Mathematik – ein Produkt der Naturgeschichte?

Evolutionspsychologische und evolutionspädagogische Untersuchungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie der
Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaften der
Helmut-Schmidt-Universität/
Universität der Bundeswehr Hamburg

vorgelegt von

Michael Köck

aus Castrop-Rauxel

Hamburg 2011

Dekan: Prof. Dr. Christine Zeuner

1. Gutachter: Prof. Dr. Alfred K. Treml

2. Gutachter: Prof. Dr. Annette Scheunpflug

Tag der Disputation: 04.10.2011

Meinen besten Schülern

Brunhilde E. J. Köck und Erhard Köck

Vorwort

Der Autor – diplomierter Physiker – erlebte im Alltag der Theoretischen Physik die Stärke mathematischer Strukturen für die Erklärung und Prognose physikalischer Tatsachen bzw. Sachverhalte, glaubte einen Zusammenhang von Mathematik und Natur finden zu können, indem er mithilfe der Nichtkommutativen Geometrie von Alain Connes nach einer geometrischen Interpretation von Super-KMS-Funktionalen auf Quantenfeld-Algebren suchte (er dankt Prof. Dr. Klaus Fredenhagen für die anregende Zeit und finanzielle Mittel), war aber mit seiner Frage sowohl in der Physik als auch in der Mathematik an der falschen Adresse, recherchierte in der Philosophie der Mathematik und fand für sich selbst dort nur unbefriedigende Antworten. Unverständlich und irritierend erschien ihm die Auskunft der Literatur, dass – sinngemäß – eine naturgeschichtliche Erklärung eines Zusammenhangs von Natur und Mathematik aus erkenntnistheoretischen Gründen ausgeschlossen sei.

Mit dem Vortrag „Das alte Gehirn und die neuen Probleme“, den Gerhard Vollmer 1991 im Rahmen des Allgemeinen Vorlesungswesens an der Universität Hamburg hielt, begegnete der Autor erstmalig der Evolutionären Erkenntnistheorie und damit einem Ansatz, der in etwa dem entsprach, nachdem er schon lange gesucht hatte. Während dieser Phase seines naturgeschichtlichen Nachdenkens über Mathematik entschied er sich für eine Tätigkeit im Schuldienst und legte im Rahmen seines Referendariats (Köck 1994) als zweite Staatsarbeit vor, in dem Glauben, damit voranzukommen. Von 1991 bis 1995 stand er in lockerem Kontakt mit G. Vollmer, der sich freundlicherweise die Zeit nahm, die noch vagen Pläne des Autors gelegentlich mit ihm zu diskutieren. In den Jahren 1995 bis 2000 entstanden Fassungen jener Abschnitte des vorliegenden 2. Kapitels, die die Beiträge der Philosophie und der Wissenschaften zur Begriffsexplikation der Mathematik zum Gegenstand haben und Fassungen der Abschnitte des vorliegenden 3. Kapitels zum naturgeschichtlichen Forschungsansatz sowie zum Multi-Layer-Modell-Schema. In den Jahren 2001 bis 2003 erhielt das 2. Kapitel seine heute vorliegende, nach historischen und systematischen Wissenschaften differenzierte Gliederung und das 3. Kapitel wurde um die Mathematik der dynamischen Systeme erweitert. Während eine Verwendung der Mathematik der dynamischen Systeme als Forschungsheuristik, schon lange vorher geplant war, bestand die Entscheidung für die Gliederung des zweiten Kapitels in der Hoffnung, die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik als Dissertation im Bereich der Geschichte der Mathematik unterzubringen, nachdem alle vom Autor unternommenen Versuche in den Bereichen Mathematik, Philosophie, Psychologie und Mathematikdidaktik sich als nicht möglich erwiesen hatten: Entweder galt die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik als nicht hoffähig oder die Promotionsordnungen ließen ihn als Physiker zur Promotion nicht zu. Darüber hinaus war es für den Autor als Privatperson schwierig, überhaupt kompetente Diskussionspartner für sein Thema zu finden bzw. Zugang zu diesen zu bekommen. In dieser Krise wandte er sich Ende 2002 an RUPERT RIEDL, der sich für sein Thema sehr interessierte, während mehrerer Besuche des Autors in Wien (R. RIEDL starb am 18. Sept. 2005) mit ihm diskutierte, sich intensiv um das Fortkommen des Autors einsetzte und ihn (Ende 2003) zu ALFRED K. TREML schickte. Die erste Phase am Institut für Allgemeine Pädagogik der Helmut-Schmidt-Universität (2004 bis 2007) war vor allem geprägt von der Einarbeitung in die Allgemeine und Evolutionäre Pädagogik, ja vom Kennenlernen der akademischen Pädagogik überhaupt und erforderte Werbung für den naturgeschichtlichen Forschungsansatz, galt doch bisher nur die Allgemeine Evolutionstheorie (LUHMANNscher Prägung) als pädagogisch anschlussfähig. Klar war am Ende dieser Phase, dass (Köck 2008) Kernstück der Dissertation und die darin enthaltene – von (Vollmer 1988a; 1988b) inspirierte und in (Köck 1994) ausgearbeitete – Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels sowohl ein Kernstück des vorliegenden 4. Kapitels bilden als auch im vorliegenden 5. Kapitel den Bezug der naturgeschichtlichen Sicht zur evolutionären Pädagogik und Mathematikdidaktik herstellen wird. Die Schlussphase betraf die Überarbeitung und Ausarbeitung einiger ursprünglich kurz gehaltener Abschnitte in den bisherigen Kapiteln. Wichtige Impulse erhielt der Autor für seine Arbeit während der Tagungen zur Evolutionären Pädagogik in Abensberg. 2007 lernte er dort ROLF OERTER kennen und begegnete 2009 G. VOLLMER wieder.

