust.

Erst mit der Entwicklung der Enhanced Assumed Strain Methode (EAS) zur Behandlung von Membranversteifungseffekten, vgl. u.a. SIMO UND RIFAI [98], und der effizienten Vermeidung von Schubversteifungen durch die Assumed Natural Strain Methode (ANS), vgl. u.a. HUGHES UND TEZDUYAR [50], war die Formulierung effizienter und zuverlässiger schubelastischer Schalenelemente möglich. Zumeist findet auch eine Kombination der ANS- und der EAS-Methode statt, vgl. ANDELFINGER UND RAMM [4], BETSCH ET AL. [18], BISCHOFF UND RAMM [20], HAUPTMANN [44] und SAUER [94], um die Effizienz der Elemente noch zu verbessern. Die Verwendung der MITC Methode ist eine Parallelentwicklung zur ANS-Methode, die für bilineare Elemente die gleichen Ergebnisse liefert und auch vielfache Anwendung bei Schalenelementen findet, vgl. BATHE UND DVORKIN [10], CHAPELLE ET AL. [28]. Eine ausführlichere Vorstellung der verschiedenen Methoden findet sich in Kapitel 5.2.

### 1.2.3 Erweiterungen bei der Modellbildung

Bei der mathematischen Beschreibung von Strukturen hat die erforderliche Genauigkeit der zu erzielenden Ergebnisse einen großen Einfluss auf die Modellbildung. Bei piezoelektrischen Werkstoffen ist vor allem die Formulierung der elektromechanischen Kopplung von zentraler Bedeutung. Zur Berücksichtigung aller Anteile bei der Formulierung der inneren Arbeit ist die adäquate Approximation des elektrischen Potentials dabei ein wichtiger Faktor für die Modellbildung. Um Abweichungen zwischen numerischen Berechnungen und experimentellen Untersuchungen zu minimieren, sind außerdem auftretende nichtlineare Effekte zu berücksichtigen. Diese Aspekte werden im Folgenden diskutiert.

Im Rahmen dieser Arbeit werden piezoelektrische Aktoren und Sensoren als auf die Struktur applizierte dünne Plättchen oder Folien modelliert. Über Elektroden wird ihr Betrieb an diskreten Orten gesteuert. Werden keine Interdigitalelektroden eingesetzt, so ist nur eine treppenförmige Approximation des elektrischen Potentials entlang der Struktur möglich. Aufgrund ihrer vorwiegend recht geringen Abmessungen können Aktoren und Sensoren meist durch ein einzelnes finites Element repräsentiert werden. Aus diesem Grund ist die Einhaltung der Kontinuitätsbedingung zwischen den einzelnen finiten Elementen nicht zwingend erforderlich und durch die Verwendung eines  $C^{-1}$ -stetigen Ansatzes für das elektrische Potential in der Schalenmittelfläche bei der Modellierung gerechtfertigt. Der große Vorteil ist, dass dadurch die elektrischen Freiheitsgrade schon auf Elementebene eliminiert werden können, und so ein finites Element mit ausschließlich mechanischen Freiheitsgraden entsteht. Dieses Vorgehen wurde in dieser Arbeit umgesetzt,

und ein Vergleich zwischen Elementen mit  $C^{-1}$ -stetigem und  $C^0$ -stetigem Ansatz für das elektrische Potenzial durchgeführt. In der Literatur ist diese Methode der konstanten Approximation des elektrischen Potenzials ebenfalls bereits für verschiedene Elementtypen verwendet worden, vgl. z.B. für Plattenelemente DETWILER ET AL. [34], HWANG UND PARK [52] und SULEMAN UND VENKAYYA [101] und für Schalenelemente BALAMURUGAN UND NARAYANAN [6, 7] und SULEMAN [100].

Die adäquate Approximation des elektrischen Potenzials über die Schichtdicke stellt einen weiteren zentralen Punkt dieser Arbeit dar. Die folgenden Überlegungen sollen dies eingehender beleuchten. Zunächst wird eine lineare Approximation des elektrischen Potenzials angenommen. Dies bedingt einen konstanten Verlauf des elektrischen Feldes. Des Weiteren wird bei dünnwandigen Strukturen von den Komponenten der dielektrischen Verschiebung meist nur die Komponente in Dickenrichtung berücksichtigt. Wird nun à priori die Einhaltung der elektrischen Feldgleichungen gefordert, so verschwinden bei ihrer Auswertung die elektrischen Beiträge vollständig. Es verbleibt nur eine Abhängigkeit vom mechanischen Verformungsverhalten. Dadurch ist nur noch eine einseitige Kopplung vorhanden, was dazu führt, dass damit die aus der elektromechanischen Kopplung resultierenden inneren Arbeiten nicht vollständig berücksichtigt werden. Dies steht jedoch im Widerspruch zu dem vorausgesetzten Stoffgesetz. Um eine vollständige Berücksichtigung der Kopplung zwischen den elektrischen und mechanischen Feldgrößen beim Strukturverhalten zu gewährleisten, ist daher mindestens ein quadratischer Verlauf des elektrischen Potenzials notwendig. Hierdurch wird bei biegedominanten Problemen eine zusätzliche Steifigkeit der Struktur erzielt und damit schon durch die Modellbildung das tatsächliche Werkstoffverhalten besser berücksichtigt. In ähnlicher Weise wird ebenfalls bei GOPINATHAN ET AL. [43] und YANG [130] der Nachweis erbracht, dass die Verwendung einer zumindestens quadratischen Approximation des elektrischen Potenzials physikalisch notwendig ist.

In der Literatur ist zumeist noch ein linearer Ansatz für das elektrische Potenzial zu finden, der in den letzten Jahren jedoch zunehmend durch einen quadratischen Ansatz ersetzt wird. Insbesondere bei der Formulierung von Schubdeformationstheorien höherer Ordnung ist die adäquate Approximation des elektrischen Potenzials von großer Bedeutung, vgl. CARRERA [25]. Werden die elektrischen Feldgleichungen unter Berücksichtigung der vorhandenen kinematischen Beziehungen und des Stoffgesetzes ausgewertet, so kann unter Einbeziehung der elektrischen Randbedingungen der daraus resultierende Funktionsverlauf des elektrischen Potenzials bestimmt werden, vgl. KÖGL UND BUCALEM [66], KROMMER UND IRSCHIK [70] und VEL UND BATRA [115]. Asymptotische Betrachtungen für piezoelektrische Platten von RAHMOUNE ET AL. [91] bestätigen die obigen Überlegungen, dass eine lineare Approximation des elektrischen Potenzials die elektromechanische Kopplung nur unvollständig berücksichtigt. Bei BENJEDDOU ET AL. [16] wird außerdem noch bei den analytischen Untersuchungen zwischen geerdeten und nicht geerdeten Schichten unterschieden.

Um die Beziehung zwischen dem elektrischen Potenzial und dem elektrischen Feld nur noch in schwacher Form erfüllen zu müssen, eignen sich die hybriden Methoden. Diese

werden schon seit längerer Zeit zur Vermeidung von Versteifungseffekten erfolgreich bei rein mechanischen Einfeldproblemen und auch zur einfachen Einbindung von nichtlinearen konstitutiven Gleichungen verwendet, vgl. SIMO UND RIFAI [98]. In Analogie zu mechanischen Problemstellungen werden von YANG [128, 129] die möglichen Mehrfeldvariationsformulierungen mit ihren zugehörigen unabhängigen Variablen für gekoppelte elektromechanische Systeme entwickelt.

Die Verwendung von hybriden Methoden zur Formulierung von finiten Elementen für gekoppelte elektromechanische Systeme ist bisher selten erfolgt. Verschiedene gemischte Hexaederelemente wurden von SZE UND PAN [106] vorgestellt und danach auf Volumenschalen-Elemente übertragen, vgl. SZE ET AL. [104]. Für die Berechnung des bruchmechanischen Verhaltens von piezoelektrischen Materialien wurde außerdem ein auf gemischten Methoden beruhendes Scheibenelement von WU ET AL. [125] entwickelt. Zur Modellierung des Hystereseverhaltens im Großsignalbereich haben GHANDI UND HAGOOD [42, 41] und GHANDI [40] ebenfalls erweiterte Variationsprinzipie verwendet, wodurch die numerische Berechnung von Polarisationsvorgängen möglich ist. Das von GHANDI UND HAGOOD [42, 41] vorgestellte Verfahren entspricht dem Vorgehen bei der Entwicklung der in dieser Arbeit umgesetzten Mehrfeldvariation. Dabei wird die Beziehung zwischen dem elektrischen Potenzial und dem elektrischen Feld mithilfe eines Lagrangeschen Multiplikators als Nebenbedingung in die Variationsformulierung eingearbeitet. Damit wird nun die aus der elektromechanischen Kopplung resultierende innere Arbeit vollständig berücksichtigt, so dass eine verbesserte Beschreibung des Strukturverhaltens erzielt wird. Der Lagrangesche Multiplikator kann dann als dielektrische Verschiebung identifiziert werden. Dieses Vorgehen stellt eine Erweiterung des Hu-Washizu Variationsfunktional auf gekoppelte elektromechanische Problemstellungen dar, das bei BELYTSCHKO ET AL. [13] und ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134] für rein mechanische Systeme angegeben wird.

Piezoelektrische Werkstoffe zeigen jedoch nicht nur im Großsignalbereich ein nichtlineares Materialverhalten. Experimentelle Untersuchungen weisen physikalische Nichtlinearitäten auch für den Kleinsignalbereich nach, vgl. CRAWLEY UND LAZARUS [33], NGUYEN [89], v. WAGNER UND HAGEDORN [117], v. WAGNER [118] und WANG ET AL. [121]. Diese Tatsache wird jedoch im Rahmen der Modellierung bei der überwiegenden Mehrzahl der bisherigen Publikationen vernachlässigt. Erste Ansätze zur genaueren Approximation des Strukturverhaltens eines eingespannten Balkens im Kleinsignalbereich finden sich u.a. bei NGUYEN [89]. Die Arbeiten von v. WAGNER UND HAGEDORN [117] und v. WAGNER [118] übertragen diese nichtlineare Modellierung auf das Verhalten von axial und transversal polarisierten Stäben.

Für isotrope und anisotrope Platten wird eine erste Umsetzung von CRAWLEY UND LAZARUS [33] vorgestellt. THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108] entwickeln ebenfalls ein nichtlineares Stoffgesetz für Kompositplatten, bei der eine Laminattheorie höherer Ordnung zum Einsatz kommt. Von KOCONIS ET AL. [64, 65] werden für die Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens entsprechende konstitutive Gleichungen verwendet. Ein ähnliches nichtlineares Stoffgesetz wie von THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108] kommt in dieser Arbeit zur Anwendung. Dabei wird insbesondere Wert auf eine

thermodynamisch konsistente Formulierung gelegt und aus diesem Grund eine nichtlineare elektrische Enthalpiedichte formuliert. Damit ergibt sich für das daraus entwickelte physikalisch nichtlineare Schalenelement eine symmetrische tangentiale Steifigkeitsmatrix. An dieser Stelle wird jedoch auf die im Kapitel 3.2 erfolgte ausführliche Diskussion von verschiedenen nichtlinearen Materialmodellen verwiesen.

## 1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, für die Berechnung geschichteter Schalen mit integrierten piezoelektrischen Sensoren und Aktoren zuverlässige und robuste finite Elemente zu entwickeln. Besonderes Augenmerk gilt einer physikalisch präzisen Modellbildung, zum Einen hinsichtlich des elektrischen Potentials in Dickenrichtung der Schale, zum Anderen hinsichtlich des piezoelektrischen Werkstoffverhaltens, insbesondere der auch im Kleinsignalbereich auftretenden Nichtlinearitäten.

Mit Blick auf die Finite-Elemente-Formulierung leiten sich daraus folgende Forderungen für die zu entwickelnden piezoelektrischen Schalenelemente ab, die im Weiteren diskutiert werden.

Die Entwicklung von geeigneten piezoelektrischen finiten Elementen zur effizienten Berechnung von geschichteten dünnwandigen Strukturen ist ein Ziel dieser Arbeit. Es wird Wert auf die Formulierung von zuverlässigen und gegenüber Netzverzerrungen robusten Elementen gelegt. Daher liegt das Hauptaugenmerk auf der Entwicklung von versteifungsfreien Elementen mit niedriger Ansatzordnung, die außerdem keine Nullenergiemoden aufweisen und so eine einfache, schnelle und zuverlässige Handhabung durch eine geringe Anzahl an Freiheitsgraden ermöglichen.

Werden Aktoren und Sensoren auf die passive Struktur appliziert, so ist vielfach eine diskrete Approximation des elektrischen Potentials in der Schalenebene mit einem konstanten Ansatz ausreichend. Die Unterschiede zu einer kontinuierlichen Beschreibung mittels linearer Approximation wird anhand von Beispielen behandelt.

Ein weiteres Ziel der Arbeit ist die adäquate Approximation des elektrischen Potentials über die Schichtdicke. Verschiedene analytische Untersuchungen liefern im Gegensatz zum hauptsächlich verwendeten linearen Ansatz einen quadratischen Verlauf des elektrischen Potentials. Um die tatsächlichen Auswirkungen auf das Verformungsverhalten von Systemen zu untersuchen, ist dieser quadratische Ansatz bei der Formulierung eines Schalenelementes zu berücksichtigen und mit einer linearen Approximation zu vergleichen.

Durch die Verwendung von hybriden Variationsprinzipien sind weitergehende Betrachtungen zum tatsächlichen Verlauf des elektrischen Potentials möglich. Wird die direkte Einarbeitung der Inkompressibilitätsbedingung bei nahezu inkompressiblen Materialien als Vorbild genommen, so kann auch die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrischen Potential direkt in die Formulierung integriert werden. Damit braucht

diese Beziehung nur noch in schwacher Form erfüllt werden, so dass die innere Arbeit von gekoppelten elektromechanischen Systemen damit vollständig berücksichtigt wird. Die Folgen für das Systemverhalten sind anhand einer Dreifeldvariationsformulierung und dem daraus zu entwickelnden Element zu untersuchen.

Die schon im Kleinsignalebereich bei experimentellen Untersuchungen festgestellten nichtlinearen Effekte sind unter Verwendung einer konsistenten Linearisierung in eine Elementformulierung zu implementieren. Die Unterschiede zwischen der linearen und nichtlinearen Modellierung des Werkstoffverhaltens sind anhand von Beispielen herauszuarbeiten.

Die Arbeit konzentriert sich insbesondere auf die Entwicklung von flachen Verbundschalenelementen mit einem Sandwich-Aufbau, bei denen auf der Oberfläche einer passiven Tragstruktur dünne piezoelektrische Platten appliziert werden. Mithilfe der variationellen Methoden ergeben sich leistungsfähige finite Elemente zur Berechnung von dünnen Platten- und Schalenstrukturen mit integrierten piezoelektrischen Sensoren und Aktoren. Den Ausgangspunkt für die Entwicklung dieser weitergehenden piezoelektrischen Schalenformulierungen stellt die lineare Zweifeldvariationsformulierung von LAMMERING [71] mit elektromechanischer Kopplung dar, bei der ein linearer piezoelektrischer Effekt berücksichtigt wird. Dafür ist zusätzlich zu den Verschiebungen das elektrische Potenzial als weiterer Freiheitsgrad in die Formulierung integriert worden. Die in diesem Element verwendete selektiv reduzierte Integration der Schubterme zur Vermeidung von Versteifungseffekten wird im Rahmen dieser Arbeit durch die ANS-Methode zu ersetzen sein. Mit dieser Methode ist dann die Entwicklung von zuverlässigen und robusten piezoelektrischen Schalenelementen möglich, bei denen Nullenergiemoden nicht auftreten.

Aus diesen Zielen ergibt sich folgender Aufbau der Arbeit:

Im Kapitel 2 werden die Grundgleichungen für gekoppelte elektromechanische Systeme zusammenfassend dargestellt. Unter Verwendung von sowohl elektrischen als auch mechanischen Feldgleichungen ist die Entwicklung einer Variationsformulierung für das gekoppelte Gesamtsystem möglich. Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht insbesondere die Diskussion verschiedener Variationsprinzipie, die bei der mathematischen Beschreibung rein mechanischer Systeme schon seit längerem erfolgreich angewendet werden. Die Grundlage dieser Arbeit bildet die Übertragung dieser gemischten Methoden auf gekoppelte elektromechanische Probleme, die zu der Entwicklung einer Zweifeld- und einer Dreifeldvariationsformulierung führt.

Nach der zunächst phänomenologischen Betrachtung des Werkstoffverhaltens von Piezoelektrika zu Beginn des Kapitels 3 werden konstitutive Gleichungen für das makroskopische Strukturverhalten vorgestellt. Um eine thermodynamisch konsistente Formulierung zu erhalten, wird die Existenz eines Potentials vorausgesetzt. In Abhängigkeit von den zugrunde gelegten Variationsformulierungen aus Kapitel 2 werden jedoch unterschiedliche Paare abhängiger elektrischer und mechanischer Variablen verwendet, deren Bestimmung durch verschiedene Energiepotenziale erfolgt. Dies gilt ebenfalls für nichtlineare Materialgesetze des Kleinsignalebereichs, für die sich ein zugehöriges nichtlineares Potenzial über eine Kopplungsbedingung der abhängigen Variablen bestimmen lässt.

Die Kombination der entwickelten Gleichungen aus den Kapiteln 2 und 3 führt zur elektromechanischen Kopplung in den Variationsformulierungen. Die Adaption der entstandenen Zweifeld- und Dreifeldvariationsformulierungen an die speziellen Anforderungen einer flachen Schalenformulierung wird im Kapitel 4 durchgeführt. Unter Voraussetzung einer Reissner-Mindlin-Kinematik für Schubelastische Schalen werden die zugehörigen Schnittgrößen ermittelt. Der adäquaten Approximation des elektrischen Potentials in Dickenrichtung kommt in diesem Kapitel eine besondere Bedeutung zu. Die in der Literatur überwiegend vorzufindende Hypothese eines linearen Verlaufs für das elektrische Potential wird einer quadratischen Approximation gegenübergestellt.

Das Kapitel 5 stellt die Vorgehensweise bei der Implementierung der in Kapitel 4 entwickelten verschiedenen Schalenformulierungen in ein Finite-Elemente-Programm dar. Hierzu werden insbesondere die Methoden zur Entwicklung von robusten Elementen mit bilinearen Ansatzfunktionen diskutiert, die zuverlässige Ergebnisse bei Netzverzerrungen liefern und frei von ungewollten Versteifungseffekten sind. Diese Anforderungen werden durch die Integration der Assumed Natural Strain Methode (ANS) in die verschiedenen Zweifeldvariationsformulierungen und der Dreifeldvariationsformulierung des Kapitels 4 erfüllt, woraus sich fünf verschiedene ANS-basierte piezoelektrische Schalenelemente ergeben.

Anhand von numerischen Beispielen werden in Kapitel 6 sowohl die Unterschiede zwischen den einzelnen entwickelten Schalenelementen als auch deren Leistungsfähigkeit herausgearbeitet. Nicht nur für den aktorischen sondern auch für den sensorischen Betrieb wird das Elementverhalten bei statischen und dynamischen Berechnungen mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Die Zuverlässigkeit der verschiedenen Elemente auch bei verzerrten Netzgeometrien und verschiedenen Lagerungsbedingungen ist ebenfalls Gegenstand der numerischen Untersuchungen.

Abschließend wird im Kapitel 7 eine Zusammenfassung der in dieser Arbeit erzielten Fortschritte gegeben und Möglichkeiten zu weitergehenden Untersuchungen und Erweiterungen diskutiert.

## Kapitel 2

# Mechanische und elektrische Grundgleichungen

Die in dieser Arbeit betrachteten Ferroelektrika gehören zu den multifunktionalen Werkstoffen. Als Ferroelektrika werden Materialien bezeichnet, die sowohl mechanische als auch elektrische Eigenschaften besitzen und aufgrund dessen als Energiewandler eingesetzt werden. Für die makroskopische Beschreibung des Gesamtstrukturverhaltens müssen daher sowohl die mechanischen als auch die elektrischen Eigenschaften berücksichtigt werden. Diese erhält man mithilfe der kontinuumsmechanischen und elektromagnetischen Grundgleichungen. Werden die beiden Gleichungssätze zusammengeführt, so kann für das Gesamtsystem eine Variationsformulierung entwickelt werden, die als Ausgangspunkt für numerische Strukturanalysen dient.

Unabhängig von einem konkreten Stoffgesetz sollen jedoch in diesem Kapitel zunächst die im Rahmen dieser Arbeit erforderlichen mechanischen und elektrischen Feldgleichungen zusammengestellt werden, vgl. u.a. TIERSTEN [110] und v. WAGNER [118], aus denen sich die verschiedenen Variationsformulierungen ableiten lassen.

### 2.1 Kontinuumsmechanische Betrachtungen

Die Kontinuumsmechanik ist die Grundlage für die Beschreibung des Spannungs- und Dehnungsverhaltens von Festkörpern bei sowohl statischer als auch dynamischer Belastung.

Die in diesem Kapitel zusammengestellten kontinuumsmechanischen Grundgleichungen dienen lediglich einer kurzen Einführung. Für eine ausführliche Darstellung sei auf die Literatur verwiesen, z.B. ALTENBACH UND ALTENBACH [3], MALVERN [82], MARSDEN UND HUGHES [84] und STEIN UND BARTHOLD [99].

### 2.1.1 Kinematik

Die Beschreibung der Bewegungen und Deformationen eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  erfolgt mithilfe von kinematischen Beziehungen. Für die vorliegende Arbeit wird eine Lagrange'sche Betrachtungsweise verwendet, bei der die Bewegung eines Punktes  $P$  von einem Beobachtungspunkt aus im Raum verfolgt wird. Der zum Zeitpunkt  $t = t_0$  dargestellte materielle Körper  $\mathcal{B}$  in Bild 2.1 besteht aus materiellen Punkten  $M$  und sei unverformt, unbelastet und spannungsfrei. Er wird durch die Abbildung  $\chi_0$  in die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  überführt. Die Lage eines materiellen Punktes  $P_0$  in der Referenzkonfiguration ist damit durch eine Abbildung  $\chi_0$

$$\mathbf{X} = \chi_0(P) \quad (2.1)$$

in den Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  gekennzeichnet und wird durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  beschrieben. Für einen Zeitpunkt  $t > t_0$  ist die Lage dieses Punktes  $P_t$  in der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  durch eine Abbildung

$$\mathbf{x} = \chi_t(P) \quad (2.2)$$

gegeben. Die Abbildungen  $\chi_0$  und  $\chi_t$  sind bijektiv, d.h. umkehrbar eindeutig, so dass zu jedem Zeitpunkt  $t$  während der Deformation Durchdringungen des Körpers ausgeschlossen

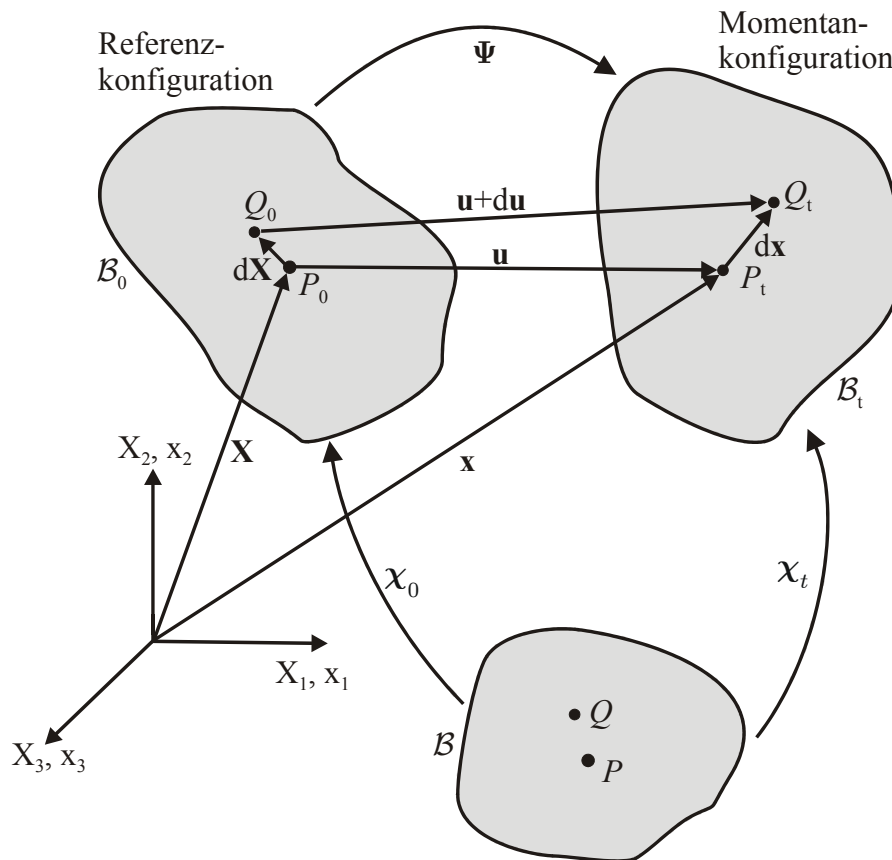


Bild 2.1: Darstellung eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in der Referenz- und Momentankonfiguration

sind. Damit ergibt sich der funktionale Zusammenhang zwischen räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}$  und materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  mithilfe der Deformationsabbildung  $\Psi$  zu

$$\mathbf{x} = \chi_t(\chi_0^{-1}(\mathbf{X})) = \Psi(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \chi_0(\chi_t^{-1}(\mathbf{x})) = \Psi^{-1}(\mathbf{x}) . \quad (2.3)$$

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  für einen materiellen Punkt lässt sich aus der Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und der Referenzkonfiguration bestimmen

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} . \quad (2.4)$$

Die Deformation eines Körpers kann mithilfe des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  beschrieben werden

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \text{Grad } \mathbf{u} . \quad (2.5)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass ein infinitesimales Linienelement  $d\mathbf{X}$  von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration transformiert wird

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} , \quad (2.6)$$

vgl. Bild 2.1. Die Forderung nach Eindeutigkeit der Deformation und Stetigkeit der Abbildung wird durch die Gleichung

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0 \quad (2.7)$$

erfüllt, in der  $J$  als Jacobische Funktionaldeterminante definiert wird.

Als Verzerrungsmaß ist der materielle Deformationsgradient jedoch ungeeignet, da  $\mathbf{F}$  im Allgemeinen nicht symmetrisch, von Starrkörperbewegungen und der Richtung abhängig, der Spannungszustand jedoch symmetrisch ist. Aus diesem Grund wird zur Beschreibung der Deformation der symmetrische Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_{\text{nl}}^m$  definiert, der sich in seiner nichtlinearen Form mithilfe des materiellen Deformationsgradienten oder des Verschiebungsgradienten darstellen lässt

$$\mathbf{E}_{\text{nl}}^m = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u} \cdot \text{Grad } \mathbf{u}) . \quad (2.8)$$

$\mathbf{E}_{\text{nl}}^m$  wird in der Referenzkonfiguration zur Beschreibung der Deformationen verwendet, die frei von Starrkörperanteilen sind. Der Index  $m$  für mechanisch dient dabei der Kennzeichnung dieser mechanischen Größen und zur Unterscheidung vom später eingeführten elektrischen Feld  $\mathbf{E}^{\text{el}}$ .

Die Arbeit beschränkt sich auf kleine Verzerrungen, die mit dem linearen Anteil des Greenschen Verzerrungstensors hinreichend genau beschrieben werden können:

$$\mathbf{E}^m = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u}) . \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Bilanz- und Erhaltungssätze

Mit den Bilanz- und Erhaltungssätzen werden allgemein anerkannte Naturgesetze postuliert, die unabhängig vom gewählten Materialmodell für den gesamten Körper gelten.

Zu den Erhaltungssätzen zählt der Satz von der Erhaltung der Masse eines materiellen Körpers, der besagt, dass die Gesamtmasse  $m$  während des Deformationsprozesses unverändert bleibt. Sie ergibt sich durch Integration der Massendichte  $\rho_0$  in der Referenzkonfiguration über das Volumen zu

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \, dV . \quad (2.10)$$

Um den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße zu formulieren, werden die auf den materiellen Körper von außen angreifenden Kräfte eingeführt. Die Summe dieser einwirkenden äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte ist gleich der zeitlichen Änderung der Bewegungsgröße

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{X}} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \, dA , \quad (2.11)$$

wobei  $\dot{\mathbf{X}}$  die Geschwindigkeit,  $\bar{\mathbf{b}}$  der Vektor der Volumenkräftdichte und  $\bar{\mathbf{t}}$  der Spannungsvektor ist, der auf die Oberfläche  $\partial \mathcal{B}_\sigma$  des Körpers wirkt. Mithilfe des Cauchy Theorems

$$\bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.12)$$

wird der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  eingeführt und das Oberflächenintegral unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumenintegral umgeformt.  $\mathbf{n}$  bezeichnet den Normalenvektor auf der Oberfläche. Damit ergeben sich die dynamischen Feldgleichungen als lokale Form der Impulsbilanz zu

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \left( \bar{\mathbf{b}} - \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} \right) = \mathbf{0} . \quad (2.13)$$

Darüber hinaus existieren Erhaltungssätze für den Drehimpuls und die Energie, vgl. u.a. STEIN UND BARTHOLD [99], die aber hier nicht weiter behandelt werden.

## 2.2 Elektrische Betrachtungen - Maxwell'sche Gleichungen

Im Folgenden werden kurz die Grundlagen der bei elektromechanisch gekoppelten Problemen ebenfalls auftretenden elektrischen Phänomene vorgestellt. Aufgrund der Tatsache, dass ein elektrischer Strom stets von einem Magnetfeld umgeben ist, wird als Ausgangspunkt die elektromagnetische Feldtheorie gewählt und nachfolgend eine Reduzierung für

Piezoelektrika vorgenommen. Ein Überblick über elektromagnetische Feldprobleme findet sich u.a. bei BECKER UND SAUTER [12] und LEHNER [75].

Die 1. Maxwellsche Gleichung ist eine Verallgemeinerung des Durchflutungsgesetzes für zeitabhängige Vorgänge. Die Gesamtstromdichte setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{g}$  und der Verschiebungsstromdichte  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ , welche ein magnetisches Wirbelfeld mit der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  erzeugen

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{Rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{F} = \int_A \underbrace{\left( \mathbf{g} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right)}_{\text{Gesamtstromdichte}} \cdot d\mathbf{F}, \quad (2.14)$$

wobei sich die Flächenintegrale durch  $d\mathbf{F} = \mathbf{n} dF$  berechnen, siehe Bild 2.2. Damit Gleichheit zwischen den beiden Feldern besteht, müssen die beiden Flächenintegrale  $d\mathbf{F}$  gleich sein. Mit dieser Voraussetzung ergibt sich eine differentielle Form des Maxwellschen Durchflutungsgesetzes

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{g}. \quad (2.15)$$

In ähnlicher Weise lässt sich die 2. Maxwellsche Gleichung formulieren: Durch eine zeitliche Änderung des zu der magnetischen Induktion gehörenden magnetischen Flusses  $\mathbf{B}$  entsteht in einer geschlossenen Leiterschleife die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}^{\text{el}}$

$$\oint \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \text{Rot } \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot d\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Auch hier sind die Flächenintegrale gleich, was ebenfalls auf eine differentielle Formulierung führt

$$\text{Rot } \mathbf{E}^{\text{el}} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Dieser Vorgang wird vielfach Faradaysches Induktionsgesetz genannt. Hieraus ergibt sich implizit die Quellenfreiheit der Flussdichte, indem auf beiden Seiten von Gleichung (2.17) die Divergenz gebildet wird

$$\text{Div Rot } \mathbf{E}^{\text{el}} = -\text{Div } \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

$$\rightarrow \text{Div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.19)$$

d.h. es existieren keine magnetischen Monopole. Die integrale Formulierung dieser Aussage lautet

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0. \quad (2.20)$$

Der elektrische Hüllenfluss durch die Oberfläche  $A$  eines Volumens  $V$  ist äquivalent zu allen vorhandenen beliebig verteilten Ladungen  $Q$  in diesem Volumen, da die Ladungen Quellen und Senken sind, siehe Bild 2.2. Die Gesamtladung ergibt sich hierbei durch die Integration der vorhandenen elektrischen Raumladungsdichte  $\rho_e$  über das Volumen

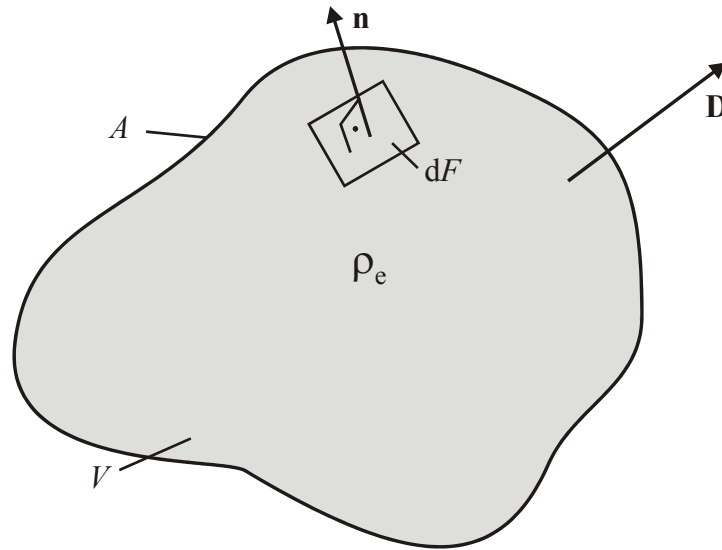


Bild 2.2: Elektrischer Hüllenfluss durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens

$V$ . Damit kann die integrale Form des Quellenfeldes der elektrischen Ladung angegeben werden

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = Q = \int_V \rho_e dV . \quad (2.21)$$

Auf analoge Art und Weise wie bei den Gleichungen (2.14) und (2.16) lässt sich auch hier eine differentielle Form angeben

$$\text{Div } \mathbf{D} = \rho_e , \quad (2.22)$$

für die auch die Bezeichnung elektrische Feldgleichungen verwendet wird.

Als Gegenstück zur Erhaltung der Masse eines materiellen Körpers in der Kontinuumsmechanik findet sich in der elektromagnetischen Feldtheorie die Erhaltung der elektrischen Ladung innerhalb eines Volumens. Die Gesamtladung bleibt während eines Deformationsprozesses in einem abgeschlossenen System unverändert. Sie ergibt sich durch Integration der elektrischen Raumladungsdichte  $\rho_e$  über das Volumen

$$\int \text{Div } \mathbf{g} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_e dV , \quad (2.23)$$

und wird in ihrer lokalen Form als Kontinuitätsgleichung bezeichnet

$$\text{Div } \mathbf{g} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 . \quad (2.24)$$

Dies ergibt sich auch mithilfe der Gleichung (2.15) durch Bildung der Divergenz

$$\text{Div Rot } \mathbf{H} = \text{Div} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{g} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \text{Div } \mathbf{g} = 0 . \quad (2.25)$$

Nun sind alle notwendigen elektromagnetischen Grundgleichungen eingeführt.

Aufgrund von Gleichung (2.19) kann ein Vektorpotenzial  $\mathbf{A}$  definiert werden, das der Coulomb-Eichung genügt

$$\mathbf{B} = \text{Rot } \mathbf{A} , \quad (2.26)$$

wodurch sich die 2. Maxwellsche Gleichung aus Gleichung (2.17) nun mithilfe von  $\mathbf{A}$  angeben lässt

$$\text{Rot} \left( \mathbf{E}^{\text{el}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (2.27)$$

Der Ausdruck  $\mathbf{E}^{\text{el}} + \partial \mathbf{A} / \partial t$  kann durch ein skalares elektrisches Potenzial  $\Phi$  dargestellt werden, das unabhängig von  $\mathbf{A}$  gewählt werden kann

$$\mathbf{E}^{\text{el}} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = - \text{Grad } \Phi . \quad (2.28)$$

Wird für piezoelektrische Werkstoffe eine Polarisierbarkeit des Materials vorausgesetzt, so kann vereinfachend  $\rho_e = 0$  und  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  gesetzt werden. Wenn zusätzlich die experimentell nachgewiesene Entkopplung der elastischen und elektrischen Wellen bei gleicher Frequenz angenommen wird, dann ist

$$\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right| \ll |\text{Grad } \Phi| . \quad (2.29)$$

Dies ist zulässig, da die elektromagnetische Wellenlänge bei gleicher Frequenz wesentlich größer ist als die elastische Wellenlänge, so dass Gleichung (2.17) ebenfalls vernachlässigt werden kann. Für diese quasistationäre Näherung ist nun  $\partial \mathbf{A} / \partial t \approx \mathbf{0}$ , und Gleichung (2.28) reduziert sich zu

$$\mathbf{E}^{\text{el}} = - \text{Grad } \Phi . \quad (2.30)$$

Der Formelsatz für ein piezoelektrisches Kontinuum vereinfacht sich unter den oben getroffenen Annahmen zu

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.31a)$$

$$\text{Div } \mathbf{D} = 0 \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{E}^{\text{el}} = - \text{Grad } \Phi . \quad (2.31c)$$

Des Weiteren wird die Wirkung eines äußeren magnetischen Wirbelfeldes im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, da kaum ein Einfluss des magnetischen Wirbelfeldes auf das nicht magnetische Material vorhanden ist.

## 2.3 Mechanische und elektrische Randbedingungen

Mithilfe der Randbedingungen wird eine mechanische Struktur in das sie umgebende Gebiet eingebunden. Bei gekoppelten elektromechanischen Systemen sind zusätzlich zu den mechanischen auch elektrische Randbedingungen zu berücksichtigen.

Bei den mechanischen Randbedingungen unterscheidet man zwischen den geometrischen bzw. wesentlichen Randbedingungen auf dem Verschiebungsrand  $\partial\mathcal{B}_u$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_u, \quad (2.32)$$

auf dem die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  vorgegeben sind, und den dynamischen bzw. natürlichen Randbedingungen auf dem Spannungsrand  $\partial\mathcal{B}_\sigma$ , auf dem

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_\sigma \quad (2.33)$$

gefordert wird.

Analog dazu existieren wesentliche und natürliche elektrische Randbedingungen. Auf dem Rand  $\partial\mathcal{B}_\Phi$  wird das elektrische Potenzial  $\Phi$

$$\Phi = \bar{\Phi} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_\Phi, \quad (2.34)$$

und auf dem Rand  $\partial\mathcal{B}_D$  wird die dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \bar{d} \text{ auf } \partial\mathcal{B}_D \quad (2.35)$$

vorgeschrieben.

## 2.4 Die schwache Form des Gleichgewichts - Variationsprinzip

Zur vollständigen mathematischen Analyse von Strukturen mit Piezoelektrika ist ein gekoppeltes System von partiellen Differenzialgleichungen zu lösen. Eine Lösung des Problems ist jedoch meist nur mithilfe numerischer Methoden möglich, die nicht von den Differenzialgleichungen selbst sondern von den zugehörigen Variationsformulierungen ausgehen. Es werden daher im Folgenden verschiedene Variationsprinzipie vorgestellt.

### 2.4.1 Das Prinzip der virtuellen Arbeiten

Das Prinzip der virtuellen Arbeiten ist äquivalent zu einer Gleichgewichtsaussage. Für beliebige am Körper wirkende jedoch mit den geometrischen Randbedingungen verträgliche virtuelle Größen bleibt das Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Arbeiten erhalten. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten lässt sich dadurch entwickeln, dass das zu lösende Gleichungssystem in die schwache Form des Gleichgewichts überführt wird. Dies geschieht durch Multiplikation der dynamischen Feldgleichungen (2.13) und der elektrischen Feldgleichungen (2.31b) mit einer jeweils zulässigen Testfunktion. Die dynamischen

Feldgleichungen werden mit der virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$  und die elektrischen Feldgleichungen mit dem virtuellen elektrischen Potenzial  $\delta \Phi$  multipliziert. Anschließend wird über das Gebiet  $\mathcal{B}_0$  integriert

$$\delta \mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi) = \int_{\mathcal{B}_0} \left( \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \left( \bar{\mathbf{b}} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \text{Div } \mathbf{D} \delta \Phi \, dV = 0. \quad (2.36)$$

Damit ist das Prinzip der virtuellen Arbeiten für gekoppelte elektromechanische Systeme formuliert, das für den mechanischen und den elektrischen Integralterm einzeln erfüllt werden muss. Erst durch die Einführung eines konkreten Stoffgesetzes wird die Kopplung verwirklicht. Daher ist eine Verknüpfung beider Beiträge zunächst nicht vorhanden.

In dieser und den folgenden Ausführungen beziehen sich die Formulierungen ausschließlich auf die Referenzkonfiguration, daher wird ab jetzt der Index '0' bei der Kennzeichnung des Gebiets  $\mathcal{B}$  weggelassen.

Durch die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und Einarbeitung der Randbedingungen aus Gleichung (2.33) und Gleichung (2.35) ergibt sich für gekoppelte elektromechanische Systeme die schwache Form des Gleichgewichts zu

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi) &= \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot \mathbf{D} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} \, dA = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Als abhängige Zustandsgrößen werden hier die mechanischen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  verwendet, für die in den Kapiteln 3.2.2 und 3.2.3 konstitutive Gleichungen für den hier betrachteten Kleinsignalbereich formuliert werden.

Alle mithilfe der Gleichung (2.37) entwickelten Variationsformulierungen werden zur besseren Unterscheidung von der in Kapitel 2.4.3 dargestellten Dreifeldvariationsformulierung mit der Abkürzung 'SM2F $\Phi$ ' (Smart Material 2-Feldvariationsformulierung mit elektrischem Potenzial) bezeichnet.

## 2.4.2 Das Prinzip von Hamilton

Die schwache Form des Gleichgewichts aus Gleichung (2.37) lässt sich ebenfalls mithilfe des Prinzips von Hamilton herleiten, das für die Beschreibung des Bewegungsablaufs von konservativen Systemen geeignet ist, vgl. v. WAGNER [118] und WOLF [123]. Die Anwendung auf ausschließlich mechanische Systeme soll hier nicht näher erläutert werden, vgl. hierfür u.a. BETTEN [19], HURTY UND RUBINSTEIN [51] und MANG UND HOFSTETTER [83]. Das Augenmerk wird hier auf die gekoppelten elektromechanischen Systeme gerichtet. Es soll nachgewiesen werden, dass sich ausgehend von der schwachen Form des Gleichgewichts, vgl. Gleichung (2.37), mithilfe der Lagrangefunktion  $L$  das Prinzip von Hamilton ableiten lässt, vgl. v. WAGNER [118] und WOLF [123].

Die partielle Integration von Gleichung (2.37) über die Zeit führt auf

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\mathcal{B}} \left( \delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot \mathbf{D} + \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \right) dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} dA \right] dt = 0. \quad (2.38)$$

Bei dieser Integration wird vorausgesetzt, dass die Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}$  und  $\delta \Phi$  zu den jeweiligen Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  verschwinden, so dass Gleichung (2.38) insgesamt gleich Null sein muss. Die mechanischen und elektrischen Energieanteile können in einem Potenzial zusammengefasst werden, der elektrischen Enthalpiedichte  $H$ , deren Variation sich folgendermaßen ergibt

$$\delta H (\delta \mathbf{E}^m, \delta \mathbf{E}^{\text{el}}) = \delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot \mathbf{D}. \quad (2.39)$$

Für eine ausführlichere Diskussion von verschiedenen Energiepotenzialen sei jedoch auf Kapitel 3.2.1 verwiesen.

Das Funktional aus Gleichung (2.38) kann nun mithilfe von Gleichung (2.39) umgeschrieben werden, indem die Variation und die Integration miteinander vertauscht werden, was zu der folgenden Formulierung führt

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left( H(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}^{\text{el}}) - \frac{1}{2} \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 - \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \right) dV}_{L(\mathbf{u}, \Phi)} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \Phi \bar{d} dA}_{W(\mathbf{u}, \Phi)} \right] dt = 0. \quad (2.40)$$

Damit ergibt sich das Prinzip von Hamilton für ein piezoelektrisches Kontinuum zu

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (L(\mathbf{u}, \Phi) + W(\mathbf{u}, \Phi)) dt = 0, \quad (2.41)$$

wobei mit  $L(\mathbf{u}, \Phi)$  die Lagrangefunktion bezeichnet wird, die sich aus potenzieller und kinetischer mechanischer Energie sowie zusätzlich aus der elektrischen Energie zusammensetzt. Haben die äußeren Volumenkräfte ein Potenzial, so können sie ebenfalls in die Lagrangefunktion integriert werden. In  $W(\mathbf{u}, \Phi)$  sind alle auf der Oberfläche auftretenden äußeren Arbeiten zusammengefasst. Für beliebige zulässige Variationen  $\delta \mathbf{u}$  und  $\delta \Phi$  wird ein Verschwinden des Integralausdrucks in Gleichung (2.41) vorausgesetzt, weswegen der Integrand innerhalb des Zeitabschnittes zu jedem Zeitpunkt verschwinden muss. Daraus folgt, dass die Lagrangefunktion einen stationären Wert annimmt.

Diese hier vorgestellte Form des Prinzips von Hamilton besitzt ihre Gültigkeit für die Wahl von  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  als unabhängige Variablen. Ist es für eine Problemstellung günstiger, ein anderes Paar unabhängiger Zustandsgrößen zu verwenden, so ist eine Adaption des Prinzips mittels Legendrescher Transformation möglich.

### 2.4.3 Mehrfeldvariationsprinzip

Zielsetzung bei der Entwicklung einer Dreifeldvariationsformulierung ist es, die Möglichkeiten einer verbesserten Modellierung der elektrischen Komponenten zu untersuchen. Dazu bieten sich gemischte Methoden an, die für rein mechanische Problemstellungen vielfach sehr erfolgreich zur Entwicklung von finiten Elementen mit verbesserten Eigenschaften eingesetzt werden. Diese erweiterten Elementformulierungen werden z.B. zur Ableitung von "Assumed Strain" und "Assumed Stress" Elementen herangezogen und führen auf finite Elemente, die u.a. erfolgreich insbesondere zur Vermeidung von Versteifungsphänomenen eingesetzt werden.

Kennzeichnend für die mithilfe von Mehrfeldvariationsformulierungen entwickelten mechanischen Elemente ist, dass zusätzlich zum Verschiebungsfeld die Verzerrungen und eventuell außerdem die Spannungen als unabhängige Variablen in die Formulierung eingearbeitet werden, vgl. auch BELYTSCHKO ET AL. [13] und ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134]. Insbesondere sind alle unabhängigen Größen gleichberechtigt. Das Prinzip von Hu-Washizu ist das allgemeinste der Mehrfeldvariationsprinzip, bei dem die virtuelle innere Arbeit  $\delta\mathcal{G}_{\text{int}}^{\text{HW}}$  eines mechanischen Problems in folgender Weise formuliert wird

$$\delta\mathcal{G}_{\text{int}}^{\text{HW}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{E}}^m, \delta\bar{\mathbf{E}}^m) = \int_{\mathcal{B}} \delta\bar{\mathbf{E}}^m : \boldsymbol{\sigma}(\bar{\mathbf{E}}^m) dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\mathbf{E}^m - \bar{\mathbf{E}}^m) dV - \int_{\mathcal{B}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\delta\mathbf{E}^m - \delta\bar{\mathbf{E}}^m) dV . \quad (2.42)$$

Mit  $\bar{\mathbf{E}}^m$  werden angenommene Verzerrungen und mit  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  angenommene Spannungen bezeichnet. Es müssen keine weiteren Nebenbedingungen erfüllt werden.

Für gekoppelte elektromechanische Systeme werden von YANG [128, 129] Mehrfeldvariationsformulierungen mit den zugehörigen unabhängigen Variablen vorgestellt. Der Autor leitet verschiedene Prinzipie ab, aus denen eine geeignete Formulierung für das jeweilige Anwendungsgebiet gewählt werden kann. In Anlehnung an diese gemischten Variationsprinzipie, werden von GHANDI UND HAGOOD [42], SZE UND PAN [106] und WU ET AL. [125] darüber hinaus Möglichkeiten von gemischten Variationsformulierungen präsentiert. Die von GHANDI UND HAGOOD [42] vorgestellten erweiterten Variationsfunktionale werden in dieser Arbeit aufgegriffen, um die Möglichkeiten einer verbesserten Beschreibung von elektrischen Größen und die daraus resultierenden Auswirkungen auf das Strukturverhalten zu untersuchen.

In Analogie zur Behandlung von nahezu inkompressiblen Materialien, bei der die Inkompressibilitätsbedingung als Nebenbedingung in das Variationsfunktional integriert wird, wird dementsprechend die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrischen Potenzial aus Gleichung (2.31c) mithilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren in die Variationsformulierung eingearbeitet. Damit wird die funktionale Abhängigkeit des elektrischen Feldes vom elektrischen Potenzial gelockert und muss nur noch in schwacher Form erfüllt werden. Unter Einhaltung der elektrischen Randbedingungen wird die innere Arbeit von gekoppelten elektromechanischen Systemen nun vollständig berücksichtigt und

so das reale Strukturverhalten besser approximiert. Der Lagrangesche Multiplikator kann als dielektrische Verschiebung identifiziert werden, vgl. GHANDI UND HAGOOD [42] und LAMMERING UND MESECKE-RISCHMANN [72]. Die daraus entwickelte neue flache Schalenformulierung enthält nun zusätzlich zu den standardmäßig verwendeten Verschiebungen, den Verdrehungen und dem elektrischen Potenzial als weitere unabhängige Variable die dielektrische Verschiebung.

Das Vorgehen bei der Entwicklung dieser neuen Mehrfeldvariationsformulierung ist im Anhang A ausführlich dargestellt. Mit  $\delta\mathcal{G}$  aus Gleichung (2.37) lautet das resultierende Variationsprinzip aus Gleichung (A.6)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi, \mathbf{E}^{\text{el}}, \delta\mathbf{E}^{\text{el}}, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}) &= \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{D} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot (\delta\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \delta\Phi) \, dV = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

wobei mit  $\delta\mathbf{D}$  die virtuelle dielektrische Verschiebung und mit  $\delta\mathbf{E}^{\text{el}}$  das virtuelle elektrische Feld bezeichnet wird. Des Weiteren ist in der obigen Gleichung (2.43) zu beachten, dass das elektrische Feld zunächst als unabhängige Variable auftritt. Im Anhang A zeigt sich jedoch, dass hieraus eine abhängige Größe wird, da die Variation bzgl. des elektrischen Feldes verschwindet. Damit ist die Gleichung (A.7) der Ausgangspunkt für die Dreifeldvariationsformulierung, die zur besseren Übersichtlichkeit noch einmal angegeben wird

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}) &= \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}^{\text{m}} : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{D} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot \text{Grad } \delta\Phi \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_D} \bar{d} \delta\Phi \, dA = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die dielektrische Verschiebung ist weiterhin eine unabhängige Variable. Daher verbleibt als einzige abhängige elektrische Zustandsgröße das elektrische Feld  $\mathbf{E}^{\text{el}}$ , dessen Beziehung nun nicht mehr mit der Gleichung (2.31c) bestimmt werden darf, sondern mithilfe von konstitutiven Beziehungen ausgewertet werden muss. Dies bedarf gegenüber der Formulierung SM2F $\Phi$  aus Gleichung (2.37) konjugierter konstitutiver Gleichungen, bei denen  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{E}^{\text{el}}$  als abhängige Größen verwendet werden. Dieses konjugierte Stoffgesetz wird in Kapitel 3.2.5 vorgestellt. Zur besseren Unterscheidung der verschiedenen Ansätze wird im Folgenden für die in diesem Kapitel entwickelte erweiterte schwache Form des Gleichgewichts die Abkürzung 'SM3F $\Phi$ ' (Smart Material 3-Feldvariationsformulierung mit elektrischem Potenzial) verwendet.

## Kapitel 3

# Theorie der Piezoelektrizität

Erstmalig wurde die Piezoelektrizität im Jahre 1880 von den Brüdern Curie an natürlich vorkommenden Turmalinkristallen entdeckt und beschrieben. Diese Entdeckung war der Ausgangspunkt reger Forschungsaktivität, die verschiedene Einsatzmöglichkeiten der piezoelektrischen Werkstoffe in technischen Anwendungen eröffnete. Die heutigen industriell hergestellten Werkstoffe wie z.B. piezoelektrische Keramiken und Kunststoffe verfügen über einen sehr viel stärkeren als den natürlichen piezoelektrischen Effekt und werden in unterschiedlicher Form u.a. als Plättchen, Fasern und Folien eingesetzt. Man unterscheidet je nach der Richtung der Energiewandlung zwischen dem direkten und dem inversen piezoelektrischen Effekt. Beim direkten piezoelektrischen Effekt führt eine mechanische Deformation eines piezoelektrischen Körpers zu einem elektrischen Feld während der inverse piezoelektrische Effekt dadurch gekennzeichnet ist, dass durch eine elektrische Spannung an einem mechanisch unbelasteten Körper eine Dehnung oder, bei behinderter Dehnung, eine mechanische Spannung induziert wird.

Dieses Kapitel gliedert sich in zwei Hauptabschnitte. Zu Beginn wird das Werkstoffverhalten von Ferroelektrika phänomenologisch vorgestellt. Darauf aufbauend werden mithilfe von Energiebetrachtungen die erforderlichen konstitutiven Gleichungen abgeleitet, die gleichzeitig die Kopplungsbedingung zwischen dem mechanischen und elektrischen Werkstoffverhalten darstellen.

### 3.1 Phänomenologische Betrachtungen von Ferroelektrika

Die Beschreibung der Phänomene durch die auftretende elektromechanische Kopplung kann in Abhängigkeit von der Sichtweise von zwei Standpunkten aus erfolgen: auf makromechanischer oder auf mikromechanischer Ebene. In den folgenden Kapiteln wird dies näher erläutert. Eine sehr ausführliche Darstellung ist u.a. bei KAMLAH [61, 62] zu finden.

### 3.1.1 Mikromechanische Betrachtungen

Auf mikromechanischer Ebene bilden piezoelektrische Keramiken eine polykristalline Struktur aus Körnern, die aus einer Vielzahl von Domänen bestehen, vgl. Bild 3.1. Eine Domäne setzt sich wiederum aus einer Reihe von Elementarzellen zusammen, in denen eine Polarisationsrichtung vorherrscht. Wie in Bild 3.2 dargestellt, liegt die Elementarzelle oberhalb der Umwandlungstemperatur oder auch Curietemperatur  $T_c$  als ein Perowskitgitter vor, d.h. die Gitterstruktur ist kubisch raumzentriert und das Werkstoffverhalten paraelektrisch. Die positiven und negativen Ladungsschwerpunkte liegen aufeinander, so dass keine spontane Polarisation  $P_s$  möglich ist. Unterhalb der Curietemperatur wird

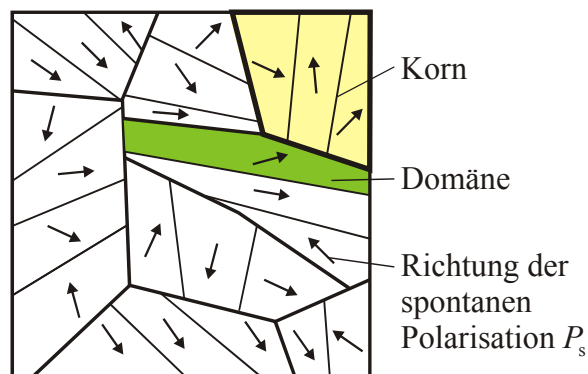


Bild 3.1: Schematische Darstellung einer Probe aus piezoelektrischem Material im depolarisierten Zustand unterhalb der Curietemperatur  $T_c$

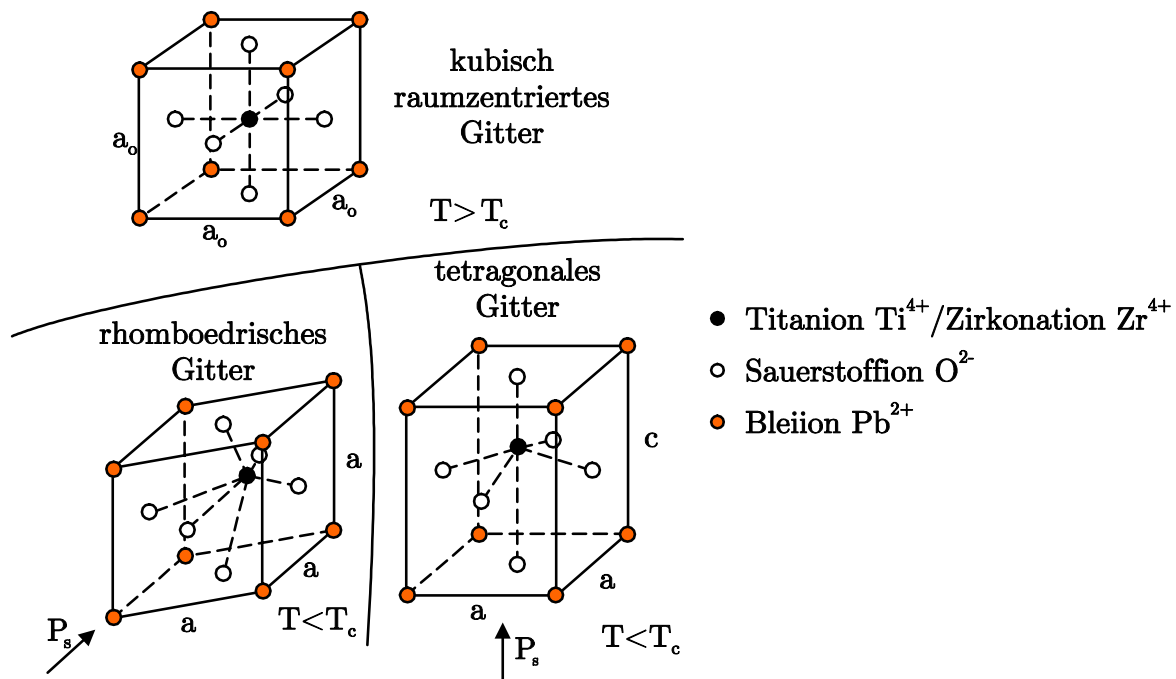


Bild 3.2: Schematische Darstellung einer Einheitszelle oberhalb und unterhalb der Curietemperatur  $T_c$

die kubische Gitterstruktur instabil, die Ladungsschwerpunkte verschoben sich, und es entsteht ein rhomboedrisches oder auch ein tetragonales Gitter. Die Elementarzelle ist nun von der paraelektrischen Phase in die ferroelektrische Phase übergegangen. Es ist ein Dipol entstanden, der eine spontane Polarisierung und somit auch piezoelektrische Eigenschaften besitzt. Die Richtung der spontanen Polarisierung erfolgt jedoch zufällig, so dass innerhalb eines Kornes Domänen entstehen, vgl. dazu Bild 3.1. Ein Material mit diesen Eigenschaften hat kein Symmetriezentrum und wird deshalb auch als polar bezeichnet. Makroskopisch heben sich die Beiträge der mikroskopischen Polarisierungseffekte auf, weshalb der piezoelektrische Werkstoff im depolarisierten Zustand isotrope Eigenschaften aufweist. Durch große Belastungen kann jedoch der momentane Zustand der einzelnen Domäne verändert werden. Die Auswirkungen sind dann auf makroskopischer Ebene zu beobachten.

### 3.1.2 Makromechanische Betrachtung

Für die Entwicklung technischer Anwendungen ist vorrangig das makromechanische Werkstoffverhalten von Interesse. Das für Piezoelektrika spezifische Verhalten auf makromechanischer Ebene kann mithilfe der mikromechanischen Betrachtungen des Kapitels 3.1.1 veranschaulicht werden und wird für eine einachsige Belastung des Materials mit einem elektrischen Feld hier näher erläutert.

#### Die dielektrische Hysterese

Eine Probe aus depolarisiertem piezoelektrischem Material wird mit einem elektrischen Feld einachsial belastet. In Bild 3.3 ist das dielektrische Hystereseverhalten dargestellt, d.h. die Polarisierung  $P$  ist in Abhängigkeit vom elektrischen Feld  $E^{\text{el}}$  aufgetragen. Der Punkt O kennzeichnet den depolarisierten Ausgangszustand direkt nach dem Herstellungsprozess, bei dem die Domänen noch willkürlich orientiert sind. Dies ist in Bild 3.3 exemplarisch anhand von vier Domänenbereichen dargestellt. Bei Belastung ist die Polarisierung der Probe zunächst reversibel. Erst bei Erreichen der Koerzitivfeldstärke  $E_c^{\text{el}}$  in Punkt A wird ein Umklappvorgang der Domänen initiiert, welcher irreversibel ist. Die Domänen wechseln bei dieser Belastungsintensität zunehmend ihre Polarisierungsrichtung in die energetisch günstigere Richtung des aufgebrachtten elektrischen Feldes. Dies führt zunächst zu einem stärkeren Anstieg der Polarisierung, bis alle Domänen in Richtung des elektrischen Feldes orientiert sind. Damit ist der Punkt B der Sättigungspolarisation  $P_{\text{sat}}$  erreicht.

Bei abnehmendem elektrischem Feld bleiben die Domänen weitestgehend ausgerichtet, so dass die Probe bei vollständiger Entlastung bis zum Punkt C eine makroskopisch bleibende remanente Polarisierung  $P_r$  aufweist. Wird nun ein entgegengesetztes elektrisches Feld aufgebracht, geht die Polarisierung weiter zurück. Bei Erreichen der Koerzitivfeldstärke  $E_c^{\text{el}}$  liegt in Punkt D wieder ein depolarisierter Zustand vor. Bei weiter zunehmendem



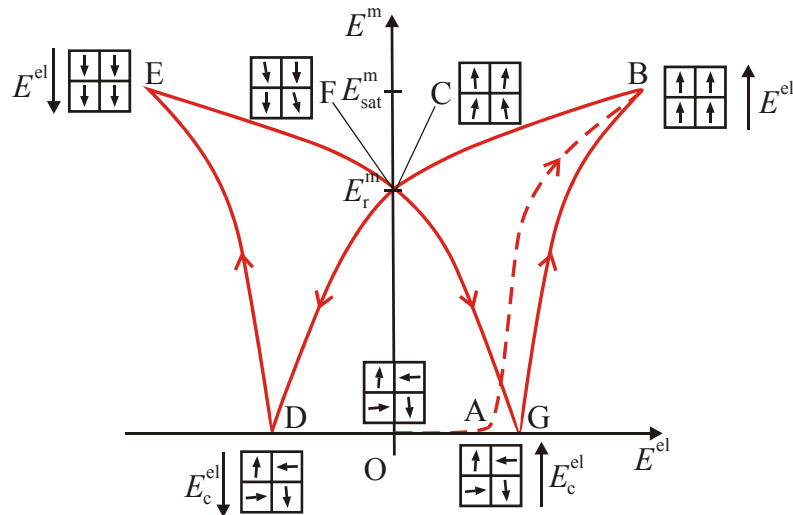


Bild 3.4: Schematische Darstellung der Schmetterlingshysterese unter Angabe des jeweiligen Polarisationszustandes

wenn alle Domänenbereiche in die Belastungsrichtung ungeklappt sind. Darüber hinaus belastet verhält sich das Material linear elastisch. Bei Entlastung der Probe ist im Punkt C makroskopisch eine bleibende, remanente Dehnung  $E_r^m$  zu beobachten. Wird nun ein elektrisches Feld in der Gegenrichtung aufgebracht, so geht die Dehnung weiter zurück, was durch die zunehmende Depolarisation der Probe hervorgerufen wird. Im Punkt D wird die minimale Ausdehnung erreicht. Bei Überschreitung der hier vorliegenden Koerzitivfeldstärke richtet sich die ungeordnete Domänenstruktur wieder in die neue Belastungsrichtung aus. Dies führt zu einer erneuten Dehnung bis die Sättigungsdehnung und damit eine vollständige Ausrichtung der Domänen im Punkt E erreicht wird. Die zugehörige piezoelektrische Materialkonstante hat nun ein entgegengesetztes Vorzeichen. Zur Vervollständigung der achsensymmetrischen Schmetterlingskurve wird das elektrische Feld wieder in der entgegengesetzten Richtung aufgebracht, so dass die Punkte F, G und B durchlaufen werden.

Der Arbeitsbereich für piezoelektrische Materialien sollte im Gegensatz zu dem soeben diskutierten extremen Einsatzbereich so gewählt werden, dass es nicht zu einer häufigen Umpolarisation der Keramik kommt, da dies eine reduzierte Lebensdauer des Aktors bzw. Sensors zur Folge hat. Des Weiteren führt ein Betrieb von piezoelektrischen Keramiken nur knapp unterhalb der Umwandlungstemperatur ebenfalls zu einer starken Alterung und einem Absinken der remanenten Polarisation. Daher sollten die eingesetzten Werkstoffe maximal bei der halben Curietemperatur betrieben werden, vgl. CERAMTEC [26].

## 3.2 Entwicklung von Materialmodellen

Die bisher im Kapitel 2 entwickelten Gleichungen sind für beliebige Materialgesetze gültig. Um das Verhalten einer Struktur als ein Randwertproblem formulieren und lösen zu

können, reichen diese Grundgleichungen jedoch nicht aus. Es werden für den jeweiligen betrachteten Körper Stoffgesetze benötigt, die in der Lage sind, dessen individuelle Eigenschaften mathematisch beschreiben zu können. Dies sollte der Komplexität des Anwendungsgebietes und der gestellten Aufgabe angepasst sein, wobei eine möglichst einfache aber trotzdem ausreichend genaue Beschreibung mithilfe der konstitutiven Gleichungen sinnvoll ist.

Die im Folgenden vorgestellten mathematischen Modelle sollen die Eigenschaften von piezoelektrischen Werkstoffen in der notwendigen Genauigkeit beschreiben können. Die vorliegende Arbeit verwendet eine Idealisierung realer Strukturen und beschränkt sich auf die kontinuierliche Beschreibung eines materiellen Körpers ohne Defekte, Schädigungen oder Alterungsprozesse. Dabei wird zwischen linearen und nichtlinearen Materialmodellen unterschieden. Für den Kleinsignalbereich wird im Allgemeinen ein lineares Modell als ausreichend angesehen. Neuere Untersuchungen zeigen jedoch, dass diese vereinfachende Annahme zu nicht vernachlässigbaren Abweichungen zwischen Experiment und numerischer Rechnung führen kann, vgl. u.a. CRAWLEY UND LAZARUS [33]. Für den Großsignalbereich ist in jedem Fall ein nichtlineares Materialmodell notwendig.

### 3.2.1 Potenziale und Zustandsgleichungen

In Abhängigkeit von dem betrachteten Arbeitsbereich der Keramiken ist vielfach eine lineare Theorie ausreichend. Jedoch muss für weitergehende Untersuchungen, z.B. für die Untersuchung von Polarisationsvorgängen, eine nichtlineare Beschreibung verwendet werden. Für die meisten Materialgleichungen wird die Existenz eines Energiepotenzials vorausgesetzt, so dass sich eine thermodynamisch konsistente Formulierung ergibt, siehe z.B. MAUGIN [85], TICHY UND GAUTSCHI [109] und TIERSTEN [110].

Für das hier untersuchte piezoelektrische Material werden die konstitutiven Gleichungen aus der elektrischen Enthalpiedichte  $H$  hergeleitet, vgl. auch Kapitel 2.4.2,

$$H(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}^{el}) = U - \mathbf{E}^{el} \cdot \mathbf{D}. \quad (3.1)$$

$U$  stellt die innere Energiedichtefunktion dar und  $\mathbf{E}^{el} \cdot \mathbf{D}$  gibt die Energiedichte des elektrostatischen Feldes an. Werden  $\mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{E}^{el}$  als unabhängige Variablen gewählt, so ergeben sich sowohl die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  als auch die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  durch partielle Differenziation der elektrischen Enthalpiedichte bzgl.  $\mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{E}^{el}$ , siehe u.a. NGUYEN [89], TICHY UND GAUTSCHI [109] und v. WAGNER UND HAGEDORN [117],

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}^m}, \quad \mathbf{D} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}^{el}}. \quad (3.2)$$

Die zugehörigen Materialparameter zu dem hier gewählten Stoffgesetz lassen sich durch eine weitere partielle Differenziation bzgl. der unabhängigen Feldgrößen berechnen. Der vierstufige Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  ergibt sich bei konstantem elektrischem Feld  $\mathbf{E}^{el}$  und der zweistufige Permittivitätstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bei konstanter Verzerrung  $\mathbf{E}^m$  zu

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E}^m \partial \mathbf{E}^m}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E}^{el} \partial \mathbf{E}^{el}} \quad (3.3)$$

Die Bestimmung des piezoelektrischen Moduls  $\mathbf{e}$ , eines Tensors dritter Stufe, ist gleichzeitig eine Kopplungsbedingung zwischen dem elektrischen und mechanischen Materialverhalten

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{E}^{\text{el}}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}} \partial \mathbf{E}^{\text{el}}} \\ \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E}^{\text{el}} \partial \mathbf{E}^{\text{m}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{E}^{\text{el}}} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}}} . \quad (3.4)$$

Aufgrund der Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei den partiellen Ableitungen von  $H$  bzgl. der unabhängigen Variablen in Gleichung (3.4) sind die Materialkonstanten sowohl für den direkten als auch den inversen piezoelektrischen Effekt gleich. Welche Bedingungen sich hieraus für die Entwicklung von nichtlinearen Stoffgesetzen ergeben, wird eingehender in Kapitel 3.2.3 diskutiert.

Für die Verwendung der Zweifeldvariationsformulierung SM2F $\Phi$  aus Gleichung (2.37) ist die Ableitung der Stoffgleichungen mithilfe der elektrischen Enthalpiedichte  $H$  sinnvoll. Es besteht jedoch die Möglichkeit, auch paarweise andere Zustandsgrößen, z.B.  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}^{\text{el}})$ ,  $(\mathbf{E}^{\text{m}}, \mathbf{D})$  und  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ , als unabhängige Variablen zu wählen. Ihnen liegen entsprechende Energiepotenziale zugrunde, siehe u.a. IKEDA [55], TICHY UND GAUTSCHI [109] und YANG [128, 129], die jedoch mittels einer Legendre-Transformation ineinander überföhrbar sind.

Bei der Entwicklung der Dreifeldvariationsformulierung SM3F $\Phi$  nach Kapitel 2.4.3 wird ein anderer Satz unabhängiger Variablen verwendet, vgl. u.a. GHANDI UND HAGOOD [42], MESECKE-RISCHMANN UND LAMMERING [87] und SZE UND YAO [105]. Ausgangspunkt stellt hier die innere Energiedichte  $U$  dar. Die unabhängigen Zustandsgrößen werden durch  $\mathbf{E}^{\text{m}}$  und  $\mathbf{D}$  repräsentiert, so dass sich als abhängige Variablen die Spannungen und das elektrische Feld durch partielle Differenziation der inneren Energiedichte  $U$  bzgl.  $\mathbf{E}^{\text{m}}$  und  $\mathbf{D}$  ergeben

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}}} , \quad \mathbf{E}^{\text{el}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}} . \quad (3.5)$$

Durch eine weitere partielle Differenziation bzgl. der unabhängigen Feldgrößen können hier ebenfalls die Materialtensoren berechnet werden

$$\mathbb{C}^{\text{d}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}} \partial \mathbf{E}^{\text{m}}} , \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} , \quad (3.6)$$

wobei die Materialkonstanten des Elastizitätstensors  $\mathbb{C}^{\text{d}}$  bei konstanter dielektrischer Verschiebung  $\mathbf{D}$  und die des zweistufigen Impermittivitätstensors  $\boldsymbol{\beta}$  bei konstanten Verzerrungen  $\mathbf{E}^{\text{m}}$  bestimmt werden. Über den piezoelektrischen Modul  $\mathbf{h}$ , einem Tensor dritter Stufe, ergibt sich die Kopplungsbedingung zwischen mechanischem und elektrischem Materialverhalten

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}} \partial \mathbf{D}} \\ \mathbf{h} &= \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{E}^{\text{m}}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{E}^{\text{el}}}{\partial \mathbf{E}^{\text{m}}} . \quad (3.7)$$

Auf diesen konjugierten Satz konstitutiver Gleichungen wird genauer im Kapitel 3.2.5 eingegangen.

### 3.2.2 Lineares Materialmodell für den Kleinsignalbereich

Verbreitete Verwendung findet das lineare Materialmodell, das sich mithilfe der elektrischen Enthalpiedichte aus Gleichung (3.1) ableiten lässt und bei dem  $\mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{E}^{el}$  als unabhängige Variablen gewählt werden. Unter der Voraussetzung, dass die elektrische Enthalpiedichte  $H$  quadratisch in den unabhängigen Feldgrößen ist

$$H(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}^{el}) = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \mathbf{E}^m : \mathbf{E}^m - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}^{el} : \mathbf{E}^m - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{el} \cdot \mathbf{E}^{el}, \quad (3.8)$$

leiten sich die linearen Zustandsgleichungen mithilfe der Gleichungen (3.2) ab, vgl. IKEDA [55] und TIERSTEN [110]. Hieraus ergeben sich die linearen konstitutiven Gleichungen für piezoelektrisches Material, welche die folgende Form haben

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E}^m - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}^{el} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{el}. \quad (3.9b)$$

Die Materialparameter der Tensoren  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{e}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sind konstante Größen, und stellen den Zusammenhang zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen her.

Insgesamt ergeben sich im allgemeinen Fall unter Berücksichtigung von Symmetriebedingungen für piezoelektrische Werkstoffe 21 elastische, 18 piezoelektrische und 6 dielektrische Konstanten. In dieser Arbeit werden piezoelektrische Keramiken, so genannte Mischkeramiken, aus Bleizirkonattitanat (PZT) oder piezoelektrische Polymere aus Polyvinylidenfluorid (PVDF) verwendet. Vorteilhaft bei den PZT Keramiken ist ihre gute Polarisierbarkeit mit großen piezoelektrischen Moduln. Des Weiteren ist durch den Herstellungsprozess eine vielfältige Formgebung möglich. Nachteilig sind die stärkeren Drift- und Ermüdungserscheinungen sowie größere Temperaturabhängigkeiten, die im Gegensatz zu Einkristallen bei allen Mischkeramiken auftreten, vgl. TICHY UND GAUTSCHI [109]. Durch die nach dem Herstellungsprozess erfolgte Polarisierung erhält das Material näherungsweise ein transversal isotropes Verhalten, wobei sich die Keramik senkrecht zur Polarisationsrichtung isotrop verhält. Damit lassen sich die Konstanten auf 5 elastische, 3 piezoelektrische und 2 dielektrische reduzieren, vgl. z.B. TIERSTEN [110].

Für die numerische Berechnung wird die mechanische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  meistens mit der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$  in einer Spaltenmatrix zusammengefasst. Somit resultiert das lineare dreidimensionale transversal isotrope Stoffgesetz für das gekoppelte elektro-mechanische Werkstoffverhalten, das durch die Gleichheit der Werkstoffkonstanten in der

$xy$ -Ebene gekennzeichnet ist, zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{311} \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{311} \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{333} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & -e_{113} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & -e_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^m \\ E_{yy}^m \\ E_{zz}^m \\ E_{xy}^m \\ E_{xz}^m \\ E_{yz}^m \\ E_x^{\text{el}} \\ E_y^{\text{el}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Dieses lineare Materialmodell wird im Kapitel 4.7 in das Zweifeldvariationsfunktional  $\text{SM2F}\Phi$  der Gleichung (2.37) integriert und anschließend wird daraus eine zugehörige Finite-Elemente-Formulierung entwickelt.

### 3.2.3 Nichtlineare Modelle für den Kleinsignalbereich

Im Gegensatz zur vielfach verwendeten linearen Theorie, zeigen Experimente u.a. von CRAWLEY UND LAZARUS [33], NGUYEN [89], v. WAGNER UND HAGEDORN [117], v. WAGNER [118] und WANG ET AL. [121], dass auch schon in unmittelbarer Umgebung des Arbeitspunktes ein nichtlineares Strukturverhalten vorhanden ist. Theoretische Überlegungen zur Entwicklung entsprechender Zustandsgleichungen und thermodynamischer Potenziale, die auch Terme dritter Ordnung berücksichtigen, sind u.a. bei DÖKMECI [36], JOSHI [59, 60] und TICHY UND GAUTSCHI [109] beschrieben. Die sich daraus ergebenden zusätzlichen Materialparameter sind jedoch keine Konstanten mehr sondern abhängig vom aktuellen Wert der unabhängigen Variablen.

Anhand eines Beispiels von NGUYEN [89] soll die Problematik verdeutlicht werden. Die dort entnommene und in Bild 3.5 dargestellte Balkenstruktur mit applizierten piezoelektrischen Keramiken zeigt schon für einen Arbeitsbereich von nur 100 V nicht zu vernachlässigende Abweichungen vom linearen Verhalten, das im Allgemeinen für den Kleinsignalbereich vorausgesetzt wird. Die Untersuchungen des Autors ergeben ein lineares Verhalten der Klebeschicht zwischen Tragstruktur und Keramik und lassen auf eine Nichtlinearität des verwendeten piezoelektrischen Materials selbst schließen. Nichtlineare konstitutive Gleichungen werden entwickelt und die zusätzliche Erweiterung der elektrischen Enthalpiedichte durch Terme höherer Ordnung führt dann zu einer thermodynamisch konsistenten Formulierung des eindimensionalen mathematischen Modells. Im Stoffgesetz wird eine Abhängigkeit des piezoelektrischen Koeffizienten und des Elastizitätsmoduls von der Dehnung angenommen und Terme bis zur dritten Ordnung werden berücksichtigt. Die zusätzlichen vier nichtlinearen Materialkonstanten können mit einer

Parameteridentifikation aus den Messdaten bestimmt werden. Eine numerische Lösung mithilfe des Rayleigh-Ritz Verfahrens wird zu Vergleichszwecken ermittelt.

Weiterführende Arbeiten, z.B. von V. WAGNER UND HAGEDORN [117] und V. WAGNER [118], befassen sich mit axial und transversal polarisierten Stäben. Die Erweiterung dieser eindimensionalen Ansätze auf mehrdimensionale Probleme wird durch die Identifikation der dann zahlreichen Materialparameter wahrscheinlich sehr schwer handhabbar werden und ist für die Umsetzung in eine Finite-Elemente-Formulierung ungünstig.

Eine der ersten Untersuchungen an isotropen und anisotropen piezoelektrischen Kompositplatten von CRAWLEY UND LAZARUS [33] weist ebenfalls Nichtlinearitäten im Kleinsignalbereich nach und setzt zu ihrer Approximation eine Abhängigkeit der Kopplungskoeffizienten von den Verzerrungen voraus. Mithilfe von zwei experimentell bestimmten Materialparametern wird eine gute Übereinstimmung von einer mittels Ritz Verfahren approximierten Lösung für Platten und den Messergebnissen erzielt.

In THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108] wird eine physikalisch nichtlineare Formulierung für Kompositplatten vorgestellt, die eine Laminattheorie höherer Ordnung berücksichtigt. Die Abhängigkeit des piezoelektrischen Koeffizienten von den Verzerrungen und dem elektrischen Feld wird untersucht. Es wird jedoch festgestellt, dass die Abhängigkeit von den Verzerrungen dominant gegenüber der vom elektrischen Feld ist.

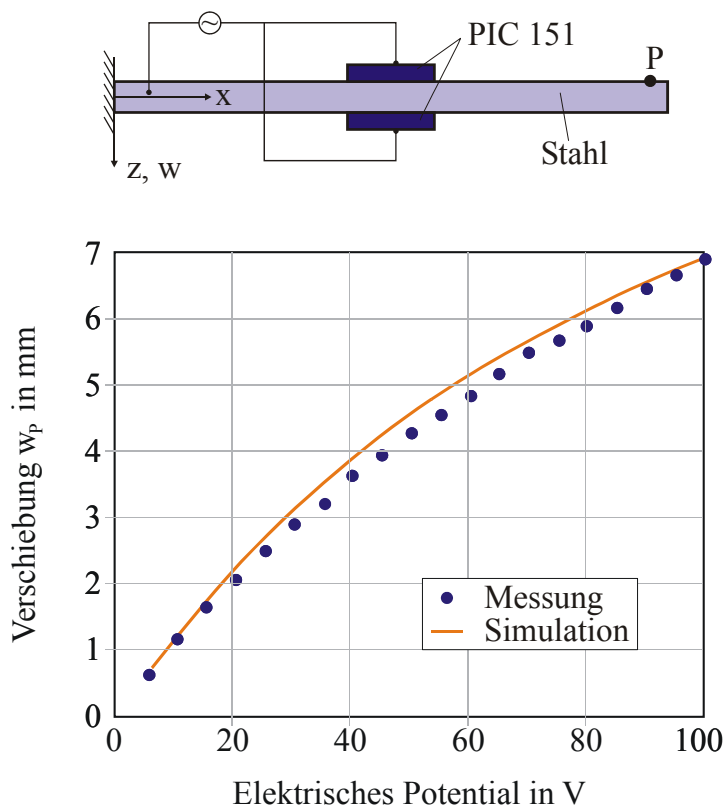


Bild 3.5: Beispiel einer Balkenstruktur mit applizierten Keramiken mit nichtlinearem Verhalten der Piezoelektrika im Kleinsignalbereich, vgl. NGUYEN [89]

Aufgrund dieser Untersuchungen wird im Rahmen dieser Arbeit eine ausschließlich lineare Abhängigkeit des piezoelektrischen Moduls von den Verzerrungen angenommen. Infolge des nichtlinearen Verhaltens piezoelektrischer Materialien im Kleinsignalbereich werden die linearen konstitutiven Gleichungen (3.9a) und (3.9b) erweitert. Für den piezoelektrischen Modul  $\mathbf{e}$  wird eine additive Zerlegung in einen konstanten Anteil  $\mathbf{e}^0$  und einen linear abhängigen Anteil  $\mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m$  vorgenommen. Es entsteht ein Tensor fünfter Stufe  $\mathbf{e}^1$ , der durch Verknüpfung mit den Verzerrungen  $\mathbf{E}^m$  zu einem Tensor dritter Stufe verjüngt wird

$$\mathbf{e}(\mathbf{E}^m) = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m . \quad (3.11)$$

Durch Einsetzen dieser nichtlinearen Beziehung in Gleichung (3.9a) berechnen sich die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  mit dem nichtlinearen Stoffgesetz zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E}^m - (\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m) \cdot \mathbf{E}^{el} . \quad (3.12)$$

Wird die Existenz eines Potentials vorausgesetzt, z.B. die elektrische Enthalpiedichte aus Gleichung (3.1), so werden die konstitutiven Beziehungen mit Gleichung (3.2) bestimmt. Eine zentrale Bedeutung hat dabei die Kopplungsbedingung aus Gleichung (3.4), die unbedingt berücksichtigt werden sollte, da sie sowohl die notwendige als auch hinreichende Bedingung für die Existenz einer nichtlinearen Enthalpiedichte  $H^{nl}$  ist. Daher wird in dieser Arbeit die Kopplungsbedingung zur Herleitung von  $H^{nl}$  verwendet.

Zur Erfüllung der Kopplungsbedingung kann die nichtlineare dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  durch Auswertung der Gleichung (3.4) und nachheriger Integration bestimmt werden zu

$$\mathbf{D} = (\mathbf{e}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m)^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{el} . \quad (3.13)$$

Auch hier ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{D}$  und dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}^{el}$  und ein nichtlinearer Anteil aus der elektromechanischen Kopplungsbeziehung mit den Verzerrungen  $\mathbf{E}^m$ . Die elektrische Enthalpiedichte  $H^{nl}$  für nichtlineare Probleme des Kleinsignalbereichs kann nun mithilfe der Gleichungen (3.12) und (3.13) durch Integration der Bedingungen aus Gleichung (3.2) entwickelt werden

$$(\mathbf{E}^m, \mathbf{E}^{el}) = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \mathbf{E}^m : \mathbf{E}^m - \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{E}^{el} : \mathbf{E}^m - \frac{1}{2} \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m \cdot \mathbf{E}^{el} : \mathbf{E}^m - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{el} \cdot \mathbf{E}^{el} . \quad (3.14)$$

Hieraus resultiert das nichtlineare dreidimensionale transversal isotrope Stoffgesetz, bei dem zur übersichtlichen Darstellung für den nichtlinearen piezoelektrischen Modul die

Abkürzungen  $\mathbf{e}^\sigma = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{e}^D = \mathbf{e}^0 + 1/2\mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m$  definiert werden

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{311}^\sigma \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{322}^\sigma \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{333}^\sigma \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & -e_{113}^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & -e_{223}^\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113}^D & 0 & \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{223}^D & 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ e_{311}^D & e_{322}^D & e_{333}^D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^m \\ E_{yy}^m \\ E_{zz}^m \\ E_{xy}^m \\ E_{xz}^m \\ E_{yz}^m \\ E_x^{\text{el}} \\ E_y^{\text{el}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Diese nichtlinearen konstitutiven Gleichungen werden nachfolgend in die Zweifeldvariationsformulierung SM2F $\Phi$  der Gleichung (2.37) implementiert und anhand eines Beispiels in Kapitel 6.7.2 mit den experimentellen und numerischen Ergebnissen aus der Literatur von WANG ET AL. [121] und THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108] verglichen.

### 3.2.4 Nichtlineare Modelle für den Großsignalbereich

Gerade in den letzten Jahren sind auf dem Gebiet des Großsignalverhaltens von Piezoelektrika vermehrt Veröffentlichungen erschienen. Einige Ansätze sollen kurz skizziert werden, um die Modellbildung z.B. für Polarisierungsprozesse von piezoelektrischen Werkstoffen vorzustellen. Mit diesen Materialmodellen besteht die Möglichkeit, z.B. die dielektrische Hysterese und die Schmetterlingskurve aus Kapitel 3.1.2 zu beschreiben. Die Modelle können in unterschiedliche Kategorien eingeteilt werden, vgl. KAMLAH [62]. Es existieren u.a. phänomenologisch und energetisch motivierte Modelle, und man kann zwischen mikromechanischen und makromechanischen Modellen unterscheiden.

Die phänomenologischen Materialmodelle für den Großsignalbereich sind die ersten Ansätze zur makroskopischen Beschreibung des komplexen nichtlinearen Verhaltens piezoelektrischer Keramiken, siehe z.B. das eindimensionale Modell von CHEN UND MONTGOMERY [31]. Mithilfe von gewöhnlichen Differenzialgleichungen werden Evolutionsgleichungen für innere Variablen zur Beschreibung des Polarisations- und Dehnungszustandes entwickelt. Ein weiterer phänomenologischer Ansatz ist, die thermodynamisch motivierten Konzepte der Thermo-Elastoplastizität auf gekoppelte elektromechanische Problemstellungen zu übertragen, siehe BASSIOUNY ET AL. [8] und BASSIOUNY UND MAUGIN [9]. Das phänomenologische Modell von McMEEKING UND LANDIS [86] wird mithilfe der Helmholtzschen freien Energiefunktion hergeleitet und beschreibt den Umklappvorgang der Domänen analog zur Plastizitätstheorie mit kinematischer Verfestigung. Ein so gut wie vollständiges dreidimensionales Materialmodell auf der makroskopischen Ebene wird mithilfe phänomenologischer Ansätze von KAMLAH [61, 62] entwickelt. Die Polarisation und die Dehnung werden jeweils additiv in einen reversiblen und einen remanenten Anteil

zerlegt und stellen das Gedächtnis des Materials dar. Geeignete Evolutionsgleichungen werden für die internen Variablen entwickelt, die jedoch nicht thermodynamisch motiviert sind. Eine Umsetzung in ein Finite-Elemente-Programm ist ebenfalls erfolgt, vgl. KAMLAH ET AL. [63]. Weitere Finite-Elemente-Formulierungen sind u.a. bei GHANDI UND HAGOOD [42] beschrieben.

Mikromechanisch basierte Modelle beschreiben u.a. mithilfe der Kristallplastizität das Wandern von Domänenwänden, vgl. HUBER ET AL. [46]. Das Umklappen der Domänen von ferroelektrischen Polykristallen führt zu einer progressiven Änderung der remanenten Dehnung und Polarisation. Zusätzlich muss eine Verfestigung berücksichtigt werden, um eine stabile Berechnung zu gewährleisten. Eine Verbesserung dieses Modells durch Verwendung von weniger Körnern wird von HUBER UND FLECK [47] vorgestellt. Mithilfe von Energiebetrachtungen wiederum werden von HWANG ET AL. [54] die Umklappvorgänge der Domänen beschrieben. Beim Überschreiten eines kritischen Wertes für die gesamte Formänderungsenergie wechselt das Korn die Richtung seiner Polarisation. Die Umsetzung dieses Modells in ein Finite-Elemente-Programm ist von HWANG UND McMEEKING [53] erfolgt. Jedes Korn stellt hierbei ein Element dar, bei dem die potentielle Energie im Zentrum des Elements berechnet und mit einer kritischen Energiebarriere verglichen wird.

Um Aussagen bzgl. der Lebensdauer von piezoelektrischen Keramiken treffen zu können, ist insbesondere die adäquate Modellierung des Materialverhaltens im Großsignalbereich wichtig. Für den täglichen Einsatz in diesem extremen Belastungsbereich sind die Keramiken jedoch nicht geeignet, so dass die in den vorherigen Kapiteln 3.2.2 und 3.2.3 vorgestellten Modelle in der Praxis von größerer Bedeutung sind.

### 3.2.5 Konjugierte Materialmodelle für den Kleinsignalbereich

Für die Mehrfeldvariationsformulierung wie sie in Kapitel 2.4.3 vorgestellt wurde, wird ein konjugierter Satz unabhängiger Variablen benötigt und dafür werden sinnvollerweise die Verzerrungen  $\mathbf{E}^m$  und die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  verwendet. Die zugehörigen konstitutiven Gleichungen lassen sich nach Gleichung (3.5) aus der inneren Energiedichte  $U$

$$U(\mathbf{E}^m, \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbb{C}^d : \mathbf{E}^m : \mathbf{E}^m - \mathbf{h} \cdot \mathbf{D} : \mathbf{E}^m + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad (3.16)$$

ableiten. Durch die Auswertung der Gleichungen (3.5) - (3.7) ergeben sich damit die konstitutiven Beziehungen zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^d : \mathbf{E}^m - \mathbf{h} \cdot \mathbf{D} \quad (3.17a)$$

$$\mathbf{E}^{el} = -\mathbf{h}^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D} . \quad (3.17b)$$

Um jedoch eine direkte Umrechnung der Materialparameter unabhängig von der verwendeten Energieformulierung zu ermöglichen, ist die im vorigen Kapitel vorgestellte elektrische Enthalpiedichte  $H$  aus Gleichung (3.8) mithilfe einer Legendre-Transformation in

das nun gewählte thermodynamische Potenzial  $U$  aus Gleichung (3.16) zu überführen. Damit ist ein Vergleich verschiedener Modelle einfach möglich. Die konstitutiven Gleichungen (3.9a) und (3.9b) werden transformiert, so dass die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Materialkonstanten direkt ermittelt werden können. Die Umrechnung erfolgt daher mit den folgenden Beziehungen, vgl. u.a. IKEDA [55], was die Verwendung von den gleichen Materialparametern für verschiedene hieraus entwickelte Finite-Elemente-Modelle ermöglicht

$$\mathbf{C}^d = \mathbf{C} + \mathbf{e}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{e} \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \mathbf{e} \quad (3.18b)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (3.18c)$$

Eine äquivalente Formulierung zu Gleichung (3.10) kann ebenfalls für das dreidimensionale Stoffgesetz angegeben werden

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ E_x^{\text{el}} \\ E_y^{\text{el}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^d & C_{1122}^d & C_{1133}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{311} \\ C_{1122}^d & C_{1111}^d & C_{1133}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{311} \\ C_{1133}^d & C_{1133}^d & C_{3333}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{333} \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212}^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323}^d & 0 & -h_{113} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323}^d & 0 & -h_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{113} & 0 & \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_{113} & 0 & \beta_{11} & 0 \\ -h_{311} & -h_{311} & -h_{333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^m \\ E_{yy}^m \\ E_{zz}^m \\ E_{xy}^m \\ E_{xz}^m \\ E_{yz}^m \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Mit den unabhängigen Variablen  $\mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{D}$  soll nun analog zu Kapitel 3.2.3 ein nicht-lineares Materialmodell für den Kleinsignalbereich entwickelt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Indexnotation verwandt. Die konstitutiven Beziehungen aus den Gleichungen (3.17a) und (3.17b) lauten dann

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}^m - (e_{mij}^0 + e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m) E_m^{\text{el}} \quad (3.20a)$$

$$D_p = \left( e_{pkl}^0 + \frac{1}{2} e_{pklst}^\varepsilon E_{st}^m \right) E_{kl}^m + \varepsilon_{pm} E_m^{\text{el}}. \quad (3.20b)$$

Die Auflösung von Gleichung (3.20b) nach  $E_m^{\text{el}}$  wird durchgeführt, um das elektrische Feld als eine abhängige Variable von  $D_p$  und  $E_{kl}^m$  zu erhalten

$$\begin{aligned} E_m^{\text{el}} &= \varepsilon_{pm}^{-1} D_p - \varepsilon_{pm}^{-1} \left( e_{pkl}^0 + \frac{1}{2} e_{pklst}^\varepsilon E_{st}^m \right) E_{kl}^m \\ &= \beta_{pm} D_p - \left( h_{mkl}^0 + \frac{1}{2} h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m \right) E_{kl}^m. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nachheriges Einsetzen in Gleichung (3.20a) ergibt die nichtlineare Materialgleichung für die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= C_{ijkl} E_{kl}^m - (e_{mij}^0 + e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m) \left[ \beta_{pm} D_p - \left( h_{mkl}^0 + \frac{1}{2} h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m \right) E_{kl}^m \right] \\
&= \left( C_{ijkl} + e_{mij}^0 h_{mkl}^0 + \frac{1}{2} e_{mij}^0 h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m + e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m h_{mkl}^0 + \frac{1}{2} e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m \right) E_{kl}^m \\
&\quad - (h_{pij}^0 + h_{pijno}^\varepsilon E_{no}^m) D_p .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Damit wird das nichtlineare Stoffgesetz nun mit den unabhängigen Variablen  $\mathbf{E}^m$  und  $\mathbf{D}$  formuliert. Hieraus lässt sich durch Integration eine zugehörige konjugierte elektrische Enthalpiedichte für nichtlineare Systeme bestimmen zu

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(E_{ij}^m, D_i) &= \frac{1}{2} C_{ijkl} E_{ij}^m E_{kl}^m + \frac{1}{2} e_{mij}^0 h_{mkl}^0 E_{ij}^m E_{kl}^m + \frac{1}{6} e_{mij}^0 h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m E_{ij}^m E_{kl}^m \\
&\quad + \frac{1}{3} e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m h_{mkl}^0 E_{ij}^m E_{kl}^m + \frac{1}{8} e_{mijno}^\varepsilon E_{no}^m h_{mklst}^\varepsilon E_{st}^m E_{ij}^m E_{kl}^m \\
&\quad - h_{pij}^0 E_{ij}^m D_p - \frac{1}{2} h_{pijno}^\varepsilon E_{no}^m E_{ij}^m D_p + \frac{1}{2} \beta_{pm} D_m D_p .
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sie besteht im Gegensatz zu Gleichung (3.14) aus einer sehr viel größeren Anzahl an Kopplern und ist daher für praktische Berechnungen schwerer handhabbar. Daher wird in dieser Arbeit auf eine nähere Untersuchung von nichtlinearen Mehrfeldvariationsformulierungen verzichtet, die mit den Gleichungen (3.21) und (3.22) entwickelt werden können. Eine kompaktere Formulierung ließe sich durch die Definition von anderen nichtlinearen Parametern sicherlich finden, eine Vergleichbarkeit der einzelnen Modelle wäre jedoch nicht mehr gegeben. Mit den obigen Gleichungen könnten jedoch die Materialparameter von den Gleichungen (3.12) und (3.13) direkt in die der Gleichungen (3.21) und (3.22) überführt werden und damit bei der Berechnung vergleichbare Ergebnisse erzielt werden.