Der Autor dankt PROF. DR. R. OERTER für seine ausführlichen Kommentare zu einer Arbeitsfassung von (Köck 2008) und einer Arbeitsfassung des vorliegenden 2. Kapitels, Prof. Dr. Dr. G. Vollmer für Kommentare zu einer Arbeitsfassung des vorliegenden 2. Kapitels und für seine Unterstützung in der Frühzeit des Vorhabens, Prof. Dr. R. Riedl post mortem für Diskussionen, für seine Hilfe bei der wissenschaftlichen Integration des Autors und besonders für seine Freundschaft. Prof. Dr. A. K. Treml sei nicht nur für die Anregungen und Betreuung gedankt, sondern auch dafür, dass er sich auf den Autor mit seinem Thema eingelassen hat, sodass dessen Arbeit nun als Dissertation vorgelegt werden konnte. Nicht vergessen seien die Übernahme eines Teils der redaktionellen Fertigstellung von (Köck 2008) durch Julia Kurig und ihre Mitarbeiterin sowie die Literaturhinweise (Vollmer 2003) und (Krebs 2008) von Dipl. Biol. Lothar Frank.

Ohne ein – trotz mancher Härten doch – günstiges und stabiles berufliches und privates Umfeld wäre das wissenschaftliches Vorhaben nicht durchführbar gewesen.

Mit seinen Beschäftigungen als Lehrer bei der Privatpädagogischen Gesellschaft, an der Abendschule Hermanneum und dann am Wilhelm-Gymnasium, alles in Hamburg, hat der Autor Arbeitsplätze gewinnen können, die eine private wissenschaftliche Tätigkeit nicht ganz ausgeschlossen haben.

Für ein offenes wissenschaftlich geschultes Ohr und Ressourcen in seinem privaten Umfeld dankt der Autor: Dipl. Phys. Frank Göbeler, der mit manchen Schätzen seiner umfangreichen wissenschaftlichen Privatbibliothek aufwartete, Dr. Ralf D. Tscheuschner für unseren vielseitigen wissenschaftlichen Austausch seit 1987 und seine Unterstützung im informationstechnologischen Dunstkreis, Dr. Traute Ewers unter anderem für sprachwissenschaftliche Diskussionen und den Hinweis auf (Devlin 2001), Prof. Dr. Wolfgang Waitkus für einige strategische Überlegungen.