## Kapitel 4

# Theorie der flachen piezoelektrischen Schale

Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist die Theorie flacher schubelastischer Schalen, die ursprünglich in einer rein mechanischen Form unter Berücksichtigung von geometrischen Nichtlinearitäten von WAGNER [119] vorgestellt wurde. Die zu beschreibende Schalenmittelfläche spannt sich über der  $xy$ -Koordinatenebene zu der senkrecht die  $z$ -Achse orientiert ist. Da die Schale voraussetzungsgemäß flach ist, ist eine Beschreibung in kartesischen Koordinaten möglich. Gegenüber dem Krümmungsradius  $R$  ist die Schalendicke  $t$  als klein anzusehen.

Eine Erweiterung auf elektromechanisch gekoppelte Probleme, bei denen die Verschiebungen und das elektrische Potenzial als Freiheitsgrade verwendet werden, ist von LAMMERING [71] vorgenommen worden. Aufgrund der Sprödigkeit von piezoelektrischen Keramiken wird jedoch auf die geometrische Nichtlinearität verzichtet.

Zur Entwicklung verschiedener flacher Schalenformulierungen werden zunächst die kinematischen Beziehungen angegeben. Anschließend werden die Schnittgrößen mit den verschiedenen Stoffgesetzen aus Kapitel 3 bestimmt. Dabei wird zunächst mit einer sowohl geometrisch als auch physikalisch linearen Formulierung begonnen, die im Anschluss eine Erweiterung auf nichtlineares Werkstoffverhalten für Piezoelektrika erfährt. Durch die Integration der Schalenkinematik und der Schnittgrößen in die im Kapitel 2 entwickelten Variationsformulierungen ergeben sich verschiedene piezoelektrische Schalenmodelle.

### 4.1 Kinematik

Zur Beschreibung des Verformungsverhaltens einer schubelastischen piezoelektrischen Schale wird eine Reissner-Mindlin-Kinematik verwendet. Im Gegensatz zu den Annahmen der klassischen Kirchhoffschen Theorie müssen bei dieser Schubdeformationstheorie 1. Ordnung gerade Linienabschnitte, die im unverformten Zustand orthogonal zur Schalenmittelfläche sind, im verzerrten Zustand nicht mehr orthogonal auf der Mittelfläche stehen.

Für Schubdeformationstheorien höherer Ordnung sei auf GOPINATHAN ET AL. [43] und HEYLIGER ET AL. [45] verwiesen.

Mithilfe der Voraussetzungen für schubelastische Schalen werden verschiedene Formulierungen mit Sandwichaufbau entwickelt, bei denen bis zu zwei piezoelektrische Deckschichten und eine passive Mittelschicht als tragender Verbund verwendet werden, vgl. Bild 4.1.

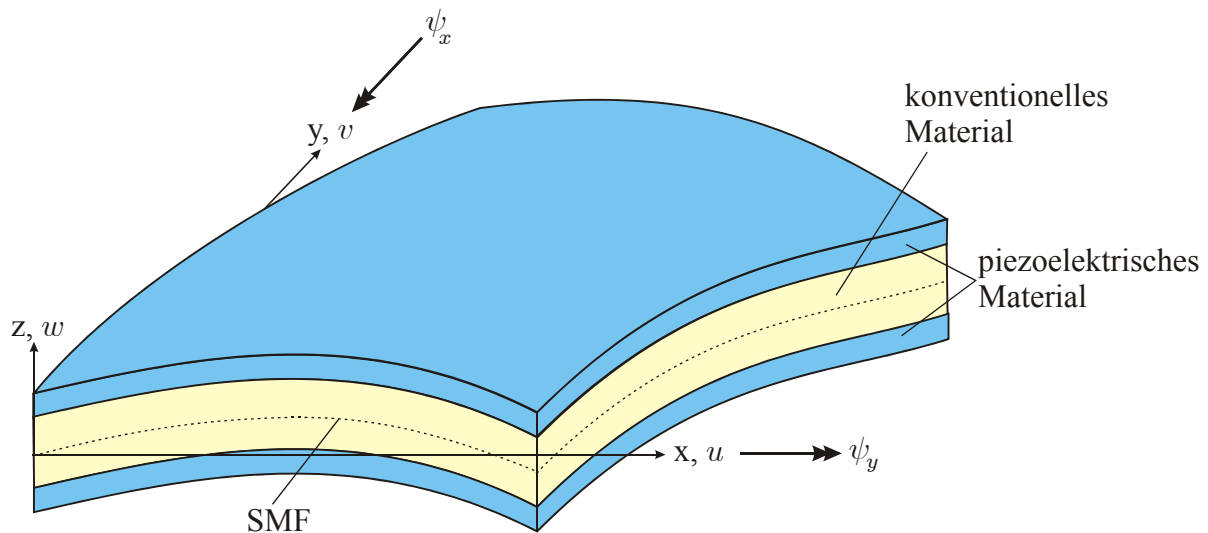


Bild 4.1: Kinematische Größen für eine flache piezoelektrische Sandwichschale mit zwei aktiven Deckschichten und einer passiven Mittelschicht

Die Verschiebungen  $\tilde{u}(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}(x, y, z)$  und  $\tilde{w}(x, y, z)$  ergeben sich mit der Annahme von Reissner-Mindlin zu

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= u(x, y) + z_{0,x}w(x, y) - z\psi_x(x, y) \\ \tilde{v}(x, y, z) &= v(x, y) + z_{0,y}w(x, y) - z\psi_y(x, y) \\ \tilde{w}(x, y, z) &= w(x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

vergleiche hierbei Bild 4.1 für die Definitionen der kinematischen Größen im kartesischen Koordinatensystem.  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  und  $w(x, y)$  beschreiben die Verschiebungen der Schalenmittelfläche (SMF) und  $\psi_x(x, y)$  und  $\psi_y(x, y)$  die Rotationen um die  $y$ - bzw. die  $x$ -Achse, vgl. z.B. auch für Mindlin-Platten ALTENBACH ET AL. [2]. Mithilfe der Terme  $z_{0,x}w(x, y)$  und  $z_{0,y}w(x, y)$  wird die vorhandene Krümmung der Schale durch eine Vorverformung berücksichtigt. Der Vorteil ist, dass hierdurch eine kartesische Formulierung mit fünf unabhängigen mechanischen Freiheitsgraden entsteht. Damit ist jedoch die Berechnung auf flache Schalen mit geringen Krümmungen beschränkt. Mithilfe der Definitionen aus Gleichung (4.1) und (2.9) können nun die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen abgeleitet werden. Im Hinblick auf die in Kapitel 5 entwickelte Finite-Elemente-Formulierung für schubelastische Schalen wird hier schon eine Zerlegung der Verzerrungen  $\mathbf{E}^m$  in einen Membran- ( $\mathbf{E}^{mb}$ ), einen Biege- ( $\mathbf{E}^b$ ) und einen Schubanteil

( $\mathbf{E}^s$ ) vorgenommen

$$\mathbf{E}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{mb} \\ z \mathbf{E}^b \\ \mathbf{E}^s \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Die Zusammensetzung der jeweiligen Anteile lässt sich folgendermaßen angeben

$$\mathbf{E}^{mb} = \begin{bmatrix} E_{xx}^{mb} \\ E_{yy}^{mb} \\ 2E_{xy}^{mb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} + z_{0,x}w_{,x} \\ v_{,x} + z_{0,y}w_{,y} \\ (u_{,y} + v_{,x}) + (z_{0,x}w_{,y} + z_{0,y}w_{,x}) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}^b = \begin{bmatrix} E_{xx}^b \\ E_{yy}^b \\ 2E_{xy}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_{x,x} \\ -\psi_{y,y} \\ -(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} 2E_{xz}^s \\ 2E_{yz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w_{,x} - \psi_x) \\ (w_{,y} - \psi_y) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

## 4.2 Elektrisches Potenzial

Das elektrische Potenzial ist eine skalare Funktion, deren Verlauf aufgrund der Beziehung zum elektrischen Feld aus Gleichung (2.31c) zumindestens linear gewählt werden muss, um die Existenz eines elektrischen Feldes überhaupt zu ermöglichen. Daher wird zunächst die üblicherweise verwendete skalare Formulierung mit einer linearen Approximation von  $\Phi$  vorausgesetzt. Die Gleichung (2.31c) kann für alle drei Koordinatenrichtungen des betrachteten Körpers ausgewertet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass es sich in der Praxis bei großen Abmessungen einer piezoelektrischen Keramik in die  $x$ - und  $y$ -Richtung umso schwieriger gestaltet, ein starkes elektrisches Feld in diesen Richtungen aufzubauen. Dieser Effekt ist analog zu einem Plattenkondensator zu sehen, bei dem eine Vergrößerung des Abstandes der beiden Platten zu einer Abschwächung des erzeugten Feldes führt. Da Interdigitalelektroden in dieser Arbeit nicht eingesetzt werden, ist für die hier betrachtete Schalenstruktur sinnvollerweise nur ein elektrisches Feld in der Dickenrichtung  $z$  anzusetzen. Dies führt durch Auswertung von Gleichung (2.31c) zur folgenden Beziehung zwischen den elektrischen Feldern  $E_{uz}^{\text{el}}$  und  $E_{lz}^{\text{el}}$  und den elektrischen Potenzialen  $\Phi_u$  und  $\Phi_l$  der beiden piezoelektrischen Schichten

$$\mathbf{E}_z^{\text{el}} = \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_{u,z} \\ -\Phi_{l,z} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Mit dem Index u wird dabei die obere Schicht bezeichnet während die untere Schicht mit dem Index l gekennzeichnet wird.

Die nach der Herstellung durchgeführte Polarisierung der Keramiken erfolgt meistens ebenfalls in der Dickenrichtung. Damit wird die Wirkung eines in  $z$ -Richtung aufgebrachten elektrischen Feldes bei den applizierten Aktoren und Sensoren für die bei Platten

und Schalen auftretenden Biegeprobleme maximiert. Mit auf der Oberfläche der piezoelektrischen Schichten aufgetragenen Elektroden ist dann durch das Aufbringen einer elektrischen Spannungsdifferenz ein aktorischer Betrieb möglich. Beim sensorischen Betrieb wiederum ist bei mechanischer Belastung die Messung einer elektrischen Spannung möglich.

Nun ist nur noch die lineare Funktion des elektrischen Potentials zu ermitteln, die sich sowohl für die obere als auch die untere Schicht in Abhängigkeit von  $z$  darstellen lässt. Ausgehend von der allgemeinen Form einer linearen Gleichung

$$\Phi(z) = az + b \quad (4.7)$$

müssen die noch unbekanntenen Konstanten  $a$  und  $b$  bestimmt werden. Dies erfolgt mithilfe der elektrischen Randbedingungen auf der Ober- bzw. Unterseite der jeweiligen piezoelektrischen Schicht. Beispielhaft wird nur die Berechnung für die obere piezoelektrische Schicht erläutert.

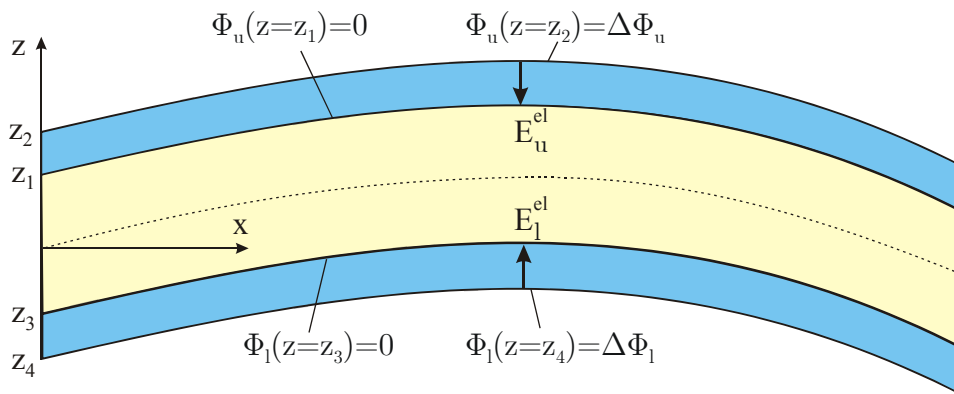


Bild 4.2: Randbedingungen zur Bestimmung des elektrischen Potentials

Die Elektroden, die sich in der Zwischenschicht mit der Koordinate  $z = z_1$  befinden, vgl. Bild 4.2, werden als geerdet angenommen, d.h.  $\Phi_u(z = z_1) = 0$ . Für die Oberfläche mit der Koordinate  $z = z_2$  wird eine Potentialdifferenz  $\Phi_u(z = z_2) = \Delta\Phi_u$  vorgegeben und das elektrische Potential  $\Phi_u(z)$  berechnet sich für die obere piezoelektrische Schicht zu

$$\Phi_u(z) = \frac{\Delta\Phi_u}{z_2 - z_1} (z - z_1) \quad (4.8)$$

Der Vorteil bei der Verwendung einer Potentialdifferenz liegt in der Reduzierung der zusätzlichen elektrischen Freiheitsgrade. Des Weiteren ist eine Beschreibung des piezoelektrischen Materialverhaltens mit diesem einen elektrischen Freiheitsgrad in ausreichender Weise möglich.

Die Auswertung von Gleichung (4.6) ergibt einen konstanten Wert für das elektrische Feld, bei dem die Dicke  $t_u = z_2 - z_1$  der oberen elektrischen Schicht einen direkten Einfluss auf die Intensität von  $E_{uz}^{\text{el}}$  hat

$$E_{uz}^{\text{el}} = -\frac{\Delta\Phi_u}{z_2 - z_1} = -\frac{\Delta\Phi_u}{t_u} \quad (4.9)$$

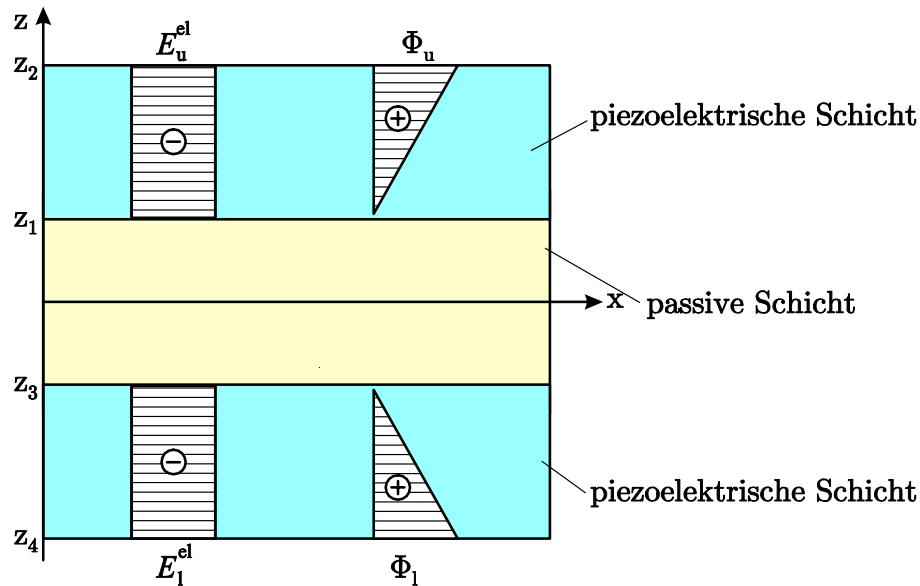


Bild 4.3: Linearer Verlauf des elektrischen Potentials und konstanter Verlauf des elektrischen Feldes aufgetragen für die piezoelektrischen Schichten

Die Bestimmung von  $\Phi_1$  und  $E_{1z}^{el}$  für die untere piezoelektrische Schicht kann analog erfolgen und ist daher nicht dargestellt.

Somit werden für die piezoelektrischen Schichten zusätzlich zu den fünf mechanischen Freiheitsgraden der Schale aus Kapitel 4.1 zwei elektrische Freiheitsgrade für die Potentialdifferenzen  $\Delta\Phi_u$  und  $\Delta\Phi_1$  benötigt. Das 'Δ' wird im Folgenden zur Vereinfachung weggelassen, wobei die Größen  $\Phi_u$  und  $\Phi_1$  jedoch weiterhin eine Potentialdifferenz in der jeweiligen Schicht beschreiben. In Bild 4.3 ist der sich ergebende Verlauf von  $\Phi$  und  $E_z^{el}$  für beide piezoelektrischen Schichten über die Schichtdicke aufgetragen.

In Kapitel 4.4 wird sich jedoch zeigen, dass bei der Auswertung der elektrischen Feldgleichungen (2.31b) ein linearer Verlauf des elektrischen Potentials die elektromechanische Kopplung nur unvollständig in der Dickenrichtung berücksichtigt. Erst mit einer quadratischen Approximation des elektrischen Potentials kann ein physikalisch sinnvolles Ergebnis erzielt werden.

### 4.3 Zweidimensionale Stoffgesetze für Piezoelektrika

In diesem Kapitel sollen verschiedene Möglichkeiten bei der Modellierung von piezoelektrischen Schichten diskutiert werden. Für die hier betrachteten dünnen Schalenstrukturen ist die Annahme eines ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) sinnvoll, vgl. u.a. ALTENBACH ET AL. [2], WAGNER [119] und LAMMERING UND MESECKE-RISCHMANN [72]. Mithilfe dieser Annahme werden drei verschiedene Stoffgesetze abgeleitet, die für die Herleitung von Schalenelementen aus den Variationsformulierungen des Kapitels 2.4 verwandt werden.

### 4.3.1 Lineares Stoffgesetz für den Kleinsignalbereich

Die einfachste Approximation des Strukturverhaltens im Kleinsignalbereich erhält man durch die Verwendung eines linearen Stoffgesetzes. Dies wird im Folgenden vorgestellt.

Zusätzlich zum angenommenen ebenen Spannungszustand wird im Stoffgesetz der Gleichung (3.10) außerdem das Verschwinden des elektrischen Feldes  $E_x^{\text{el}}$  und  $E_y^{\text{el}}$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung bei der Formulierung angenommen, vgl. Kapitel 4.2. Damit ergibt sich eine Entkopplung der Schubterme von den elektrischen Termen. Mit diesen Annahmen lassen sich die linearen konstitutiven Beziehungen für den ebenen Spannungszustand berechnen:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}} & C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}} & 0 & -e_{311} + \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} \\ C_{1122} - \frac{C_{1133}C_{2233}}{C_{3333}} & C_{2222} - \frac{C_{2233}^2}{C_{3333}} & 0 & -e_{311} + \frac{e_{333}C_{2233}}{C_{3333}} \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ e_{311} - \frac{e_{333}C_{1133}}{C_{3333}} & e_{311} - \frac{e_{333}C_{2233}}{C_{3333}} & 0 & \varepsilon_{33} + \frac{e_{333}^2}{C_{3333}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 & -e_{13}^* \\ C_{12}^* & C_{22}^* & 0 & -e_{23}^* \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ e_{13}^* & e_{23}^* & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Die mit dem Stern gekennzeichneten Materialgrößen sind schon auf den ebenen Spannungszustand bezogene Konstanten. Die Schubspannungen in  $z$ -Richtung ergeben sich durch die vollständige Entkopplung zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1313} & 0 \\ 0 & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^{\text{m}} \\ E_{yz}^{\text{m}} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

und hängen nicht von elektrischen Größen ab. Zusätzlich existiert noch die dielektrische Verschiebung in der  $x$ - und  $y$ -Richtung,

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{113} & 0 \\ 0 & e_{113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^{\text{m}} \\ E_{yz}^{\text{m}} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

die jedoch jeweils keinen Beitrag in der Variationsformulierung liefert und daher hier nicht weiter betrachtet wird, vgl. BROCKMANN [24].

Gegenstand aktueller Diskussionen ist die Frage, inwieweit die Annahmen  $E_x^{\text{el}} = E_y^{\text{el}} = 0$  bzw.  $D_x = D_y = 0$  anzuwenden sind. Untersuchungen von BENJEDDOU [16] und GOPINATHAN ET AL. [43] zeigen, dass die gleichzeitige Verwendung beider Vereinfachungen nur bei dünnen Strukturen Gültigkeit besitzt. Insbesondere bei dynamischen Anwendungen, bei denen große Deformationen auftreten, kann es jedoch Schwierigkeiten geben,

eine Lösung zu erhalten. Wird die Annahme  $E_x^{\text{el}} \neq 0$  und  $E_y^{\text{el}} \neq 0$  und  $D_x = D_y = 0$  angenommen, so ist dies insbesondere sinnvoll bei Einsatz von Interdigitalelektroden.

In dieser Arbeit werden für die weitere Entwicklung der Schalenformulierungen die Gleichungen (4.10) bis (4.12) verwendet werden. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Voraussetzungen dieser verschiedenen vereinfachenden Annahmen bei Veränderung des Anwendungsfalls stets kritisch überprüft werden sollten. Asymptotische Grenzwertbetrachtungen zur Konvergenz von Berechnungen, wie sie von RAHMOUNE ET AL. [91] vorgestellt wurden, sind eine Möglichkeit, den Anwendungsbereich der entwickelten Formulierung einzugrenzen.

### 4.3.2 Nichtlineares Stoffgesetz für den Kleinsignalebereich

Das nichtlineare Stoffgesetz für den Kleinsignalebereich aus Gleichung (3.15) hat die gleiche Struktur wie die linearen konstitutiven Gleichungen aus Kapitel 4.3.1, jedoch sind die piezoelektrischen Moduln nun abhängig von den Verzerrungen

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}} & C_{1122} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}} & 0 & -e_{311}^\sigma + \frac{e_{333}^0 C_{1133}}{C_{3333}} \\ C_{1122} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}} & C_{2222} - \frac{C_{1133}^2}{C_{3333}} & 0 & -e_{322}^\sigma + \frac{e_{333}^0 C_{1133}}{C_{3333}} \\ 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ e_{311}^{\text{D}} - \frac{e_{333}^0 C_{1133}}{C_{3333}} & e_{322}^{\text{D}} - \frac{e_{333}^0 C_{1133}}{C_{3333}} & 0 & \varepsilon_{33} + \frac{e_{333}^0 e_{333}^0}{C_{3333}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 & -e_{13}^{*,\sigma} \\ C_{12}^* & C_{22}^* & 0 & -e_{23}^{*,\sigma} \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ e_{13}^{*,\text{D}} & e_{23}^{*,\text{D}} & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Der nichtlineare Anteil des piezoelektrischen Moduls  $e_{3333}^1 : E_{zz}^{\text{m}}$  in  $z$ -Richtung wird hier vernachlässigt, da im betrachteten Kleinsignalebereich der Einfluss wesentlich geringer ist als von den anderen nichtlinearen Beiträgen. Außerdem hat weiterhin eine Unterscheidung zwischen den nichtlinearen piezoelektrischen Moduln durch die Verwendung der Indizes D und  $\sigma$  zu erfolgen, da sich deren Parameter durch den Faktor 1/2 vor dem linearen Term unterscheiden, vgl. die Gleichungen (3.12) und (3.13). Es ist des Weiteren zu beachten, dass auch die für den ebenen Spannungszustand modifizierten piezoelektrischen Moduln vom aktuellen Verzerrungszustand abhängig sind. Keine Änderungen ergeben sich für die Schubspannungen, für die auch hier näherungsweise die Gleichung (4.11) gilt.

### 4.3.3 Konjugiertes lineares Stoffgesetz für den Kleinsignalbereich

Das konjugierte Stoffgesetz aus den Gleichungen (3.17a) und (3.17b) ist ebenfalls auf den ebenen Spannungszustand und für dünne Strukturen zu reduzieren. Da keine Vorgaben bzgl. der Beziehungen zwischen dem elektrischen Potenzial und dem elektrischen Feld gemacht werden, werden hier die Vereinfachungen  $D_x = D_y = 0$  verwendet. Damit können die konstitutiven Gleichungen in entsprechender Weise wie in den Gleichungen (4.10) und (4.11) formuliert werden

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ E_z^{\text{el}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111}^{\text{d}} - \frac{(C_{1133}^{\text{d}})^2}{C_{3333}^{\text{d}}} & C_{1122}^{\text{d}} - \frac{(C_{1133}^{\text{d}})^2}{C_{3333}^{\text{d}}} & 0 & -h_{311} + \frac{h_{333}C_{1133}^{\text{d}}}{C_{3333}^{\text{d}}} \\ C_{1122}^{\text{d}} - \frac{(C_{1133}^{\text{d}})^2}{C_{3333}^{\text{d}}} & C_{2222}^{\text{d}} - \frac{(C_{1133}^{\text{d}})^2}{C_{3333}^{\text{d}}} & 0 & -h_{311} + \frac{h_{333}C_{1133}^{\text{d}}}{C_{3333}^{\text{d}}} \\ 0 & 0 & C_{1212}^{\text{d}} & 0 \\ -h_{311} + \frac{h_{333}C_{1133}^{\text{d}}}{C_{3333}^{\text{d}}} & -h_{311} + \frac{h_{333}C_{1133}^{\text{d}}}{C_{3333}^{\text{d}}} & 0 & \beta_{33} + \frac{h_{333}^2}{C_{3333}^{\text{d}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ D_z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (C_{11}^{\text{d}})^* & (C_{12}^{\text{d}})^* & 0 & -h_{13}^* \\ (C_{12}^{\text{d}})^* & (C_{22}^{\text{d}})^* & 0 & -h_{23}^* \\ 0 & 0 & C_{66}^{\text{d}} & 0 \\ -h_{13}^* & -h_{23}^* & 0 & \beta_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{m}} \\ E_{yy}^{\text{m}} \\ E_{xy}^{\text{m}} \\ D_z \end{bmatrix}. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

Mit dem Stern sind ebenfalls die an den ebenen Spannungszustand angepassten Materialkonstanten gekennzeichnet. Die Schubspannungen können auch hier von den restlichen Gleichungen entkoppelt werden und ergeben sich in der  $z$ -Richtung zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{2323}^{\text{d}} & 0 \\ 0 & C_{2323}^{\text{d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^{\text{m}} \\ E_{yz}^{\text{m}} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Zusätzlich existieren noch die elektrischen Felder in der  $x$ - und  $y$ -Richtung,

$$\begin{bmatrix} E_x^{\text{el}} \\ E_y^{\text{el}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{113} & 0 \\ 0 & h_{113} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^{\text{m}} \\ E_{yz}^{\text{m}} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

die jedoch wie die dielektrische Verschiebung aus Gleichung (4.12) ebenfalls keinen Beitrag in der Variationsformulierung leisten. Daher verbleibt auch die weitere Betrachtung von  $E_x^{\text{el}}$  und  $E_y^{\text{el}}$ .

## 4.4 Folgerungen für das elektrische Potenzial

Die adäquate Approximation des elektrischen Potenzials ist in den letzten Jahren zunehmend in der Diskussion. Um einen physikalisch sinnvollen Verlauf für das elektrische

Potenzial über die Schichtdicke zu ermitteln, ist die Erfüllung der elektrischen Feldgleichungen und der elektrischen Randbedingungen notwendig. Diese Forderungen werden daher zur Bestimmung der Ansatzfunktion für  $\Phi$  herangezogen, so dass eine auf die Struktur angepasste Beschreibung ermittelt wird.

Analog zu der von KÖGL UND BUCALEM [66] vorgestellten Berechnung wird nun analytisch die Ermittlung des elektrischen Potenzials in der Dickenrichtung für die in Bild 4.1 dargestellte Sandwichstruktur vorgestellt. Da die partiellen Ableitungen der dielektrischen Verschiebung für ein Schalenelement in  $x$ - und  $y$ -Richtung nicht existiert, vgl. Kapitel 4.2, reduziert sich für die dünne Schale die Bedingung der Ladungserhaltung aus Gleichung (2.31b) und der letzten Zeile aus Gleichung (4.10) zu

$$D_{z,z} = e_{13}^* E_{xx,z}^m + e_{23}^* E_{yy,z}^m + \varepsilon_{33}^* E_{z,z}^{\text{el}} = 0. \quad (4.17)$$

Verwendet man nun die Gleichungen (4.2) und (4.6), löst nach  $\Phi_{,zz}$  auf

$$\Phi_{,zz} = - \left[ \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \psi_{x,x} + \frac{e_{23}^*}{\varepsilon_{33}^*} \psi_{y,y} \right] \quad (4.18)$$

und integriert zweimal bzgl. der  $z$ -Koordinate, ergibt sich das elektrische Potenzial als quadratische Gleichung in Abhängigkeit von der Koordinate  $z$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2} \left( \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \psi_{x,x} + \frac{e_{23}^*}{\varepsilon_{33}^*} \psi_{y,y} \right) z^2 + bz + c. \quad (4.19)$$

Hierbei ist zu erkennen, dass durch die Ableitung bzgl.  $z$  in der Gleichung (4.17) ausschließlich die Biegeverzerrungen durch das elektrische Potenzial beeinflusst werden und daher eine Kopplung dieser unabhängigen Größen vorliegt. Die Bestimmung der Integrationskonstanten  $b$  und  $c$  erfolgt wie schon im Kapitel 4.2 über die gleichen Randbedingungen auf der Ober- bzw. Unterseite der jeweiligen piezoelektrischen Schicht, vgl. hierzu Bild 4.2. Ebenfalls wird auch hier die Berechnung nur beispielhaft für die obere Schicht erläutert. Die Elektroden auf der Zwischenschicht sind geerdet, d.h.  $\Phi_{\text{u}}(z = z_1) = 0$ . Auf der Oberfläche wird die Potenzialdifferenz  $\Phi_{\text{u}}(z = z_2) = \Delta\Phi_{\text{u}}$  vorgegeben. Mit diesen Randbedingungen ergibt sich nach einiger Rechnung die Funktion des elektrischen Potenzials  $\Phi_{\text{u}}(z)$  für die obere piezoelektrische Schicht als quadratische Funktion von  $z$

$$\Phi_{\text{u}}(z) = -\frac{1}{2} \left( \frac{(e_{13}^*)_{\text{u}}}{(\varepsilon_{33}^*)_{\text{u}}} \psi_{x,x} + \frac{(e_{23}^*)_{\text{u}}}{(\varepsilon_{33}^*)_{\text{u}}} \psi_{y,y} \right) \left\{ z^2 - [(z_1 + z_2)z - z_1 z_2] \right\} + \frac{\Delta\Phi_{\text{u}} (z - z_1)}{z_2 - z_1}. \quad (4.20)$$

Das elektrische Feld lässt sich nun mit der Beziehung aus Gleichung (4.6) direkt bestimmen

$$E_{\text{uz}}^{\text{el}}(z) = \left( \frac{(e_{13}^*)_{\text{u}}}{(\varepsilon_{33}^*)_{\text{u}}} \psi_{x,x} + \frac{(e_{23}^*)_{\text{u}}}{(\varepsilon_{33}^*)_{\text{u}}} \psi_{y,y} \right) \left[ z - \frac{1}{2} (z_1 + z_2) \right] - \frac{\Delta\Phi_{\text{u}}}{z_2 - z_1}. \quad (4.21)$$

Analoge Gleichungen zu (4.20) und (4.21) lassen sich leicht auch für die untere piezoelektrische Schicht ermitteln. Für einen Vergleich mit Bild 4.3 ist in Bild 4.4 der Verlauf des elektrischen Potenzials und des elektrischen Feldes für beide piezoelektrischen Schichten dargestellt.

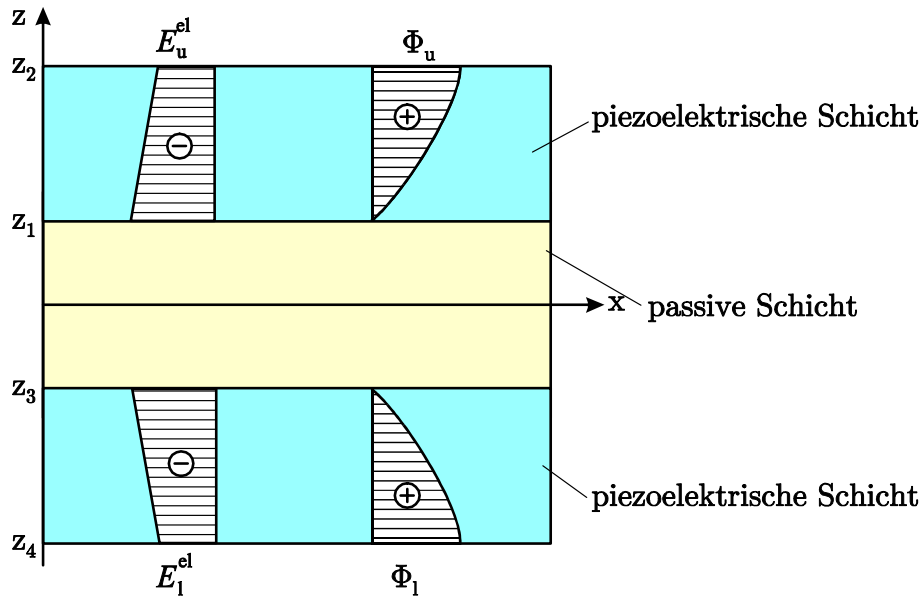


Bild 4.4: Quadratischer Verlauf des elektrischen Potentials und linearer Verlauf des elektrischen Feldes aufgetragen für die piezoelektrischen Schichten

Bei Betrachtung der eben gezeigten Herleitung (4.17) bis (4.20) wird ersichtlich, dass der Verlauf des elektrischen Potentials sich direkt aus den verwendeten Grundgleichungen ergibt und somit eine nur lineare Approximation von  $\Phi(z)$  die physikalischen Verhältnisse nicht ausreichend wiedergibt. Denn diese Annahme würde wegen  $E_{z,z}^{\text{el}} = 0$  für Gleichung (4.17) bedeuten, dass die Ladungserhaltung von elektrischen Feldgrößen nicht beeinflusst wird und damit nur vom mechanischen Verformungsverhalten abhängig ist. Diese Aussage ist jedoch physikalisch wenig sinnvoll, da dieses Ergebnis ein teilweises Verschwinden der Kopplung zwischen den elektrischen und mechanischen Größen nachweist. Es ist nur noch eine einseitige Kopplung vorhanden. Daher ist ein zumindestens quadratischer Verlauf des elektrischen Potentials über die Schichtdicke notwendig, um eine vollständige elektromechanische Kopplung bei der Modellierung zu berücksichtigen.

Wird dennoch ein linearer Verlauf über die Schichtdicke verwendet, so ergibt sich für das elektrische Potential und das elektrische Feld nur der letzte Term der Gleichung (4.20) bzw. (4.21), was den Ergebnissen aus den Gleichungen (4.8) und (4.9) von Kapitel 4.2 entspricht.

Insbesondere im statischen Fall werden sich bei sehr schlanken dünnen Schalen die Ergebnisse trotz der verschiedenen Approximationen des elektrischen Potentials nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Inwieweit ein quadratischer Ansatz für  $\Phi$  genauere Ergebnisse für das Strukturverhalten liefert und welche Abweichungen bei einer linearen Approximation auftreten, soll daher anhand von Beispielen im Kapitel 6 ermittelt werden.

## 4.5 Schnittgrößen für Zweifeldvariationsformulierungen

Entsprechend dem Vorgehen von ALTENBACH ET AL. [2] und TZOU [112] erhält man für ein lineares Stoffgesetz die Normalkräfte  $\check{\mathbf{n}}$ , die Momente  $\check{\mathbf{m}}$  und die Querkräfte  $\check{\mathbf{q}}$  durch Vorabintegration der zugehörigen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  aus den Gleichungen (4.10) und (4.11) über die Schichtdicke  $t_i$  unter Berücksichtigung der Kinematik und dem elektrischen Feld aus den Gleichungen (4.3) - (4.6). Die nachfolgende Summation über alle Schichten  $n_i$  ergibt dann die jeweilige resultierende Schnittgröße

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{n}} \\ \check{\mathbf{m}} \\ \check{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{xy} \\ m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \\ q_{xz} \\ q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_i} \int_{t_i} \begin{bmatrix} (\sigma_{xx})_i \\ (\sigma_{yy})_i \\ (\sigma_{xy})_i \\ (\sigma_{xx})_i z_i \\ (\sigma_{yy})_i z_i \\ (\sigma_{xy})_i z_i \\ (\sigma_{xz})_i \\ (\sigma_{yz})_i \end{bmatrix} dz, \quad (4.22)$$

die auf die Schalenmittelfläche bezogen ist. Die dielektrische Verschiebung  $\check{\mathbf{d}}$  existiert ausschließlich für die piezoelektrischen Schichten. Außerdem besteht aufgrund der gewählten elektrischen Freiheitsgrade zwischen den Schnittgrößen der oberen und unteren Schicht keine Kopplung, so dass nur eine Integration über die jeweilige Schicht durchzuführen ist

$$\check{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} d_{uz} \\ d_{lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{t_u} D_{uz} dz \\ \int_{t_l} D_{lz} dz \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Integration wird in gleicher Weise wie bei den Spannungen durchgeführt, jedoch existiert hier keine physikalische Bedeutung für die resultierende Größe, da sie ebenfalls auf die Schalenmittelfläche bezogen ist.

Nun werden im Folgenden die Schnittgrößen unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Approximationen für das elektrische Potenzial entwickelt. Außerdem werden nicht-lineare Schnittgrößen für den Kleinsignalbereich vorgestellt.

### 4.5.1 Lineare Schnittgrößen bei linearem elektrischem Potenzial

Zur Ermittlung der Schnittgrößen werden zunächst sowohl die einzelnen Anteile der Verzerrungen als auch der lineare Verlauf des elektrischen Potenzials in der Dickenrichtung herangezogen. Die Normalkraft aus Gleichung (4.22) wird durch die Integration des Stoffgesetzes aus Gleichung (4.10) bzgl. der  $z$ -Richtung analog zur klassischen Laminattheorie

unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.2) und (4.6) explizit ausgewertet

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{n}} = & \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^*)_i t_i & (C_{12}^*)_i t_i & 0 \\ (C_{12}^*)_i t_i & (C_{22}^*)_i t_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66})_i t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^*)_i t_i z_i & (C_{12}^*)_i t_i z_i & 0 \\ (C_{12}^*)_i t_i z_i & (C_{22}^*)_i t_i z_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66})_i t_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (e_{13}^*)_u t_u & (e_{13}^*)_1 t_1 \\ (e_{23}^*)_u t_u & (e_{23}^*)_1 t_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Wie schon aus den konstitutiven Gleichungen ersichtlich wird, leisten durch die Kopplung in den Stoffgleichungen auch elektrische Größen einen Beitrag zu mechanischen Schnittgrößen. Dies zeigt sich in gleicher Weise bei den Momenten  $\check{\mathbf{m}}$ , die berechnet werden zu

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{m}} = & \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^*)_i t_i z_i & (C_{12}^*)_i t_i z_i & 0 \\ (C_{12}^*)_i t_i z_i & (C_{22}^*)_i t_i z_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66})_i t_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^*)_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & (C_{12}^*)_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & 0 \\ (C_{12}^*)_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & (C_{22}^*)_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66})_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} (e_{13}^*)_u t_u z_u & (e_{13}^*)_1 t_1 z_1 \\ (e_{23}^*)_u t_u z_u & (e_{23}^*)_1 t_1 z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.25) \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass für einen unsymmetrischen Schichtaufbau durch den zweiten Term der Gleichung (4.24) und den ersten Term der Gleichung (4.25) eine Kopplung zwischen den rein mechanischen Membran- und Biegeanteilen auftritt. Bei einem symmetrischen Aufbau des Querschnitts entkoppeln sich diese Anteile und diese beiden Terme entfallen.

Die dielektrische Verschiebung  $\check{\mathbf{d}}$  ergibt sich analog zu den mechanischen Schnittgrößen durch Auswertung der Gleichung (4.23)

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{d}} = & \begin{bmatrix} (e_{13}^*)_u t_u & (e_{23}^*)_u t_u & 0 \\ (e_{13}^*)_1 t_1 & (e_{23}^*)_1 t_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (e_{13}^*)_u t_u z_u & (e_{23}^*)_u t_u z_u & 0 \\ (e_{13}^*)_1 t_1 z_1 & (e_{23}^*)_1 t_1 z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{33u}^* & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33l}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.26) \end{aligned}$$

Wie schon im Kapitel 4.3.1 angegeben, können die transversalen Schubspannungen von den Verzerrungen in der Schalenebene und dem elektrischen Feld entkoppelt werden. Dies

bleibt ebenfalls erhalten für die sich daraus ergebenden Querkräfte, die daher unabhängig von den restlichen Schnittgrößen bestimmt werden

$$\check{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{1313})_i t_i & 0 \\ 0 & (C_{2323})_i t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^s \\ E_{yz}^s \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Nachdem nun alle Gleichungen für die Schnittgrößen bekannt sind, können die Resultierenden mithilfe einer Matrixnotation zusammenfassend angegeben werden

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{n}} \\ \check{\mathbf{m}} \\ \check{\mathbf{q}} \\ \check{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^s & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^{\text{m}\phi})^T & (\mathbf{C}^{\text{b}\phi})^T & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^s \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

## 4.5.2 Lineare Schnittgrößen bei quadratischem elektrischem Potenzial

Wird, wie in Kapitel 4.4 vorgestellt, eine quadratische Approximation des elektrischen Potenzials über die Schichtdicke vorausgesetzt, so hat dies ausschließlich Auswirkungen auf die Berechnung der Biegemomente, da zwischen diesen und dem elektrischen Potenzial dann eine Kopplung besteht. Die linearen Terme von  $\mathbf{E}_z^{\text{el}}$  aus Gleichung (4.21), die eine Abhängigkeit von den Verdrehungen  $\psi_x$  und  $\psi_y$  haben, werden daher schon im Vorfeld bei der Berechnung der Biegemomente berücksichtigt. Dies hat den Vorteil, dass für das elektrische Feld dann nur noch der konstante Term vorhanden ist. Damit kann bei der Entwicklung der finiten Elemente in Kapitel 5 diese Formulierung analog zu allen Anderen angegeben werden. Alle weiteren Schnittgrößen bleiben unverändert so wie sie in den Gleichungen (4.24), (4.26) und (4.27) angegeben wurden.

Diese zusätzliche Kopplung mit den elektrischen Anteilen muss jedoch noch bei der Berechnung des Biegemoments ergänzt werden. Auch hier ist eine Integration in  $z$ -Richtung durchzuführen, und es ergibt sich eine modifizierte Form  $\check{\mathbf{m}}^*$  der Biegemomente

$$\check{\mathbf{m}}^* = \check{\mathbf{m}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_p} \begin{bmatrix} \frac{(e_{13}^*)^2 t_i^3}{\varepsilon_{33}^*} & \frac{e_{13}^* e_{23}^* t_i^3}{\varepsilon_{33}^*} & 0 \\ \frac{e_{13}^* e_{23}^* t_i^3}{\varepsilon_{33}^*} & \frac{(e_{23}^*)^2 t_i^3}{\varepsilon_{33}^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^{\phi_1}} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Ein elektrisches Potenzial existiert ausschließlich für die piezoelektrischen Schichten  $n_p$ , so dass auch nur diese einen zusätzlichen Beitrag leisten. Die Schnittgrößen ergeben sich somit entsprechend wie in Gleichung (4.28), wobei jedoch hier in die Berechnung der

Momente  $\check{\mathbf{m}}^*$  zusätzlich die Matrix  $\mathbf{D}^{\phi q}$  eingeht

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{n}} \\ \check{\mathbf{m}}^* \\ \check{\mathbf{q}} \\ \check{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} + \mathbf{D}^{\phi q} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^s & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^{\text{m}\phi})^T & (\mathbf{C}^{\text{b}\phi})^T & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^s \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

### 4.5.3 Nichtlineare Schnittgrößen bei linearem elektrischem Potenzial

Die physikalisch nichtlinearen Schnittgrößen werden nun mithilfe der Gleichungen (4.2), (4.6) und (4.13) aufgestellt. Dabei wurden die Abkürzungen für den piezoelektrischen Modul in Gleichung (4.13) wieder durch die Beziehung (3.11) ersetzt, um die Abhängigkeiten der nichtlinearen Anteile in  $\mathbf{e}$  zu verdeutlichen. Die Normalkräfte  $\check{\mathbf{n}}^{\text{nl}}$  ergeben sich damit zu

$$\check{\mathbf{n}}^{\text{nl}} = \check{\mathbf{n}} - \begin{bmatrix} (e_{11311}^1 E_{xx}^{\text{mb}})_u t_u & (e_{11311}^1 E_{xx}^{\text{mb}})_1 t_1 \\ (e_{22322}^1 E_{yy}^{\text{mb}})_u t_u & (e_{22322}^1 E_{yy}^{\text{mb}})_1 t_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

wobei die nichtlinearen piezoelektrischen Moduln von den Membranverzerrungen abhängig sind. Ganz analog lassen sich die nichtlinearen Beziehungen für die Biegemomente  $\check{\mathbf{m}}^{\text{nl}}$  bestimmen. Hier haben jedoch die Biegeverzerrungen einen Einfluss auf den nichtlinearen Anteil der piezoelektrischen Moduln

$$\check{\mathbf{m}}^{\text{nl}} = \check{\mathbf{m}} - \begin{bmatrix} (e_{11311}^1 E_{xx}^{\text{b}})_u t_u z_u & (e_{11311}^1 E_{xx}^{\text{b}})_1 t_1 z_1 \\ (e_{22322}^1 E_{yy}^{\text{b}})_u t_u z_u & (e_{22322}^1 E_{yy}^{\text{b}})_1 t_1 z_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{uz}^{\text{el}} \\ E_{lz}^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Auf die Querkräfte hat die Nichtlinearität keinen Einfluss, da für diese keine elektromechanische Kopplung besteht, so dass weiterhin Gleichung (4.27) gilt.

Die Auswertung der nichtlinearen dielektrischen Verschiebung  $\check{\mathbf{d}}^{\text{nl}}$  für die verwendete Schalentheorie ergibt

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{d}}^{\text{nl}} = \check{\mathbf{d}} + & \begin{bmatrix} \left(\frac{e_{31111}^1 E_{xx}^{\text{mb}}}{2}\right)_u t_u & \left(\frac{e_{32222}^1 E_{yy}^{\text{mb}}}{2}\right)_u t_u & 0 \\ \left(\frac{e_{31111}^1 E_{xx}^{\text{mb}}}{2}\right)_1 t_1 & \left(\frac{e_{32222}^1 E_{yy}^{\text{mb}}}{2}\right)_1 t_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\ + & \begin{bmatrix} \left(\frac{e_{31111}^1 E_{xx}^{\text{b}}}{2}\right)_u t_u z_u & \left(\frac{e_{32222}^1 E_{yy}^{\text{b}}}{2}\right)_u t_u z_u & 0 \\ \left(\frac{e_{31111}^1 E_{xx}^{\text{b}}}{2}\right)_1 t_1 z_1 & \left(\frac{e_{32222}^1 E_{yy}^{\text{b}}}{2}\right)_1 t_1 z_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Hier ist zu beachten, dass der nichtlineare piezoelektrische Modul bei der dielektrischen Verschiebung mit dem Faktor 1/2 versehen ist. Dieser verschwindet erst durch die Linearisierung des Stoffgesetzes, die bei der Entwicklung der Finite-Elemente-Formulierung in Kapitel 5.3.4 vorgestellt wird.