Neben seinen Eltern, Brunhilde E. J. Köck und Erhard Köck, die den Kernbereich seines Hintergrunds bilden, dankt der Autor seinen Musen Ulrike Samson, Serena Parker, Christina Clifton-Dey, Claudia Curth und seiner Partnerin Bettina Käning für ihre Treue und die Pflege seines allgemeinen Wohlbefindens.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Fragestellung

1. Dass unsere komplizierte Technik – der Energiewirtschaft, Informationsverarbeitung und Informationsübertragung, der Medizin, der Mobilität, der industriellen Verarbeitung, der Konstruktion von Bauwerken oder Maschinen etc. – ohne höhere Mathematik nicht hätte entwickelt werden können, dass aber auch bereits elementare Vorgänge unseres Alltags – sei es eine Gehaltsabrechnung, der tägliche Einkauf von Nahrungsmitteln, Bausparvertragskalkulationen, oder eine Steuererklärung – ohne mathematische Kenntnisse nicht nachvollziehbar sind, ist kaum umstritten. Aber wie wir mathematische Begriffe bilden und mathematisches Wissen von anderem Wissen unterscheiden, mit diesen grundsätzlichen und noch heute debattierten Fragen befassten sich schon die Griechen. Viele Lehrer, die darüber nachgedacht haben, gehen an den Schulen und Hochschulen auf diese Probleme der Begriffsexplikation des mathematischen Wissens bzw. der Begriffsexplikation der Mathematik gar nicht ein, sondern halten sich im Unterricht an „handfeste" Begriffsstrukturen, die ausgewiesener Maßen zum mathematischen Wissen gehören, und arbeiten damit, während ihre bei der mathematischen Arbeit stets präsente Begriffsexplikation der Mathematik unbewusst oder unausgesprochen bleibt.

Wer in mathematischen Begriffsstrukturen Beispiele für apriorisches – nicht empirisches – Wissen sieht, nimmt einen Standpunkt ein, wie er gewöhnlich von Mathematikern, Logikern oder Philosophen vertreten wird und insbesondere von jenen vertreten worden ist, die sich in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhundert während des Grundlagenstreits der Mathematik um die Grundlegung der Mathematik bemüht haben. Wer mit ihnen erlebt, dass mathematische Zusammenhänge entdeckt würden, steht einem PLATONischen Begriffsrealismus nahe, wer sie (z.B. mithilfe von Sprache, Vorstellungen, idealisierten Handlungen) für Erfindungen des menschlichen Geistes hält, vertritt demgegenüber im weitesten Sinne eine konstruktive Position. Die Vertreter apriorischer Positionen stehen aber alle der Tatsache gegenüber, dass sie den Bezug der Mathematik zur empirischen Welt nicht überzeugend erklären können (vgl. 2.2.2).

In anderer Weise gibt uns die Geschichtswissenschaft Auskunft über die Mathematik. Sie teilt uns nicht nur mit, wie ein spezielles mathematisches Wissen (eine Begriffsstruktur, eine Problemlösung oder ein Gebiet) entstand und transformiert wurde, sondern ihre Ergebnisse zeigen auch, dass Begriffsexplikationen der Mathematik dem zeitlichen Wandel unterliegen.

Es ist evident, dass keine Untersuchung ganz ohne Systematik auskommt. Aber die Geschichtswissenschaft systematisiert fast nur philosophisch oder mithilfe von nicht empirischen, qualitativen Methoden und Ansätzen aus den Wissenschaften. Jede ihrer Systematisierungen bleibt der historischen (ideographischen und hermeneutischen) Methode untergeordnet. Naturwissenschaftliche Methoden und Ansätze machen in der Geschichtswissenschaft nur Karriere bei Alters- oder Fundortbestimmungen. Für die Systematisierung der inhaltlichen Arbeit sind sie in der Geschichtswissenschaft nicht anerkannt. Deswegen stehen alle Versuche, den Begriff „Mathematik“ auch aus naturwissenschaftlicher Sicht zu explizieren, vor den verschlossenen Toren der Geschichtswissenschaft. Viele naturwissenschaftlich arbeitende Disziplinen, denen evolutionistische Ansätze zu Grunde liegen, haben uns Kenntnisse verschafft, die über die historische Dimension hinaus auf die phylogenetische Bedingtheit des Menschen, seines Verhaltens im Allgemeinen und seines mathematischen Wissens und Könnens insbesondere hinweisen. Für eine Begriffsexplikation der Mathematik sollten deswegen phylogenetische Gesichtspunkte berücksichtigt werden.