Die resultierenden nichtlinearen Schnittgrößen ergeben sich zusammenfassend zu

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{n}}^{\text{nl}} \\ \check{\mathbf{m}}^{\text{nl}} \\ \check{\mathbf{d}}^{\text{nl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{C}^{\phi\text{m},\text{nl}} & \mathbf{C}^{\phi\text{b},\text{nl}} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

$$\mathbf{q}^{\text{nl}} = \check{\mathbf{q}}. \quad (4.35)$$

## 4.6 Lineare Schnittgrößen für Dreifeldvariationsformulierung

Wie die Verschiebungen und Verdrehungen stellt die dielektrische Verschiebung jetzt eine unabhängige Variable dar. Eine Vorabintegration der konstitutiven Gleichungen über die Laminatdicke wird auch hier im Vorfeld für die konjugierten Materialgleichungen durchgeführt. Bei Verwendung linearer konstitutiver Gleichungen lassen sich die Schnittgrößen durch die Integration des Stoffgesetzes aus den Gleichungen (4.14) und (4.15) und unter Verwendung der Gleichungen (4.3) - (4.5) angeben

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{n}} = & \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^{\text{d}})_i^* t_i & (C_{12}^{\text{d}})_i^* t_i & 0 \\ (C_{12}^{\text{d}})_i^* t_i & (C_{22}^{\text{d}})_i^* t_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66}^{\text{d}})_i t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^{\text{d}})_i^* t_i z_i & (C_{12}^{\text{d}})_i^* t_i z_i & 0 \\ (C_{12}^{\text{d}})_i^* t_i z_i & (C_{22}^{\text{d}})_i^* t_i z_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66}^{\text{d}})_i t_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (h_{13}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} & (h_{13}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} \\ (h_{23}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} & (h_{23}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\text{uz}} \\ D_{\text{lz}} \end{bmatrix}. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Die Momente  $\check{\mathbf{m}}$  lassen sich analog zu Gleichung (4.25) ermitteln

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{m}} = & \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^d)_i^* t_i z_i & (C_{12}^d)_i^* t_i z_i & 0 \\ (C_{12}^d)_i^* t_i z_i & (C_{22}^d)_i^* t_i z_i & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66}^d)_i t_i z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\
& + \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{11}^d)_i^* \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & (C_{12}^d)_i^* \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & 0 \\ (C_{12}^d)_i^* \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & (C_{22}^d)_i^* \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & (C_{66}^d)_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} (h_{13}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} z_{\text{u}} & (h_{13}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} z_{\text{l}} \\ (h_{23}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} z_{\text{u}} & (h_{23}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} z_{\text{l}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\text{uz}} \\ D_{\text{lz}} \end{bmatrix}. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu Gleichung (4.26) ist nun das elektrische Feld  $\check{\mathbf{e}}^{\text{el}}$  eine abhängige Größe, die sich mithilfe des Stoffgesetzes berechnet. Das elektrische Feld wird wie die dielektrische Verschiebung über die Dicke zu einer Schnittgröße integriert. Sie ist nur in den piezoelektrischen Schichten vorhanden, zwischen denen ebenfalls keine Kopplung besteht. Damit ergibt sich das elektrische Feld zu

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{e}}^{\text{el}} = & \begin{bmatrix} \int_{t_{\text{u}}} E_{\text{uz}}^{\text{el}} dz \\ \int_{t_{\text{l}}} E_{\text{lz}}^{\text{el}} dz \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (h_{13}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} & (h_{23}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} & 0 \\ (h_{13}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} & (h_{23}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{mb}} \\ E_{yy}^{\text{mb}} \\ E_{xy}^{\text{mb}} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} (h_{13}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} z_{\text{u}} & (h_{23}^*)_{\text{u}} t_{\text{u}} z_{\text{u}} & 0 \\ (h_{13}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} z_{\text{l}} & (h_{23}^*)_{\text{l}} t_{\text{l}} z_{\text{l}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xx}^{\text{b}} \\ E_{yy}^{\text{b}} \\ E_{xy}^{\text{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{33\text{u}}^* & 0 \\ 0 & \beta_{33\text{l}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\text{uz}} \\ D_{\text{lz}} \end{bmatrix}. \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Die Querkräfte  $\check{\mathbf{q}}$  können wie in den vorigen Berechnungen hier ebenfalls unabhängig von den übrigen Schnittgrößen bestimmt werden. Mithilfe der Gleichungen (4.15) und (4.5) berechnet sich  $\check{\mathbf{q}}$  zu

$$\check{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n_i} \begin{bmatrix} (C_{1313}^d)_i t_i & 0 \\ 0 & (C_{2323}^d)_i t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{xz}^{\text{s}} \\ E_{yz}^{\text{s}} \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

Zusammenfassend lassen sich die Schnittgrößen für das konjugierte Stoffgesetz in matrizieller Form darstellen

$$\begin{bmatrix} \check{\mathbf{n}} \\ \check{\mathbf{m}} \\ \check{\mathbf{q}} \\ \check{\mathbf{e}}^{\text{el}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{d}} & \mathbf{C}_{\text{d}}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{mD}} \\ \mathbf{C}_{\text{d}}^{\text{mb}} & \mathbf{D}_{\text{d}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{bD}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{d}}^{\text{s}} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}^{\text{mD}})^{\text{T}} & -(\mathbf{C}^{\text{bD}})^{\text{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \mathbf{D}_{\text{z}} \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

## 4.7 Zweifeldvariationsformulierungen

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln die Kinematik, das elektrische Potenzial und die Schnittgrößen für die verschiedenen flachen Schalenmodelle vorgestellt wurden, werden diese Gleichungen nun in die schwache Form des Gleichgewichts integriert. Für die hier betrachteten gekoppelten elektromechanischen Systeme lässt sich analog zum Hu-Washizu-Prinzip, vgl. WRIGGERS [124], die Gleichung (2.37) in das Zweifeldvariationsfunktional  $\text{SM2F}\Phi$  umschreiben

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} \, dV &+ \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV = 0 \\ - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot \mathbf{D} \, dV &- \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} \, dA = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Nach Einsetzen des Stoffgesetzes (3.9a) und (3.9b) ergibt sich zunächst eine allgemeine dreidimensionale Darstellung

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi) &= \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^m : (\mathbf{C} : \mathbf{E}^m - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}^{\text{el}}) \, dV - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{e}^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{\text{el}}) \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} \, dA. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Für die Entwicklung eines flachen piezoelektrischen Schalenmodells wird eine Reduktion der dreidimensionalen schwachen Form des Gleichgewichts (2.37) auf eine zweidimensionale Beschreibung vorgenommen. Dies entspricht einer Integration in  $z$ -Richtung, die hier analytisch durchgeführt werden kann. Hierdurch entsteht eine Formulierung mithilfe von Schnittgrößen, wie sie üblicherweise für Platten- und Schalen aufgestellt wird. Mithilfe der in den vorangegangenen Kapiteln 4.1 bis 4.5 vorgestellten Anpassungen für die betrachtete flache Sandwichschale wird im Folgenden zunächst die geometrisch und physikalisch lineare Formulierung behandelt, um danach eine Erweiterung für das nichtlineare Stoffgesetz vorzunehmen.

### 4.7.1 Lineare Schalenformulierung bei linearem elektrischem Potenzial

Unter Berücksichtigung der Reissner-Mindlin-Kinematik aus Gleichung (4.2) und des elektrischen Feldes aus Gleichung (4.6) wird die dreidimensionale schwache Form des Gleichgewichts aus Gleichung (4.41) in ein zweidimensionales Schalenmodell  $\text{SM2F}\Phi_1$  überführt. Dabei wird die Verwendung einer linearen Approximation des elektrischen Potenzials in der Dickenrichtung zur Unterscheidung der verschiedenen Formulierungen in der Kurzbezeichnung mit einer '1' gekennzeichnet. Mithilfe der Schnittgrößen aus den Gleichungen

(4.22) und (4.23) ergibt sich zunächst für die schwache Form des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{A}} \left( \check{\mathbf{n}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} + \check{\mathbf{q}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{s}} + \check{\mathbf{m}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{b}} - \check{\mathbf{d}}^T \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \right) dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Hier sind nun auch alle äußeren Kräfte an die spezifischen Gegebenheiten der flachen Schale angepasst worden und beziehen sich auf die Schalenmittelfläche. Werden nun die Schnittgrößen aus der Gleichung (4.28) eingesetzt, so ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{b}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{s}} \\ \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\text{s}} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}^{\text{m}\phi})^T & -(\mathbf{C}^{\text{b}\phi})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Wie schon in Kapitel 4.5.1 angegeben, sind die Schubterme vollständig von den restlichen Termen entkoppelt. Diese Tatsache ist sehr nützlich bei der örtlichen Diskretisierung mittels der Finite-Elemente-Methode, um die bei dünnen schubelastischen Platten- und Schalenelementen auftretenden Versteifungseffekte mithilfe der Assumed Natural Strain Methode zu vermeiden. Dies wird in Kapitel 5.2.3 bei der Entwicklung von zuverlässigen Schalenelementen diskutiert werden.

#### 4.7.2 Lineare Schalenformulierung bei quadratischem elektrischem Potenzial

Analog zum piezoelektrischen Schalenmodell SM2F $\Phi$ 1 aus Gleichung (4.43) lässt sich eine Formulierung SM2F $\Phi$ 2 unter Berücksichtigung des quadratischen Verlaufs des elektrischen Potenzials über die Schichtdicke bestimmen, die daher in der Kurzbezeichnung mit einer '2' gekennzeichnet wird. Die zweidimensionale schwache Form des Gleichgewichts mithilfe von Schnittgrößen ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{A}} \left( \check{\mathbf{n}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} + \check{\mathbf{q}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{s}} + (\check{\mathbf{m}}^*)^T \delta\mathbf{E}^{\text{b}} - \check{\mathbf{d}}^T \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \right) dA \\ &+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nach Einsetzen der Schnittgrößen aus Gleichung (4.30) in Gleichung (4.45) resultiert daraus

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G} = & \int_A \begin{bmatrix} \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{b}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{s}} \\ \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} + \mathbf{D}^{\phi\text{q}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\text{s}} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}^{\text{m}\phi})^T & -(\mathbf{C}^{\text{b}\phi})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} dA \\ & + \int_A \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_A \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_A \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Hier ist zu beachten, dass durch die Matrix  $\mathbf{D}^{\phi\text{q}}$  nun piezoelektrische Materialgrößen direkten Einfluss auf rein mechanische Einträge in der Steifigkeitsmatrix haben. Dadurch ist eine zusätzliche Kopplung zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen entstanden.

### 4.7.3 Nichtlineare Schalenformulierung bei linearem elektrischem Potenzial

Für die Entwicklung einer physikalisch nichtlinearen Schalenformulierung SM2F $\Phi$ 1n werden die nichtlinearen Schnittgrößen aus Kapitel 4.5.3 verwendet. Für das elektrische Potenzial kommt hier wieder ein linearer Ansatz in der Dickenrichtung zum Einsatz, der wieder durch eine '1' in der Kurzbezeichnung gekennzeichnet ist. Zusätzlich wird durch 'n' die Verwendung eines nichtlinearen Stoffgesetzes angegeben. Damit lässt sich eine nichtlineare virtuelle Arbeit mithilfe von Schnittgrößen angeben

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) = & \int_A \left( (\check{\mathbf{n}}^{\text{nl}})^T \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} + \check{\mathbf{q}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{s}} + (\check{\mathbf{m}}^{\text{nl}})^T \delta\mathbf{E}^{\text{b}} - (\check{\mathbf{d}}^{\text{nl}})^T \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \right) dA \\ & + \int_A \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_A \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_A \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.34) und (4.35) in die Gleichung (4.47) resultiert die nichtlineare zweidimensionale schwache Form des Gleichgewichts für die flache piezoelektrische Schale

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G} = & \int_A \begin{bmatrix} \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{b}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{s}} \\ \delta\mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{C}^{\text{mb}} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\text{s}} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}})^T & -(\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} dA \\ & + \int_A \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dA - \int_A \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) dA - \int_A \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} dA . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die sich ergebende Steifigkeitsmatrix hat noch einen unsymmetrischen Aufbau im Bereich der elektromechanischen Koppelterme durch die Nichtlinearität im Stoffgesetz. Die in Kapitel 5.3.4 durchgeführte Linearisierung ergibt dann für die Finite-Elemente-Formulierung jedoch eine symmetrische Struktur der Steifigkeitsmatrix.

## 4.8 Lineare Dreifeldvariationsformulierung

Die in Kapitel 2.4.3 entwickelte schwache Form des Gleichgewichts, vgl. Gleichung (2.44), in Form des Dreifeldvariationsfunktionals soll nun ebenfalls an die flache Schale angepasst werden. Wie sich schon in Gleichung (4.41) ein Zweifeldvariationsfunktional für das gekoppelte elektromechanische Gleichungssystem angeben lässt, so ergibt sich nun ein Dreifeldvariationsfunktional  $\text{SM3F}\Phi$  mit den unabhängigen Variablen  $\mathbf{u}$ ,  $\Phi$  und  $\mathbf{D}$  in der folgenden Form

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV = 0 \\
& \int_{\mathcal{B}} \text{Grad } \delta \Phi \cdot \mathbf{D} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} \, dA = 0 \quad (4.49) \\
& \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV = 0 .
\end{aligned}$$

Die allgemeine dreidimensionale Darstellung zu Gleichung (4.42) lässt sich durch Einsetzen des Stoffgesetzes aus den Gleichungen (3.17a) und (3.17b) ebenfalls ermitteln

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{G}^* &= \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{E}^m : (\mathbb{C}^d : \mathbf{E}^m - \mathbf{h} \cdot \mathbf{D}) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{h}^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}) \, dV \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{D} \cdot \text{Grad } \Phi \, dV + \int_{\mathcal{B}} \text{Grad } \delta \Phi \cdot \mathbf{D} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \\
&- \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_D} \delta \Phi \bar{d} \, dA . \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Hieraus wird mithilfe der vorangegangenen Kapiteln 4.1 bis 4.3 und den Schnittgrößen aus Kapitel 4.6 eine zweidimensionale Dreifeldvariationsformulierung  $\text{SM3F}\Phi_1$  für flache

piezoelektrische Schalen entwickelt

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{A}} \left( \check{\mathbf{n}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} + \check{\mathbf{q}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{s}} + \check{\mathbf{m}}^T \delta\mathbf{E}^{\text{b}} + (\check{\mathbf{e}}^{\text{el}})^T \delta\mathbf{D}_z \right) dA \\
&+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{D}_z^T (\mathbf{C}^{\phi\text{D}})^T \text{Grad } \Phi \, dA + \int_{\mathcal{A}} \text{Grad } \delta\Phi^T \mathbf{C}^{\phi\text{D}} \mathbf{D}_z \, dA \\
&+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \, dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) \, dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} \, dA . \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass die Koppelmatrizen  $\mathbf{C}^{\phi\text{D}}$  und  $(\mathbf{C}^{\phi\text{D}})^T$  sich als Folge der Einarbeitung der Nebenbedingung aus Gleichung (2.31c) ergeben und daher keine physikalische Bedeutung haben. Im Rahmen einer zweidimensionalen Beschreibung ist für diese Anteile jedoch ebenfalls eine Integration über die piezoelektrischen Schichten durchzuführen. Somit ergeben sich diese Koppelmatrizen zu

$$\mathbf{C}^{\phi\text{D}} = (\mathbf{C}^{\phi\text{D}})^T = \begin{bmatrix} t_u & 0 \\ 0 & t_l \end{bmatrix} . \quad (4.52)$$

Die virtuelle Arbeit berechnet sich durch Einsetzen der Schnittgrößen aus Gleichung (4.40) zu

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}, \Phi, \delta\Phi) &= \\
&\int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{b}} \\ \delta\mathbf{E}^{\text{s}} \\ \text{Grad } \delta\Phi \\ \delta\mathbf{D}_z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{C}_d^{\text{mb}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{mD}} \\ \mathbf{C}_d^{\text{mb}} & \mathbf{D}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{bD}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_d^{\text{s}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{\phi\text{D}} \\ -(\mathbf{C}^{\text{mD}})^T & -(\mathbf{C}^{\text{bD}})^T & \mathbf{0} & (\mathbf{C}^{\phi\text{D}})^T & \mathbf{P}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \text{Grad } \Phi \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix} dA \\
&+ \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \, dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\mathbf{u}^T \left( \bar{\mathbf{t}} + \sum_{i=1}^{n_i} \rho_{0i} t_i \bar{\mathbf{b}} \right) \, dA - \int_{\mathcal{A}} \delta\Phi^T \bar{\mathbf{d}} \, dA . \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die unabhängige Größe  $\mathbf{D}_z$  analog zu den Spannungen beim Prinzip von Hu-Washizu nicht in ihrer Ableitung vorkommt. Diese Tatsache macht an dieser Stelle die Ähnlichkeit zu hybriden Formulierungen für mechanische Problemstellungen besonders deutlich. Daher ist bei der Entwicklung der Finite-Elemente-Formulierung in Kapitel 5 ein analoges Vorgehen zu den rein mechanischen hybriden Elementen sinnvoll.

## Kapitel 5

# Finite Elemente für flache piezoelektrische Schalen

Die Finite-Elemente-Methode ist ein Instrument für die numerische Berechnung von Anfangs- und Randwertproblemen, das heutzutage zu einem unverzichtbaren Werkzeug in vielen Bereichen des Ingenieurwesens geworden ist. Mithilfe des Ritzschen Verfahrens ist durch die Verwendung bereichsweiser Ansätze die näherungsweise Analyse von komplexen Strukturen möglich. Dabei wird das Gesamtgebiet  $\mathcal{B}$  in  $n_{\text{elm}}$  Teilgebiete zerlegt, die durch ihre einfache Geometrie mit Näherungsansätzen zu beschreiben sind. Von den bereichsweisen Ansätzen wird gefordert, die wesentlichen Randbedingungen des Gesamtsystems zu erfüllen und die notwendige Stetigkeit zu gewährleisten. Um eine Assemblierung der Teilgebiete  $\mathcal{B}^e$  zu dem Gesamtgebiet  $\mathcal{B} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \mathcal{B}^e$  durchführen zu können, sind außerdem Übergangsbedingungen zu berücksichtigen.

Im Folgenden werden vier-Knotenelemente entwickelt, bei denen in der Regel bilineare Ansatzfunktionen für mechanische und elektrische Feldgrößen verwendet werden. Die insbesondere bei dünnen Schalen auftretenden Versteifungseffekte bei schubdominanten Problemstellungen werden in dieser Arbeit durch die Assumed Natural Strain Methode (ANS) behoben, die in Kapitel 5.2 vorgestellt wird. Damit entstehen sehr effiziente und auch zuverlässige Elemente, die schon bei grober Diskretisierung gute Ergebnisse liefern. Der bei der Verwendung von Elementen höherer Ordnung auftretende numerische Mehraufwand durch eine erhöhte Anzahl an Freiheitsgraden pro Element ist daher nicht notwendig. Dies ist auch unter dem Aspekt zu sehen, dass Elemente mit acht oder neun Knoten die ohne die ANS-Methode formuliert werden zwar schon ein günstigeres Verformungsverhalten zeigen als vierknotige, aber trotzdem nicht frei von Versteifungseffekten sind.

Die Entwicklung von verschiedenen zuverlässigen und robusten flachen piezoelektrischen Schalenelementen, die frei von Versteifungseffekten und Nullenergiemoden sind, wird im Folgenden vorgestellt. Dazu werden die Variationsfunktionale aus Kapitel 4, in denen der Ort und die Zeit kontinuierlich enthalten sind, in semidiskrete Matrixgleichungen

überführt, die weiterhin die Zeit kontinuierlich enthalten, aber diskret hinsichtlich des Ortes sind.

## 5.1 Approximation der Kinematik

Bei der Entwicklung von piezoelektrischen finiten Elementen wird das isoparametrische Konzept verwendet, das hier zur Einführung der Notation kurz erläutert werden soll. Für eine detaillierte Darstellung im rein mechanischen Fall sei auf die zahlreichen Lehrbücher zu diesem Thema verwiesen, z.B. BATHE [11], BELYTSCHKO ET AL. [13], HUGHES [48] und ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134].

Für die Approximation der unabhängigen mechanischen und elektrischen Variablen und der Knotenkoordinaten werden die gleichen Formfunktionen verwendet. Die Formfunktionen  $N_i(\xi, \eta)$  sind Einheitsverschiebungszustände, die für das in Bild 5.1 dargestellte vier-Knotenelement im lokalen  $\xi, \eta$ -Koordinatensystem für den Knoten  $i$  folgendermaßen definiert sind

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) \text{ mit } i = 1, 4 . \quad (5.1)$$

Ebenso wie die Knotenwerte  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  im Vektor  $\hat{X}$  werden die Koordinaten  $X$  und  $Y$  für ein einzelnes Element in einem Vektor  $\underline{X}$  zusammengefasst und mithilfe der Ansatzfunktionen  $\underline{N}$  in folgender Weise berechnet

$$\underline{X} = \sum_{I=1}^{nel} \underline{N}_I \hat{X}_I = \underline{N} \hat{X} , \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} . \quad (5.2)$$

Die Anzahl der im Element vorhandenen Knoten wird mit  $nel$  bezeichnet. Eine analoge Darstellung wird für die mechanischen und elektrischen Freiheitsgrade gewählt, da

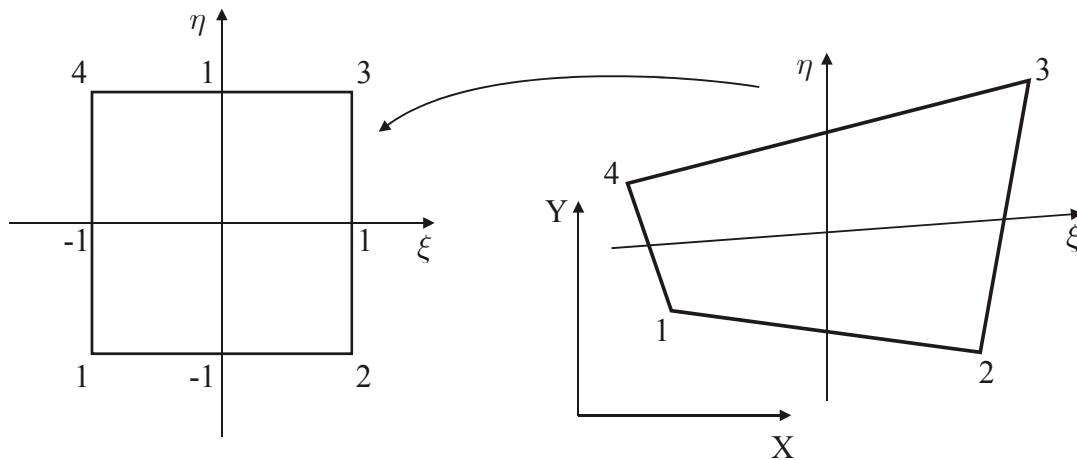


Bild 5.1: Isoparametrisches Element: Abbildung eines schiefwinkligen vier-Knotenelementes auf das Einheitsquadrat

alle nachfolgend entwickelten Elementformulierungen auf einem isoparametrischen vier-Knoten Schalenelement basieren. Dementsprechend werden die mechanischen Freiheitsgrade, d.h. die Verschiebungen  $\underline{u}$  und die Verdrehungen  $\underline{\psi}$ , mithilfe von bilinearen Ansatzfunktionen approximiert. Wird das elektrische Potenzial  $\underline{\Phi}$  in gleicher Weise mit bilinearen Ansatzfunktionen in der Schalenmittelfläche beschrieben, so ergibt sich insgesamt

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{\psi} \\ \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \underline{N}_I^u & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}_I^k + \underline{N}_I^\psi + \underline{N}_I^s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}_I^\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_I \\ \hat{\underline{\psi}}_I \\ \hat{\underline{\Phi}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}^u & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}^k + \underline{N}^\psi + \underline{N}^s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}^\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\underline{\psi}} \\ \hat{\underline{\Phi}} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Die Formfunktionen für die Verschiebungen, die Vorverformung, die Schubverformung, die Verdrehungen und das elektrische Potenzial werden zur Unterscheidung mit u, k, s,  $\psi$  und  $\Phi$  indiziert. Die Knotenwerte der unabhängigen Variablen werden mit einer 'Tilde' gekennzeichnet und in den Vektoren  $\hat{\underline{u}}$ ,  $\hat{\underline{\psi}}$  und  $\hat{\underline{\Phi}}$  zusammenfassend dargestellt. Sie sind für das einzelne Element nach lokalen Knotennummern sortiert und gegeben als

$$\hat{\underline{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{u}} \\ \tilde{\underline{v}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\psi}} \\ \tilde{\underline{\psi}}_x \\ \tilde{\underline{\psi}}_y \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\Phi}}_u \\ \tilde{\underline{\Phi}}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Durch die Knotenwerte wird das kontinuierliche System in ein diskretes überführt, dessen unabhängige Variablen am Knoten die Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems darstellen.

Die virtuellen unabhängigen Größen werden ebenfalls mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{u} \\ \delta \underline{\psi} \\ \delta \underline{\Phi} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \underline{N}_I^u & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}_I^k + \underline{N}_I^\psi + \underline{N}_I^s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}_I^\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_I \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_I \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_I \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{N}^u & 0 & 0 \\ 0 & \underline{N}^k + \underline{N}^\psi + \underline{N}^s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{N}^\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}} \\ \delta \hat{\underline{\psi}} \\ \delta \hat{\underline{\Phi}} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Dementsprechend lassen sich auch die zugehörigen Verzerrungen und das elektrische Feld aus den Gleichungen (4.2) und (4.6) in einer Spaltenmatrix anordnen

$$\begin{bmatrix} \underline{E}^{mb} \\ \underline{E}^b \\ \underline{E}^s \\ -\underline{E}^{el} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \underline{B}_{uI} & \underline{B}_{kI} & 0 \\ 0 & \underline{B}_{\psi I} & 0 \\ 0 & \underline{B}_{sI} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{B}_{\Phi I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_I \\ \hat{\underline{\psi}}_I \\ \hat{\underline{\Phi}}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_u & \underline{B}_k & 0 \\ 0 & \underline{B}_\psi & 0 \\ 0 & \underline{B}_s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{B}_\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\underline{\psi}} \\ \hat{\underline{\Phi}} \end{bmatrix} = \underline{B} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}} \\ \hat{\underline{\psi}} \\ \hat{\underline{\Phi}} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Die Operatormatrix  $\underline{B}$  setzt sich aus einer Reihe von Submatrizen zusammen, die die Ableitungen der Ansatzfunktionen für den Membran- und Vorverformungsanteil  $\underline{B}_u$  und  $\underline{B}_k$ , den Biegeanteil  $\underline{B}_\psi$  und den Schubanteil  $\underline{B}_s$  beinhalten. Diese Submatrizen berechnen

sich unter Berücksichtigung der Reissner-Mindlin-Kinematik zu

$$\begin{aligned} \underline{B}_u &= \begin{bmatrix} \underline{N}_{,x}^u & 0 \\ 0 & \underline{N}_{,y}^u \\ \underline{N}_{,y}^u & \underline{N}_{,x}^u \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_k = \begin{bmatrix} \underline{N}_{,x}^k z_{0,x} & 0 & 0 \\ \underline{N}_{,y}^k z_{0,y} & 0 & 0 \\ \underline{N}_{,x}^k z_{0,y} + \underline{N}_{,y}^k z_{0,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \underline{B}_{\psi} &= \begin{bmatrix} 0 & -\underline{N}_{,x}^{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{N}_{,y}^{\psi} \\ 0 & -\underline{N}_{,y}^{\psi} & -\underline{N}_{,x}^{\psi} \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_s = \begin{bmatrix} \underline{N}_{,x}^s & -\underline{N}^s & 0 \\ \underline{N}_{,y}^s & 0 & -\underline{N}^s \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für die Approximation des elektrischen Feldes in Dickenrichtung werden die Ansatzfunktionen  $\underline{N}^{\Phi}$  in der Schalenmittelfläche auf die jeweilige piezoelektrische Laminatschichtdicke  $t$  bezogen, so dass sich die Matrix  $\underline{B}_{\Phi}$  in der folgenden Form bestimmen lässt

$$\underline{B}_{\Phi} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{N}^{\Phi}}{t_u} & 0 \\ 0 & \frac{\underline{N}^{\Phi}}{t_l} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Als Variation von Gleichung (5.7) ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \delta \underline{E}^{mb} \\ \delta \underline{E}^b \\ \delta \underline{E}^s \\ -\delta \underline{E}^{el} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nel} \begin{bmatrix} \underline{B}_{uI} & \underline{B}_{kI} & 0 \\ 0 & \underline{B}_{\psi I} & 0 \\ 0 & \underline{B}_{sI} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{B}_{\Phi I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{u}_I \\ \delta \hat{\psi}_I \\ \delta \hat{\Phi}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_u & \underline{B}_k & 0 \\ 0 & \underline{B}_{\psi} & 0 \\ 0 & \underline{B}_s & 0 \\ 0 & 0 & \underline{B}_{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{\psi} \\ \delta \hat{\Phi} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Durch die Approximation aller vorhandenen geometrischen Größen und unabhängigen Variablen sind die Voraussetzungen für die Entwicklung verschiedener Schalenelemente gegeben. Zur Vermeidung von Versteifungseffekten sind jedoch besondere Elementtechniken notwendig.

## 5.2 Behandlung von Versteifungseffekten

Der Versteifungseffekt, auch Lockingeffekt genannt, tritt bei Präsenz von parasitären Spannungen auf, die eine zusätzliche künstliche Steifigkeit erzeugen. Als Folge werden bei der Strukturanalyse für die Verschiebungen zu kleine Werte ermittelt.

Die verschiedenen Arten von Versteifungseffekten und die dagegen entwickelten Methoden werden im Folgenden diskutiert.

### 5.2.1 Phänomene

Lockingprobleme sind für eine Reihe von verschiedenen Elementtypen für rein mechanische Systeme bekannt, siehe u.a. ANDELFINGER [5], BISCHOFF [21], HUGHES [48],

HUGHES ET AL. [49] und MACNEAL [80]. Die mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten entwickelten Verschiebungselemente leiden insbesondere bei biegedominanten Problemen und bei der Beschreibung von nahezu inkompressiblen Werkstoffen unter diesen Versteifungseffekten, die die Ergebnisse unter Umständen völlig unbrauchbar machen. Realistische Ergebnisse können dann vielfach nur durch eine sehr feine Diskretisierung erzielt werden, was mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden ist. Im Extremfall erreicht jedoch die durch die parasitären Spannungen erzeugte zusätzliche Steifigkeit die Größenordnung der tatsächlichen Steifigkeit des Systems, was eventuell zu großen Problemen bei der Lösung des Gleichungssystems führt.

Je nach Parameter, der den Effekt auslöst bzw. beeinflusst, wird zwischen verschiedenen Arten von Locking unterschieden. So wird bei schubelastischen Plattenelementen für einen reinen Biegezustand durch die Querkräfte eine parasitäre Spannung erzeugt, die zum transversalen Querschublocking führt. Dabei ist die Versteifung umso ausgeprägter, je dünner die Struktur und je größer der Schlankheitsgrad wird. Für schubstarre Kirchhoff-Love Elemente tritt dieses Problem überhaupt nicht auf, da die Zwangsbedingungen  $w_{,x} - \psi_x = 0$  und  $w_{,y} - \psi_y = 0$  schon bei der Entwicklung vorausgesetzt werden. Bei gekrümmten Schalen tritt als zusätzlicher Effekt ein Membranlocking auf, wenn reine Biegezustände nicht ohne eine Aktivierung von Membranverzerrungen darstellbar sind, vgl. HAUPTMANN [44].

Das volumetrische Locking bei Volumenelementen unterscheidet sich von den durch Biegung erzeugten Versteifungsphänomenen. Dieser Effekt wird durch einen Materialparameter hervorgerufen. Volumetrisches Locking tritt daher nur bei nahezu inkompressiblen Materialien auf, bei denen die Querkontraktion  $\nu \rightarrow 0.5$  strebt. Für diesen Fall strebt der Quotient aus Kompressionsmodul und Schubmodul gegen unendlich, so dass eine alternative Form des Stoffgesetzes mithilfe des hydrostatischen Drucks zu wählen ist. Damit muss jedoch zusätzlich die Inkompressibilität als weitere Bedingung im Gleichungssystem berücksichtigt werden.

Der Nachweis der Versteifungsanfälligkeit von finiten Elementen kann auf verschiedene Weise geführt werden. In ANDELFINGER [5] wird für beliebige Ansatzordnungen tabellarisch eine Kombination der Verformungskomponenten durchgeführt, durch die die Entstehung der einzelnen Verzerrungsmodes untersucht wird. Damit können die für den Lockingeffekt verantwortlichen Polynomterme identifiziert werden. BISCHOFF [21] wiederum greift das heuristische Verfahren von HUGHES [48] auf, das die Leistungsfähigkeiten eines Elementes bei nahezu inkompressiblen Materialien mithilfe eines Zwangsbedingungsfaktors abschätzt. Dabei wird die Gesamtzahl der Freiheitsgrade abzüglich Randbedingungen der Anzahl der aus der Inkompressibilität resultierenden Zwangsbedingungen ins Verhältnis gesetzt. Der sich ergebende Wert gibt Aufschluss darüber, ob das betrachtete Element zum Versteifen neigt. Auch Nullenergiemoden bei reduziert integrierten Elementen lassen sich auf diese Weise nachweisen.

### 5.2.2 Methoden zur Vermeidung von Versteifungseffekten

Erste Erfolge zur Vermeidung des Lockingeffektes waren durch die Verwendung von reduzierter Integration der auftretenden Integrale zu verzeichnen, vgl. u.a. MALKUS UND HUGHES [81] und ZIENKIEWICZ ET AL. [133]. Dies führt zu einer Einpunkt Gauss-Integration bei vier-Knotenelementen, wodurch sich jedoch so genannte Nullenergiemoden ergeben, die auch Hourglass-Modes oder Zero Energy Modes genannt werden. Die Nullenergiemoden werden in einigen Fällen durch die Lagerungsbedingungen des Systems unterdrückt. Innere Elementkinematiken, die zu den Nullenergiemoden führen, können zwar mit der Verwendung von selektiv reduzierten Integrationstechniken erheblich reduziert werden, lassen sich jedoch für die meisten Elementtypen trotzdem nicht ganz vermeiden. Mithilfe von Stabilisierungsmethoden ergeben sich finite Elemente ohne Nullenergiemoden, vgl. u.a. BELYTSCHKO ET AL. [14]. Die numerische Stabilität dieser Elemente ist jedoch von einem Wichtungsfaktor abhängig. Damit hängt die Güte der Ergebnisse stark von der Erfahrung des Anwenders ab, und es kann daher zu Fehlinterpretationen des Strukturverhaltens führen.

Eine weiteres Verfahren zur Formulierung zuverlässiger Elemente ist die Enhanced Assumed Strain Methode (EAS), vgl. u.a. SIMO UND RIFAI [98], SIMO UND ARMERO [96] und BLETZINGER ET AL. [22], die eng verwandt ist mit der Methode der inkompatiblen Verschiebungen. Sie basiert auf dem Dreifeldfunktional von Hu-Washizu und hat damit eine variationelle Grundlage. Die Idee dieser Methode ist, die vorhandenen Verzerrungen durch zusätzlich angenommene Verzerrungen zu erweitern und so die fehlenden Deformationsmoden zu ergänzen. Diese zusätzlichen Verschiebungen erfüllen nicht die Rand- und Übergangsbedingungen und sind deshalb inkompatibel. Die Freiheitsgrade werden jedoch nur auf Elementebene ergänzt und können daher durch statische Kondensation eliminiert werden. Damit erfolgt keine Erhöhung der Freiheitsgrade des Gesamtsystems. Meist wird diese Methode als Maßnahme gegen das Versteifen von Scheibenelementen und das Membranlocking von Schalen verwendet, wobei jedoch das Membranlocking bei Schalen nicht vollständig eliminiert werden kann, vgl. HAUPTMANN [44].

Des Weiteren sind zur Vermeidung von Versteifungseffekten noch die Kollokationsmethoden zu erwähnen. Ein auf diesem Verfahren beruhendes Verfahren ist die ANS-Methode, die im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommt und auf die daher noch genauer im nächsten Kapitel eingegangen werden wird. Parallel zur ANS-Methode wurde von BATHE UND DVORKIN [10] der MITC Ansatz (Mixed Interpolated Tensorial Components Approach) entwickelt. Dieser Ansatz ist in der Literatur ebenfalls weit verbreitet. Für bilineare Elemente wie sie in dieser Arbeit vorgestellt werden, ergeben sich mit dem MITC Ansatz die gleichen modifizierten Operatormatrizen wie bei der Verwendung der ANS-Methode. Eine den beiden Verfahren sehr verwandte Methode ist die Discrete-Shear-Gap-Methode (DSG), die unabhängig vom Elementtyp formuliert wird, vgl. BISCHOFF [21]. Zunächst werden bei diesem Verfahren die Biege- und Schubanteile entkoppelt, indem die kinematischen Gleichungen für die Querschubverzerrungen integriert werden. Es werden diskrete Schubklaffungen an den Knotenpunkten definiert und im Element

interpoliert, wodurch sich eine Vermeidung der parasitären Verzerrungen ergibt. Für vier-Knotenelemente liefert die DSG-Methode äquivalente Ergebnisse zur ANS-Methode.

### 5.2.3 Die Assumed Natural Strain Methode

Als Begründer der ANS-Methode gilt MACNEAL [79], wobei zunächst nur eine Modifikation der numerischen Integration vorgeschlagen wurde. Daraus entwickelten HUGHES UND TEZDUYAR [50] das erste schubweiche Plattenelement, das frei von Versteifungseffekten und relativ robust gegenüber verzerrten Elementgeometrien ist. SIMO UND HUGHES [97] gelang es, durch die Verwendung des Prinzips von Hu-Washizu für die ANS-Methode eine variationelle Basis zu schaffen.

Im Gegensatz zu den hybriden Methoden wie z.B. der EAS-Methode, werden bei der ANS-Methode keine zusätzlichen Freiheitsgrade für die Schubverzerrungen eingeführt. Die Berechnung erfolgt direkt durch Auswertung der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen an definierten Punkten, den so genannten Kollokationspunkten, weshalb dieses Verfahren zu den Kollokationsmethoden gehört. Damit werden die Querschubverzerrungen im Element nicht direkt durch die Ableitung der Verschiebungen formuliert. Die erhaltenen Werte werden mit speziell gewählten Ansatzfunktion multipliziert, die so gewählt werden, dass die parasitären Verzerrungen nicht berücksichtigt werden.

Die Bedingungen für die Wahl der ANS-Methode ist die Entkopplung der Schubterme von den restlichen Anteilen. Diese Voraussetzung wurde im Kapitel 4.3 bei der Formulierung des zweidimensionalen Stoffgesetzes für piezoelektrische Schalen geschaffen. Damit können die Auswirkungen der auftretenden Versteifungsphänomene auf rein mechanische Anteile reduziert werden, für die schon zahlreiche Strategien zur Vermeidung von Lockingeffekten existieren. Daher werden im Folgenden zunächst ausschließlich die mechanischen Anteile der inneren Arbeit in der schwachen Form des Gleichgewichts (4.44) für die flache Schale an einem einzelnen Element  $e$  betrachtet

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}_{\text{int}}^{\text{mech}}(\hat{\underline{u}}, \delta \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\psi}}, \delta \hat{\underline{\psi}}) &= \delta \hat{\underline{u}}_e^T \int_A \underline{B}_u^T \underline{A} \underline{B}_u \, dA \hat{\underline{u}}_e + \delta \hat{\underline{u}}_e^T \int_A (\underline{B}_u^T \underline{A} \underline{B}_k + \underline{B}_u^T \underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_\psi) \, dA \hat{\underline{\psi}}_e \\ &+ \delta \hat{\underline{\psi}}_e^T \int_A (\underline{B}_k^T \underline{A} \underline{B}_u + \underline{B}_\psi^T \underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_u) \, dA \hat{\underline{u}}_e \\ &+ \delta \hat{\underline{\psi}}_e^T \int_A [\underline{B}_k^T (\underline{A} \underline{B}_k + \underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_\psi) + \underline{B}_\psi^T (\underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_k + \underline{D} \underline{B}_\psi) + \underline{B}_s^T \underline{A}^s \underline{B}_s] \, dA \hat{\underline{\psi}}_e. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Durch die Entkopplung der Schubterme von den restlichen Anteilen können für die einzelnen Beiträge unterschiedliche Interpolationsansätze verwendet werden. Dies wird bei der ANS-Methode erfolgreich eingesetzt.

Es wird eine gegenüber  $\underline{B}_s$  modifizierte Operatormatrix  $\bar{\underline{B}}_s$  entwickelt, mit der der Versteifungseffekt vermieden werden kann. Hierzu werden zunächst die Schubverzerrungen mithilfe von natürlichen Koordinaten beschrieben. Das in Bild 5.2 natürliche  $rs$ -

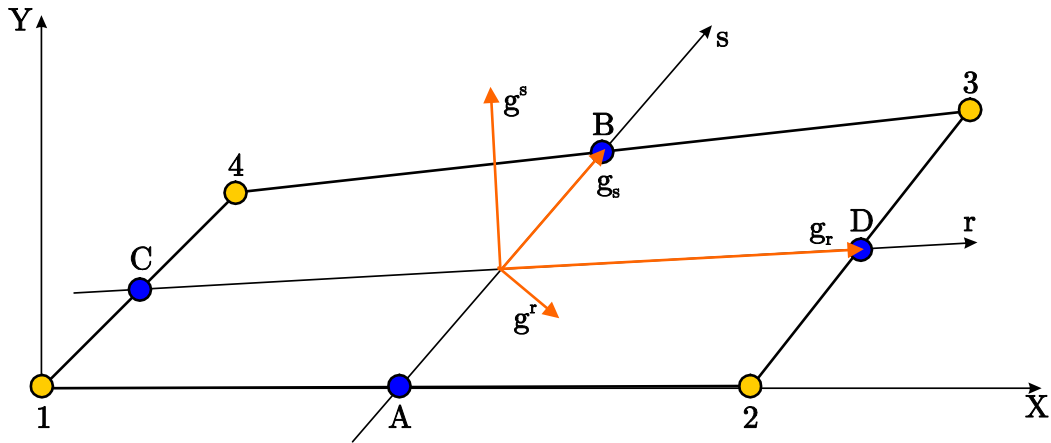


Bild 5.2: Allgemeines vier-Knotenelement im natürlichen  $rs$ - und kartesischen  $XY$ -Koordinatensystem

Koordinatensystem wird durch die kovarianten Basisvektoren  $\underline{g}_r$  und  $\underline{g}_s$  aufgespannt, vgl. u.a. BATHE [11],

$$\underline{g}_r = \frac{\partial \underline{X}}{\partial r} = \underline{N}_{,r} \hat{X}, \quad \underline{g}_s = \frac{\partial \underline{X}}{\partial s} = \underline{N}_{,s} \hat{X}, \quad (5.12)$$

wobei  $\underline{X}$  den Ortsvektor aus Gleichung (5.2) darstellt. Die Verzerrungen  $E_{ij}^m$  berechnen sich dann allgemein in diesem natürlichen Koordinatensystem durch die kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors  $\tilde{E}_{ij}^m$  und die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren  $\underline{g}^i$  und  $\underline{g}^j$

$$E_{ij}^m = \tilde{E}_{ij}^m \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j. \quad (5.13)$$

Die noch unbekanntenen kontravarianten Basisvektoren sind durch die Beziehung  $\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_i^j$  zu bestimmen. Dabei wird mit  $\delta_i^j$  das Kronecker-Delta bezeichnet, das für  $i = j$  den Wert  $\delta_i^j = 1$  und für  $i \neq j$  den Wert  $\delta_i^j = 0$  erhält. Für das in Bild 5.2 dargestellte allgemeine Element berechnen sich die kontravarianten Basisvektoren zu

$$\underline{g}^r = \begin{bmatrix} -2 \frac{C_y - B_y r}{\det \underline{J}} \\ 2 \frac{C_x - B_x r}{\det \underline{J}} \end{bmatrix}, \quad \underline{g}^s = \begin{bmatrix} 2 \frac{A_y - B_y s}{\det \underline{J}} \\ -2 \frac{A_x - B_x s}{\det \underline{J}} \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

wobei zur übersichtlichen Darstellung in der Gleichung (5.14) die Abkürzungen

$$\det \underline{J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

und

$$\begin{aligned} A_x &= X_1 - X_2 - X_3 + X_4 \\ B_x &= X_1 - X_2 + X_3 - X_4 \\ C_x &= X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_y &= Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 \\
B_y &= Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 \\
C_y &= Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4
\end{aligned} \tag{5.16}$$

verwendet werden.

Nun werden die Komponenten  $\tilde{E}_{rz}^s$  und  $\tilde{E}_{sz}^s$  der natürlichen Verzerrungen  $\tilde{\underline{E}}^s$  aus Gleichung (5.13) für die Schubanteile ausgewertet. Dies geschieht, indem die Komponenten bzgl. des kartesischen  $XY$ -Koordinatensystems in die neue Basis  $rs$  überführt werden

$$\tilde{\underline{E}}^s = \begin{bmatrix} 2\tilde{E}_{rz}^s \\ 2\tilde{E}_{sz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2E_{xz}^s \\ 2E_{yz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{,r}^s & -\underline{N}^s X_{,r} & -\underline{N}^s Y_{,r} \\ \underline{N}_{,s}^s & -\underline{N}^s X_{,s} & -\underline{N}^s Y_{,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{\psi}_{\rightarrow x} \\ \tilde{\psi}_{\rightarrow y} \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen bzgl. der natürlichen Koordinaten werden in der Operatormatrix

$$\underline{B}_{sL} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{s,rz} \\ \underline{B}_{s,sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_{,r}^s & -\underline{N}^s X_{,r} & -\underline{N}^s Y_{,r} \\ \underline{N}_{,s}^s & -\underline{N}^s X_{,s} & -\underline{N}^s Y_{,s} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

zusammengefasst.

Die Komponenten der natürlichen Schubverzerrungen  $\tilde{\underline{E}}^s$  aus Gleichung (5.17) werden nun an den diskreten Kollokationspunkten  $k$  ausgewertet

$$\tilde{\underline{E}}_k^s = \underline{B}_{sL}(r^k, s^k) \hat{\underline{\psi}}. \tag{5.19}$$

Die Kollokationspunkte, auch *sampling points* genannt, liegen für vier-Knotenelemente auf den Seitenmitten, vgl. Bild 5.2, und werden in dieser Arbeit mit A, B, C und D bezeichnet. Von den Anbindungspunkten ausgehend wird der Verlauf der natürlichen Schubverzerrungen ermittelt. Dabei werden die in diesen Kollokationspunkten ermittelten diskreten Werte zur Vermeidung der parasitären Schubverzerrungen statt mit bilinearen nur mit linear-konstanten Ansatzfunktionen  $N_k^r$  und  $N_k^s$  multipliziert. Die Ansatzfunktionen sind dabei folgendermaßen definiert

$$N_1^r = \frac{1}{2}(1-s), \quad N_2^r = \frac{1}{2}(1+s) \tag{5.20}$$

$$N_1^s = \frac{1}{2}(1-r), \quad N_2^s = \frac{1}{2}(1+r). \tag{5.21}$$

Der Verlauf von  $N_k^s$  ist beispielhaft in Bild 5.3 dargestellt. Für  $r = 0$  verschwinden hier die parasitären Anteile, weswegen vorteilhafterweise entlang dieser Linie die Kollokationspunkte gewählt werden sollten. Damit ergeben sich die natürlichen Schubverzerrungen zu

$$\tilde{\underline{E}}^s = \begin{bmatrix} 2\tilde{E}_{rz}^s \\ 2\tilde{E}_{sz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^2 N_k^r(r, s) \underline{B}_{s,rz}(r^k, s^k) \hat{\underline{\psi}} \\ \sum_{k=1}^2 N_k^s(r, s) \underline{B}_{s,sz}(r^k, s^k) \hat{\underline{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^2 N_k^r(r, s) \tilde{\underline{E}}_{k,rz}^s \\ \sum_{k=1}^2 N_k^s(r, s) \tilde{\underline{E}}_{k,rz}^s \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$



bleibt. Insbesondere werden keine zusätzlichen Freiheitsgrade hinzugefügt, so dass der Aufwand gering ist.

## 5.3 Finite Schalenelemente aus Zweifeldvariationsformulierung

Ausgangspunkt der im Folgenden entwickelten piezoelektrischen Schalenelemente SM2F $\Phi$  ist die Zweifeldvariationsformulierung aus Kapitel 4.7. Dabei stehen die verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten des elektrischen Potentials sowohl hinsichtlich der Approximation in der Schalenebene als auch in der Dickenrichtung bei den verschiedenen Elementen im Vordergrund.

### 5.3.1 Lineares elektrisches Potential mit vier elektrischen Freiheitsgraden pro Schicht

Für das in diesem Kapitel entwickelte flache piezoelektrische Schalenelement SM2F $\Phi$ 1 wird zunächst das Gleichungssystem auf Elementebene betrachtet. Die nachfolgende Assemblierung zum Gesamtsystem ist einfach umsetzbar und wird daher zunächst nicht dargestellt.

Die virtuelle Arbeit  $\delta\mathcal{G}$  aus Gleichung (4.44) wird nun mithilfe der Näherungsansätze für die kinematischen Größen und das elektrische Potential und deren Variationen aus den Gleichungen (5.3) bis (5.10) ermittelt zu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{G}(\hat{\underline{u}}, \delta\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\psi}}, \delta\hat{\underline{\psi}}, \hat{\underline{\Phi}}, \delta\hat{\underline{\Phi}}) &= \begin{bmatrix} \delta\hat{\underline{u}}_e \\ \delta\hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta\hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{u\psi} & \underline{K}_{u\Phi} \\ \underline{K}_{\psi u} & \underline{K}_{\psi\psi} & \underline{K}_{\psi\Phi} \\ \underline{K}_{\Phi u} & \underline{K}_{\Phi\psi} & -\underline{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_e \\ \hat{\underline{\psi}}_e \\ \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \delta\hat{\underline{u}}_e \\ \delta\hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta\hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{\underline{u}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\psi}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\Phi}}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta\hat{\underline{u}}_e \\ \delta\hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta\hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \end{bmatrix} = 0. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Das zu lösende Gleichungssystem hängt nun von den noch unbekanntenen Knotenwerten  $\hat{\underline{u}}$ ,  $\hat{\underline{\psi}}$  und  $\hat{\underline{\Phi}}$  ab.

Die Elementsteifigkeitsmatrix setzt sich aus den unabhängig voneinander berechenbaren Submatrizen zusammen, die sich folgendermaßen berechnen

$$\underline{K}_{uu} = \int_A \underline{B}_u^T \underline{A} \underline{B}_u \, dA \quad (5.26)$$

$$\underline{K}_{u\psi} = \underline{K}_{\psi u}^T = \int_A (\underline{B}_u^T \underline{A} \underline{B}_k + \underline{B}_u^T \underline{C}^{mb} \underline{B}_\psi) \, dA \quad (5.27)$$

$$\underline{K}_{\mathbf{u}\Phi} = \underline{K}_{\Phi\mathbf{u}}^T = \int_A \underline{B}_{\mathbf{u}}^T \underline{C}^{\text{m}\phi} \underline{B}_{\Phi} \, dA \quad (5.28)$$

$$\underline{K}_{\psi\psi} = \int_A \left[ \underline{B}_{\mathbf{k}}^T (\underline{A} \underline{B}_{\mathbf{k}} + \underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_{\psi}) + \underline{B}_{\psi}^T (\underline{C}^{\text{mb}} \underline{B}_{\mathbf{k}} + \underline{D} \underline{B}_{\psi}) + \underline{B}_{\mathbf{s}}^T \underline{A}^{\mathbf{s}} \underline{B}_{\mathbf{s}} \right] \, dA \quad (5.29)$$

$$\underline{K}_{\psi\Phi} = \underline{K}_{\Phi\psi}^T = \int_A (\underline{B}_{\psi}^T \underline{C}^{\text{b}\phi} \underline{B}_{\Phi} + \underline{B}_{\mathbf{k}}^T \underline{C}^{\text{m}\phi} \underline{B}_{\Phi}) \, dA \quad (5.30)$$

$$\underline{K}_{\Phi\Phi} = \int_A \underline{B}_{\Phi}^T \underline{P} \underline{B}_{\Phi} \, dA \quad (5.31)$$

Durch den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix mithilfe von Submatrizen ist eine effiziente Berechnung möglich, da nicht unnötig große Matrizen aufgebaut werden müssen und überflüssige Multiplikationen vermieden werden. Die Integration der einzelnen Terme erfolgt numerisch mithilfe der Gauss-Quadratur. Für alle Terme mit Ausnahme der Schubterme wird die Auswertung mit 2 Integrationspunkten pro Koordinatenrichtung durchgeführt.

Auch für das elektrische Potenzial wird für dieses piezoelektrische Schalenelement ein linearer Ansatz in der  $XY$ -Ebene verwendet, obwohl dies aufgrund der ausschließlichen Abhängigkeit von  $\Phi$  von der  $z$ -Koordinate nicht notwendig ist. Daher wird nachfolgend im Kapitel 5.3.2 zusätzlich ein Element entwickelt werden, bei dem konstante Ansätze in der  $XY$ -Ebene zum Einsatz kommen. Eine weitergehende Diskussion wird ebenfalls dort geführt.

Die Einträge in die Massenmatrix sowie im Lastvektor sind in analoger Weise zu berechnen

$$\underline{F}_{\mathbf{u}} = \int_A \sum_{i=1}^{n_i} \rho_0 t_i \underline{N}_{\mathbf{u}}^T \underline{\bar{b}} \, dA + \int_{A_{\sigma}} \underline{N}_{\mathbf{u}}^T \underline{\bar{t}} \, dA \quad (5.32)$$

$$\underline{F}_{\psi} = \int_{A_{\sigma}} \underline{N}_{\psi}^T \underline{\bar{t}} \, dA \quad (5.33)$$

$$\underline{F}_{\Phi} = \int_{A_{\text{D}}} \underline{N}_{\Phi}^T \underline{\bar{d}} \, dA \quad (5.34)$$

$$\underline{M}_{\mathbf{uu}} = \int_A \sum_{i=1}^{n_i} \rho_0 t_i \underline{N}_{\mathbf{u}}^T \underline{N}_{\mathbf{u}} \, dA \quad (5.35)$$

Zu beachten ist hier, dass im Gegensatz zu den mechanischen Größen für die elektrischen Terme keine zu berücksichtigenden Trägheiten existieren.

Um das Gleichungssystem für die Gesamtstruktur zu erhalten, wird über alle Elemente  $n_{\text{elm}}$  assembliert und anschließend das Gleichungssystem für die unbekanntenen Knotenwerte

$\hat{\underline{u}}_e$ ,  $\hat{\underline{\psi}}_e$  und  $\hat{\underline{\Phi}}_e$  gelöst

$$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{u\psi} & \underline{K}_{u\Phi} \\ \underline{K}_{\psi u} & \underline{K}_{\psi\psi} & \underline{K}_{\psi\Phi} \\ \underline{K}_{\Phi u} & \underline{K}_{\Phi\psi} & -\underline{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_e \\ \hat{\underline{\psi}}_e \\ \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{\underline{u}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\psi}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\Phi}}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

### 5.3.2 Lineares elektrisches Potenzial mit einem elektrischen Freiheitsgrad pro Schicht

Da alle unabhängigen Variablen aus Gleichung (4.44) höchstens in ihren ersten Ableitungen vorhanden sind, ist im Allgemeinen eine  $C^0$ -Stetigkeit sowohl für die mechanischen Größen  $\underline{u}_e$  und  $\underline{\psi}_e$  als auch für das elektrische Potenzial  $\underline{\Phi}_e$  notwendig. Werden jedoch dünne piezoelektrische Keramiken auf Platten- und Schalenstrukturen appliziert, so ist deren Polarisierung üblicherweise in  $z$ -Richtung. Die Erzeugung eines elektrischen Feldes in Richtung der Schalenmittelfläche ist in der Praxis meist nur mithilfe von Interdigitalelektroden (Kammelektroden) realisierbar, vgl. u.a. BENT [17] und BROCKMANN UND LAMMERING [23]. Die Polarisierung und die Orientierung des elektrischen Feldes in  $z$ -Richtung sind in der hier vorliegenden Formulierung bereits berücksichtigt. Der Gradient des elektrischen Potenzials in der  $XY$ -Ebene kann vernachlässigt werden, wodurch der Betrieb mit Interdigitalelektroden hier nicht vorgesehen ist. Damit ist ein konstanter Näherungsansatz für das elektrische Potenzial, d.h. die Verwendung von  $C^{-1}$ -stetigen Ansätzen, in Richtung der Schalenmittelfläche gerechtfertigt. Auch aus physikalischer Sicht ist eine kontinuierliche Messung der elektrischen Spannung an diskret verteilten Elektroden unmöglich. Aus diesem Grund ist eine Formulierung mit konstanter Approximation des elektrischen Potenzials ebenfalls erfolgreich für das flache Schalenelement entwickelt worden, vgl. MESECKE UND LAMMERING [88], und wird anhand von Beispielen im Kapitel 6 mit den anderen Elementen verglichen.

Dieses Vorgehen wird beim Element SM2F $\Phi$ 1 eingesetzt, so dass ein weiteres piezoelektrisches Schalenelement SM2F $\Phi$ 1k entsteht, bei der 'k' den konstanten Ansatz des elektrischen Potenzials in der  $XY$ -Ebene in der Kurzbezeichnung kennzeichnet. Die Umsetzung wird im Folgenden diskutiert.

Wird ein konstanter Ansatz für das elektrische Potenzial in der  $XY$ -Ebene verwendet, so bleibt die Approximation von  $\underline{\Phi}$  über die Schichtdicke davon unbeeinflusst als linearer Ansatz erhalten. In Richtung der Schalenmittelfläche wird jedoch die numerische Integration mit nur einem Gausspunkt durchgeführt, der sich in der Elementmitte befindet, so dass die Größen  $\hat{\underline{\Phi}}_e$  im Unbekanntenvektor der Gleichung (5.25) nicht mehr den Knotenwerten entsprechen. Sie ergeben jeweils einen konstanten Wert für das gesamte Element, was zu Sprüngen zwischen den angrenzenden Elementen führt. Werden die Elemente als einzelne diskrete piezoelektrische Aktoren und Sensoren aufgefasst, so entspricht dieser Ansatz eher einer realistischen Modellierung.

Es sind nun keine elektrischen Übergangsbedingungen zwischen den Elementen mehr einzuhalten, so dass vor der Assemblierung eine Kondensation der elektrischen Freiheitsgrade auf Elementebene durchgeführt werden kann. Für das elektrische Potenzial eines piezoelektrischen finiten Elementes ergibt sich aus Gleichung (5.25) folgende Bestimmungsgleichung

$$\hat{\Phi}_e = \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \left( \underline{K}_{\Phi u} \hat{u}_e + \underline{K}_{\Phi\psi} \hat{\psi}_e - \underline{F}_{\Phi} \right). \quad (5.37)$$

Eliminieren von  $\hat{\Phi}_e$  in Gleichung (5.36) reduziert die Unbekannten im Gleichungssystem auf rein mechanische Knotengrößen  $\hat{u}_e$  und  $\hat{\psi}_e$

$$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} + \underline{K}_{u\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{K}_{\Phi u} & \underline{K}_{u\psi} + \underline{K}_{u\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{K}_{\Phi\psi} \\ \underline{K}_{\psi u} + \underline{K}_{\psi\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{K}_{\Phi u} & \underline{K}_{\psi\psi} + \underline{K}_{\psi\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{K}_{\Phi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_e \\ \hat{\psi}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{u}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\psi}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{F}_u + \underline{K}_{u\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{F}_{\Phi} \\ \underline{F}_{\psi} + \underline{K}_{\psi\Phi} \underline{K}_{\Phi\Phi}^{-1} \underline{F}_{\Phi} \end{bmatrix} \right\} = \underline{0}. \quad (5.38)$$

Da in der Massenmatrix nur mechanische Trägheitsterme auftreten, ist die statische Kondensation auch für dynamisch beanspruchte Systeme verwendbar. Der große Vorteil bei diesem Element ist, dass bei einer gleichzeitigen Verwendung von rein mechanischen Elementen die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden vorhanden ist. Der aktorische Betrieb ist ebenso enthalten wie der sensorische Betrieb, die nun beide durch interne Variablen in die Elementformulierung mithilfe des Lastvektors  $\underline{F}_{\Phi}$  integriert werden können.

### 5.3.3 Quadratisches elektrisches Potenzial mit vier elektrischen Freiheitsgraden pro Schicht

Wird statt der linearen Beschreibung des elektrischen Potenzials über die Schichtdicke die quadratische Änderung gemäß der Formulierung SM2F $\Phi$ 2 aus Kapitel 4.4 verwendet, so muss die Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (5.36) um zusätzliche Terme erweitert werden. Aufgrund der Berücksichtigung der Kopplung zwischen dem elektrischen Feld und den Verdrehungen aus Gleichung (4.21) ergeben sich bei den folgenden Matrizen weitere Terme

$$\underline{K}_{u\psi}^* = (\underline{K}_{\psi u}^*)^T = \underline{K}_{u\psi} + \int_A \underline{B}_k^T \underline{\epsilon} \underline{B}_{\text{quad}} \, dA, \quad (5.39)$$

$$\underline{K}_{\psi\psi}^* = \underline{K}_{\psi\psi} + \int_A \underline{B}_{\text{quad}}^T \underline{\epsilon}^T \underline{B}_{\psi} \, dA + \int_A \underline{B}_{\psi}^T \underline{\epsilon} \underline{B}_{\text{quad}} \, dA - \int_A \underline{B}_{\text{quad}}^T \underline{\epsilon} \underline{B}_{\text{quad}} \, dA. \quad (5.40)$$

Die Integralterme sind hier ebenfalls auf die Schalenmittelfläche bezogen. Bei der Matrix  $\underline{B}_{\text{quad}}$  handelt es sich um eine modifizierte Operatormatrix für die Verdrehungen, die auf die piezoelektrischen Schichten beschränkt bleibt und folgendermaßen besetzt ist

$$\underline{B}_{\text{quad}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(e_{13}^*)_{\text{u}}}{(\epsilon_{33}^*)_{\text{u}}} N_{,x} & -\frac{(e_{23}^*)_{\text{u}}}{(\epsilon_{33}^*)_{\text{u}}} N_{,y} \\ 0 & -\frac{(e_{13}^*)_{\text{l}}}{(\epsilon_{33}^*)_{\text{l}}} N_{,x} & -\frac{(e_{23}^*)_{\text{l}}}{(\epsilon_{33}^*)_{\text{l}}} N_{,y} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Durch die Berücksichtigung der quadratischen Anteile des elektrischen Potentials in den Biegetermen sind nur einzelne Einträge in der Steifigkeitsmatrix zu modifizieren, die gemäß den Gleichungen (5.39) und (5.40) durch einen Stern gekennzeichnet werden. Die Gesamtstruktur für die Assemblierung bleibt jedoch erhalten

$$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{u\psi}^* & \underline{K}_{u\Phi} \\ \underline{K}_{\psi u}^* & \underline{K}_{\psi\psi}^* & \underline{K}_{\psi\Phi} \\ \underline{K}_{\Phi u} & \underline{K}_{\Phi\psi} & -\underline{K}_{\Phi\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_e \\ \hat{\psi}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{u}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\psi}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\Phi}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \end{bmatrix} . \quad (5.42)$$

### 5.3.4 Nichtlineare Schalenformulierung mit linearem elektrischem Potenzial und vier elektrischen Freiheitsgraden pro Schicht

Die Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen erfolgt in Finite-Elemente-Programmen mit iterativen Lösungsverfahren. Im Hinblick auf die nachherige Implementierung der entwickelten Elementformulierung SM2F $\Phi$ 1n ist es sinnvoll, zunächst eine Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts durchzuführen. Die stofffreie Gleichung (4.41) ist auch für nichtlineare Stoffgesetze gültig. Aufgrund der Sprödigkeit des Materials ist eine Beschränkung auf kleine Verzerrungen sinnvoll. Damit reduziert sich die Nichtlinearität bei gekoppelten elektromechanischen Strukturen zumeist auf die physikalische Nichtlinearität. Es existiert in der Variationsformulierung keine Kopplung zwischen den Verzerrungen und dem elektrischen Feld, bzw. zwischen den Anteilen der mechanischen und elektrischen unabhängigen Größen. Aus diesem Grund können die Linearisierungen bzgl. der unabhängigen Variablen  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  unabhängig voneinander durchgeführt werden. Wie in Gleichung (B.13) des Anhangs B angegeben, wird die schwache Form des Gleichgewichts wie folgt linearisiert:

$$L[\delta\mathcal{G}] = \bar{\mathcal{G}} + \bar{D}\mathcal{G} \cdot \Delta\mathbf{u} + \bar{D}\mathcal{G}\Delta\Phi . \quad (5.43)$$

Die Terme der äußeren Arbeiten beinhalten keine Nichtlinearitäten und werden daher bei der Linearisierung nicht betrachtet. Durch die Beschränkung auf physikalisch nichtlineare Effekte reduziert sich die Linearisierung der Gleichung (5.43) weiter auf die konstitutiven Beziehungen

$$\bar{D}\mathcal{G} \cdot \Delta\mathbf{u} = \int_{\mathcal{B}} ((\bar{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta\mathbf{u}) : \delta\mathbf{E}^m + (\bar{D}\mathbf{D} \cdot \Delta\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{E}^{\text{el}}) dV \quad (5.44)$$

$$\bar{D}\mathcal{G}\Delta\Phi = \int_{\mathcal{B}} ((\bar{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta\Phi) : \delta\mathbf{E}^m + (\bar{D}\mathbf{D} \cdot \Delta\Phi)) dV . \quad (5.45)$$

Damit ist es ausreichend, nur die Spannungen und die dielektrische Verschiebung zu linearisieren.

Mithilfe der Gleichungen (B.8) bis (B.11) werden nun die linearisierten Schnittgrößen für das nichtlineare Stoffgesetz aus den Gleichungen (3.12) und (3.13)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^m - (\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m) \cdot \mathbf{E}^{el} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{e}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{e}^1 : \mathbf{E}^m)^T : \mathbf{E}^m + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}^{el} . \quad (5.47)$$

berechnet. Diese konstitutiven Gleichungen werden bzgl. der unabhängigen Variablen  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$  linearisiert, so dass sich für die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{E}^m = \bar{\mathbf{E}}^m} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} + (\mathbb{C} - \mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{el}) : \Delta \mathbf{E}^m \\ \mathbf{L}[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{E}^{el} = \bar{\mathbf{E}}^{el}} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \bar{\mathbf{E}}^m) \cdot \Delta \mathbf{E}^{el} \end{aligned} \quad (5.48)$$

ergibt. Hierbei ist zu beachten, dass die überstrichenen Größen für den aktuellen Belastungszustand ausgewertet werden. Es fällt auf, dass sich ein zusätzlicher elektrischer Term bei dem vorher rein mechanischen Anteil in der Elastizitätsmatrix  $\mathbb{C}$  ergibt. Dies wirkt sich direkt auf die mechanische Steifigkeit aus, die dadurch je nach Vorzeichen des elektrischen Feldes verringert oder erhöht wird. Dieser Effekt kann später deutlich in der hieraus entwickelten Steifigkeitsmatrix identifiziert werden.

Die linearisierte dielektrische Verschiebung berechnet sich in gleicher Weise

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\mathbf{D}]_{\mathbf{E}^m = \bar{\mathbf{E}}^m} &= \bar{\mathbf{D}} + (\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \bar{\mathbf{E}}^m)^T \cdot \Delta \mathbf{E}^m \\ \mathbf{L}[\mathbf{D}]_{\mathbf{E}^{el} = \bar{\mathbf{E}}^{el}} &= \bar{\mathbf{D}} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \Delta \mathbf{E}^{el} . \end{aligned} \quad (5.49)$$

Es treten nun im Stoffgesetz an den Stellen zusätzliche Terme auf, die eine direkte oder indirekte Abhängigkeit von den Verzerrungen beinhalten. Daher bleibt die Beziehung zwischen den elektrischen Größen vollständig linear.

Die linearisierte Form der konstitutiven Gleichungen lässt sich nun kompakter darstellen

$$\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} - \mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{el} & -(\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \bar{\mathbf{E}}^m) \\ (\mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 : \bar{\mathbf{E}}^m)^T & \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{E}^m \\ \Delta \mathbf{E}^{el} \end{bmatrix} . \quad (5.50)$$

Schon hier ist ersichtlich, dass durch den Linearisierungsprozess die Kopplungsterme zwischen mechanischen und elektrischen Größen den gleichen Aufbau haben und sich nicht mehr wie in den Gleichungen (5.46) und (5.47) um den Faktor 1/2 unterscheiden. Damit ist die Voraussetzung geschaffen, bei der Entwicklung von finiten Elementen einen symmetrischen Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrix zu erhalten.

Die Linearisierung der Schnittgrößen wirkt sich lediglich auf die Anteile aus den piezo-

elektrischen Schichten aus, die sich in linearisierter Form zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{n}^{\text{nl}} \\ \Delta \mathbf{m}^{\text{nl}} \\ \Delta \mathbf{d}^{\text{nl}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta \check{\mathbf{n}} \\ \Delta \check{\mathbf{m}} \\ \Delta \check{\mathbf{d}} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{n_p} \begin{bmatrix} (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}})_i t_i & (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}})_i t_i z_i & (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{\text{mb}})_i t_i \\ (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}})_i t_i z_i & (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}})_i \left( t_i z_i^2 + \frac{t_i^3}{12} \right) & (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{\text{b}})_i t_i z_i \\ (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{\text{mb}})_i^T t_i & (\mathbf{e}^1 \cdot \bar{\mathbf{E}}^{\text{b}})_i^T t_i z_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{nl}} & \mathbf{C}^{\text{mb,nl}} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{C}^{\text{mb,nl}} & \mathbf{D}^{\text{nl}} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}} \\ (\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}})^T & (\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}})^T & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{q}^{\text{nl}} = \check{\mathbf{q}} \quad (5.52)$$

ergeben.

Die Symmetrie der Stoffmatrix ist alleinig auf die Verwendung der nichtlinearen Enthalpiedichte zurückzuführen, die in Kapitel 3.2.3 entwickelt wurde. Dadurch ist ebenfalls die Kopplungsbedingung aus Gleichung (3.4) eingehalten.

Es ergibt sich eine linearisierte innere Arbeit  $\delta \mathcal{G}_{\text{int}}$  der vormalis nichtlinearen Formulierung aus Gleichung (4.48). Bei der äußeren Arbeit treten keine Änderungen gegenüber der linearen Formulierung auf, weshalb nur die innere Arbeit  $\delta \mathcal{G}_{\text{int}}$  angegeben wird

$$\delta \mathcal{G}_{\text{int}} = \int_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \delta \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \delta \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \delta \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{nl}} & \mathbf{C}^{\text{mb,nl}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{C}^{\text{mb,nl}} & \mathbf{D}^{\text{nl}} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\text{s}} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{C}^{\text{m}\phi,\text{nl}})^T & -(\mathbf{C}^{\text{b}\phi,\text{nl}})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{mb}} \\ \mathbf{E}^{\text{b}} \\ \mathbf{E}^{\text{s}} \\ \mathbf{E}_z^{\text{el}} \end{bmatrix} dA . \quad (5.53)$$

Einsetzen der Approximationen für die unabhängigen Variablen aus den Gleichungen (5.7) und (5.10) in Gleichung (5.53) und Ergänzung der äußeren Arbeit ergibt die schwache Form des Gleichgewichts auf Elementebene für ein erweitertes nichtlineares Stoffgesetz, das danach ebenfalls zu einem Gesamtsystem zusammengebaut werden muss

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}(\hat{\underline{u}}, \delta \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\psi}}, \delta \hat{\underline{\psi}}, \hat{\underline{\Phi}}, \delta \hat{\underline{\Phi}}) &= \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu}^{\text{nl}} & \underline{K}_{u\psi}^{\text{nl}} & \underline{K}_{u\Phi}^{\text{nl}} \\ \underline{K}_{\psi u}^{\text{nl}} & \underline{K}_{\psi\psi}^{\text{nl}} & \underline{K}_{\psi\Phi}^{\text{nl}} \\ \underline{K}_{\Phi u}^{\text{nl}} & \underline{K}_{\Phi\psi}^{\text{nl}} & -\underline{K}_{\Phi\Phi}^{\text{nl}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_e \\ \hat{\underline{\psi}}_e \\ \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{\underline{u}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\psi}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\Phi}}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \end{bmatrix} = 0 . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Nur die tangentielle Steifigkeitsmatrix enthält durch den Linearisierungsprozess zusätzliche Terme, während die Gesamtstruktur des Gleichungssystems unverändert bleibt. Es muss

nur eine Erweiterung der Submatrizen aus den Gleichungen (5.26) bis (5.30) erfolgen

$$\underline{K}_{uu}^{\text{nl}} = \int_A \underline{B}_u^{\text{T}} \underline{A}^{\text{nl}} \underline{B}_u \, dA \quad (5.55)$$

$$\underline{K}_{u\psi}^{\text{nl}} = (\underline{K}_{\psi u}^{\text{nl}})^{\text{T}} = \int_A (\underline{B}_u^{\text{T}} \underline{A}^{\text{nl}} \underline{B}_k + \underline{B}_u^{\text{T}} \underline{C}^{\text{mb, nl}} \underline{B}_\psi) \, dA \quad (5.56)$$

$$\underline{K}_{u\Phi}^{\text{nl}} = (\underline{K}_{\Phi u}^{\text{nl}})^{\text{T}} = \int_A \underline{B}_u^{\text{T}} \underline{C}^{\text{m}\phi, \text{nl}} \underline{B}_\Phi \, dA \quad (5.57)$$

$$\underline{K}_{\psi\psi}^{\text{nl}} = \int_A \left[ \underline{B}_k^{\text{T}} (\underline{A}^{\text{nl}} \underline{B}_k + \underline{C}^{\text{mb, nl}} \underline{B}_\psi) + \underline{B}_\psi^{\text{T}} (\underline{C}^{\text{mb, nl}} \underline{B}_k + \underline{D}^{\text{nl}} \underline{B}_\psi) + \underline{\bar{B}}_s^{\text{T}} \underline{A}^{\text{s}} \underline{\bar{B}}_s \right] \, dA \quad (5.58)$$

$$\underline{K}_{\psi\Phi}^{\text{nl}} = (\underline{K}_{\Phi\psi}^{\text{nl}})^{\text{T}} = \int_A (\underline{B}_\psi^{\text{T}} \underline{C}^{\text{b}\phi, \text{nl}} \underline{B}_\Phi + \underline{B}_k^{\text{T}} \underline{C}^{\text{m}\phi, \text{nl}} \underline{B}_\Phi) \, dA \quad (5.59)$$

$$\underline{K}_{\Phi\Phi} = \int_A \underline{B}_\Phi^{\text{T}} \underline{P} \underline{B}_\Phi \, dA \quad (5.60)$$

$\underline{K}_{\Phi\Phi}$  ist unverändert von Gleichung (5.31) übernommen. Die Einträge im Lastvektor und in der Massenmatrix bleiben ebenfalls unverändert und sind den Gleichungen (5.32) bis (5.35) zu entnehmen. Sind keine nichtlinearen Konstanten vorhanden, so reduziert sich die Formulierung auf das lineare Gleichungssystem aus Gleichung (5.36).

Aufgrund der Abhängigkeit des piezoelektrischen Moduls von den Verzerrungen ist das gewonnene Gleichungssystem nichtlinear, was eine iterative Lösung des Gleichungssystems notwendig macht. Das im Kapitel 5.5 kurz vorgestellte Newton-Raphson-Verfahren wird wegen seiner hohen Effizienz für die Berechnung eingesetzt. Die Verwendung von nichtlinearen konstitutiven Gleichungen vor allem in Finite-Elemente-Formulierungen ist für gekoppelte elektromechanische Systeme im Kleinsignalbereich noch nicht weit verbreitet. Insbesondere wird zumeist kein nichtlineares Potenzial formuliert, wodurch die Symmetrie des Gleichungssystems verloren geht. Untersuchungen über eine effiziente numerische Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte werden daher als lohnend und notwendig angesehen.

## 5.4 Finite Schalenelemente aus Dreifeldvariationsformulierung

Zielsetzung bei der Entwicklung einer Dreifeldvariationsformulierung ist die aus der elektromechanischen Kopplung resultierenden inneren Arbeiten vollständig zu berücksichtigen. Des Weiteren ist damit eine Erweiterung auf nichtlineares Materialverhalten für den Großsignalbereich zur Modellierung von Polarisationsvorgängen ebenfalls möglich, vgl. GHANDI UND HAGOOD [42, 41] und GHANDI [40]. Inwieweit das Verformungsverhalten

von finiten Elementen durch die Verwendung von Mehrfeldvariationsprinzipien weiter verbessert werden kann, ist Gegenstand der aktuellen Forschung, vgl. SZE UND PAN [106] SZE ET AL. [104]. Insbesondere der Einfluss der zusätzlichen elektrischen Anteile bedarf noch weiterer Untersuchungen.

Bei der Behandlung von nahezu inkompressiblen Materialien für rein mechanische Strukturen wird bei Elementen mit bilinearen Verschiebungsansätzen für den Druck ein konstanter Ansatz verwendet, vgl. HUGHES [48] und ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134]. Dies bietet sich ebenfalls für die Approximation der dielektrischen Verschiebung für das Element SM3F $\Phi$ 1 an, da auch hier keine Ableitungen der unabhängigen Größe  $\underline{D}$  in der Formulierung auftreten, und damit ein konstanter Ansatz im Elementmittelpunkt ausreichend ist. Mit den Formfunktionen für die obere und untere piezoelektrische Laminatschicht  $\underline{N}_D$  und den Werten  $\hat{\underline{D}}$  im Elementmittelpunkt ergibt sich

$$\underline{D} = \underline{N}_D \hat{\underline{D}}, \quad \delta \underline{D} = \underline{N}_D \delta \hat{\underline{D}}, \quad (5.61)$$

wobei der Index D die dielektrische Verschiebung bezeichnet.  $\hat{\underline{D}}$  setzt sich aus zwei konstanten Werten für die obere und untere piezoelektrische Schicht im Elementmittelpunkt zusammen

$$\hat{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D_u \\ D_l \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Die schwache Form des Gleichgewichts aus der Gleichung (4.53) lautet nun in semidiskreter Matrizendarstellung

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \\ \delta \hat{\underline{D}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{u\psi} & \underline{0} & -\underline{K}_{uD} \\ \underline{K}_{\psi u} & \underline{K}_{\psi\psi} & \underline{0} & -\underline{K}_{\psi D} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{K}_{\Phi D} \\ -\underline{K}_{Du} & -\underline{K}_{D\psi} & \underline{K}_{D\Phi} & \underline{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\underline{u}}_e \\ \hat{\underline{\psi}}_e \\ \hat{\underline{\Phi}}_e \\ \hat{\underline{D}}_e \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \\ \delta \hat{\underline{D}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{M}_{uuu} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{\underline{u}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\psi}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{\Phi}}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\underline{D}}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta \hat{\underline{u}}_e \\ \delta \hat{\underline{\psi}}_e \\ \delta \hat{\underline{\Phi}}_e \\ \delta \hat{\underline{D}}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (5.63) \end{aligned}$$

Die verwendeten Submatrizen in der Steifigkeitsmatrix lassen sich folgendermaßen berechnen, wobei auch hier die ANS-Methode zur Vermeidung von Versteifungseffekten für die Schubterme eingesetzt werden kann

$$\underline{K}_{uu} = \int_A \underline{B}_u^T \underline{A}_d \underline{B}_u \, dA \quad (5.64)$$

$$\underline{K}_{u\psi} = \underline{K}_{\psi u}^T = \int_A (\underline{B}_u^T \underline{A}_d \underline{B}_k + \underline{B}_u^T \underline{C}_d^{mb} \underline{B}_\psi) \, dA \quad (5.65)$$

$$\underline{K}_{uD} = \underline{K}_{Du}^T = \int_A \underline{B}_u^T \underline{C}^{mD} \underline{N}_D \, dA \quad (5.66)$$

$$\underline{K}_{\psi\psi} = \int_A \left[ \underline{B}_k^T (\underline{A}_d \underline{B}_k + \underline{C}_d^{\text{mb}} \underline{B}_\psi) + \underline{B}_\psi^T (\underline{C}_d^{\text{mb}} \underline{B}_k + \underline{D}_d \underline{B}_\psi) + \underline{\bar{B}}_s^T \underline{A}_d^s \underline{\bar{B}}_s \right] dA \quad (5.67)$$

$$\underline{K}_{\psi D} = \underline{K}_{D\psi}^T = \int_A (\underline{B}_\psi^T \underline{C}^{\text{bD}} \underline{N}_D + \underline{B}_k^T \underline{C}^{\text{mD}} \underline{N}_D) dA \quad (5.68)$$

$$\underline{K}_{\Phi D} = \underline{K}_{D\Phi}^T = \int_A \underline{B}_\Phi^T \sum_{i=1}^{n_p} t_i \underline{N}_D dA \quad (5.69)$$

$$\underline{K}_{DD} = \int_A \underline{N}_D^T \underline{P}_\beta \underline{N}_D dA . \quad (5.70)$$

Die Einträge in den Lastvektor und die Massenmatrix haben sich gegenüber dem Element SM2F $\Phi$ 1 aus Gleichung (5.25) nicht geändert. Daher können die Vektoren und Matrizen aus den Gleichungen (5.32) bis (5.35) verwendet werden. Das noch zu assemblierende Gleichungssystem ergibt sich nun auf Elementebene

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} & \underline{K}_{u\psi} & \underline{0} & -\underline{K}_{uD} \\ \underline{K}_{\psi u} & \underline{K}_{\psi\psi} & \underline{0} & -\underline{K}_{\psi D} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{K}_{\Phi D} \\ -\underline{K}_{Du} & -\underline{K}_{D\psi} & \underline{K}_{D\Phi} & \underline{K}_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_e \\ \hat{\psi}_e \\ \hat{\Phi}_e \\ \hat{D}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{u}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\psi}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\Phi}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{D}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \\ \underline{0} \end{bmatrix} . \quad (5.71)$$

Die Ansätze für die dielektrische Verschiebung wurden konstant gewählt und sind daher nur exakt für den Elementmittelpunkt. Aus diesem Grund ergeben sich Sprünge für die dielektrische Verschiebung zwischen angrenzenden Elementen. Dies ist möglich, da an den Elementknoten keine Übergangsbedingungen zu erfüllen sind. Eine Elimination analog zum Druckansatz bei rein mechanischen Elementen für nahezu inkompressible Materialien ist sinnvoll. Das für das Gesamtsystem entstehende Gleichungssystem ergibt sich nach Assemblierung über alle  $n_{\text{elm}}$  Elemente zu

$$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{K}_{uu} - \underline{K}_{uD} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{Du} & \underline{K}_{u\psi} - \underline{K}_{uD} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\psi} & \underline{K}_{uD} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\Phi} \\ \underline{K}_{\psi u} - \underline{K}_{\psi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{Du} & \underline{K}_{\psi\psi} - \underline{K}_{\psi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\psi} & \underline{K}_{\psi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\Phi} \\ \underline{K}_{\Phi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{Du} & \underline{K}_{\Phi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\psi} & -\underline{K}_{\Phi D} \underline{K}_{DD}^{-1} \underline{K}_{D\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_e \\ \hat{\psi}_e \\ \hat{\Phi}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{M}_{uu} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_{\psi\psi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 \hat{u}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\psi}_e / \partial t^2 \\ \partial^2 \hat{\Phi}_e / \partial t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{F}_u \\ \underline{F}_\psi \\ \underline{F}_\Phi \end{bmatrix} \right\} = \underline{0} . \quad (5.72)$$

Damit reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Variablen auf die gleiche Größe wie bei den Zweifeldformulierungen. Die dielektrische Verschiebung ist jetzt nur noch eine interne Variable auf Elementebene.

## 5.5 Verfahren zur numerischen Berechnung

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über einige numerische Verfahren geben, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Dies sind insbesondere Algorithmen zur

transienten Berechnung und iterative Lösungsverfahren für die Behandlung nichtlinearer Gleichungssysteme.

Bei der Verwendung von piezoelektrischen Werkstoffen liegt das Augenmerk auf dynamischen Problemen, in denen die Piezoelektrika häufigen Einsatz finden. Aufgrund der hohen Dynamik eröffnen sich für piezoelektrische Aktoren insbesondere zur aktiven Regelung schwingender Strukturen vielfältige Einsatzmöglichkeiten. Für die numerische Berechnung solcher zeitabhängiger Probleme ist zusätzlich eine Zeitintegration notwendig, die in dieser Arbeit mithilfe des Newmark Algorithmus durchgeführt wird. Das implizite Verfahren zeichnet sich durch seine unbedingte Stabilität gegenüber expliziten Zeitintegrationsverfahren aus. Die in realen Systemen vorkommende Materialdämpfung wird mithilfe der Rayleighschen Dämpfung beschrieben. Zusätzlich wird bei der Betrachtung von nichtlinearen Gleichungssystemen das Newton-Raphson-Verfahren für die iterative Berechnung verwendet.

### Newmark Algorithmus

Für die numerische Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung innerhalb eines Zeitintervalls wird die Zeitintegration mittels Newmark Algorithmus verwendet, der die Bewegungsgleichung einer Struktur

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{k+1} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{k+1} + \underline{K} \underline{u}_{k+1} = \underline{F}(t_{k+1}) \quad (5.73)$$

zu einem noch unbekanntem Zeitpunkt  $t_{k+1}$  ausgewertet, vgl. u.a. BATHE [11] und ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [135]. Es werden Ansätze für die Verschiebungen  $\underline{u}_{k+1}$  und die Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{u}}_{k+1}$  in Abhängigkeit von den Beschleunigungen  $\ddot{\underline{u}}$

$$\dot{\underline{u}}_{k+1} = \dot{\underline{u}}_k + [(1 - \gamma) \ddot{\underline{u}}_k + \gamma \ddot{\underline{u}}_{k+1}] \Delta t \quad (5.74)$$

$$\underline{u}_{k+1} = \underline{u}_k + \dot{\underline{u}}_k \Delta t + [(0.5 - \beta) \ddot{\underline{u}}_k + \beta \ddot{\underline{u}}_{k+1}] (\Delta t)^2 \quad (5.75)$$

aufgestellt, wobei der aktuelle Bewegungszustand zum Zeitpunkt  $t_k$  bekannt ist. Wird die Gleichung (5.75) nach  $\ddot{\underline{u}}_{k+1}$  umgestellt und in Gleichung (5.74) eingearbeitet, so sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung jetzt nur noch von der unbekanntem Verschiebung  $\underline{u}_{k+1}$  abhängig. Nachfolgendes Einsetzen in Gleichung (5.73) führt auf ein Gleichungssystem, dessen unbekanntem Verschiebungen für den Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu bestimmen sind. Die unbedingte Stabilität des Verfahrens ist für die Wahl der Parameter  $\gamma = 0.5$  und  $\beta = 0.25$  gewährleistet, wobei für  $\gamma > 0.5$  eine numerische Dämpfung auftritt.

### Rayleighsche Dämpfung

Um für schwingende Strukturen Vergleiche zwischen Experiment und numerischer Simulation durchführen zu können, ist die Berücksichtigung von Dämpfungseffekten notwendig. Die Dämpfung eines realen Systems setzt sich zumeist aus verschiedenen inneren und

äußeren Dämpfungseffekten zusammen, vgl. u.a. WALLER UND SCHMIDT [120]. Man unterscheidet bei der inneren Dämpfung zwischen Struktur- und Materialdämpfung, deren Berücksichtigung bei der numerischen Berechnung schnell zu sehr komplexen Modellen führt. Zur effizienten Lösung wird oftmals die Rayleighsche Dämpfung verwendet, die sich mithilfe der Massen- und Steifigkeitsmatrix berechnen lässt

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} . \quad (5.76)$$

Damit entsteht für die modale Form der Bewegungsgleichung ein entkoppeltes Gleichungssystem. Die zwei Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  können nun mithilfe der Eigenfrequenzen  $\omega_i$  und den zugehörigen modalen Dämpfungsparametern  $\xi_i$  bestimmt werden

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2 \omega_i \xi_i . \quad (5.77)$$

Das tatsächliche Dämpfungsverhalten einer Struktur wird jedoch nur im Bereich der für die Anpassung verwendeten Eigenfrequenzen realistisch wiedergegeben.

### Newton-Raphson-Verfahren

Das in dieser Arbeit modellierte nichtlineare Verhalten des piezoelektrischen Materials im Kleinsignalebereich macht eine iterative Berechnung der Lösung notwendig. Hierfür wird das Newton-Raphson-Verfahren verwendet, das in der Nähe der tatsächlichen Lösung eine quadratische Konvergenz aufweist, vgl. u.a. BATHE [11], BELYTSCHKO ET AL. [13] und WRIGGERS [124]. Dabei wird das zu lösende Gleichungssystem zunächst in die folgende Form umgeschrieben

$$\delta \mathcal{G}(\underline{u}, \lambda) = \underline{R}(\underline{u}) - \lambda \underline{P} = \underline{0} , \quad (5.78)$$

bei dem  $\lambda$  einen Skalierungsfaktor oder auch Lastparameter darstellt. Für ein Lastniveau  $\bar{\lambda}$  wird iterativ die Lösung berechnet, indem für einen bekannten Verschiebungszustand  $\underline{u}_k$  eine Taylorreihenentwicklung durchgeführt wird

$$\delta \mathcal{G}(\underline{u}_k + \Delta \underline{u}, \bar{\lambda}) = \delta \mathcal{G}(\underline{u}_k, \bar{\lambda}) + \underbrace{D \delta \mathcal{G}(\underline{u}_k, \bar{\lambda})}_{\underline{K}_T} \Delta \underline{u} + r(\underline{u}_k, \bar{\lambda}) . \quad (5.79)$$

Dies entspricht einer Linearisierung der Gleichung an der Stelle  $\underline{u}_k$ . Unter Vernachlässigung des Restglieds  $r$  soll das Gleichgewicht idealerweise erfüllt sein

$$\delta \mathcal{G}(\underline{u}_k + \Delta \underline{u}, \bar{\lambda}) = \delta \mathcal{G}(\underline{u}_k, \bar{\lambda}) + \underline{K}_T \Delta \underline{u} = 0 , \quad (5.80)$$

wobei mit  $\underline{K}_T$  die tangentielle Steifigkeit bezeichnet wird, die Allgemein mithilfe der im Anhang B dargestellten Linearisierung bestimmt wird. Aus Gleichung (5.80) kann nun das Verschiebungsinkrement  $\Delta \underline{u}$  berechnet und ein Update der Verschiebung  $\underline{u}_k$  durchgeführt werden. Ist mit der verbesserten Verschiebungslösung ein Konvergenzkriterium erfüllt, so wird die Iteration abgebrochen und ein weiteres Lastinkrement aufgebracht.

Der numerische Aufwand durch die in jedem Iterationsschritt neu berechnete tangentielle Steifigkeit kann reduziert werden, indem  $\underline{K}_T$  nur zu Beginn eines jeden Lastschritts einmal bestimmt wird. Damit geht jedoch die quadratische Konvergenz in der Nähe der Lösung verloren. Daher ist dieses modifizierte Newton-Raphson-Verfahren nur für schwach nichtlineare Probleme sinnvoll.

---

## Kapitel 6

### Beispiele

Nachdem alle theoretischen Grundlagen für die verschiedenen piezoelektrischen Schalenelemente in den vorangegangenen Kapiteln bereitgestellt wurden, sind diese codiert und in das Programmsystem FEAP (Finite Element Analysis Program) von ZIENKIEWICZ UND TAYLOR [134, 135] implementiert worden.

Eine kurze Zusammenfassung der Besonderheiten der jeweiligen Elemente soll es erleichtern, eine bessere Übersicht für die nachfolgenden numerischen Beispiele zu erhalten.

1. Das ANS-basierte piezoelektrische Schalenelement, mit der mnemonischen Abkürzung SM2F $\Phi$ 1, vgl. Gleichung (5.36), verwendet eine lineare Approximation des elektrischen Potentials in Dickenrichtung und einen bilinearen Ansatz für  $\Phi$  in der  $xy$ -Ebene.
2. Für das ANS-basierte piezoelektrische Schalenelement SM2F $\Phi$ 1k, vgl. Gleichung (5.38), wird das elektrische Potential in Dickenrichtung ebenfalls linear approximiert. In der  $xy$ -Ebene jedoch wird ein konstanter Ansatz für  $\Phi$  gewählt, so dass eine Eliminierung dieses elektrischen Freiheitsgrades auf Elementebene durchgeführt werden kann. Es verbleibt eine Formulierung, die nur noch mechanische Freiheitsgrade enthält. Über innere Variablen können jedoch weiterhin elektrische Belastungen sowohl statisch als auch dynamisch aufgebracht werden.
3. Der quadratische Ansatz für das elektrische Potential in Dickenrichtung ist für das ANS-basierte piezoelektrische Schalenelement SM2F $\Phi$ 2, vgl. Gleichung (5.42), umgesetzt worden. Die Approximation von  $\Phi$  in der  $xy$ -Ebene ist hier wieder durch einen bilinearen Ansatz realisiert.
4. Ein nichtlineares Materialverhalten für den Kleinsignalebene beinhaltet das ANS-basierte piezoelektrische Schalenelement SM2F $\Phi$ 1n, vgl. Gleichung (5.54), bei dem der piezoelektrische Modul vom aktuellen Verzerrungszustand abhängig ist. Auch hier wird der Verlauf des elektrischen Potentials linear über die Dicke angenommen und durch bilineare Ansätze in der  $xy$ -Ebene approximiert.

5. Das auf hybriden Methoden aufbauende ANS-basierte piezoelektrische Schalenelement SM3F $\Phi$ 1, vgl. Gleichung (5.72), verwendet als zusätzlichen Freiheitsgrad die dielektrische Verschiebung, die jedoch aufgrund der konstanten Approximation in der  $xy$ -Ebene auf Elementebene eliminiert werden kann. Das elektrische Potenzial wird in der  $xy$ -Ebene durch bilineare Ansätze angenähert. Für den Verlauf von  $\Phi$  in der Dickenrichtung wird ebenfalls eine lineare Approximation gewählt.
6. Ein piezoelektrisches Schalenelement von LAMMERING [71], hier als SM2F $\Phi$ 1red bezeichnet, mit reduzierter Integration der Schubterme, wird zu Vergleichszwecken herangezogen. Ansonsten entspricht dieses Element dem ANS-basierten SM2F $\Phi$ 1.

## 6.1 Ziele der numerischen Untersuchungen

Ziel der in dieser Arbeit diskutierten Beispiele ist es, anhand ausgewählter Systeme die Unterschiede der Elementformulierungen zu dokumentieren und die Leistungsfähigkeit der einzelnen finiten Elemente herauszuarbeiten. Es ergeben sich jedoch eine Vielzahl an zu untersuchenden Effekten und als Folge eine Unzahl an Kombinationsmöglichkeiten, deren vollständige Diskussion im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgestellt werden kann. Daher wird eine Auswahl von Beispielen getroffen, durch die die wichtigsten Effekte erfasst werden. Dazu werden folgende Zielvorgaben definiert, die durch die numerischen Berechnungen abgedeckt werden:

- Untersuchung sowohl des inversen als auch des direkten piezoelektrischen Effekts. Dazu werden die piezoelektrischen Schichten im aktorischen bzw. sensorischen Betrieb eingesetzt.
- Betrachtung von statischen und dynamischen Problemen.
- Möglichkeiten der aktiven Formkontrolle bei statischer mechanischer Belastung durch gleichzeitiges Entgegensteuern mithilfe von Aktoren.
- Stabilität der Formulierungen bei verzerrten Elementgeometrien und verschiedenen Lagerungsbedingungen.
- Einfluss der quadratischen Approximation des elektrischen Potenzials in Dickenrichtung auf die Systemsteifigkeit im Vergleich zum linearen Ansatz für  $\Phi$ .
- Auswirkungen der Dreifeldvariationsformulierung auf die Berechnungsergebnisse.
- Einfluss der physikalischen Nichtlinearität im Kleinsignalbereich auf das Strukturverhalten.

Zur besseren Übersicht fasst Tabelle 6.1 die wichtigsten Effekte zusammen und gibt an, welche Untersuchungen mit den einzelnen Elementen durchgeführt werden.

Betrieb \ Formulierung		SM2F $\Phi$ 1	SM2F $\Phi$ 1k	SM2F $\Phi$ 2	SM3F $\Phi$ 1	SM2F $\Phi$ 1n
aktorisch	statisch	6.2.1, 6.3, 6.4, 6.7.3	6.2.1, 6.3	6.2.1	6.2.1, 6.4.2	6.7.1, 6.7.3
	dynamisch	6.7.2				6.7.2
sensorisch	statisch	6.2.2, 6.6	6.2.2	6.2.2, 6.6	6.2.2, 6.6	
	dynamisch	6.5	6.5	6.5		

Tabelle 6.1: Übersicht über die durchgeführten Untersuchungen für die jeweiligen Elemente durch Angabe der Kapitelnummer

Die Beispiele diskutieren zunächst die zu untersuchenden linearen Effekte der gekoppelten elektromechanischen Formulierungen, um in einem weiteren Schritt auf die Auswirkungen des physikalisch nichtlinearen Materialverhaltens einzugehen.