Wir gehen in der vorliegenden Arbeit sogar noch weiter und versuchen, ansatzweise zu erhellen, wie unbelebte materiell-energetische (z.B. physikalische und kosmogonische), biotische, psychische und soziale Strukturen wechselwirkend Strukturen unseres mathematisches Wissen erzeugen (und erfassen auf diese Weise mehr Zusammenhänge als weniger weite Ansätze, die wegen ihrer Begrenztheit Zusammenhänge ausschließen und so Unterschiede durch die Hintertür einführen). Damit wir aber mit dieser umfassenden „naturgeschichtlichen Sicht“, mit der wir am Beispiel mathematischen Wissens erkennbar machen wollen, auf welchem Wege „Materie Geist hervorbringt“, keinen Unfug schaffen, werden wir unsere naturgeschichtliche Sicht sorgfältig zu einem naturgeschichtlichen Forschungsansatz ausarbeiten.

2. Der Homo sapiens ist zwar stammesgeschichtlich mit Strukturen ausgestattet, die ihm den Erwerb mathematischen Wissens ermöglichen, aber weil wir nicht einmal die Inhalte unseres kleinen Ein-mal-Eins auf molekulargenetischem Wege weitergeben können, gibt es keine Evolution mathematischen Wissens jenseits von Lehre und Lernen!

Bereits in der frühen Hochkultur Ägyptens wurde neben dem Lesen und Schreiben auch mathematisches Wissen zunächst nach dem Famulus Prinzip, dann in Schulen unterrichtet (vgl. Brunner 1957): Mathematik wurde ehrgeizig betrieben und unterrichtet, weil man vom Wert des mathematischen Wissens und Könnens für die Ökonomie und die Verwaltung des Staates überzeugt war; ohne einen effizienten mathematischen Wissenstransfer wären die bautechnischen Leistungen der Ägypter kaum möglich gewesen. Genaue Kenntnisse über den damaligen Mathematikunterricht haben wir nicht, sicher ist aber, dass Lehrer schon Lehrstoff zusammenstellten und über Didaktik und Erziehung nachdachten (vgl. Brunner 1957, S. 69-71, 86, 99-101, 145-146, 151-152). Mit der Komposition von ausgewähltem mathematischen Wissens zu einem Lehrplan bzw. Lehrbuch und mit den Überlegungen, die sich auf die Vermittlung von mathematischem Wissen beziehen, setzten die frühen Lehrer eine Entwicklung in Gang, aus der – im Laufe der Jahrtausende und dem damit verbundenen Wandel übergeordneter Verhältnisse – in unserer jüngeren Vergangenheit die Mathematikdidaktik als eine moderne Wissenschaft hervorgegangen ist (vgl. 5.4.1).

Während des 19. Jahrhunderts n. Chr. führten Entwicklungen z.B. in Preußen (vgl. 5.4.1, Item 7.) dazu, dass die mathematische Forschung so schnell voranschritt und viele abstrakte Strukturen hervorbrachte, die den jungen Menschen an den allgemeinbildenden höheren Schulen unmöglich zu lernen abverlangt werden konnten. Auf die Schwierigkeiten der jungen Menschen mit dem Lernen, sobald der einströmende Informationsfluss einen kritischen Wert übersteigt oder wenn ein gewisser Schwierigkeitsgrad auftritt, musste reagiert werden. Außerdem bereiteten die Mathematiklehrer ihren Stoff meist wenig schülergerecht vor. Ihr im universitären Vortragsstil durchgeführter Unterricht wirkte auf die jungen Menschen oft motivationstötend, und die Unterrichtsdisziplin ging verloren. Im Zusammenwirken dieser Gründe entstanden die sich von der mathematischen Forschung ablösende Schulmathematik, Bemühungen um eine stärker den Anforderungen der Schulpraxis angepasste Ausbildung von

Mathematiklehrern und die Anfänge einer Mathematikdidaktik. Anzumerken ist in diesem Zusammenhang, dass der Pädagogik zu dieser Zeit bereits viele nützliche Einsichten vorlagen, die Psychologie von der Philosophie gelöst, eine selbstständige Wissenschaft geworden ist und sich auch eine pädagogische Psychologie zu entwickeln begann.

Heute ist die Mathematikdidaktik eine an den Universitäten etablierte Disziplin, deren Ergebnisse nicht mehr allein auf Erfahrungen aus der Praxis beruhen, sondern in einigen Bereichen auch von der Zusammenarbeit mit der Pädagogik und der empirisch arbeitenden Psychologie bestimmt sind. Inzwischen wurden auch neuropsychologische Befunde zur Zahlenverarbeitung, zur räumlichen Informationsverarbeitung und vieles mehr sogar in Kreisen der Öffentlichkeit diskutiert. Aber die bedeutenden Fortschritte in der Psychologie, die vor allem durch leistungsfähigere Computer und eine bessere Messtechnik möglich geworden sind, zeigen, soweit sie in den Schulen, in der praktischen Lehrerausbildung und – mit Einschränkungen auch – an den Instituten für Mathematikdidaktik von Universitäten angekommen sind, dort bis heute noch kaum erkennbare Wirkungen.