## 6.2 Aktorischer und sensorischer Betrieb eines geschichteten Kragträgers

Anhand eines entgegengesetzt polarisierten geschichteten Kragbalkens, vorgestellt von SZE UND PAN [106] und TZOU [112], soll für ein statisches Problem sowohl der aktorische als auch der sensorische Betrieb für alle linearen ANS-basierten Elemente untersucht werden. Der Einfluss von Netzverzerrungen wird ebenfalls diskutiert werden.

Der Balken besteht aus zwei identischen PVDF Schichten, vgl. Bild 6.1, deren entgegengesetzte Polarisierung den Effekt hat, dass beim Aufbringen eines unidirektionalen elektrischen Feldes, sich die eine piezoelektrische Schicht ausdehnt während die andere kontrahiert. Damit wird eine Biegung des Balkens erzeugt. Es existieren auch vereinfachte Modelle, die die Wirkung der piezoelektrischen Aktoren durch äquivalente Kräfte und Momente ersetzen und die elektromechanische Kopplung im Stoffgesetz vernachlässigen,

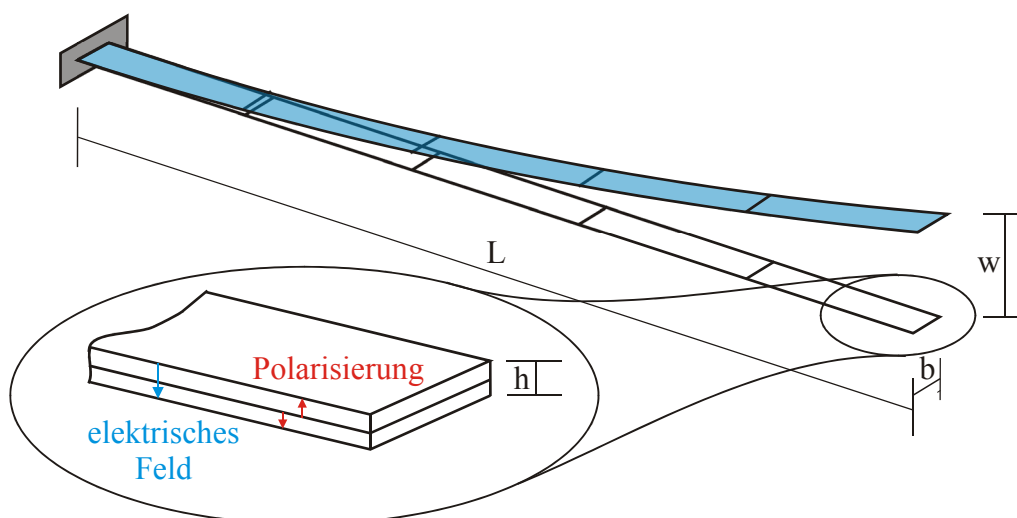


Bild 6.1: Geschichteter Kragträger mit entgegengesetzter Polarisierung

Geometriedaten	Materialdaten
$L = 100 \text{ mm}$	$E = 2.0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$
$h = 2 \times 0.5 \text{ mm}$	$\nu = 0.29$
$b = 5.0 \text{ mm}$	$e_{311} = 0.046 \text{ Cm}^{-2}$
	$\varepsilon_{33} = 0.01062 \text{ Fm}^{-1}$

Tabelle 6.2: Geometrie- und Materialdaten für den geschichteten Kragträger  
vgl. u.a. PREUMONT [90] und WIESEMANN [122].

Die für dieses Beispiel verwendeten Abmessungen und Materialparameter sind in Tabelle 6.2 angegeben.

### 6.2.1 Aktorischer Betrieb

Zunächst wird der aktorische Betrieb bei Belastung der beiden Schichten mit einem elektrischen Feld von  $1.0 \text{ Vm}^{-1}$  betrachtet. Die zugehörige Biegelinie wird mit einem Netz bestehend aus fünf finiten Elementen berechnet und ist in Bild 6.2 dargestellt. Eine analytische Referenzlösung für einen Bernoulli-Balken ergibt eine Durchbiegung an der Kragarmspitze von  $w = 3.45 \mu\text{m}$ . Es zeigt sich sowohl mit der analytischen Lösung als auch mit den Literaturwerten eine sehr gute Übereinstimmung für alle betrachteten linearen Elemente. Aufgrund des hohen Schlankheitsgrades von  $L/h = 100$  und der recht geringen elektromechanischen Kopplung des verwendeten PVDF-Materials, verschwinden die

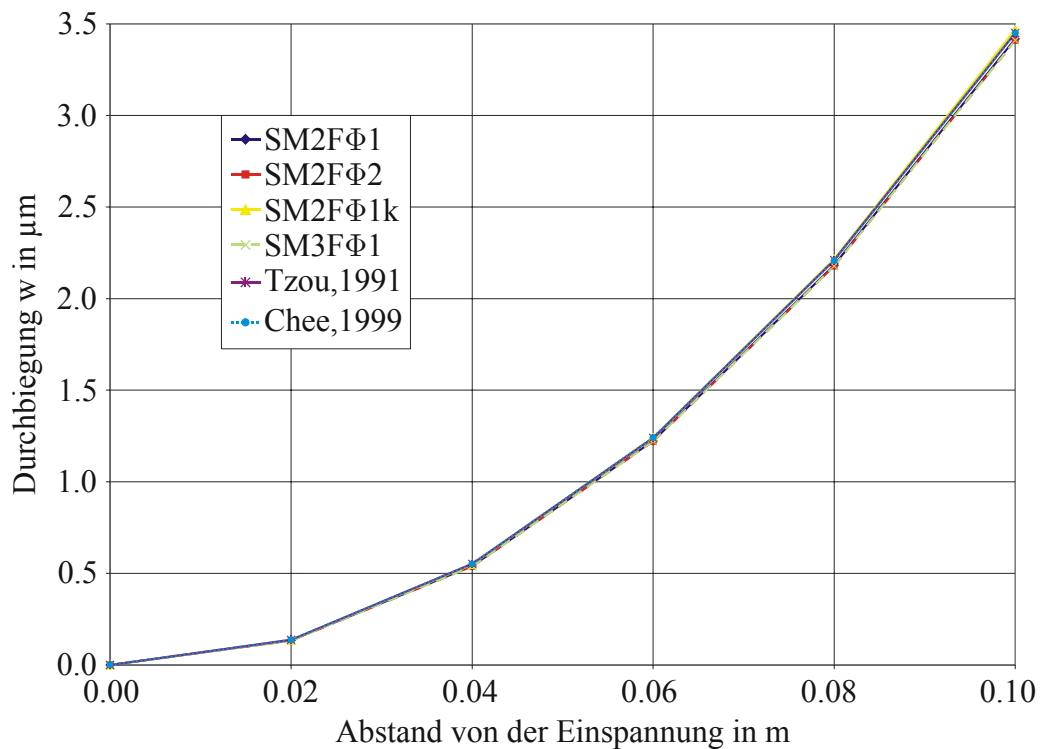


Bild 6.2: Biegelinie des Kragträgers

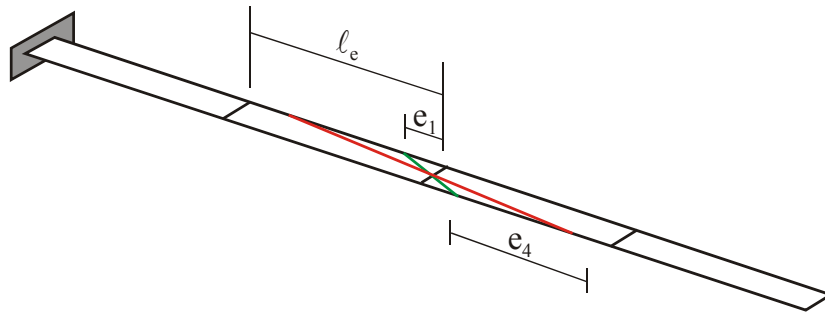


Bild 6.3: Finite-Elemente-Netz für verschieden starke Verzerrungen  $e$  der Elemente

Unterschiede zwischen den einzelnen Elementen. Der Einfluss der Berücksichtigung aller Energieanteile durch die Verwendung der quadratischen Approximation des elektrischen Potentials im Element SM2F $\Phi$ 2 gegenüber dem linearen Ansatz im Element SM2F $\Phi$ 1 wirkt sich erst bei größeren Schichtdicken aus. Untersuchungen, die die Auswirkungen der unterschiedlichen Approximation des elektrischen Potentials auf das Systemverhalten in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad der Struktur betrachten, werden in Kapitel 6.6 vorgestellt.

Werden nun die Elemente verzerrt, wie in Bild 6.3 für ein Element schematisch gezeigt, so wird damit der Einfluss der Elementgeometrie der hier verwendeten vier Elemente auf die Lösung untersucht. Beispielhaft sind die Verzerrungen  $e_1$  und  $e_4$  dargestellt. Die Belastung der beiden Schichten beträgt hier ebenfalls  $1.0 \text{ Vm}^{-1}$ . Die Durchbiegung am Balkenende wird in Bild 6.4 auf die analytische Referenzlösung  $w_0$  bezogen und über der Verzerrung  $e$ , vgl. Bild 6.3, der Elemente aufgetragen. Sämtliche hier dargestellten Schalenelemente zeigen ein sehr gutes Approximationsverhalten auch bei stärker verzerrten Elementen gegenüber der analytischen Lösung. Es ist keine weitere Netzverfeinerung notwendig, da auch für das grobe Netz mit nur vier Elementen kaum Abweichungen gegenüber der Berechnung mit unverzerrten Elementen auftreten.

Insbesondere beim Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur zeigt sich die größere Robustheit der ANS-basierten piezoelektrischen Elemente gegenüber gemischten Hexaederelementen von SZE UND PAN [106]. Das schlechteste Ergebnis wird für das Element H8D von SZE UND PAN [106] erzielt. Hier wurde als zusätzliche unabhängige Variable die dielektrische Verschiebung in die Elementformulierung integriert. Wird zusätzlich auch noch die Spannung  $\sigma$  als unabhängige Variablen eingeführt, so ergibt sich trotzdem für das Element H8DS kaum eine Verbesserung. Erst wenn eine von SZE UND GHALLI [103] entwickelte selektive Skalierungstechnik die Schubversteifungseffekte vermindert, sind brauchbare Ergebnisse für das Element H8DS\* zu erzielen. Dies zeigt, dass auch bei gemischten Elementen zusätzliche Methoden zur Vermeidung von Lockingeffekten eingesetzt werden sollten, um eine robustere Formulierung auch für verzerrte Netzgeometrien zu erzielen.

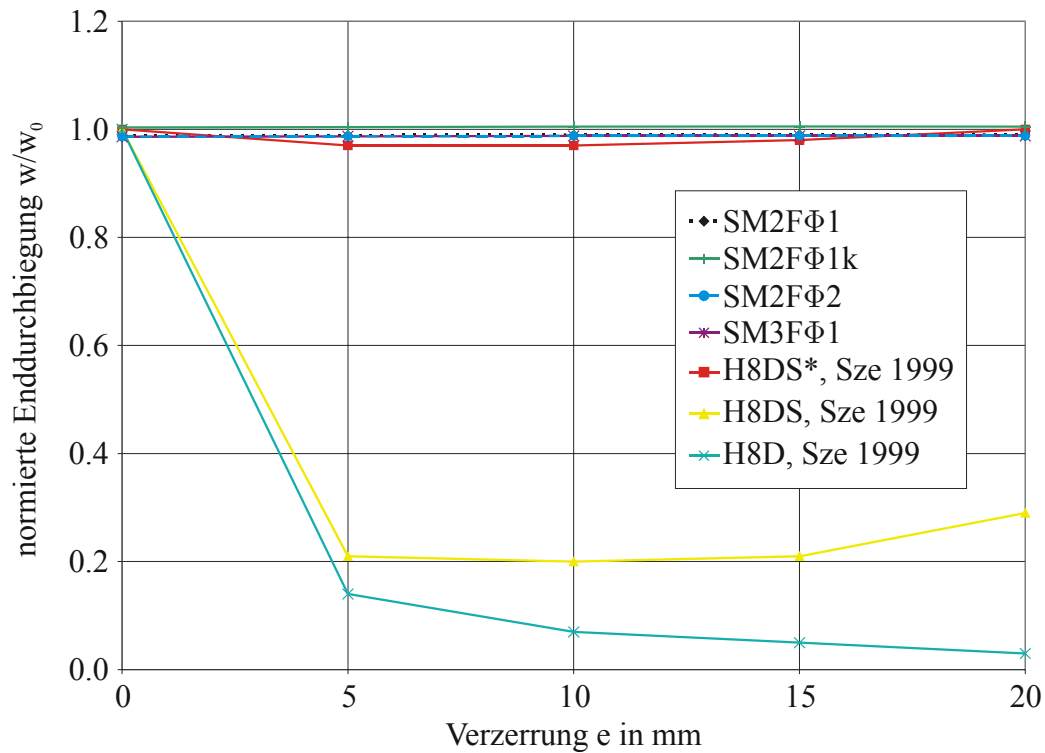


Bild 6.4: Maximale Durchbiegung in Abhängigkeit von den Verzerrungen  $e$  der Elemente

### 6.2.2 Sensorischer Betrieb

Eine weitere Untersuchung gilt dem Verhalten bei sensorischem Betrieb. Dazu wird das Balkenende um 1 cm ausgelenkt und der Verlauf des elektrischen Potentials in Balken-

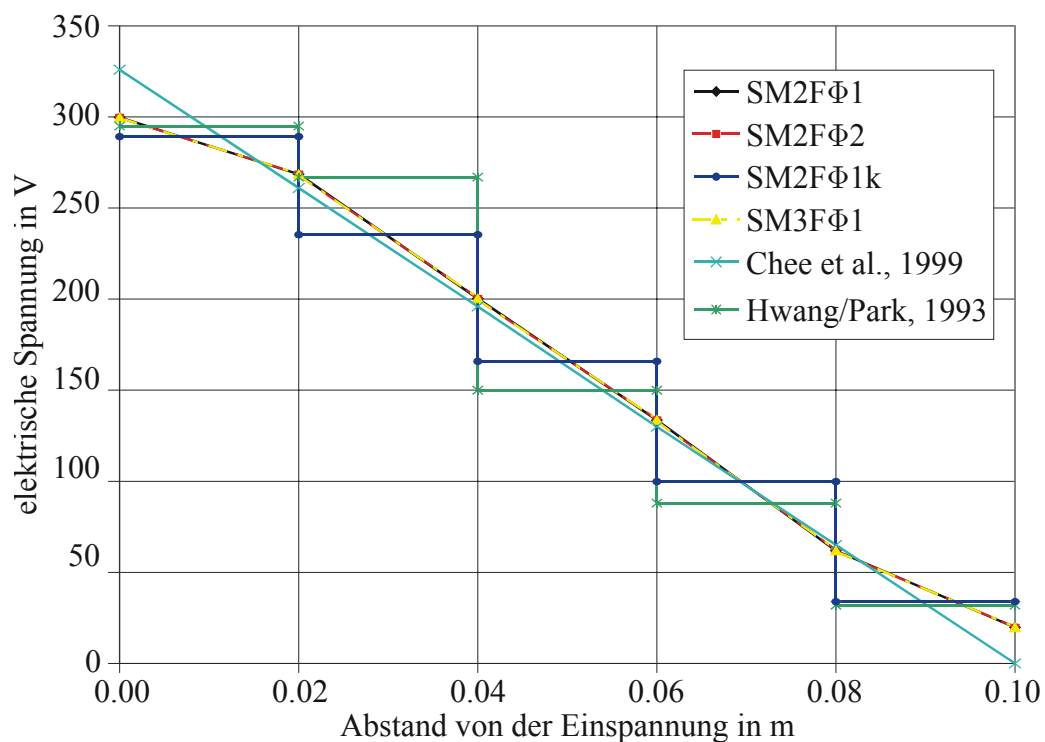


Bild 6.5: Elektrisches Potenzial entlang der Balkenachse

längsrichtung aufgetragen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Bild 6.5 grafisch dargestellt. Bis auf den treppenförmigen Verlauf des elektrischen Potentials des Schalenelements SM2F $\Phi$ 1k liegen die Ergebnisse sehr gut zusammen. Es zeigen sich leichte Abweichungen vom linearen Verlauf im Bereich der Einspannung und am Balkenende. Diese Abweichungen sind bei CHEE ET AL. [29] nicht zu verzeichnen, finden sich jedoch auch in der Literatur, z.B. bei CHEN ET AL. [30], DETWILER ET AL. [34], HWANG UND PARK [111] und SULEMAN UND VENKAYYA [101].

Interessant sind die Ergebnisse des Elements SM2F $\Phi$ 1k mit konstantem elektrischem Potenzial in der Schalenebene. Hier ist eine starke Verbesserung der diskreten Sensorwerte gegenüber der Formulierung von HWANG UND PARK [52] zu verzeichnen. Die Abstufung zwischen den einzelnen diskreten Werten im Element ist für das Element SM2F $\Phi$ 1k sehr viel gleichmäßiger als bei HWANG UND PARK [52], wie es bei linearem Verlauf des Biegemoments zu erwarten ist.

### 6.3 Eingespannte Platte bei aktorischem Betrieb

Inwieweit Übereinstimmungen von Berechnungsergebnissen der Elemente SM2F $\Phi$ 1 und SM2F $\Phi$ 1k mit experimentellen Daten erzielt werden können, soll im folgenden Beispiel betrachtet werden, das von KÖPPE ET AL. [68] und GABBERT ET AL. [39] untersucht wurde. Auf einer eingespannten Stahlplatte sind jeweils vier piezoelektrische Keramiken mit entgegengesetzter Polarisierung auf Ober- und Unterseite appliziert. Die geometrischen Abmessungen des Systems können Bild 6.6 entnommen werden. Die Parameter der verwendeten Materialien sind in der Tabelle 6.3 zusammenfassend angegeben.

Zunächst wird das System einer Eigenwertanalyse unterzogen, wobei zu Vergleichszwecken nur die erste Eigenfrequenz der numerischen Berechnung dem experimentellen

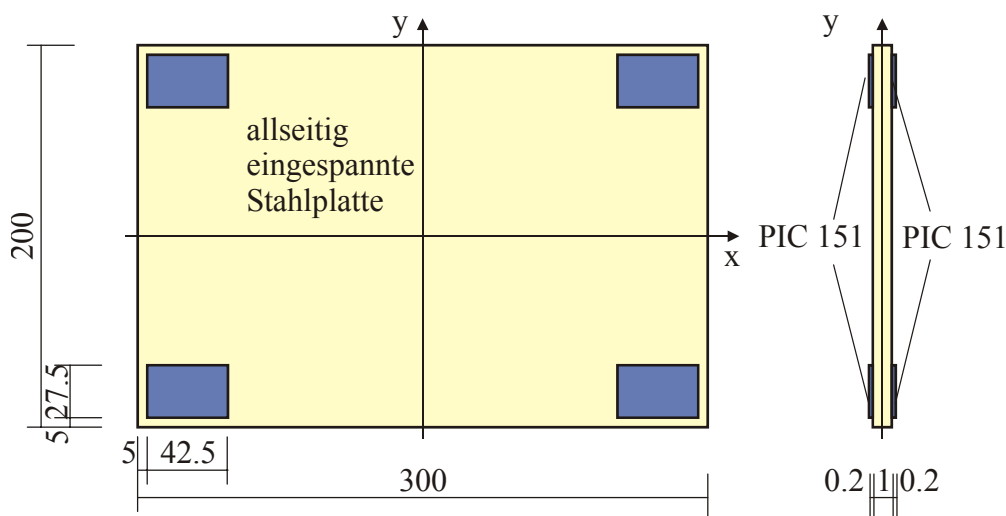


Bild 6.6: Allseitig eingespannte Stahlplatte mit applizierten piezoelektrischen Aktoren

Stahlplatte	PIC 151
$E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$E = 6.67 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$\nu = 0.28$	$\nu = 0.0$
$\rho = 7850 \text{ kgm}^{-3}$	$e_{311} = -14.0 \text{ Cm}^{-2}$
	$e_{322} = -14.0 \text{ Cm}^{-2}$
	$e_{333} = 30.0 \text{ Cm}^{-2}$
	$\varepsilon_{33} = 1.86 \cdot 10^{-8} \text{ Fm}^{-1}$
	$\rho = 7800 \text{ kgm}^{-3}$

Tabelle 6.3: Materialdaten für Stahlplatte und piezoelektrische Keramiken

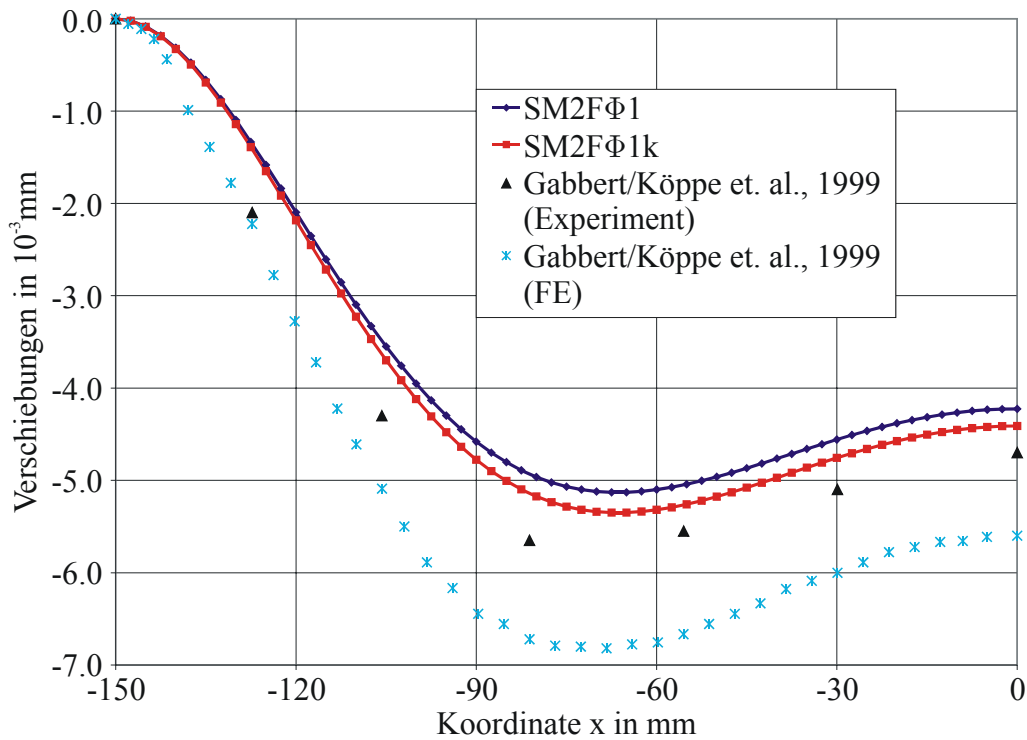
Ergebnis gegenübergestellt wird. Aufgrund der doppelten Symmetrie des Systems ist die hierzu zugehörige Eigenform ebenfalls doppelt symmetrisch, so dass es ausreichend ist, für die Untersuchungen nur ein Viertel der Struktur zu verwenden.

Die numerischen Berechnungen werden mit einem gleichmäßigen Netz bestehend aus  $60 \times 40$  Elementen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung durchgeführt. Ein Vergleich der ersten Eigenfrequenz von  $f = 166.2 \text{ s}^{-1}$  zeigt eine gute Übereinstimmung mit der im Experiment ermittelten von  $f = 163.5 \text{ s}^{-1}$ , was eine Abweichung von nur ca. 1.6% darstellt. Damit kann durch das hier verwendete numerische Modell die Struktur gut abgebildet werden. Im Folgenden wird nun für den aktorischen Betrieb das Verformungsverhalten bei statischer Belastung untersucht.

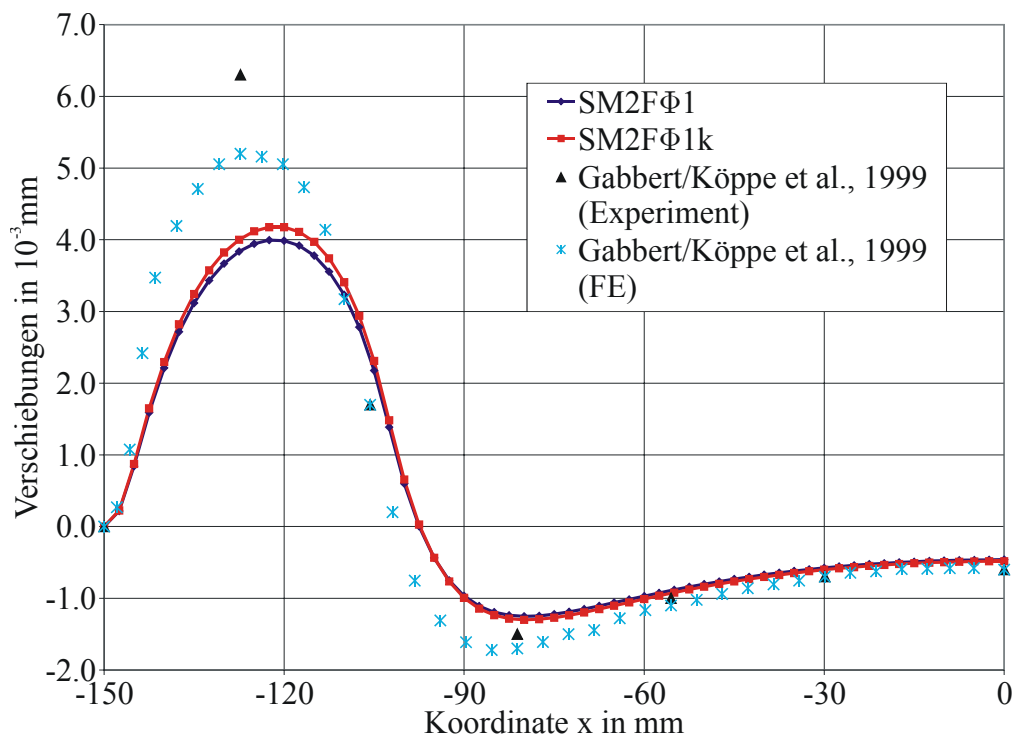
Für die numerische Berechnung wird eine elektrische Spannung von  $\Phi = 100 \text{ V}$  gleichmäßig auf die Aktoren aufgebracht. Durch die entgegengesetzte Polarisation der oberen und der unteren Keramik wird eine Durchbiegung des Systems erzeugt. Die Verschiebungen entlang eines Schnittes  $y = 0.0 \text{ mm}$  sind in Bild 6.7 dargestellt und werden mit den experimentellen Daten und numerischen Berechnungen von KÖPPE ET AL. [68] und GABBERT ET AL. [39] verglichen. Es zeigt sich eine gute Näherung an die Messergebnisse. Durch die starre Einspannung wird die Struktur bei der numerischen Berechnung etwas steifer modelliert, weshalb die FE-Ergebnisse etwas oberhalb der experimentellen Daten liegen. Im Vergleich zum Element SM2F $\Phi$ 1 ergeben sich für das Element SM2F $\Phi$ 1k jedoch etwas größere Verschiebungen. Die konstante Approximation des elektrischen Potentials in der Schalenebene weist hier eine stärkere elektromechanische Kopplung auf, da die aufgebrachte Last als eine innere Belastung behandelt wird.

Für die numerische Berechnung bei KÖPPE ET AL. [68] und GABBERT ET AL. [39] werden sowohl bei der Modellierung der elastischen Einspannung als auch für die Plattenstruktur Volumenelemente zur Netzgenerierung verwendet. Durch die Berücksichtigung der Elastizität der Einspannung ergeben sich im Vergleich zu den Messergebnissen etwas größere Verformungen.

Im Bild 6.8 sind nun die Ergebnisse in der Nähe der Einspannung für einen Schnitt entlang der Linie  $y = 81.2 \text{ mm}$  dargestellt. Hier zeigt sich für die numerische Berechnung der Einfluss der bei den Elementen SM2F $\Phi$ 1 und SM2F $\Phi$ 1k verwendeten starren Einspannung. Insbesondere in der Nähe der eingespannten Ecke ergeben sich deutliche

Bild 6.7: Verschiebungen entlang der Linie  $y = 0.0$  mm

Abweichungen der numerischen Berechnungen von den Messergebnissen. Die Abweichungen nehmen jedoch mit dem Abstand von der Ecke ab und sind in der Nähe der Symme-

Bild 6.8: Verschiebungen entlang der Linie  $y = 81.2$  mm

trieachse fast vollständig verschwunden. Eine Verbesserung der numerischen Ergebnisse ist durch eine genauere Modellierung der Lagerungsbedingungen zu erzielen. Dies ist bei den Berechnungen von KÖPPE ET AL. [68] und GABBERT ET AL. [39] zu erkennen, deren Approximation der Verschiebungen durch Berücksichtigung der elastischen Einspannung insbesondere im Eckbereich bessere Ergebnisse liefert. Jedoch sind trotzdem noch Abweichungen im Bereich des Aktors zu erkennen. Vermutlich wird erst die Berücksichtigung von nichtlinearen Effekten beim piezoelektrischen Materialverhalten zu einer genaueren Anpassung führen. Darauf weisen die Beispiele zum nichtlinearen Verhalten von piezoelektrischen Strukturen für den Kleinsignalbereich im Kapitel 6.7 hin. Für weite Bereiche der Platte ergeben sich jedoch für die starre Einspannung auch jetzt schon ausreichend genaue Ergebnisse.

Die Anpassung an reale Systeme wird jedoch dadurch erschwert, dass im Allgemeinen die tatsächlichen Materialkennwerte im Experiment nicht den Herstellerangaben genau entsprechen und daher eine vollständige Übereinstimmung zwischen numerischen Berechnungen und experimentellen Daten nur mit hohem Aufwand zu erreichen ist.

## 6.4 Formadaption einer quadratischen Platte bei mechanischer Belastung

Dieses Beispiel soll die Möglichkeiten der aktiven Formgewährleistung von Strukturen unter mechanischer Belastung aufzeigen. Ziel dieser Untersuchungen ist es des Weiteren, die Zuverlässigkeit auch bei verzerrten FE-Netzen und die erweiterten Anwendungsmöglichkeiten der ANS-basierten piezoelektrischen Elemente gegenüber Elementen mit selektiv reduzierter Integration herauszuarbeiten, vgl. LAMMERING [71] und LAMMERING UND MESECKE-RISCHMANN [72]. Aus diesem Grund werden Simulationen zur Formgewährleistung einer Platte für zwei verschiedene Lagerungsbedingungen und Belastungen durchgeführt und die Ergebnisse diskutiert.

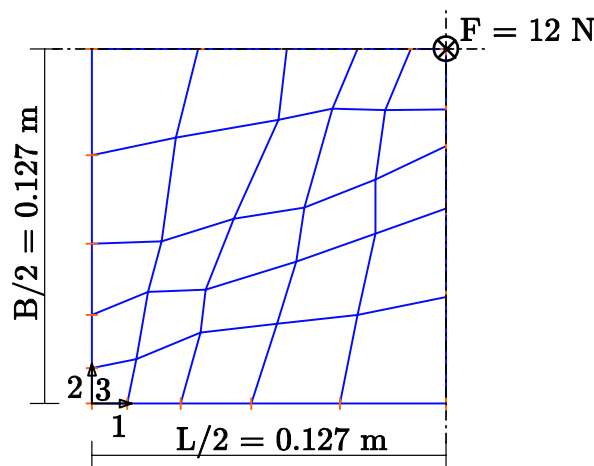
Die untersuchten Platten bestehen aus einer passiven Tragschicht aus Aluminium und sind jeweils auf Ober- und Unterseite vollständig mit einer piezoelektrischen Schicht aus PZT G1195 beklebt, wobei die beiden Schichten in entgegengesetzter Richtung polariert sind. Für beide Beispiele werden die gleichen Abmessungen und Materialparameter verwendet, die in Tabelle 6.4 angegeben sind.

### 6.4.1 Formkontrolle einer gelenkig gelagerten Platte

Das folgende Beispiel untersucht den Einfluss der Netzverzerrung auf die Berechnungsergebnisse. Die betrachtete quadratische Platte wird gelenkig gelagert und mit einer vertikalen Einzellast von  $F = 12$  N in der Plattenmitte belastet.

Geometriedaten in m	Materialdaten
$L = 0.254$	$E_{\text{alu}} = 7.1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$B = 0.254$	$\nu_{\text{alu}} = 0.3$
$t_{\text{alu}} = 8.28 \times 10^{-4}$	$E_{\text{piezo}} = 6.3 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$t_{\text{piezo}} = 2.54 \times 10^{-4}$	$\nu_{\text{piezo}} = 0.3$
	$e_{311} = e_{322} = 30.77 \text{ Cm}^{-2}$
	$e_{333} = 18.46 \text{ Cm}^{-2}$
	$\varepsilon_{33} = 1.53 \times 10^{-8} \text{ Fm}^{-1}$

Tabelle 6.4: Geometrie- und Materialdaten für die quadratische Platte

Bild 6.9: Verzerktes Netz mit  $5 \times 5$  Elementen für ein Viertel des Systems

Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel des Systems betrachtet und mit einem FE-Netz aus  $5 \times 5$  Elementen diskretisiert. Das verzerkte Netz ist in Bild 6.9 dargestellt. Bei der numerischen Berechnung wird nun gleichzeitig zur mechanischen Last auf alle Knotenwerte ein konstantes elektrisches Potenzial aufgebracht, um die Verschiebungen aktiv zu beeinflussen. Der Startwert für das elektrische Potenzial wird im ersten Schritt zu 0 V gewählt und solange erhöht, bis im Mittel die unverformte horizontale Ausgangskonfiguration erreicht wird. Idealerweise entsteht eine Platte mit "unendlicher Steifigkeit", was bedeutet, dass für eine beliebige mechanische Belastung der unverformte Ausgangszustand wieder hergestellt werden kann.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Bild 6.10 für die Symmetrieachse dargestellt. Aufgrund der doppelten Symmetrie stimmen die Durchbiegungen für beide Symmetrieachsen überein und können daher symmetrisch ergänzt werden.

Es zeigt sich, dass für das betrachtete Element SM2F $\Phi$ 1 dieselbe elektrische Spannung bei verzerrem und unverzerrem FE-Netz gebraucht wird, um im Mittel die Ausgangslage der Platte wiederherzustellen. Die maximale Durchbiegung in der Plattenmitte ist unabhängig vom gewählten FE-Netz nahezu identisch. Ein Vergleich mit Berechnungen für das Element SM2F $\Phi$ 1red mit reduzierter Integration der Schubterme, vgl. LAMMERING [71], liefert ebenfalls übereinstimmende Ergebnisse für das unverzerrete Netz, die aus

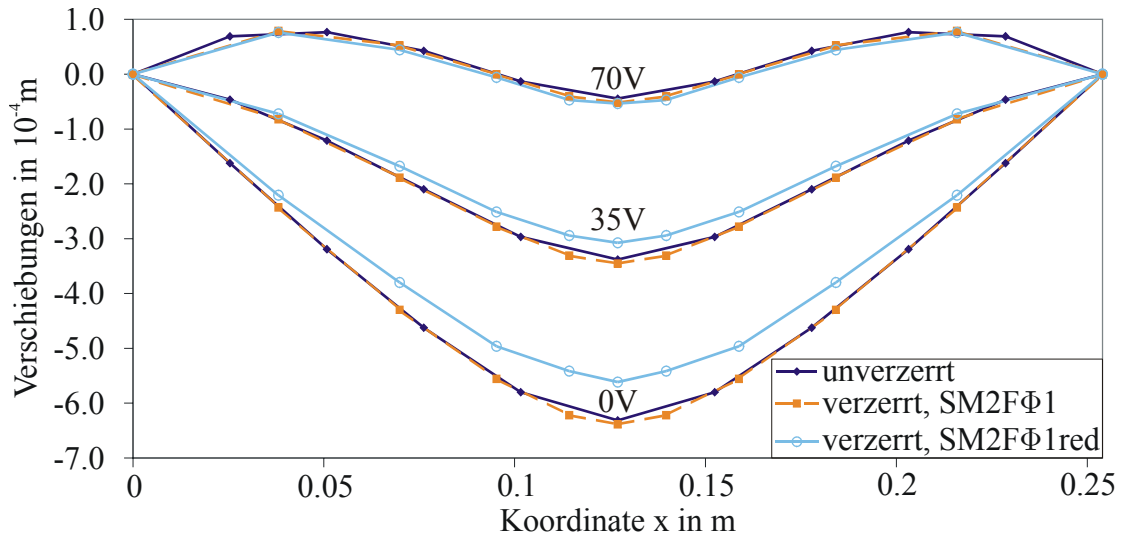


Bild 6.10: Vergleich verschiedener Stadien der aktiven Formkontrolle für die Elemente SM2FΦ1 und SM2FΦ1red, dargestellt entlang der Symmetrieachse für ein unverzerrtes und ein verzerrtes FE-Netz

diesem Grund nicht dargestellt sind. Für das verzerrte Netz jedoch ergeben sich geringere Verschiebungswerte. Damit liefert das ANS-basierte Element SM2FΦ1 zuverlässigere Ergebnisse bei verzerrten Elementgeometrien.

Für die in Bild 6.10 untersuchten Stadien bei der Formkontrolle sind in Bild 6.11 die verschiedenen Verformungszustände des Elements SM2FΦ1 für die gesamte Platte dargestellt. Hier wird deutlich, dass mithilfe einer elektrischen Belastung die unbelastete Ausgangslage auch aktiv nicht vollständig wiederhergestellt werden kann. Dies ist nur über die Platte gemittelt zu erreichen, nicht jedoch für jeden Punkt. Um eine optimale Formkontrolle zu gewährleisten, ist der Einsatz von Optimierungstechniken zur Berech-

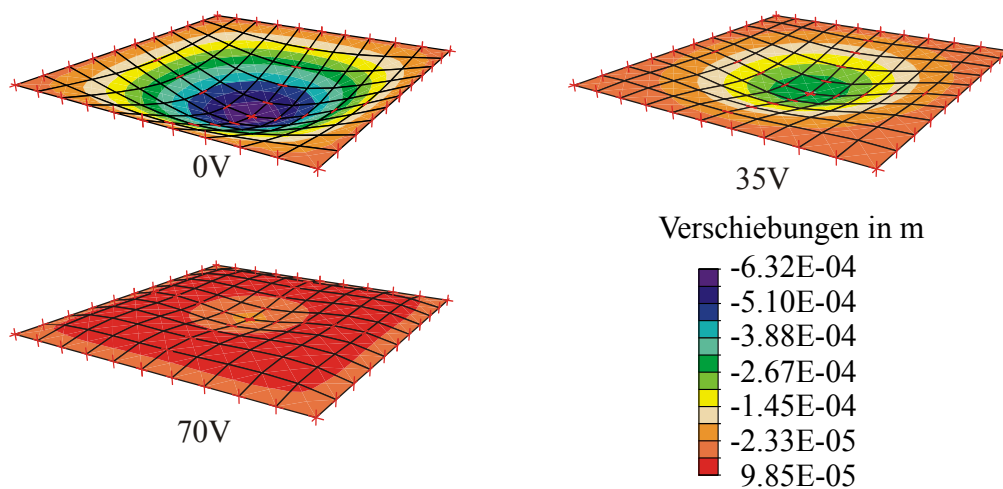


Bild 6.11: Verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle einer gelenkig gelagerten Platte unter mittig angreifender Einzellast

nung der optimalen Aktorform notwendig. Ein Überblick über den Stand der Optimierungsmethoden für piezoelektrische Strukturen wird u.a. bei FRECKER [38] und SEEGER [95] gegeben.

### 6.4.2 Formkontrolle einer punktgelagerten Platte

In diesem Beispiel wird die quadratische Platte nur an den Eckpunkten punktförmig gelagert und mit einer konstanten Flächenlast von  $200 \text{ Nm}^{-2}$  belastet. Auch hier wird gleichzeitig zu der mechanischen Belastung ein elektrisches Potenzial zur Kontrolle der Plattenverformungen aufgebracht. Die numerische Berechnungen werden mit den Elementen SM2F $\Phi$ 1, SM2F $\Phi$ 1red und SM3F $\Phi$ 1 durchgeführt und die Ergebnisse sind in Bild 6.12 für die Symmetrieachse dargestellt. Ausgehend von 0 V ist eine Erhöhung des elektrischen Potenzials bis auf 75 V notwendig, um auch hier die undeformierte Ausgangslage im Mittel zu erreichen. Beide ANS-basierten Elemente stimmen aufgrund des hohen Schlankheitsgrades von  $L/(t_{\text{alu}} + t_{\text{piezo}}) = 234.7$  sehr gut überein. Das Element SM2F $\Phi$ 1red mit selektiv reduzierter Integration der Schubterme leidet jedoch unter Nullenergiemoden, die durch die gewählten Randbedingungen nicht zu unterdrücken sind. Daher zeigt dieses Beispiel zweifellos die große Überlegenheit von ANS-basierten piezoelektrischen Schalenelementen gegenüber solchen mit selektiv reduzierter Integration.

Die verschiedenen Stadien, die für die Ermittlung des notwendigen elektrischen Potenzials berechnet wurden, sind in Bild 6.13 beispielhaft dargestellt. Auch bei diesem System

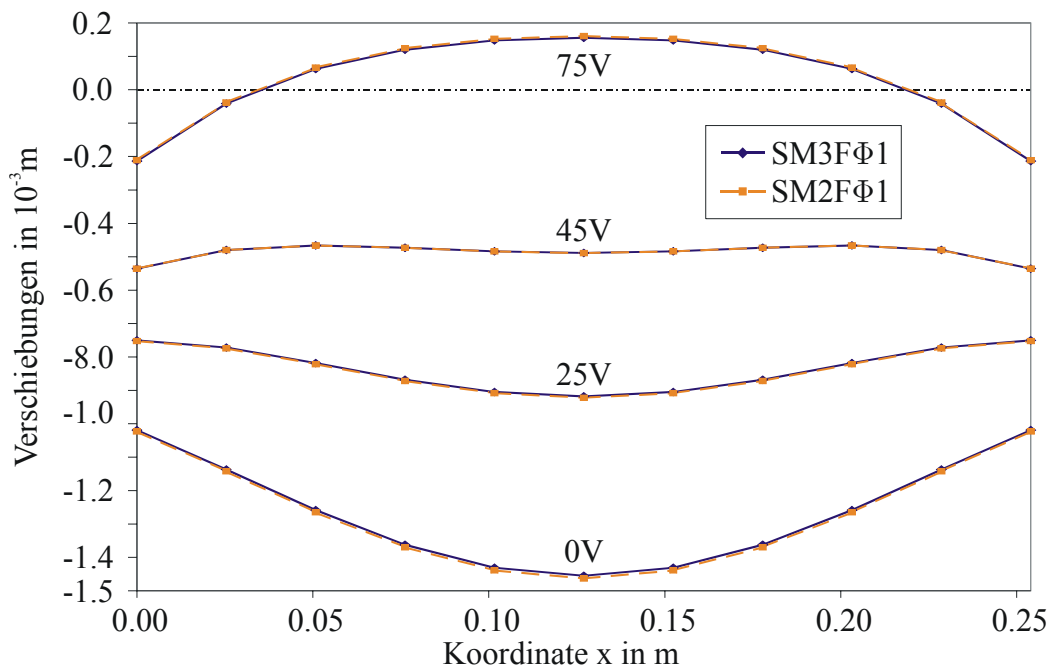


Bild 6.12: Vergleich der Elemente SM2F $\Phi$ 1 und SM3F $\Phi$ 1 für verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle entlang der Symmetrieachse einer punktgelagerten Platte bei gleichmäßiger Flächenlast

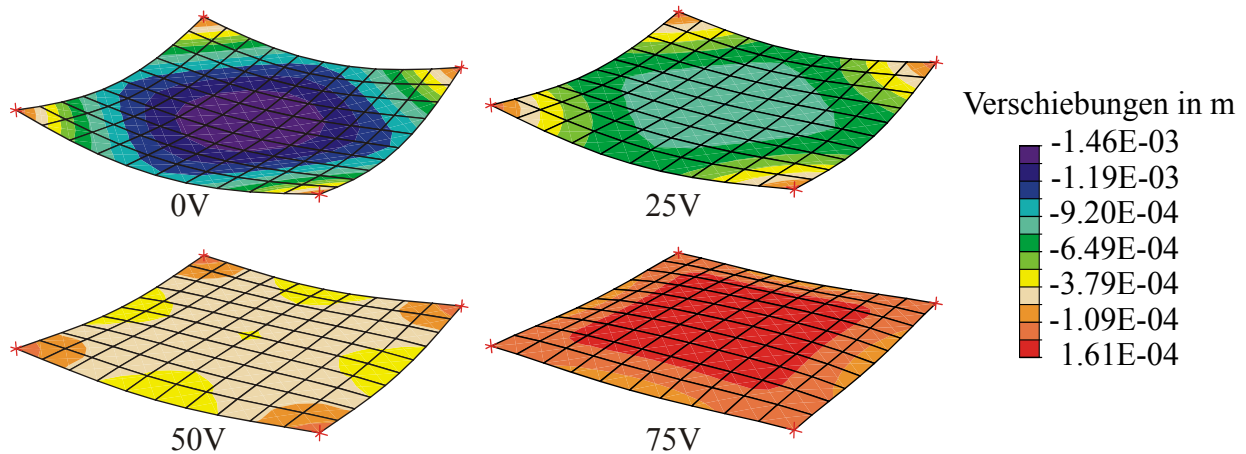


Bild 6.13: Verschiedene Stadien der aktiven Formkontrolle einer punktgelagerten Platte unter gleichmäßiger Flächenlast

ist eine vollständige Kontrolle der Verschiebungen für jeden Punkt der Platte nicht möglich, sondern wird nur im Mittel erfüllt. Mit der Anwendung von Optimierungstechniken würde auch hier eine Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden.

## 6.5 Schwingungsanalyse einer Rechteckplatte mithilfe von Sensoren

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist, durch applizierte Sensoren das Schwingungsverhalten der Struktur zu erfassen und wiederzugeben. Hierzu wird der sensorische Betrieb für eine dynamische Belastung anhand einer gelenkig gelagerten Rechteckplatte mit zwei sehr kleinen piezoelektrischen Sensoren auf Ober- und Unterseite, vgl. Bild 6.14, für die Elemente SM2F $\Phi$ 1, SM2F $\Phi$ 1k und SM2F $\Phi$ 2 untersucht. Alle für die Berechnung notwendigen geometrischen Abmessungen und Materialdaten sind in der Tabelle 6.5 angegeben.

Die Lasteinleitung der vertikalen Erregerkraft von  $F = 1.0$  N befindet sich im Punkt  $L_{x,f} = 0.625$  m und  $B_{y,f} = 0.4$  m. Für die numerische Berechnung wird ein regelmäßiges FE-Netz mit  $36 \times 24$  Elementen in der  $x$ -Richtung bzw. in der  $y$ -Richtung verwendet.

Geometriedaten in m		Materialdaten	
Platte	Sensoren	Platte	Sensoren
$L_x = 0.90$	$L_2 = 0.025$	$E = 0.71 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$E_s = 6.3 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$B_y = 0.60$	$B_2 = 0.025$	$\nu = 0.3$	$\nu_s = 0.35$
$h = 0.004$	$h_s = 0.0002$	$\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$	$\rho_s = 0 \text{ kgm}^{-3}$
$L_1 = 0.20$		$\eta = 0.01$	$e_{311} = e_{322} = -17.325 \text{ Cm}^{-2}$
$B_1 = 0.40$			$\epsilon_{33} = 1.6 \cdot 10^{-6} \text{ Fm}^{-1}$

Tabelle 6.5: Geometrie- und Materialdaten für Rechteckplatte

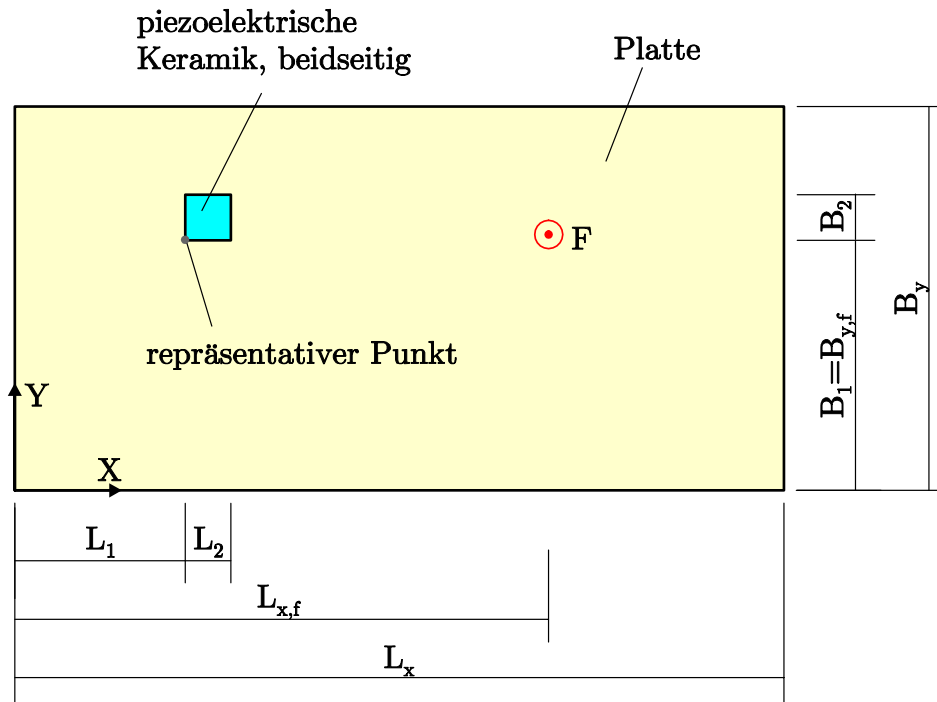


Bild 6.14: Geometrie der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte mit beidseitig applizierten piezoelektrischen Sensoren

Der Zeitschritt wird mit  $\Delta t = 1.59 \cdot 10^{-5}$  s relativ klein gewählt, um möglichst viele Eigenfrequenzen bei der Schwingungsanalyse zu berücksichtigen. Die Belastung wird dabei in Form eines kurzen Rechteckimpulses für die Dauer von 20 Zeitschritten auf das System aufgebracht, um möglichst viele Eigenfrequenzen gleichzeitig anzuregen. Bei der numerischen Berechnung wird das Newmark-Verfahren für die Zeitintegration verwendet und das System mit einer geringen Rayleighschen Dämpfung versehen, bei der ein modaler Verlustfaktor  $\eta$  eingesetzt wird. Während des darauf folgenden Ausschwingvorgangs des Systems werden die Verschiebungen eines Eckknotens des Sensors mit den Koordinaten  $x_p = 0.2$  m und  $y_p = 0.4$  m beobachtet. Um eine Vergleichbarkeit der verschiedenen Elemente auch mit SM2F $\Phi$ 1k zu wahren, wird jedoch das elektrische Potenzial für den Mittelpunkt des Sensors ausgewertet.

Die Ergebnisse der Vertikalverschiebungen für den Eckknoten werden mithilfe einer Fouriertransformation in den Frequenzraum überführt und können danach mit der analytischen Näherungslösung von VOGL ET AL. [116] verglichen werden. Die Transformation wird dabei mit dem Programm Matlab durchgeführt. Das Vorgehen von VOGL ET AL. [116] bei der Ermittlung einer analytischen Näherungslösung mithilfe von Fourierreihen wird sowohl für die Rezeptanz als auch die Fouriertransformierte des elektrischen Potenzials anhand dieses Beispiels im Anhang C kurz vorgestellt.

In Bild 6.15 ist die Rezeptanz für den Referenzpunkt dargestellt und zeigt für alle betrachteten Elemente eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung und auch im Vergleich untereinander. Dies ist vor allem vor dem Hintergrund zu sehen, dass die

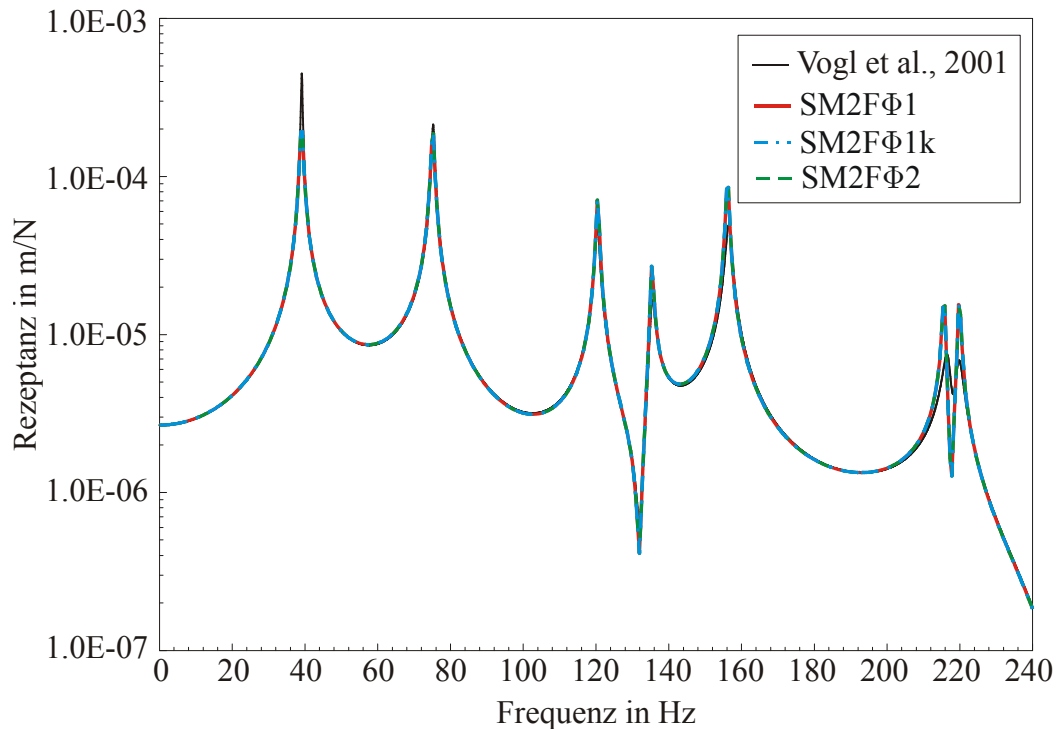


Bild 6.15: Rezeptanz für den Referenzpunkt des Sensors

Rayleighsche Dämpfung nur für die erste Eigenfrequenz bei  $f = 39.2$  Hz angepasst wurde. Damit werden die höheren Eigenfrequenzen zu schwach gedämpft, was die Abweichungen bei den höheren Frequenzen zwischen der numerischen Berechnung und der Referenzlösung erklärt.

Die Fouriertransformierte des elektrischen Potentials bezogen auf die Anregung ist in Bild 6.16 für die Mitte des piezoelektrischen Sensors dargestellt. Eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung wird auch hier für alle betrachteten Elemente erzielt. Der Einfluss der quadratischen Approximation des elektrischen Potentials beim Element SM2FΦ2 auf das Schwingungsverhalten der Struktur ist gering gegenüber einem linearen Ansatz und liefert daher übereinstimmende Ergebnisse. Aufgrund der verringerten Anzahl an Freiheitsgraden ist daher bei diesem Beispiel das Element SM2FΦ1k zu bevorzugen.

Die Ergebnisse der Bilder 6.15 und 6.16 zeigen außerdem für den Bereich niedriger Frequenzen einen gleichartigen Kurvenverlauf zwischen der Rezeptanz und der Fouriertransformierten des elektrischen Potentials. Dies zeigt, dass durch die Sensorsignale bei dieser numerischen Untersuchung das Strukturverhalten richtig approximiert wird.

Die Untersuchungen von VOGL ET AL. [116] zeigen jedoch, dass für größere Frequenzbereiche das Schwingungsverhalten des Systems durch das Sensorsignal nicht mehr vollständig erfasst werden kann. Dann ist eine Überlagerung mehrerer Sensorsignale von verschiedenen Beobachtungspunkten sinnvoll. Eine genaue Analyse bzgl. der Anzahl und Platzierung der Sensoren ist dann im Rahmen einer Optimierung durchzuführen. Dies ist insbesondere wichtig bei der Überwachung von schwingenden Strukturen, um bei Ände-

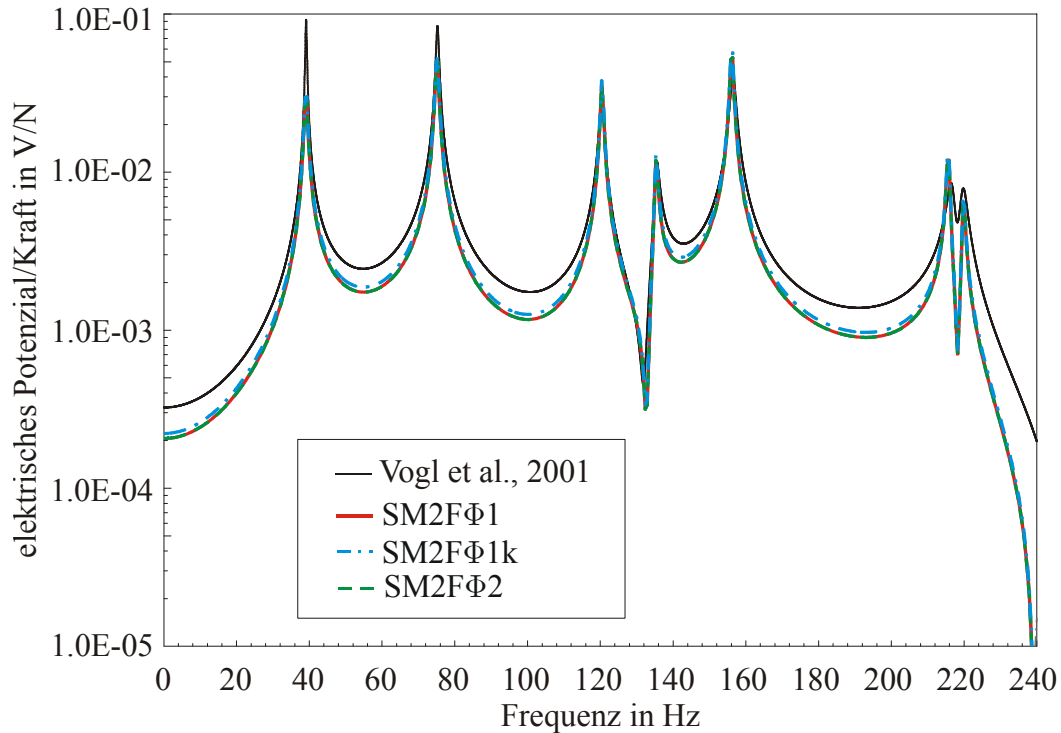


Bild 6.16: Fouriertransformierte des elektrischen Potentials für den Mittelpunkt des Sensors

rungen im Strukturverhalten Schäden richtig detektieren zu können.

## 6.6 Flach gekrümmte Schale unter Einzellast

Das folgende Beispiel soll den Einfluss der quadratischen Approximation des elektrischen Potentials im Element SM2FΦ2 und die vollständige Berücksichtigung der inneren Arbeit aller Schnittgrößenanteile durch das Element SM3FΦ1 auf das Strukturverhalten untersuchen. Dazu wird der Schlankheitsgrad  $\lambda$  der Schale durch eine Variation der Schichtdicke  $h$  verändert und die Ergebnisse vom ANS-basierten Schalenelement SM2FΦ2 denen der Elemente SM2FΦ1, SM2FΦ2red sowie dem Element SM3FΦ1 gegenübergestellt.

Die betrachtete flache Zylinderschale besteht aus zwei piezoelektrischen Schichten aus PZT G1195, die eine entgegengesetzte Polarisierung aufweisen. Die geometrischen Abmessungen und die Materialdaten sind in Tabelle 6.6 zusammengefasst.

An den Längsrändern ist die Zylinderschale gelenkig gelagert, während die gekrümmten Ränder ungelagert sind. Das System wird durch eine vertikale Einzellast von  $P = 732.5$  N mittig belastet, vgl. Bild 6.17. Unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen wird nur ein Viertel des Systems mit  $2 \times 2$  Elementen diskretisiert. Durch Variation der Schichtdicke  $h$  wird für verschiedene Schlankheitsgrade  $\lambda = R/2h$  der Schale von  $R/2h = 50$  bis  $R/2h = 1000$  die maximale vertikale Verschiebung  $w_p$  im Angriffspunkt der Last

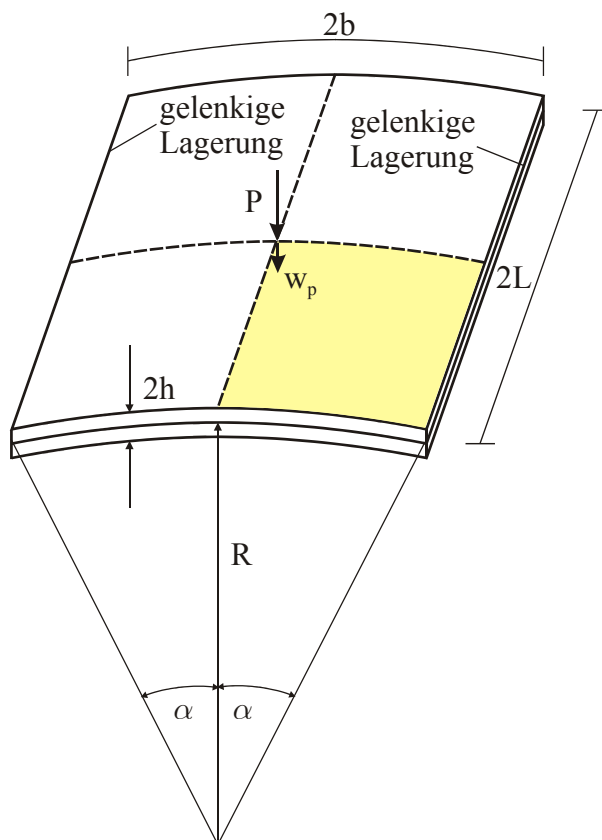


Bild 6.17: Ausschnitt einer flach gekrümmten piezoelektrischen Zylinderschale unter vertikaler Einzellast

Geometriedaten	Materialdaten
$L = 0.254 \text{ m}$	$E = 6.3 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$b = 0.254 \text{ m}$	$\nu = 0.3$
$R = 2.54 \text{ m}$	$e_{311} = e_{322} = 30.77 \text{ Cm}^{-2}$
$\alpha = 0.1 \text{ rad}$	$e_{333} = 18.46 \text{ Cm}^{-2}$
	$\epsilon_{33} = 1.53 \times 10^{-8} \text{ Fm}^{-1}$

Tabelle 6.6: Geometrie- und Materialdaten für flache Schale

bestimmt. Die Ergebnisse werden bezogen auf die maximale Verschiebung  $w_{\text{SM2F}\Phi 1}$  des Elements SM2F $\Phi$ 1 und in Bild 6.18 dargestellt.

Zunächst fällt auf, dass sich identische Ergebnisse für die Elemente SM2F $\Phi$ 2 und SM3F $\Phi$ 1 ergeben. Aufgrund der Tatsache, dass beim Element SM3F $\Phi$ 1 die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrischen Potenzial nur in schwacher Form erfüllt werden muss, liefern auch die elektromechanischen Koppelterme einen vollständigen Beitrag zur inneren Arbeit. Die Ergebnisse zeigen, dass beide Elemente die innere Arbeit des gekoppelten elektromechanischen Systems auf verschiedene Weise vollständig berücksichtigen, was einen quadratischen Verlauf des elektrischen Potenzials über die Schichtdicke bestätigt. Dieser Effekt wurde schon bei verschiedenen numerischen Beispielen beobachtet, vgl. LAMMERING UND MESECKE-RISCHMANN [72]. Damit ist das

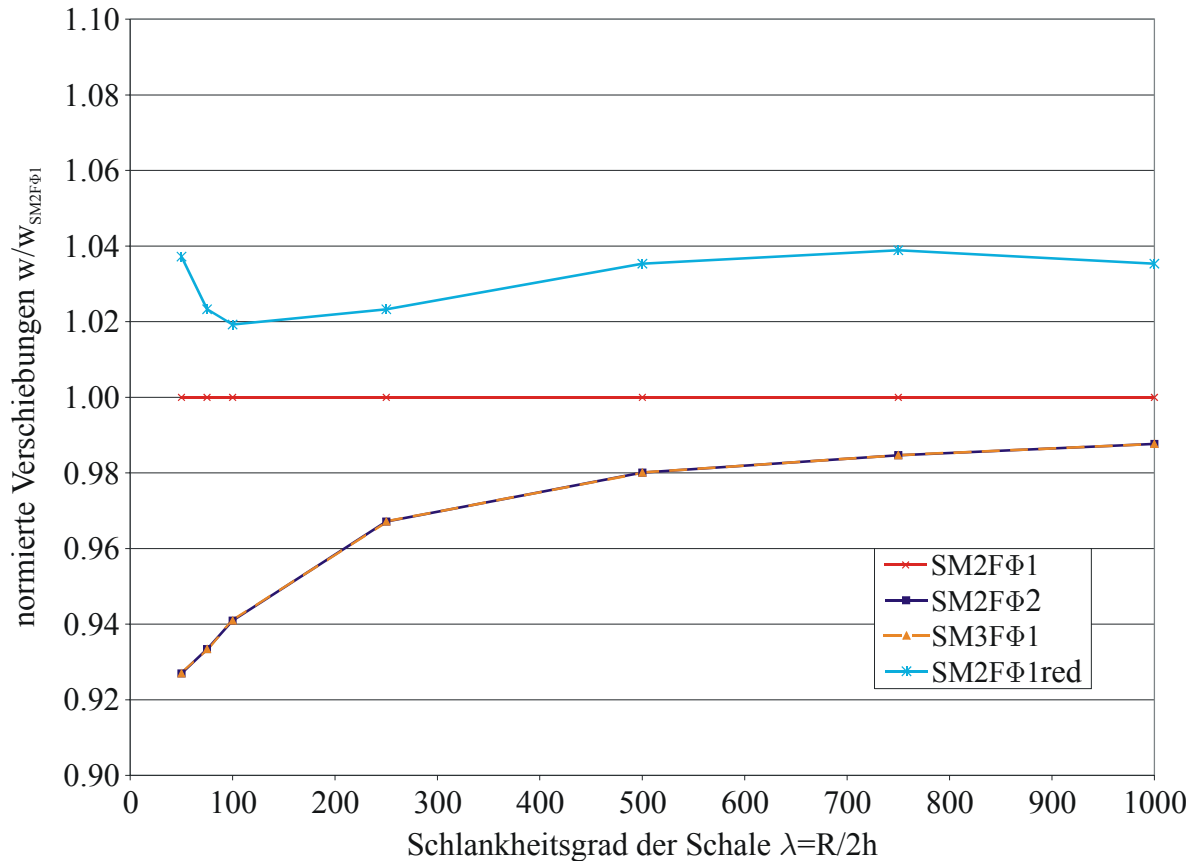


Bild 6.18: Vergleich der maximalen Verschiebungen für verschiedene Schlankheitsgrade  $\lambda$  der Schale

Element SM3FΦ1 eine Alternative zu SM2FΦ2.

Für dicke Schalenstrukturen ergeben sich für die beiden Elemente SM2FΦ2 und SM3FΦ1 im Vergleich zum Element SM2FΦ1 um ca. 7% geringere Verschiebungen. Dieser Unterschied verringert sich mit zunehmendem Schlankheitsgrad der Schale und nähert sich für die Verschiebungen den Werten des Elements SM2FΦ1 bis auf ca. 1% für  $R/2h = 1000$  an. Dieser Einfluss der zusätzlich berücksichtigten Beiträge bei der Formulierung der inneren Arbeit der elektromechanischen Kopplung ist jedoch abhängig von den Eigenschaften des bei der Berechnung verwendeten piezoelektrischen Materials und kann deshalb sehr unterschiedlich sein. Die vorherigen Beispiele aus den Kapiteln 6.2.1, 6.4.2 und 6.5 weisen nur sehr geringe Unterschiede zwischen den verschiedenen Elementen auf. Alle Berechnungen zeigen, dass für Strukturen mit hohem Schlankheitsgrad die Unterschiede beim Verformungsverhalten zwischen den beiden Approximationen gering ausfallen. Zusätzlich hat die Intensität der elektromechanischen Kopplung des eingesetzten Werkstoffs einen Einfluss. Werden Werkstoffe verwendet, deren piezoelektrischer Modul nur geringe Werte aufweist, so ist praktisch keine Abweichung zwischen den Elementen zu erwarten, da die zusätzlichen Beiträge für die innere Arbeit bei Berücksichtigung der vollständigen elektromechanischen Kopplung nur gering ausfallen. Materialien mit starker Kopplung hingegen zeigen ein steiferes Strukturverhalten, so dass eine adäquate Modellierung vom betrach-

teten System abhängig ist. Daher ist eine Überprüfung der gewählten Approximation bei geringen Schlankheitsgraden in jedem Fall zu empfehlen.

Die Ergebnisse des Elements  $SM2F\Phi1red$  mit der selektiv reduzierten Integration der Schubterme liefern ein etwas weiches Strukturverhalten und liegen daher oberhalb von denen des ANS-basierten Schalenelements  $SM2F\Phi1$ . Diese Abweichungen wurden schon von WAGNER [119] bei Vergleichen des rein mechanischen Verhaltens der vier- mit neun-Knotenelementen nachgewiesen. Eine Verbesserung der Ergebnisse bei Verwendung des Elements  $SM2F\Phi1red$  lässt sich jedoch durch eine Netzverfeinerung erzielen. Die ANS-basierten Elemente sind hier schon bei dieser sehr groben Diskretisierung in der Lage, das richtige Strukturverhalten zu berechnen.

## 6.7 Physikalisch nichtlineare Strukturen

Für die adäquate Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von piezoelektrischen Strukturen existieren derzeit wenige Ansätze. Daher soll zunächst anhand eines analytischen Beispiels der Anwendungsbereich des in dieser Arbeit verwendeten nichtlinearen Stoffgesetzes aufgezeigt werden. Anschließend wird die Leistungsfähigkeit des entwickelten Elements durch Vergleiche mit experimentellen Untersuchungen vorgestellt und die Unterschiede zum linearen Materialverhalten herausgearbeitet.

### 6.7.1 Voruntersuchungen

Am Beispiel eines eingespannten geschichteten Kragbalkens mit zwei gleichen piezoelektrischen Schichten, vgl. Bild 6.19, soll zuerst der Anwendungsbereich des physikalisch nichtlinearen Elements  $SM2F\Phi1n$  untersucht werden. Dies wird für den Membranzustand und den Biegezustand durchgeführt.

Zunächst sind beide piezoelektrische Schichten in gleicher Richtung polarisiert und werden mit einem gleichgerichteten elektrischen Feld belastet. Es entstehen nur Membran-

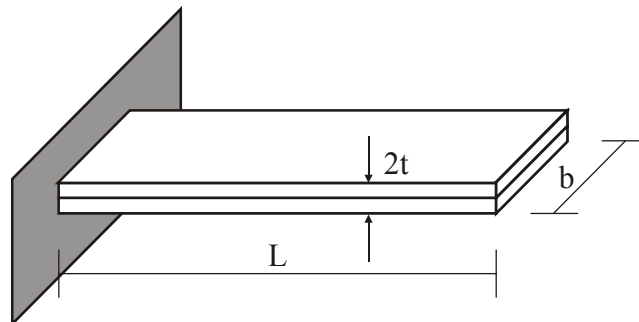


Bild 6.19: Geschichteter Kragbalken mit zwei piezoelektrischen Schichten

kräfte  $N_1$  und  $N_2$ , die aufgrund der Randbedingungen in der Summe verschwinden müssen

$$N_1 + N_2 = 0, \quad (6.1)$$

wobei mit einem Index 1 bzw. 2 die jeweilige Schicht gekennzeichnet wird. Die Normalkräfte berechnen sich mithilfe des Stoffgesetzes nach Gleichung (3.12) und den kinematischen Beziehungen  $E^{\text{mb}} = u_{,x}$  zu

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= \int_{\mathcal{A}} \sigma \, dA = \int_{\mathcal{A}} C E^{\text{mb}} - (e^0 + e^1 E^{\text{mb}}) E_z^{\text{el}} \, dA \\ &= bt [C u_{,x} - (e^0 + e^1 u_{,x}) E_z^{\text{el}}]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Alle Größen von Gleichung (6.2) werden nun in die Gleichgewichtsbedingung (6.1) eingesetzt

$$bt [(C_1 - e_1^1 E_{z1}^{\text{el}}) u_{,x} + (C_2 - e_2^1 E_{z2}^{\text{el}}) u_{,x} - e_1^0 E_{z1}^{\text{el}} - e_2^0 E_{z2}^{\text{el}}] = 0. \quad (6.3)$$

Auflösen nach den gesuchten Verschiebungen  $u$  ergibt

$$u = btL \frac{e_1^0 E_{z1}^{\text{el}} + e_2^0 E_{z2}^{\text{el}}}{C_1 - e_1^1 E_{z1}^{\text{el}} + C_2 - e_2^1 E_{z2}^{\text{el}}}. \quad (6.4)$$

Es wird deutlich, dass sich der nichtlineare Effekt, beschrieben durch die Werkstoffkonstante  $e^1$ , bei einem elektrischen Feld entgegen der Polarisationsrichtung versteifend auswirkt, während ein in der Richtung der Polarisation wirkendes elektrisches Feld das Strukturverhalten weicher macht.

Nun wird für die beiden Schichten eine entgegengesetzte Polarisierung vorgesehen, jedoch weiterhin das gleiche elektrische Feld bei der Belastung gewählt. Die Struktur kann sich auch hier durch die gewählten Randbedingungen ungehindert ausdehnen. Damit muss für die Einhaltung des mechanischen Gleichgewichts die Summe der Biegemomente der beiden piezoelektrischen Schichten 1 und 2 verschwinden, d.h.

$$M_1 + M_2 = 0. \quad (6.5)$$

Es wird für die Kinematik  $E^{\text{b}} = \psi_{,x,x} z$  verwendet. Die Biegemomente  $M_1$  und  $M_2$  berechnen sich nun mithilfe des Stoffgesetzes gemäß Gleichung (3.12) zu

$$M_1 = M_2 = \int_{\mathcal{A}} \sigma z \, dA = \int_{\mathcal{A}} (C E^{\text{b}} - (e^0 + e^1 E^{\text{b}}) E_z^{\text{el}}) z \, dA. \quad (6.6)$$

Durch die Verwendung der Kinematik und nach Integration über die Fläche ergibt sich schließlich mithilfe der Flächenmomente 1. und 2. Ordnung ( $S_y$  und  $I_y$ )

$$M = (C - e^1 E_z^{\text{el}}) I_y \psi_{,x,x} - e^0 E_z^{\text{el}} S_y. \quad (6.7)$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung der Gleichung (6.5) ergibt

$$[(C_1 - e_1^1 E_{z1}^{\text{el}}) I_{y1} + (C_2 - e_2^1 E_{z2}^{\text{el}}) I_{y2}] \psi_{,x,x} - e_1^0 E_{z1}^{\text{el}} S_{y1} - e_2^0 E_{z2}^{\text{el}} S_{y2} = 0. \quad (6.8)$$

Hieraus lässt sich die Verdrehung  $\psi_x$  des Balkens ermitteln

$$\psi_x = \int_x \frac{e_1^0 E_{z1}^{\text{el}} S_{y1} + e_2^0 E_{z2}^{\text{el}} S_{y2}}{(C_1 - e_1^1 E_{z1}^{\text{el}}) I_{y1} + (C_2 - e_2^1 E_{z2}^{\text{el}}) I_{y2}} dx . \quad (6.9)$$

Bei entgegengesetzter Polarisation haben die piezoelektrischen Moduln ein unterschiedliches Vorzeichen, so dass sich bei Verwendung eines gleichgerichteten elektrischen Feldes und Gleichheit der Flächenmomente  $I_{y1} = I_{y2}$  die beiden nichtlinearen Terme gegenseitig aufheben. Somit ist ein nichtlinearer Effekt für Biegeprobleme nur für Querschnitte mit asymmetrischen piezoelektrischen Schichten möglich. Bei Membranzuständen, wie sie im vorherigen Beispiel betrachtet wurden, ist jedoch auch ein nichtlinearer Effekt für einen symmetrischen Schichtaufbau möglich.

### 6.7.2 Geschichteter Balken im aktorischen Betrieb

Im folgenden Beispiel soll nun untersucht werden, inwieweit das im Element SM2F $\Phi$ 1n verwendete nichtlineare Materialmodell für den Kleinsignalbereich in der Lage ist, nichtlineare Effekte realistisch abzubilden. Ein Vergleich mit dem linearen Element SM2F $\Phi$ 1 soll die Unterschiede verdeutlichen.

In diesem Beispiel wird anhand eines geschichteten Kragträgers der Einfluss des nichtlinearen Stoffgesetzes auf das Verformungsverhalten untersucht. Schon bei WANG ET AL. [121] konnten für dieses Beispiel im Experiment deutliche nichtlineare Effekte im Bereich von  $E^{\text{el}} = 150 \text{ Vmm}^{-1}$  nachgewiesen werden. Der geschichtete Balken besteht aus einer Tragschicht aus Edelstahl und einer piezoelektrischen Keramik PZT 3203 HD. Die Richtung der Polarisation ist in Bild 6.20 dargestellt. Die geometrischen Abmessungen und Materialparameter sind in Tabelle 6.7 zusammengefasst und aus dem Datenblatt der Firma CTS Wireless Components entnommen worden. Ein Wert für den nichtlinearen piezoelektrischen Modul findet sich in den numerischen Untersuchungen von THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108]. Alle weiteren nicht angegebenen piezoelektrischen Konstanten werden vernachlässigt.

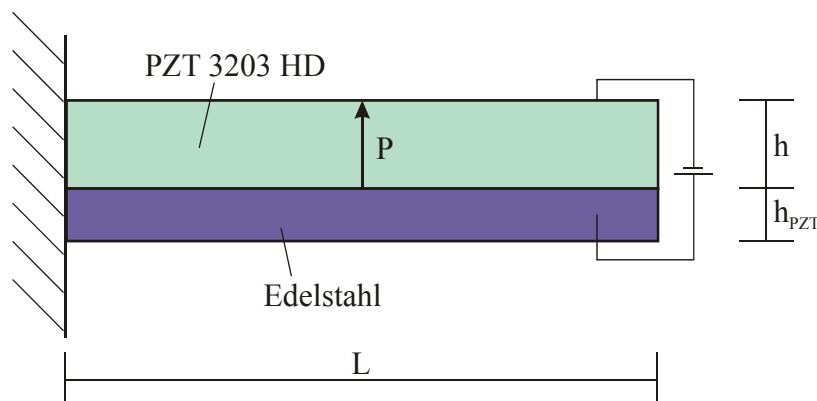
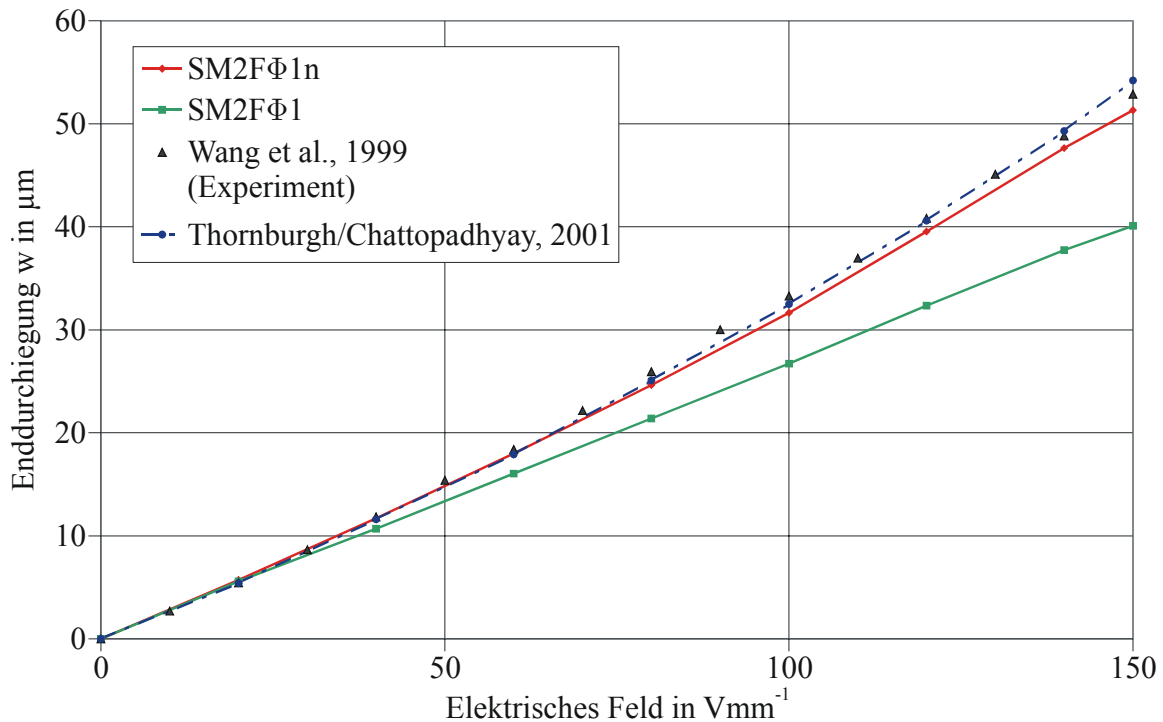


Bild 6.20: Geschichteter Kragträger mit einer piezoelektrischen Schicht

Geometriedaten in m	Materialdaten	
	passive Tragschicht	PZT 3203 HD
$L = 3.5 \cdot 10^{-2}$	$E = 2.06 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$E_{\text{PZT}} = 6.2 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$B = 7 \cdot 10^{-3}$	$\nu = 0.3$	$\nu_{\text{PZT}} = 0.3$
$h = 3.8 \cdot 10^{-4}$	$\rho_{\text{PZT}} = 7850 \text{ kgm}^{-3}$	$e_{311}^0 = -20.16 \text{ Cm}^{-2}$
$h_{\text{PZT}} = 6.8 \cdot 10^{-4}$	$\eta = 0.01$	$e_{31111}^1 = -131430 \text{ Cm}^{-2}$
		$\varepsilon_{33} = 3.36 \cdot 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$
		$\rho_{\text{PZT}} = 7800 \text{ kgm}^{-3}$

Tabelle 6.7: Geometrie- und Materialdaten für geschichteten Kragträger

Bild 6.21: Maximale Auslenkung am Balkenende im aktorischen Betrieb bei einer Frequenz von  $f = 10 \text{ Hz}$ 

Für die dynamische Berechnung wird bei einer Frequenz von  $f = 10 \text{ Hz}$  der Balken mit einem elektrischen Feld im Bereich von 0 bis  $150 \text{ Vmm}^{-1}$  belastet. Es wird eine geringe Rayleighsche Dämpfung berücksichtigt und der Zeitschritt zu  $\Delta t = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  gewählt. Verschiedene Belastungen von  $E^{\text{el}} = 20 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 40 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 60 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 80 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 100 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 120 \text{ Vmm}^{-1}$ ,  $E^{\text{el}} = 140 \text{ Vmm}^{-1}$  bis zu  $E^{\text{el}} = 150 \text{ Vmm}^{-1}$  werden aufgebracht. Eine Konvergenz im einzelnen Zeitinkrement wird bei der nichtlinearen Berechnung für  $E^{\text{el}} = 20 \text{ Vmm}^{-1}$  im Mittel nach 5 Iterationsschritten erzielt, während bei der Belastung mit  $E^{\text{el}} = 150 \text{ Vmm}^{-1}$  bis zu 10 Iterationsschritte notwendig sind. Die maximale Auslenkung am Balkenende nach Erreichen eines stationären Schwingungszustandes wird für das jeweilige elektrische Feld in Bild 6.21 dargestellt.

Die Übereinstimmung des nichtlinearen Modells mit den experimentellen Daten ist

hervorragend, vor allem, wenn die Unsicherheiten bei der Bestimmung des nichtlinearen Materialparameters  $e_{31111}^1$  mit berücksichtigt werden. Die nichtlinearen Ergebnisse des Elements SM2F $\Phi$ 1n unterschätzen das Systemverhalten leicht während die numerische Berechnungen von THORNBURGH UND CHATTOPADHYAY [108] geringfügig über den gemessenen Werten liegen.

Die Ergebnisse der Berechnung mit dem linearen Element SM2F $\Phi$ 1 weichen mit Erhöhung von  $E^{\text{el}}$  immer deutlicher von den Messwerten ab und spiegeln ein zu steifes Systemverhalten wieder. Dieser betrachtete Bereich von  $E^{\text{el}} = 150 \text{ Vmm}^{-1}$  ist jedoch bislang für die Modellierung als linear angesehen worden. Die zu erkennenden Abweichungen von ca. 20% erscheinen allerdings als zu groß, um noch vernachlässigbar zu sein. Dies legt den Schluss nahe, dass das tatsächliche Materialverhalten von Piezoelektrika durch lineare Stoffgesetze nur recht ungenau erfasst wird. Nur das nichtlineare Modell ist hier in der Lage, das nichtlineare Materialverhalten richtig wiederzugeben.

### 6.7.3 Gelenkig gelagerte Rechteckplatte im aktorischen Betrieb

In diesem Beispiel soll nun der Einfluss der Nichtlinearität für zweidimensionale Strukturen untersucht werden. Ein Vergleich zwischen dem linearen Element SM2F $\Phi$ 1 und dem nichtlinearen Element SM2F $\Phi$ 1n soll die Abweichungen des nichtlinearen vom linearen Materialverhalten für eine gelenkig gelagerte Rechteckplatte aufzeigen, vgl. Bild 6.22. Auf die Struktur ist ein piezoelektrischer Aktor appliziert. Die Geometriedaten und Materialparameter können der Tabelle 6.8 entnommen werden.

Mit einem regelmäßigen FE-Netz aus  $19 \times 15$  Elementen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung wird die statische Berechnung durchgeführt. Die piezoelektrische Schicht wird mit einem elektrischen Feld von  $E^{\text{el}} = 150 \text{ Vmm}^{-1}$  beaufschlagt, was zu einer Durchbiegung der Platte

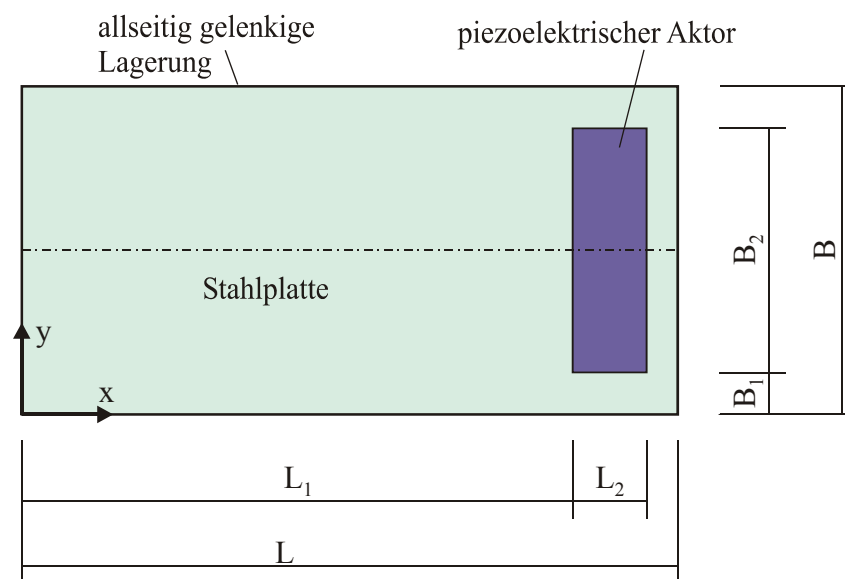
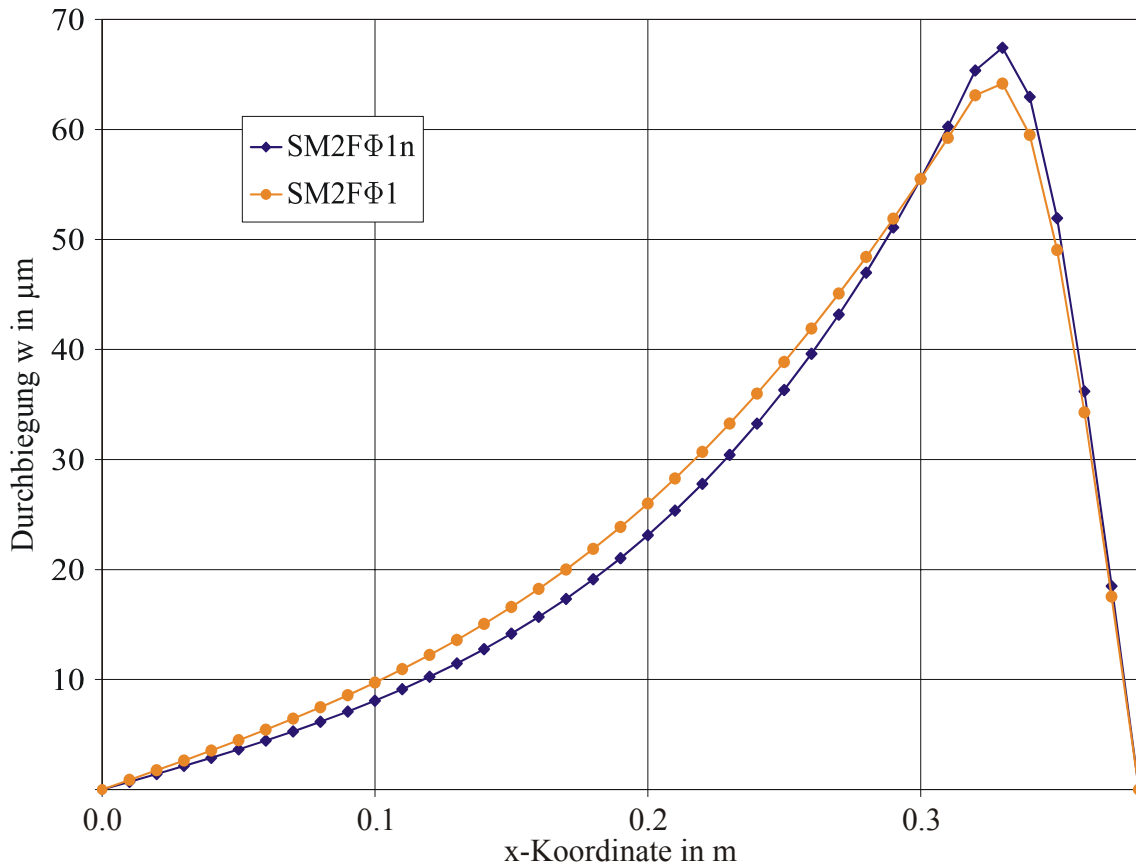


Bild 6.22: Geometrie der allseitig gelagerten Stahlplatte mit piezoelektrischer Keramik

Geometriedaten in m		Materialdaten	
passive Schicht	PZT 3203 HD	passive Schicht	PZT 3203 HD
$L = 0.38$	$L_2 = 0.04$	$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$E_{\text{PZT}} = 6.2 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$
$B = 0.30$	$B_2 = 0.22$	$\nu = 0.3$	$\nu_{\text{PZT}} = 0.31$
$h = 3.8 \cdot 10^{-4}$	$h_{\text{PZT}} = 6.8 \cdot 10^{-4}$		$e_{311}^0 = e_{322}^0 = -20.16 \text{ Cm}^{-2}$
$L_1 = 0.32$			$e_{31111}^1 = e_{32222}^1 = -131430 \text{ Cm}^{-2}$
$B_1 = 0.04$			$\varepsilon_{33} = 3.36 \cdot 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$

Tabelle 6.8: Geometrie- und Materialdaten für Rechteckplatte

Bild 6.23: Verschiebungen  $w$  entlang der Symmetrieachse  $y = B/2$ 

führt. Die Ergebnisse der linearen und nichtlinearen numerischen Berechnungen werden in Bild 6.23 für die Verschiebungen entlang der Symmetrieachse  $y = B/2$  im Vergleich dargestellt.

Für das physikalisch nichtlineare Element SM2FΦ1n ergeben sich erwartungsgemäß größere maximale Verschiebungen im Bereich der Keramik, während jedoch das lineare Element SM2FΦ1 höhere Verschiebungswerte für weite Teile der passiven Struktur entlang der Symmetrieachse liefert. Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass insbesondere für Anwendungen, bei denen eine hohe Präzision der Sensoren und Aktoren erforderlich ist, die Berücksichtigung der nichtlinearen Materialeffekte sinnvoll sein kann, um das tatsächliche Systemverhalten besser abzubilden.

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

Durch das Vordringen von adaptiven Strukturen in immer neue technische Anwendungsbereiche entsteht ein wachsendes Interesse an effizienten Entwicklungswerkzeugen zur Simulation von gekoppelten elektromechanischen Problemen. Insbesondere die Modellierung von dünnwandigen Strukturen, die aus einer Schichtung von aktiven und passiven Werkstoffen bestehen, ist von großer Bedeutung für die aktuelle Forschung und angestrebte Entwicklungen. Bereits heute existieren weitentwickelte Methoden zur Formulierung von zuverlässigen geschichteten Platten- und Schalenelementen für rein strukturmechanische Problemstellungen, die auch in kommerzieller Software erfolgreich implementiert wurden. Bei der Entwicklung von Elementen zur Berechnung von aktiven Systemen bleiben diese Techniken jedoch vielfach noch unberücksichtigt. Hier sind noch Transferleistungen zu erbringen, damit auch eine effiziente Behandlung von adaptiven Strukturen möglich wird.

Mit der Formulierung von zuverlässigen piezoelektrischen Schalenelementen leistet die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur effizienten Berechnung von gekoppelten elektromechanischen Strukturen. Es wurde dabei insbesondere Wert auf die Verwendung von Elementen mit niedriger Ansatzordnung gelegt, die bei einer groben Diskretisierung das Strukturverhalten richtig wiedergeben, um so die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems im Vergleich zu Schalenelementen mit höherer Ansatzordnung erheblich zu reduzieren. Mithilfe der Assumed Natural Strain Methode wurden piezoelektrische Schalenelemente entwickelt, die keine Versteifungseffekte aufweisen und auch bei verzerrten Netzgeometrien das elektromechanische Verhalten der Struktur richtig wiedergeben. Verschiedene Varianten zur Modellverbesserung wurden in Sandwichelementen implementiert und hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Strukturanalyse erforscht.

Es wurde nachgewiesen, dass ein konstanter Ansatz für das elektrische Potenzial in der Schalenebene für diskrete Sensoren und Aktoren, die als Plättchen oder Folien auf eine passive Struktur appliziert werden, das elektromechanische Verhalten ausreichend genau durch den Elementmittelpunkt repräsentiert. Da das elektrische Potenzial in Dickenrichtung aufgebracht wird, die ebenfalls die Polarisationsrichtung darstellt, ergibt sich in der Schalenebene ein konstanter Wert, der auch in der Praxis bei Messungen an diskret verteilten Elektroden auftritt. Ein kontinuierlicher Verlauf des elektrischen Potenzials

in der Schalenmittelfläche muss daher nicht approximiert werden. Als weiterer Vorteil ergibt sich hieraus, dass dieser elektrische Freiheitsgrad auf Elementebene eliminiert werden kann und so ein Element mit ausschließlich mechanischen Freiheitsgraden entsteht. Im Vergleich mit finiten Elementen, die für alle Freiheitsgrade einen  $C^0$ -stetigen Ansatz verwenden, zeigt sich ein etwas weiches Strukturverhalten. Dies lässt sich durch die unterschiedliche Ansatzordnung und die daraus resultierende Approximation der elektromechanischen Kopplung erklären.