Die Evolutionäre Pädagogik (vgl. Treml 2004; Z. f. P. 48.-5. Sept./Okt. 2002; Z. f. E.-W. 9., B. 5, 2006) ist eine junge Disziplin der Pädagogik, die nicht nur die neuen psychologischen und neuropsychologischen Ergebnisse zur Kenntnis nimmt, sondern viel weiter greifend evolutionstheoretisch argumentierend, auch die Phylogenese des Homo sapiens in den Blick nimmt und Erziehung in den Zusammenhang von Brutpflegeverhalten stellt. Vom Ansatz der Evolutionären Pädagogik ausgehend ist inzwischen auch eine allgemeine Evolutionäre Didaktik vorgelegt worden (vgl. Scheunpflug 2001). Beide Disziplinen, die Evolutionäre Didaktik, aber noch mehr die Evolutionäre Pädagogik, stellen auf diese Weise Fernbezüge her, die sie mit herkömmlichen pädagogischen bzw. didaktischen Konzeptionen und Ansätzen verbinden. Mit der vorliegenden Arbeit wird nun der Versuch unternommen, derartige Fernbezüge mithilfe des oben genannten naturgeschichtlichen Forschungsansatzes – der sich methodisch von Tremls Ansatz für die Evolutionären Pädagogik unterscheidet – beispielhaft für mathematisches Wissen auszuarbeiten. Der skeptische Leser mag sich fragen, ob bei einem Thema, wie dem der vorliegenden Arbeit überhaupt etwas brauchbares für die Diadaktik der Mathematik oder für die Pädagogik herrauskommen könne. Ihm gemäß formulieren wir unsere Leitfragen:

1. *Könnte die Mathematikdidaktik von einer naturgeschichtlichen Sichtweise auf die Mathematik profitieren?*
2. *Welche Bedeutung haben die auf dem Weg zur Antwort auf die erste Frage gewonnenen Einsichten für die Evolutionäre Pädagogik?*

3. Damit wir beide Fragen überhaupt vernünftig beantworten können, sind umfangreiche Vorbereitungen nötig. Sie werden die Kapitel 2, 3 ganz und noch einige Abschnitte der Kapitel 4, 5 umfassen. Die Beantwortung der beiden Leitfragen beginnt also in Kapitel 4.

3a. Das 2. Kapitel dient der Klärung, was mathematisches Wissen bzw. Mathematik heißen soll. Wir richten unsere Aufmerksamkeit vor allem auf Beiträge zur Begriffsexplikation der Mathematik, die uns das komplizierte Wissenschaftsgefüge ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts mitteilt. Dazu zählen zunächst Beiträge von der Mathematik selbst, von der Geschichte der Mathematik unter verschiedenen (z.B. problemgeschichtlichen, sozialen, marxistischen etc.) Gesichtspunkten und von der Philosophie der Mathematik. Die naturgeschichtliche Sicht verlangt von uns, dass wir darüber hinaus auch jene Disziplinen einbeziehen, welche die Bedingungen für die Möglichkeit unserer Mathematik aufzeigen. Dazu zählen die Evolutionäre Erkenntnistheorie, aber auch Disziplinen der Psychologie (z.B. kognitive Psychologie, Entwicklungspsychologie, Neuropsychologie, evolutionäre Psychologie), der Biologie (insbes. die Evolutionsbiologie) und neben anderen Disziplinen, wie wir zeigen werden, sogar die Physik. Wir werden diese Beiträge sowohl bezogen auf das vorliegende Wissenschaftsgefüge als auch auf die naturgeschichtliche Sicht hin ordnen, kommentieren und aus naturgeschichtlicher Sicht an einigen Stellen weiterdenken. Unsere systematische Ordnung (Gliederung) der Beiträge im Wissenschaftsgefüge stellt die methodischen Spannungen zwischen verschiedenen Gruppen von Wissenschaften heraus, denn das ist für uns wichtig; ansonsten stehen die verschiedenen Beiträge zur Begriffsexplikation der Mathematik weitgehend – unverbunden – nebeneinander und auch das spiegelt den Diskussionsstand repräsentativ.

Wir hätten das 2. Kapitel wesentlich kürzer gehalten, ginge es uns nur darum, den Stand der Forschung zu skizzieren, auf den die vorliegende Arbeit aufsetzt. Da aber die multidisziplinäre, insbesondere die an den empirischen Wissenschaften orientierte Sicht auf die Mathematik wenig verbreitet ist, referieren wir hier zum Teil sehr ausführlich und hoffen, dass damit dem interessierten Leser der Einstieg in die weitgreifende Thematik erleichtert ist.

3b. In unserem Titel – „Mathematik – ein Produkt der Naturgeschichte?“ – ist das Suffix „Geschichte“ im Terminus „Naturgeschichte“ nicht so zu verstehen, als verweise es hier auf die der historischen Forschungsmethode verpflichtete Geschichtswissenschaft. „Geschichte“ meint hier die irreversible raum-zeitliche Trajektorie des dynamischen Systems „Kosmos“.

Im 3. Kapitel, in dem die naturgeschichtliche Sicht zu einem naturgeschichtlichen Forschungsansatz ausgearbeitet wird, schlagen wir – anders als es sonst üblich ist – die folgende erweiterte Bedeutung des Begriffs „Naturgeschichte“ vor und werden sehen, wie weit wir damit kommen: Wir wollen 1. zur Naturgeschichte nicht nur die Evolution des unbelebten Materiell-Energetischen im Kosmos und die biologische Evolution auf der Erde, sondern auch die Evolution von allem Psychischen, Sozialen und Kulturellen, einschließlich der wissenschaftlichen sowie künstlerischen Spitzenleistungen des Menschen zählen, 2. annehmen, dass alles Biotische Emergenzphänomen des unbelebten Materiell-Energetischen, alles Psychische und Soziale – einer feineren Unterscheidung stünde nichts im Wege – Emergenzphänomen des Biotischen ist, und 3. die „Emergenzen“ als Phänomene auffassen, die noch nicht zufrieden stellend verstanden worden sind. Diese hypothetisch-realistischen und pragmatisch-reduktionistischen Arbeitsannahmen sind umfassend und in dem Sinne selbstbezüglich, dass der Mensch (mit seinem Wissen) versucht, die Naturgeschichte und damit auch sich selbst – einschließlich seines Wissens – zu erklären. Der hier vorgeschlagene Forschungsansatz greift Überlegungen von Vertretern der Evolutionären Erkenntnistheorie – insbesondere von R. Riedl (vgl. Riedl 1975; 1985; 1994), G. Vollmer (vgl. Vollmer 1988a; 1988b; 1990) – und von dem Mitbegründer der Evolutionspsychologie F. Klix (vgl. Klix 1992; 1993) auf und baut diese aus.

Wir gliedern unseren naturgeschichtlichen Forschungsansatz in drei Teile: In einem Teil zerlegen wir den Kosmos (unser Fokus liegt auf der Erdgeschichte) in Schichtungen von zeitlich invarianten, aber dynamisch aktiven Emergenzstrukturen, die wir – zur besseren Übersicht – mithilfe eines Multi-Layer-Modellschemas kognitiv repräsentieren werden. Finden wir dabei eine Folge früher entstandener stabiler Strukturen – des unbelebten Materiell-Energetischen, Biotischen, Psychischen oder Sozialen –, die Form oder Inhalt von Wissen ersichtlich geprägt hat oder prägt, so sei diese Folge als eine „evolutionäre Spur“

zu unserem Wissen (salopp: unseres Wissens) bezeichnet. Im einem anderen Teil formulieren wir eine an der empirischen Forschung orientierte Forschungsheuristik und in einem weiteren Teil schlagen wir vor, die Mathematik der dynamischen Systeme als Sprache für unsere Forschungsheuristik zu verwenden. Die Mathematik der dynamischen Systeme wird hier rein methodisch verwendet und ist von der Mathematik, die im 4. und im 5. Kapiteln Gegenstand der Untersuchung ist, strikt getrennt zu halten. Sie hat hier die Funktion eines Werkzeugs, dort ist sie Werkstück (m.a.W. Untersuchungsgegenstand).

Die referierenden Abschnitte des 3. Kapitels mögen dem Leser einen zeitsparenden Einstieg in die im pädagogisch-didaktischen Raum wenig verbreiteten Materialien geben, die unserem naturgeschichtlichen Forschungsansatz zu Grunde liegen.