Für das elektrische Potenzial wurde sowohl ein linearer Verlauf als auch ein quadratischer Ansatz in Dickenrichtung in verschiedenen Elementformulierungen umgesetzt. Die tatsächlichen Auswirkungen auf das Strukturverhalten waren daher Gegenstand von numerischen Untersuchungen. Die Berechnungen zeigen, dass für Strukturen mit hohem Schlankheitsgrad die Unterschiede beim Verformungsverhalten zwischen den beiden Approximationen gering ausfallen. Der Einfluss der Genauigkeit bei der Modellierung des elektrischen Potenzials ist jedoch außerdem von der Intensität der elektromechanischen Kopplung des eingesetzten Werkstoffs abhängig. Werden Werkstoffe verwendet, deren piezoelektrischer Modul nur geringe Werte aufweist, so ist praktisch keine Abweichung zu erwarten. Materialien mit starker Kopplung hingegen zeigen ein steiferes Strukturverhalten. Damit ist die Frage der adäquaten Modellierung vom betrachteten System und den gestellten Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse abhängig.

Die Anwendung von gemischten Variationsfunktionalen für gekoppelte elektromechanische Systeme liefert eine weitere Möglichkeit, die aufgrund der elektromechanischen Kopplung zusätzlich auftretende innere Arbeit vollständig zu berücksichtigen. Durch die Integration der Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrischen Potenzial in die Variationsformulierung ist diese Bedingung nur noch in schwacher Form zu erfüllen. Dadurch wird kein funktionaler Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potenzial und dem elektrischen Feld explizit vorgegeben, so dass das reale Strukturverhalten richtig approximiert werden kann. Ein Vergleich mit dem quadratischen Ansatz zeigt ein identisches Verformungsverhalten von Strukturen. Damit wird die lange Zeit vertretene Annahme eines linearen Verlaufs widerlegt und eine zumindestens quadratische Approximation des elektrischen Potenzials nachgewiesen, um alle Energiebeiträge zu erfassen.

Im Kleinsignalbereich wurde der Einfluss von nichtlinearem Materialverhalten untersucht. Nachdem in Experimenten schon in der Nähe des Arbeitspunktes Abweichungen vom linearen Materialverhalten zu verzeichnen sind, wurde ein physikalisch nichtlineares Schalenelement entwickelt. Damit war es möglich, lineares und nichtlineares Materialverhalten mit experimentellen Ergebnissen aus der Literatur zu vergleichen. Es zeigt sich für das lineare Element mit steigendem elektrischem Feld eine immer größer werdende Abweichung vom Experiment, während beim nichtlinearen Element nur geringe Unterschiede zu verzeichnen sind. Weitergehende Untersuchungen sind jedoch bezüglich der Auswirkungen des nichtlinearen Materialverhaltens insbesondere im Hinblick auf flächige Strukturen durchzuführen. Hier fehlen jedoch derzeit noch experimentelle Daten, durch die eine Ermittlung der nichtlinearen Materialparameter und damit ein genaueres Abgleich möglich ist.

Die Stabilität und Konvergenz der vorgestellten Elemente durch die Auswertung der Babuska-Brezzi-Bedingung ist noch nachzuweisen. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgt. Erste numerische Tests wurden jedoch schon an verzerrten Elementgeometrien durchgeführt, durch die eine Abschätzung des Konvergenzverhaltens möglich ist.

Die Verwendung von hybriden Formulierungen ist außerdem vorteilhaft bei der Modellierung von nichtlinearem Materialverhalten. GHANDI UND HAGOOD [42, 41] können damit das Hystereseverhalten von Piezoelektrika für den Großsignalbereich erfolgreich abbilden. Mithilfe eines weiteren Freiheitsgrades, d.h. der dielektrischen Verschiebung, ist es den Autoren möglich, zusätzlich die Polarisation zu berücksichtigen. Damit können zwei Effekte durch eine einzige Formulierung wiedergegeben werden und tragen so zu einer genaueren Modellierung bei. Daraus lässt sich eine vorteilhafte Verwendung von hybriden Elementen bei nichtlinearem Materialverhalten auch für den Kleinsignalbereich ableiten, um auch für diesen Bereich eine genauere Approximation des realen Strukturverhaltens zu erzielen.

Es existieren des Weiteren noch nicht vollständig untersuchte hybride Variationsfunktionale, vgl. YANG [128, 129], durch deren Einsatz weitere Verbesserungen des Elementverhaltens möglich sind. Erste Ansätze dafür finden sich bei SZE UND PAN [106] für Volumenelemente. Eine Übertragung auf Platten- und Schalenelemente ist jedoch noch durchzuführen.

Erweiterungen auf transversal isotropes Verhalten ist für eine größere Variabilität der vorgestellten Schalenelemente sinnvoll. Ebenso ist die Implementierung eines Multi-Schichtaufbaus umzusetzen, durch die eine variable Anzahl an Schichten verwendet werden kann. Wird für die passiven Schichten ein orthotropes Materialverhalten vorgesehen, so ist außerdem die Berechnung von aktiven Faserverbunden möglich.

## Anhang A

# Identifikation der Lagrangeschen Multiplikatoren

Die Entwicklung einer Mehrfeldvariationsformulierung wird mithilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren durchgeführt. Dabei wird die Beziehung zwischen  $\mathbf{E}^{\text{el}}$  und  $\Phi$  aus Gleichung (2.31c) mit dem Lagrangeschen Multiplikator verknüpft und als Nebenbedingung additiv in die Formulierung der Gesamtenergie eingefügt

$$\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{E}^{\text{el}}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}, \Phi) + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV . \quad (\text{A.1})$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass nun sowohl  $\mathbf{E}^{\text{el}}$  als auch  $\boldsymbol{\lambda}$  als unabhängige Variable aufgefasst werden. Die Variation der Gleichung (A.1) muss daher bzgl. aller unabhängigen Größen durchgeführt werden, was auf die folgende schwache Form des Gleichgewichts führt

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi, \mathbf{E}^{\text{el}}, \delta \mathbf{E}^{\text{el}}, \boldsymbol{\lambda}, \delta \boldsymbol{\lambda}) &= \delta \mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi) \\ &+ \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \text{Grad } \delta \Phi \, dV . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Um eine Identifikation des Lagrangeschen Multiplikators zu ermöglichen, wird auf den letzten Term der Gaußsche Integralsatz angewandt

$$\int_{\partial \mathcal{B}} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \delta \Phi \, dA = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \text{Grad } \delta \Phi \, dV + \int_{\mathcal{B}} \text{Div } \boldsymbol{\lambda} \delta \Phi \, dV . \quad (\text{A.3})$$

Die resultierenden beiden Integralterme werden zusammen mit Gleichung (2.37) in Gleichung

chung (A.2) eingesetzt

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi, \mathbf{E}^{\text{el}}, \delta\mathbf{E}^{\text{el}}, \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}^{\text{m}} : \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \bar{\mathbf{b}} \right) \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_D} (\bar{d} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}) \delta\Phi \, dA \\
&- \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{D} - \boldsymbol{\lambda}) \, dV - \int_{\mathcal{B}} \text{Div } \boldsymbol{\lambda} \delta\Phi \, dV = 0 .
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Um Gleichgewicht zu erhalten, müssen die mechanischen Terme in der ersten Zeile von Gleichung (A.4) und die elektrischen Anteile unabhängig voneinander verschwinden. Somit werden für die Identifikation von  $\boldsymbol{\lambda}$  als nächstes die letzten drei Anteile näher betrachtet. Es ergeben sich die folgenden drei Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\bar{d} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\
\mathbf{D} - \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{D} \hat{=} \boldsymbol{\lambda} , \\
\text{Div } \boldsymbol{\lambda} &= 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

die nur erfüllt werden können, wenn die erste und letzte Zeile von Gleichung (A.5) die wesentlichen und natürlichen elektrischen Randbedingungen befriedigen. Dies ist zutreffend für  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}$ , weswegen der Lagrangesche Multiplikator der dielektrischen Verschiebung entspricht. Gleichung (A.2) ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi, \mathbf{E}^{\text{el}}, \delta\mathbf{E}^{\text{el}}, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}) &= \delta\mathcal{G}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \Phi, \delta\Phi) \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{D} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E}^{\text{el}} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot \text{Grad } \delta\Phi \, dV .
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Die Aussage ist ebenfalls für den letzten noch nicht betrachteten Term aus Gleichung (A.5)  $\int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}^{\text{el}} \cdot (\mathbf{D} - \boldsymbol{\lambda}) \, dV$  gültig, der durch die Substitution des Lagrangeschen Multiplikators verschwindet. Damit existiert kein virtuelles elektrisches Feld mehr in der Variationsformulierung, so dass nun  $\mathbf{E}^{\text{el}}$  als abhängige Größe verwendet wird. Somit lautet die vorgestellte Mehrfeldvariationsformulierung unter Verwendung von Gleichung (A.6)

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{G}^*(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{D}, \delta\mathbf{D}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{E}^{\text{m}} : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{D} \cdot (\mathbf{E}^{\text{el}} + \text{Grad } \Phi) \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D} \cdot \text{Grad } \delta\Phi \, dV - \int_{\partial\mathcal{B}_D} \bar{d} \delta\Phi \, dA = 0 .
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Weitere hybride Formulierungen können in gleicher Weise hergeleitet werden. Zu diesem Themenkomplex existieren für gekoppelte elektromechanische Probleme jedoch erst einige wenige Untersuchungen. Die Einsatzmöglichkeiten sowie die Vor- und Nachteile sind Gegenstand dieser Arbeit.

## Anhang B

### Linearisierung

In der Kontinuumsmechanik wird für die mathematische Beschreibung nichtlinearer Phänomene zwischen geometrischer und physikalischer Nichtlinearität unterschieden. Für die numerische Lösung dieser nichtlinearen Randwertprobleme und zur Entwicklung von Näherungstheorien ist eine konsistente Linearisierung des Modells notwendig, siehe u.a. DOGHRI [35], MARSDEN UND HUGHES [84] und WRIGGERS [124]. Beim Einsatz von numerischen Verfahren werden iterative Lösungsverfahren wie das Newton-Verfahren verwendet, durch die eine Berechnung komplexer Systeme sehr effizient möglich ist.

Das Vorgehen bei einer konsistenten Linearisierung wird beispielhaft anhand der dargestellten  $C^1$ -stetigen skalarwertigen Funktion  $f(x)$  in Bild B.1 veranschaulicht.  $f(x)$  wird an der Stelle  $\bar{x}$  in eine Taylorreihe entwickelt, die nach dem linearen Term abgebrochen wird

$$f(\bar{x} + u) = f(\bar{x}) + \bar{D}f(\bar{x}) \cdot \Delta u + R(\Delta u) . \quad (\text{B.1})$$

Mithilfe der ersten beiden Terme wird eine Tangente an die Kurve angelegt, deren Berührungspunkt durch den Funktionswert  $f(\bar{x})$  festgelegt wird. Durch die Richtungsableitung  $\bar{D}f(\bar{x}) \cdot \Delta u$  ist die Tangente an der Stelle  $\bar{x}$  vollständig beschrieben. Für ein Inkrement

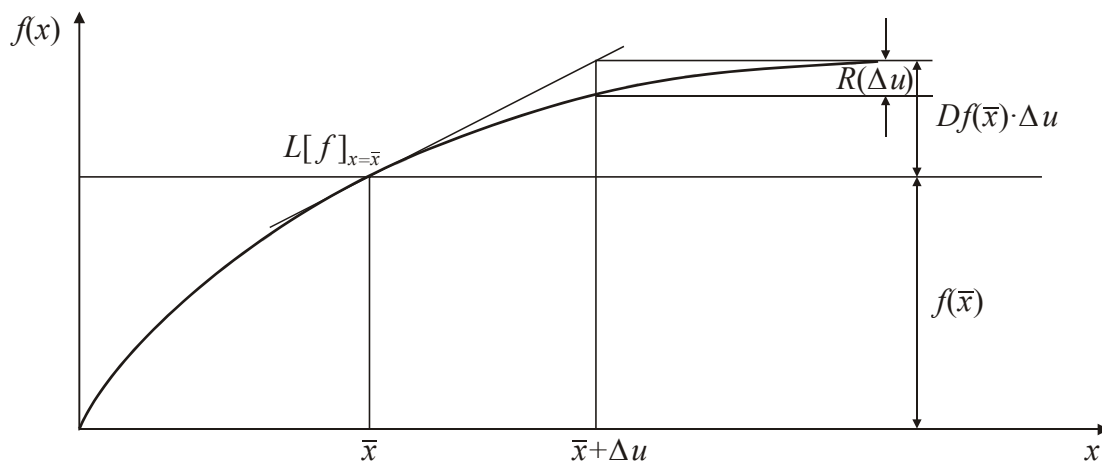


Bild B.1: Linearisierung einer skalarwertigen Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $\bar{x}$

$\Delta u$  ergibt sich nun ein Restglied  $R(\Delta u)$ , dessen Größe von der Stärke der Nichtlinearität abhängig ist. Bei iterativen Lösungsverfahren werden Fehlerschätzer verwendet, um den Fehler zu minimieren und eine Näherung der approximierten Werte an die tatsächliche Lösung zu erhalten.

Bei einer Erweiterung dieser Erkenntnisse auf den dreidimensionalen Raum ist die Linearisierung der skalarwertigen Funktion  $f$  gleichermaßen durchzuführen

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{D}f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u} + R(\Delta \mathbf{u}) . \quad (\text{B.2})$$

$\bar{D}f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u}$  stellt dabei ein Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren dar. Die Richtungsableitung  $\bar{D}f$  wird nun durch einen Gradientenvektor beschrieben

$$\bar{D}f(\bar{\mathbf{x}}) = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \text{Grad } f(\bar{\mathbf{x}}) . \quad (\text{B.3})$$

Sie berechnet sich mithilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{d\varepsilon} [f(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})] \Big|_{\varepsilon=0} = \left[ \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{\partial (\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})} \cdot \frac{\partial (\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{\partial \varepsilon} \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \Delta \mathbf{u} , \quad (\text{B.4})$$

wobei  $\varepsilon$  einen skalaren Parameter bezeichnet. Diese Richtungsableitung entspricht der Tangente an die Funktion  $f$  im Punkt  $\bar{\mathbf{x}}$  und kann durch Differenziation bestimmt werden.

Ein analoges Vorgehen ist für die Linearisierung vektor- und tensorwertiger Feldgrößen zu verwenden, das sich allgemein folgendermaßen darstellen lässt

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}(\Delta \mathbf{u}) . \quad (\text{B.5})$$

Dabei wird die Tangente an diese vektor- oder auch tensorwertige Funktion wie folgt berechnet

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})] \Big|_{\varepsilon=0} = \bar{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u} , \quad (\text{B.6})$$

wobei  $\bar{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u}$  ein inneres Produkt angibt. Damit kann der lineare Teil der Funktion angegeben werden zu

$$\mathbf{L}[\mathbf{G}]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{D}\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \Delta \mathbf{u} . \quad (\text{B.7})$$

## B.1 Linearisierung von Materialgleichungen

Der lineare Anteil, der bei der Linearisierung der konstitutiven Gleichungen entsteht, wird in gleicher Weise wie in Gleichung (B.7) bestimmt. Hierbei ist als Besonderheit bei den durch das Stoffgesetz gekoppelten Materialien zu beachten, dass die Linearisierung bzgl. aller unabhängigen Variablen durchgeführt werden muss. Es wird die Annahme vorausgesetzt, dass die Materialparameter nicht von beiden unabhängigen Variablen gleichzeitig abhängig sind, wodurch eine Entkopplung der Linearisierungen angenommen werden

kann. Somit kann die Berechnung unabhängig voneinander durchgeführt werden und die linearisierten Materialgleichungen ergeben sich allgemein zu

$$\mathbf{L}[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{E}^m = \bar{\mathbf{E}}^m} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \mathbf{E}^m \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{L}[\boldsymbol{\sigma}]_{\mathbf{E}_z^{\text{el}} = \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{D}\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta \mathbf{E}_z^{\text{el}} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{L}[\mathbf{D}]_{\mathbf{E}^m = \bar{\mathbf{E}}^m} = \bar{\mathbf{D}} + \bar{D}\mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{E}^m \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{L}[\mathbf{D}]_{\mathbf{E}_z^{\text{el}} = \bar{\mathbf{E}}_z^{\text{el}}} = \bar{\mathbf{D}} + \bar{D}\mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{E}_z^{\text{el}} . \quad (\text{B.11})$$

Die Auswertung für ein bestimmtes nichtlineares Stoffgesetz kann hiermit durchgeführt werden.

## B.2 Linearisierung der Variationsformulierung

Aufgrund der Nichtlinearität des Randwertproblems ist eine numerische Lösung vielfach nur iterativ möglich. Die in der Finite-Elemente-Methode verwendeten Verfahren benötigen Richtungsableitungen, die durch die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten berechnet werden können.

Für die im Rahmen dieser Arbeit behandelten gekoppelten elektromechanischen Systeme wird angenommen, dass die virtuelle äußere Arbeit unabhängig von den Verschiebungen und dem elektrischen Potenzial ist. Diese Annahme beschränkt eine Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts auf die virtuelle innere Arbeit  $\delta \mathcal{G}_{\text{int}}$

$$\delta \mathcal{G}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Phi, \delta \Phi) = \int_{\mathcal{B}} (\delta \mathbf{E}^m : \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{E}^{\text{el}} \cdot \mathbf{D}) \, dV . \quad (\text{B.12})$$

Bei gekoppelten Systemen wird eine Linearisierung der Variationsformulierung bzgl. der unabhängigen Variablen, in diesem Fall bzgl.  $\mathbf{u}$  und  $\Phi$ , unabhängig voneinander durchgeführt

$$L[\delta \mathcal{G}] = \bar{\mathcal{G}} + \bar{D}\mathcal{G} \cdot \Delta \mathbf{u} + \bar{D}\mathcal{G}\Delta \Phi . \quad (\text{B.13})$$

Auch hier werden mit einem Querstrich die Größen gekennzeichnet, deren Werte zu einem definierten Deformations- bzw. elektrischen Spannungszustand bekannt sind.

## Anhang C

# Analytische Näherungslösung für Schwingungsanalyse

Eine numerische Näherungslösung in Anlehnung an die Ausführungen von VOGL ET AL. [116] soll hier zusammenfassend erläutert werden. Ausgangspunkt ist die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\rho(x)\ddot{w}(x, t) + r(x)\dot{w}(x, t) + \Lambda w(x, t) = f(x, t) , \quad (\text{C.1})$$

deren Lösung für die Anregung  $f(x, t)$  einer gelenkig gelagerten Platte gesucht ist. Dabei stellen  $w(x, t)$ ,  $\dot{w}(x, t)$  und  $\ddot{w}(x, t)$  die gesuchten Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Systems dar und mit  $\rho(x)$  wird die Massendichte, mit  $r(x)$  der Dämpfungskoeffizient und mit

$$\Lambda = N \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \quad (\text{C.2})$$

der Differentialoperator für isotrope Platten mit der Plattensteifigkeit  $N$  bezeichnet. Für schwach gedämpfte Systeme wird eine Lösung mithilfe von Eigenfunktionen  $\phi_r(x)$  und den generalisierten Koordinaten  $q_r(t)$  angenommen

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) . \quad (\text{C.3})$$

Damit lässt sich nun ein entkoppeltes Gleichungssystem für die betrachtete Platte entwickeln, bei der die Anregung mithilfe einer diskreten Kraftanregung erfolgen kann

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r \eta_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{M} \phi_r(x_E) F(x_E) e^{j\omega t} . \quad (\text{C.4})$$

In dieser Gleichung wird der modale Verlustfaktor mit  $\eta_r$  bezeichnet und die Gesamtmasse ist in  $M$  zusammengefasst. Der Lösungsansatz dieser inhomogenen Differentialgleichung für die generalisierten Koordinaten wird nun zu

$$q_r(t) = Q_r(\omega) e^{j\omega t} \quad (\text{C.5})$$

gewählt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Schwingungsdifferentialgleichung (C.4) lässt sich  $Q_r(\omega)$  berechnen zu

$$Q_r(\omega) = \frac{1}{M} \frac{\phi_r(x_E) F(x_E)}{-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2} . \quad (\text{C.6})$$

Es verbleibt noch, die Verteilung der Verschiebungen  $w(x, t)$  zu bestimmen. Dies geschieht mithilfe eines Exponentialansatzes der Form

$$w(x, t) = W(x, \omega) e^{j\omega t} . \quad (\text{C.7})$$

Der Zusammenhang zwischen der Verschiebungsverteilung und der generalisierten Koordinaten ist durch Gleichung (C.3) festgelegt. Damit berechnet sich  $W(x, \omega)$  durch Einsetzen der Gleichung (C.5) in Gleichung (C.3) zu

$$W(x, \omega) = \sum_r \phi_r(x) Q_r(\omega) = \frac{1}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x) \phi_r(x_E)}{-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2} F(x_E) . \quad (\text{C.8})$$

Für den Vergleich der Übertragungsfunktionen bietet sich für die Verschiebungen die Rezeptanz an, die sich mithilfe des Quotientens aus Verschiebungsverteilung und diskreter Kraftanregung ergibt zu

$$H(x, x_E, \omega) = \frac{W(x, \omega)}{F(x_E, \omega)} = \frac{1}{M} \sum_r \frac{\phi_r(x) \phi_r(x_E)}{-\omega^2 + j\omega\omega_r\eta_r + \omega_r^2} . \quad (\text{C.9})$$

Die Näherungsansätze für die noch unbekanntenen Eigenfunktionen und Eigenkreisfrequenzen der betrachteten gelenkig gelagerten Platte mit den Abmessungen  $l_x$  und  $l_y$  ergeben sich zu,

$$\phi_{mn}(x, y) = 2 \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) , \quad (\text{C.10})$$

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho_0(1-\nu^2)} \left[ \left(\frac{m\pi x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi y}{l_y}\right)^2 \right]} , \quad (\text{C.11})$$

vgl. u.a. ALTENBACH ET AL. [2]. Die bei der Berechnung berücksichtigte Anzahl an Halbwellen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung wird durch die Parameter  $m$  und  $n$  festgelegt.

Die Bestimmung des Sensorsignals beschränkt sich auf isotrope piezoelektrische Plättchen, die im Vergleich zur Struktur wesentlich dünner sind und einen ausreichenden Abstand von der neutralen Faser haben. Dann ist es für die Berechnung der elektrischen Spannungen für einen gewählten Punkt auf dem piezoelektrischen Sensor ausreichend, die hauptsächlich durch die Krümmungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  der Struktur auftretenden Biegeschwingungen zu berücksichtigen

$$U_{\text{out}} = \frac{e_{311}}{C_r} \frac{1}{1-\nu_p^2} \frac{h+h_p}{2} (\kappa_x + \kappa_y) . \quad (\text{C.12})$$

Die Kapazität  $C_r$  berechnet sich durch die Fläche  $A = l_{x,p}l_{y,p}$  des Sensors, dessen Höhe  $h_p$  und durch die Permittivität  $\varepsilon$

$$C_r = \varepsilon \frac{l_{x,p}l_{y,p}}{h_p} . \quad (\text{C.13})$$

Die Krümmungen  $\kappa_x$  und  $\kappa_y$  können wiederum durch die zweite partielle Ableitung der Verschiebungen bestimmt werden

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} , \quad \kappa_y = \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} . \quad (\text{C.14})$$

Die Auswertung der obigen Gleichungen für die im Beispiel 6.5 behandelte Platte wurde mit dem symbolischen Mathematikprogramm Maple durchgeführt.

# Literaturverzeichnis

- [1] ALLIK, H. UND HUGHES, T. J. R.: *Finite Element Method for Piezoelectric Vibration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2:151–157, 1970.
- [2] ALTENBACH, H., ALTENBACH, J. UND RIKARDS, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke: Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.
- [3] ALTENBACH, J. UND ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner-Studienbücher: Mechanik. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [4] ANDELFINGER, U. UND RAMM, E.: *EAS-Elements for Two-Dimensional, Three Dimensional Plate and Shell Structures and their Equivalence to HR-Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:1311–1337, 1993.
- [5] ANDELFINGER, U.: *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991.
- [6] BALAMURUGAN, V. UND NARAYANAN, S.: *Shell Finite Element for Smart Piezoelectric Composite Plate/Shell Structures and its Application to the Study of Active Vibration Control*. Finite Elements in Analysis and Design, 37:713–738, 2001.
- [7] BALAMURUGAN, V. UND NARAYANAN, S.: *Active Vibration Control of Smart Shells Using Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators*. Smart Materials and Structures, 10:173–180, 2001.
- [8] BASSIOUNY, E., GHALEB, A. F. UND MAUGIN, G. A.: *Thermomechanical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-I. Basic Equations, II. Poling of Ceramics*. International Journal of Engineering Sciences, 26:1279–1306, 1988.
- [9] BASSIOUNY, E. UND MAUGIN, G. A.: *Thermomechanical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects-III. Parameteridentification, IV. Combined Electromechanical Loading*. International Journal of Engineering Science, 27:975–1000, 1989.

- [10] BATHE, K.-J. UND DVORKIN, E. N.: *A Formulation of General Shell Elements - the Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:697–722, 1986.
- [11] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Band 2. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2 Auflage, 2002.
- [12] BECKER, R. UND SAUTER, F.: *Theorie der Elektrizität*, Band 1 Einführung in die Maxwellsche Theorie: Elektronentheorie; Relativitätstheorie. B. G. Teubner, Stuttgart, 21 Auflage, 1973.
- [13] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. UND MORAN, B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000.
- [14] BELYTSCHKO, T., ONG, J. S.-J., LIU, W. K. UND KENNEDY, J. M.: *Hourglass Control in Linear and Nonlinear Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 43:251–276, 1984.
- [15] BENJEDDOU, A.: *Advances in Piezoelectric Finite Element Modelling of Adaptive Structural Elements: A Survey*. Computers and Structures, 76:347–363, 2000.
- [16] BENJEDDOU, A., DEÜ, J.-F. UND LETOMBE, S.: *Free Vibrations of Simply-Supported Piezoelectric Adaptive Plates: An Exact Sandwich Formulation*. Thin-Walled Structures, 40:573–593, 2002.
- [17] BENT, A. A.: *Active Fiber Composites for Structural Actuation*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1997.
- [18] BETSCH, P., GRUTTMANN, F. UND STEIN, E.: *A 4-Node Finite Shell Element for the Implementation of General 3D-Elasticity at Finite Strains*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 130:57–79, 1996.
- [19] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 2; Variationsrechnung, Energiemethoden, Näherungsverfahren*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [20] BISCHOFF, M. UND RAMM, E.: *Shear Deformable Shell Elements for Large Strains and Rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:4427–4449, 1997.
- [21] BISCHOFF, M.: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999.
- [22] BLETZINGER, K.-U., BISCHOFF, M. UND RAMM, E.: *A Unified Approach for Shear-Locking-Free Triangular and Rectangular Shell Finite Elements*. Computers and Structures, 75:321–334, 2000.

- [23] BROCKMANN, T. H. UND LAMMERING, R.: *Analysis of Piezoelectric Fiber Composite Beams*. In: PORTER DAVIS, L. (Herausgeber): *Smart Structures and Materials 2001: Smart Structures and Integrated Systems, Proceedings of SPIE Vol. 4327*, Seiten 460–471, 2001.
- [24] BROCKMANN, T. H.: *Theory of Adaptive Fiber Composites - From Piezoelectric Material Behavior to Dynamics of Rotating Structures*. Dissertation, Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg, noch unveröffentlicht.
- [25] CARRERA, E.: *An Improved Reissner-Mindlin-Type Modell for the Electromechanical Analysis of Multilayered Plates Including Piezo-Layers*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8:232–248, 1997.
- [26] CERAMTEC: *Piezoelektrische Bauteile*. Informationsbroschüre.
- [27] CHANDRASHEKHARA, K. UND TENNETI, R.: *Thermally Induced Vibration Suppression of Laminated Plates with Piezoelectric Sensors and Actuators*. *Smart Materials and Structures*, 4:281–290, 1995.
- [28] CHAPELLE, D., OLIVEIRA, D. L. UND BUCALEM, M. L.: *MITC Elements for a Classical Shell Model*. *Computers and Structures*, 81:523–533, 2003.
- [29] CHEE, C. Y. K., TONG, L. UND STEVEN, G. P.: *Technical Note: A Mixed Model for Composite Beams with Piezoelectric Actuators and Sensors*. *Smart Materials and Structures*, 8:417–432, 1999.
- [30] CHEN, S.-H., GUO-FENG, Y. AND CHENG, H.: *A New Intelligent Thin-Shell Element*. *Smart Materials and Structures*, 9:10–18, 2000.
- [31] CHEN, P.J. UND MONTGOMERY, S.T.: *A Macroscopic Theory for the Existence of the Hysteresis and Butterfly Loops in Ferroelectricity*. *Ferroelectrics*, 23:199–208, 1980.
- [32] CRAWLEY, E. F.: *Intelligent Structures for Aerospace: A Technology Overview and Assessment*. *AIAA Journal*, 32(8):1689–1699, 1994.
- [33] CRAWLEY, E. F. UND LAZARUS, K. B.: *Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates*. *AIAA Journal*, 29(6):944–951, 1991.
- [34] DETWILER, D. T., SHEN, M.-H. H. UND VENKAYYA, V. B.: *Finite Element Analysis of Laminated Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Actuators and Sensors*. *Finite Elements in Analysis and Design*, Seiten 87–100, 1995.
- [35] DOGHRI, I.: *Mechanics of Deformable Solids: Linear, Nonlinear, Analytical and Computational Aspects*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

- [36] DÖKMECI, M. C.: *Certain Integral and Differential Types of Variational Principles in Nonlinear Piezoelectricity*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 35(6):775–787, 1988.
- [37] ELSPASS, W. J.: *Aktive Funktionsbauweisen: Eine Einführung in die Strukturonik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [38] FRECKER, M. I.: *Recent Advances in Optimization of Smart Structures and Actuators*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 14:207–216, 2003.
- [39] GABBERT, U., KÖPPE, H. UND LAUGWITZ, F.: *Numerical and Experimental Investigations of Adaptive Plate and Shell Structures*. In: HOLNITZCKI-SZULC, J. UND RODELAR, J. (Herausgeber): *Smart Structures: Requiriments and Potential Applications in Mechanical and Civil Engineering. Nato Science Series 3, High Technology 65.*, Seiten 71–78, Dordrecht, 1999. Kluwer.
- [40] GHANDI, K.: *Nonlinear Modeling and Characterization Techniques for Phase Transitions in Electro-Mechanically Coupled Devices*. Dissertation, Masseurhuetts Institute of Technology, Massachusetts, 1998.
- [41] GHANDI, K. UND HAGOOD, N. W.: *Finite Element Model for Phase Transitions in Nonlinear Electro-Mechanically Coupled Material*. In: *SPIE Vol. 3039, Smart Structures and Materials 1997, Mathematics and Control in Smart Structures*, Band 3039, Seiten 97–112, 1997.
- [42] GHANDI, K. UND HAGOOD, N. W.: *A Hybrid Finite Element Model for Phase Transitions in Nonlinear Electro-Mechanically Coupled Material*. In: *SPIE Vol. 3039, Smart Structures and Materials 1997, Mathematics and Control in Smart Structures*, Seiten 97–112, Newport Beach, California, 1997.
- [43] GOPINATHAN, S. V., VARADAN, V. V. UND VARADAN, V. K.: *A Review and Critique of Theories for Piezoelectric Laminates*. Smart Materials and Structures, 9:24–48, 2000.
- [44] HAUPTMANN, R.: *Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Fredericiana Karlsruhe, 1997.
- [45] HEYLIGER, P., PEI, K. C. UND SARAVANOS, D.: *Layerwise Mechanics and Finite Element Model for Laminated Piezoelectric Shells*. AIAA Journal, 34(11):2353–2360, 1996.
- [46] HUBER, J. E., FLECK, N. A., LANDIS, C. M. UND MCMEEKING, R. M.: *A Constitutive Model for Ferroelectric Polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 47:1663–1697, 1999.

- [47] HUBER, J. E. UND FLECK, N. A.: *Multi-Axial Electrical Switching of a Ferroelectric: Theory Versus Experiment*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49:785–811, 2001.
- [48] HUGHES, J. R.: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [49] HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L. UND KANOKNUKULCHAI, W.: *A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 11:1529–1543, 1977.
- [50] HUGHES, T. J. R. UND TEZDUYAR, T.: *Finite Elements Based Apon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Isoparametric Element*. Journal of Applied Mechanics, 48:587–596, 1981.
- [51] HURTY, W. C. UND RUBINSTEIN, M. F.: *Dynamics of Structures*. Engineering of the Physical Sciences. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [52] HWANG, W.-S. UND PARK, H. C.: *Finite Element Modelling of Piezoelectric Sensors and Actuators*. AIAA Journal, 31(5):930–937, 1993.
- [53] HWANG, S. C. UND MCMEEKING, R. M.: *A Finite Element Model of Ferroelastic Polycrystals*. International Journal of Solids and Structures, 36:1541–1556, 1999.
- [54] HWANG, S. C., LYNCH, C. S. UND MCMEEKING, R. M.: *Ferroelectric/Ferroelastic Interactions and a Polarization Switching Model*. Acta Metallurgica et Materialia, 43(5):2073–2084, 1995.
- [55] IKEDA, T.: *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [56] IOZZI, R. UND GAUDENZI, P.: *Effective Shear Deformable Shell Elements for Adaptive Laminated Structures*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 12:415–421, 2001.
- [57] JANOSHA, H.: *Adaptronics and Smart Structures: Basics, Materials, Design, and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [58] JENDRITZA, D. J. ET AL.: *Technischer Einsatz neuer Aktoren: Grundlagen, Werkstoffe, Designregeln und Anwendungsbeispiele*, Band 484 der Reihe Kontakt & Studium. Expert Verlag, Renningen-Malmsheim, 1995.
- [59] JOSHI, S. P.: *Non-Linear Constitutive Relations for Piezoceramic Materials*. Smart Materials and Structures, 1:80–83, 1992.
- [60] JOSHI, S. P.: *Nonlinear Constitutive Relations for Piezoceramic Materials*. In: *ADPA/AIAA/ASME/SPIE Conf. On Active Materials and Adaptive Structures - Session 12*, Seiten 217–222, Alexandria, Virginia, 1994.

- [61] KAMLAH, M.: *Zur Modellierung von nichtlinearen elektromechanischen Koppelphänomenen in Piezokeramiken*. Institut für Mechanik, Universität Kassel, Dissertation, 2000.
- [62] KAMLAH, M.: *Review Article: Ferroelectric and Ferroelastic Piezoceramics - Modeling of Electromechanical Hysteresis Phenomena*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 13:219–268, 2001.
- [63] KAMLAH, M., BÖHLE, U. UND MUNZ, D.: *On a Non-Linear Finite Element Method for Piezoelectric Structures Made of Hysteretic Ferroelectric Ceramics*. Computational Materials Science, 19(1):81–86, 2000.
- [64] KOCONIS, D. B., KOLLÁR, L. P. UND SPRINGER, G. S.: *Shape Control of Composite Plates and Shells with Embedded Actuators. I. Voltages Specified*. Journal of Composite Materials, 28(5):415–458, 1994.
- [65] KOCONIS, D.B., KOLLÁR, L.P. UND SPRINGER, G.S.: *Shape Control of Composite Plates and Shells with Embedded Actuators. II. Desired Shape Specified*. Journal of Composite Materials, 28(6):459–483, 1994.
- [66] KÖGL, M. UND BUCALEM, M. L.: *Piezoelectric MITC Plate Elements*. In: MANG, H.A. UND RAMMERSTORFER, F.G. UND EBERHARDSTEINER, J. (Herausgeber): *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Wien, 7-12 July 2002. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- [67] KÖGL, M. UND BUCALEM, M. L.: *Locking-Free Piezoelectric MITC Shell Elements*. In: BATHE, K. J. (Herausgeber): *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003 : Proceedings of the Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Seiten 392–395, Amsterdam, 2003. Elsevier Science.
- [68] KÖPPE, H., GABBERT, U., LAUGWITZ, L. UND WEBER, C.-T.: *Comparison of Numerical and Experimental Results of Structronic Plate and Shell Structures*. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 6:361–368, 1999.
- [69] KÖPPE, H., GABBERT, U. UND TZOU, H. S.: *On Thre-Dimensional Layered Shell Elements for the Simulation of Adaptive Structures*. In: *Proceedings of the Euromech 373 Colloquium: Modelling and Control of Adaptive Mechanical Structures*, Seiten 103–114, Magdeburg, 1998. Universität Magdeburg.
- [70] KROMMER, M. UND IRSCHIK, H.: *A Reissner-Mindlin-Type Plate Theory Including the Direct Piezoelectric and the Pyroelectric Effect*. Acta Mechanica, 1:51–69, 2000.
- [71] LAMMERING, R.: *The Application of a Finite Shell Element for Composites Containing Piezo-Electric Polymers in Vibration Control*. Computers and Structures, 41(5):1101–1109, 1991.

- [72] LAMMERING, R. UND MESECKE-RISCHMANN, S.: *Multi-Field Variational Formulations and Related Finite Elements for Piezoelectric Shells*. Smart Materials and Structures, 12(6):904–913, 2003.
- [73] LEE, H.-J. UND SARAVANOS, D. A.: *A Mixed Multi-Field Finite Element Formulation for Thermopiezoelectric Composite Shells*. International Journal of Solids and Structures, 37:4949–4967, 2000.
- [74] LEE, S., GOO, N. S., PARK, H. C., YOON, K. J. UND CHO, C.: *A Nine-Node Assumed Strain Shell Element for Analysis of a Coupled Electro-Mechanical System*. Smart Materials and Structures, 12:355–362, 2003.
- [75] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3 Auflage, 1996.
- [76] LIN, X.-Q., REN, J.-G. UND LI, D.-X.: *A New Finite Element Model of Laminate Shell Containing Piezoelectric Patches*. In: *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*, Seiten 1492–1497, Santa Barbara, Californien, 1998.
- [77] MACKERLE, J.: *Sensors and Actuators: Finite Element and Boundary Elements Analysis and Simulations. A Bibliography*. Finite Elements in Analysis and Design, 33:209–220, 1999.
- [78] MACKERLE, J.: *Smart Materials and Structures: FEM and BEM Simulations. A Bibliography*. Finite Elements in Analysis and Design, 37:71–83, 2001.
- [79] MACNEAL, R.: *A Simple Quadrilateral Shell Element*. Computers and Structures, 8:175–183, 1978.
- [80] MACNEAL, R. H.: *Finite Elements: Their Design and Performance*, Band 89 der Reihe *Mechanical Engineering*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.
- [81] MALKUS, D. S. UND T. J. R. HUGHES: *Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15(1):63–81, 1978.
- [82] MALVERN, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1969.
- [83] MANG, H. UND HOFSTETTER, G.: *Festigkeitslehre*. Springer-Verlag, Wien, 2000.
- [84] MARSDEN, J. E. UND HUGHES, T. J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, New York, 1994.
- [85] MAUGIN, G. A.: *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North-Holland, Amsterdam, 1988.

- [86] McMEEKING, R. M. UND LANDIS, C. M.: *A Phenomenological Multi-Axial Constitutive Law for Switching in Polycrystalline Ferroelectric Ceramics*. International Journal of Engineering Science, 40:1553–1577, 2002.
- [87] MESECKE-RISCHMANN, S. UND LAMMERING, R.: *FE-Formulation for Nonlinear Piezoelectric Material Behaviour in the Small Signal Range*. In: *International Conference on Computational and Experimental Engineering and Sciences ICCES'03*, Agios Ioannis Peristeron, Corfu, 2003.
- [88] MESECKE, S. UND LAMMERING, R.: *Hybrid Finite Element Formulations for Layered Structures with Piezoelectric Material*. In: MANG, H.A. UND RAMMERSTORFER, F.G. UND EBERHARDSTEINER, J. (Herausgeber): *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Wien, 7-12 Juli 2002. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- [89] NGUYEN, M. N.: *Nichtlineares dynamisches Verhalten von Piezo-Balken-Systemen bei schwachem elektrischem Feld*. Forschen und Wissen - Mechatronik. GCA-Verlag, Herdecke, 2000.
- [90] PREUMONT, A.: *Vibration Control of Active Structures, an Introduction*. Solid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2nd Auflage, 2002.
- [91] RAHMOUNE, M., BENJEDDOU, A., OHAYON, R. UND OSMONT, D.: *New Thin Piezoelectric Plate Models*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 9:1017–1029, 1998.
- [92] ROGERS, C. A.: *Intelligent Material Systems - The Dawn of a New Materials Age*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 4:4–12, 1993.
- [93] SARAVANOS, D. A., HEYLIGER, P. R. UND HOPKINS, D. A.: *Layerwise Mechanics and Finite Element for the Dynamic Analysis of Piezoelectric Composite Plates*. International Journal of Solids and Structures, 34(3):359–378, 1997.
- [94] SAUER, R.: *Eine einheitliche Finite-Elemente-Formulierung für Stab- und Schalen-tragwerke mit endlichen Rotationen*. Dissertation 4, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1998.
- [95] SEEGER, F.: *Simulation und Optimierung adaptiver Schalenstrukturen*. Fortschritt-Berichte VDI. Reihe 20, Rechnerunterstützte Verfahren ; 383. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2004.
- [96] SIMO, J.C. UND ARMERO, F.: *Geometrically Non-Linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:1413–1449, 1992.

- [97] SIMO, J. C. UND HUGHES, T. J. R.: *On Variational Foundations of Assumed Strain Methods*. Journal of Applied Mechanics, 53:51–54, 1986.
- [98] SIMO, J. C. UND RIFAI, M. S.: *A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 29:1595–1638, 1990.
- [99] STEIN, E. UND BARTHOLD, F.-J.: *Elastizitätstheorie*, Band 4 der Reihe *Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*, Seiten 165–428. Ernst & Sohn, Berlin, 1997.
- [100] SULEMAN, A.: *Modeling of Shell Adaptive Composites and its Application to Noise Suppression*. In: *Smart Structures and Materials 1999: Mathematics and Control in Smart Structures, Proceedings of SPIE Vol. 3667*, Seiten 23–33, Newport Beach, California, 1999.
- [101] SULEMAN, A. UND VENKAYYA, V. B.: *A Simple Finite Element Formulation for a Laminated Composite Plate with Piezoelectric Layers*. Journal of Intelligent Material Systems Structures, 6:776–782, 1995.
- [102] SUNAR, M. UND RAO, S. S.: *Recent Advances in Sensing and Control of Flexible Structures via Piezoelectric Materials Technology*. Applied Mechanics Review, 52(1):1–16, 1999.
- [103] SZE, K. Y. UND GHALI, A.: *Hybrid Hexahedral Element for Solids, Plates and Beams by Selective Scaling*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 36:1519–1540, 1993.
- [104] SZE, K. Y., YAO, L.-Q. UND YI, S.: *A Hybrid-Stress ANS Solid-Shell Element and Its Generalization for Smart Structure Modelling - Part II: Smart Structure Modelling*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 48:565–582, 2000.
- [105] SZE, K. Y. UND YAO, L. Q.: *A Hybrid-Stress ANS Solid-Shell Element and Its Generalization for Smart Structure Modelling - Part I: Solid-Shell Element Formulation*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 48:545–564, 2000.
- [106] SZE, K. Y. UND PAN, Y. S.: *Hybrid Finite Element Models for Piezoelectric Materials*. Journal of Sound and Vibration, 226(3):519–547, 1999.
- [107] THIRUPATHI, S. R., SESHU, P. UND NAGANATHAN, N. G.: *A Finite-Element Static Analysis of Smart Turbine Blades*. Smart Materials and Structures, 6:607–615, 1997.
- [108] THORNBURGH, R. P. UND CHATTOPADHYAY, A.: *Nonlinear Actuation of Smart Composites Using a Coupled Piezoelectric-Mechanical Model*. Smart Materials and Structures, 10:743–749, 2001.

- [109] TICHY, J. UND GAUTSCHI, G.: *Piezelektrische Meßtechnik: Physikalische Grundlagen, Kraft-, Druck- und Beschleunigungsaufnehmer, Verstärker*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [110] TIERSTEN, H. F.: *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Plenum Press, New York, 1969.
- [111] TZOU, H. S. UND TSENG, C.-I.: *Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Applications*. Mechanical Systems and Signal Processing, 5(3):215–231, 1991.
- [112] TZOU, H. S.: *Piezoelectric Shells: Distributed Sensing and Control of Continua*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [113] TZOU, H. S. UND YE, R.: *Analysis of Piezoelectric Structures with Laminated Piezoelectric Triangle Shell Elements*. AIAA Journal, 34(1):110–115, 1996.
- [114] VARADARAJAN, S., CHANDRASHEKHARA, K. UND AGARWAL, S.: *Adaptive Shape Control of Composite Plates Using Piezoelectric Materials*. AIAA Journal, 36(9):1694–1698, 1998.
- [115] VEL, S. S. UND BATRA, R. C.: *Analysis of Piezoelectric Bimorphs and Plates with Segmented Actuators*. Thin-Walled Structures, 39:23–44, 2001.
- [116] VOGL, B., HEROLD, S. UND WAHL, F.: *Vibroakustische Sensorik zur Minimierung der Schallabstrahlung schwingender Strukturen*. Technische Mechanik, 21(3):167–178, 2001.
- [117] WAGNER, U. VON UND HAGEDORN, P.: *Piezo-Beam Systems Subjected to Weak Electric Field: Experiments and Modelling of Non-Linearities*. Journal of Sound and Vibration, 256(5):861–872, 2002.
- [118] WAGNER, U. VON: *Nichtlineare Effekte bei Piezokeramiken unter schwachem elektrischem Feld: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Forschen und Wissen - Mechatronik. GCA-Verlag, Herdecke, 2003. Habilitation TU Darmstadt.
- [119] WAGNER, W.: *Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Element-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen*. Dissertation 85/2, Universität Hannover, Hannover, 1985.
- [120] WALLER, H. UND SCHMIDT, R.: *Schwingungslehre für Ingenieure: Theorie, Simulation, Anwendungen*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989.
- [121] WANG, Q.-M., ZANH, Q., XU, B., LIU, R. UND CROSS, L. E.: *Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates*. Journal of Applied Physics, 86(6):3352–3360, 1999.

- [122] WIESEMANN, S.: *Identifikation Modaler Sensoren und Aktoren für Adaptive Strukturen*. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, Hamburg, 2003.
- [123] WOLF, K.-D.: *Electromechanical Energy Conversion in Asymmetric Piezoelectric Bending Actuators*. Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt, 2000.
- [124] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [125] WU, C. C., SZE, K. Y. UND HUANG, Y. Q.: *Numerical Solutions on Fracture of Piezoelectric Materials by Hybrid Element*. International Journal of Solids and Structures, 38:4315–4329, 2001.
- [126] YANG, H. T. Y., SAIGAL, S., MASUD, A. UND KAPANIA, R. K.: *A Survey of Recent Shell Finite Elements*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 48:101–127, 2000.
- [127] YANG, H. T. Y., SAIGAL, S. UND LIAW, D. G.: *Advances of Thin Shell Elements and some Applications - Version I*. Computers and Structures, 35(4):481–504, 1990.
- [128] YANG, J. S.: *Mixed Variational Principles for Piezoelectric Elasticity*. Developments in Theoretical and Applied Mechanics, XVI:II.31–38, 1992.
- [129] YANG, J. S.: *Variational Formulation for the Vibration of a Piezoelectric Body*. Quarterly of Applied Mathematics, 53(1):95–104, 1995.
- [130] YANG, J. S.: *Equations for Thick Elastic Plates with Partially Electroded Piezoelectric Actuators and Higher Order Electric Fields*. Smart Material and Structures, 8:73–82, 1999.
- [131] YIN, L. UND SHEN, Y.: *Strain Sensing of Composite Plates Subjected to Low Velocity Impact with Distributed Piezoelectric Sensors: A Mixed Finite Element Approach*. Journal of Sound and Vibration, 199(1):17–31, 1997.
- [132] ZALLO, A. UND GAUDENZI, P.: *Finite Element Models for Laminated Shells with Actuation Capability*. Computers and Structures, 81:1059–1069, 2003.
- [133] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. UND TOO, J. M.: *Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 3:275–290, 1971.
- [134] ZIENKIEWICZ, O. C. UND TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method*, Band 1 The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5 Auflage, 2000.
- [135] ZIENKIEWICZ, O. C. UND TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method*, Band 2 Solid Mechanics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 5 Auflage, 2003.