3c. Im 4. Kapitel suchen wir nach einem Beispiel aus dem Bereich des mathematischen Wissens, das in wesentlichen Gesichtspunkten auch für anderes mathematisches Wissen charakteristisch ist, dessen Evolution wir naturgeschichtlich reflektieren können und für das wir einen Weg deutlich aufzeigen können, auf dem es uns möglich ist, unseren Mesokosmos – die Umwelt, auf die unser Organismus phylogenetisch vorbereitet ist (vgl. 2.4.3) – zu verlassen. Mit dem Beispiel wollen wir die Tragfähigkeit unseres naturgeschichtlichen Ansatzes testen können und es sollte uns erlauben auszuloten, inwieweit die Mathematikdidaktik von einer naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik profitieren könnte (1. Frage) sowie Leistungsbereiche der Evolutionären Pädagogik sichtbar machen (2. Frage).

Nach einer eingehenden Analyse entscheiden wir uns für den 4-dimensionalen Würfel, den auch VOLLMER in seinen Arbeiten mehrfach abhandelt (vgl. 2.4.3). Das Beispiel gehört in den Bereich der Entstehung höherdimensionaler Geometrien und soll uns zu zeigen erlauben, wie der Homo sapiens mithilfe von Sprache seinen Mesokosmos kognitiv überschritten hat. Die Geschichte höherdimensionaler Geometrien liegt mithilfe traditioneller Methoden ausgearbeitet bereits vor. Zur Zeitersparnis eines wenig in diesem Thema stehenden Lesers referieren wir in 4.3.1 abrissartig das Werden mathematischer Räume jenseits unseres Anschauungsraumes. Den Übergang von einem Würfel in unserem Anschauungs- bzw. Vorstellungsraum zum 4-dimensionalen Würfel führen wir anhand von Konstruktionen – die auch in der Mathematikdidaktik bekannt sind – durch und geben dann die Verallgemeinerung zum n-dimensionalen Würfel an; hier beziehen wir die Erfahrungen ein, die der Autor mit jungen – 16 bis 19 Jahre alten – Erwachsenen im gymnasialen Mathematikunterricht gewonnen hat. Die Konstruktionen werden wir naturgeschichtlich reflektieren und die dabei erzielten Einsichten heranziehen, um damit auch die Entstehungsgeschichte höherdimensionaler Geometrien naturgeschichtlich zu beleuchten. Möglich ist dies, weil unser naturgeschichtlich reflektiertes Vorgehen – verglichen mit dem Desiderat der naturgeschichtlichen Rekonstruktion höherdimensionaler Räume – gar nicht so einschränkend ist, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheint. Räume mit mehr als drei Dimensionen waren in der Mathematik erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts etabliert und heute Lernende unterscheiden sich aus naturgeschichtlicher Sicht fast nicht von den Menschen, die im 19. Jahrhundert diese Räume erfanden: beide sind mit der gleichen biologischen Ausstattung an den gleichen Mesokosmos adaptiert und haben wenig verschiedene Wissensbasen. Sie unterscheiden sich lediglich in den „höheren" Emergenzebenen, nämlich darin, dass die einen Schöpfer, die anderen Lernende sind und die heute Lernenden gut 150 Jahre später geboren wurden. Unterstützt mit dem im 3. Kapitel entwickelten Multi-Layer-Modellschema versuchen wir dann zu erkennen und mithilfe unserer Erklärungsheuristik wäre zu erhärten, wie uns unbelebte materiell-energetische, biotische, psychische und soziale Bürden (Invarianten) während der Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels geleitet haben. Die Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels ist – wie vielleicht schon jetzt deutlich wird – ein mathematisches Paradebeispiel dafür, wie der Homo sapiens mithilfe seiner kognitiven Fähigkeiten seinen Mesokosmos überschritten hat.

3d. Nachdem wir im 4. Kapitel beispielhaft gezeigt haben, was eine naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik bedeutet, welche Einsichten von ihr ausgehen können und sie bereits mit einigen didaktischen Bezügen in Kontakt gebracht haben, setzen wir unsere Überlegungen dazu im 5. Kapitel im Rahmen der Evolutionären Pädagogik und der Evolutionären Didaktik fort. Für den wenig mit den Ideen einer Evolutionären Pädagogik und Evolutionären Didaktik vertrauten Leser geben wir zuerst eine kurze Einführung in die beiden jungen Disziplinen und beleuchten sie dann aus naturgeschichtlicher Sicht.

Wir kommen noch einmal auf unser Beispiel zurück: Ein Grund dafür, weshalb unsere Wahl im 4. Kapitel auf den 4-dimensionalen Würfel fiel, bestand darin, dass er uns aufzuzeigen erlaubt, auf welchem Weg wir unseren Mesokosmos verlassen und Bereiche abstrakter Mathematik erreichen können. Weil es sich dabei um die Abgrenzbarkeit der Welten zwei und drei der in der Pädagogik gelegentlich benutzten 3-Welten-Theorie handelt, setzen wir uns auch mit dieser Problematik auseinander, indem wir uns auf die Auffassung der 3-Welten-Theorie von Treml beziehen und sie dann naturgeschichtlich reflektieren.

Zur Vorbereitung unserer Argumentation für eine Evolutionäre Mathematikdidaktik werfen wir einen Blick über die Geschichte des Mathematikunterrichts und das Werden der Mathematikdidaktik. An die mit diesem Überblick gegebenen Informationen knüpfen wir dann unsere naturgeschichtlichen Überlegungen.

Mit den Kapiteln 4 und 5 erhalten die beiden zentralen Fragen der vorliegenden Arbeit eine Antwort.

Kapitel 2

Begriffsexplikationen der Mathematik – der multidisziplinäre Diskussionsstand

2.1 Vorüberlegungen

Schlägt man in Lexika unter dem Stichwort „Mathematik“ nach, so findet man nur Begriffsexplikationen, die auf

- die Systematik der mathematischen Gebiete, Begriffsstrukturen und Methoden,
- die Geschichte der Mathematik oder
- die Philosophie, insbesondere die Philosophie der Mathematik

Bezug nehmen. Wir werden in diesen Vorüberlegungen ein Ordnungsschema erarbeiten, in dem nicht nur die oben genannten Begriffsexplikationen ihren Platz finden (vgl. 2.2 u. 2.3), sondern auch solche, die auf

- evolutionstheoretischen Ansätzen und
- Beiträgen von den empirischen Wissenschaften

gründen (vgl. 2.4). Unsere mit jedem Ansatz gewonnenen Einsichten halten wir als Beiträge zu einer Begriffsexplikation der Mathematik fest. Sie repräsentieren in ihrer Gesamtheit den multidisziplinären Kenntnisstand zum Thema Begriffsexplikationen der Mathematik.

Etymologische Vorbemerkung: Wir referieren hier den Beitrag zum Stichwort „Mathematik“ aus dem Herkunftswörterbuch der deutschen Sprache; teilweise gleichwertige Informationen geben auch die wissenschaftlichen Enzyklopädien (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994; Mittelstraß 1984; Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1980).

> „Mathematik“ als Bezeichnung für die Lehre von den Raum und Zahlengrößen wurde im 15. Jahrhundert aus dem gleichbedeutenden lateinischen *(ars) mathematica* entlehnt, das seinerseits aus dem griechischen *mathēmatikḗ (téchnē)* übernommen ist. Das zugrunde liegende griechische Adjektiv *mathēmatikós* „lernbegierig, wissenschaftlich, mathematisch“ ist von griechisch *máthēma* „das Gelernte, die Kenntnis“ abgeleitet, dessen Plural speziell „(mathematische) Wissenschaften“ bedeutet. Stammwort ist griechisch *manthánein* (Aorist: *matheīn*) „(kennen)lernen, erfahren“, das urverwandt mit deutsch „munter“ ist. (vgl. Duden Bd. 7 2007, s.v.: Mathematik)

Naturgeschichte und Wissenschaft

Wissenschaft – d.h. jedes methodisch kontrollierte „Wissen schaffen“ – ist ein dem Wandel in der Zeit unterliegendes Unternehmen. Dass sie ein soziales Phänomen ist, spüren wir: Wissenschaftler – „Wissen schaffende“ – bestimmen den zu einer Wissenschaft gehörigen Untersuchungsgegenstand, die Forschungsmethoden, reflektieren die Grundlagen von beidem und kommunizieren die Ergebnisse. Dass Wissenschaft – und jeder Kenntniserwerb – aber in viel umfassenderem Sinne problematisch ist, zeigt sich wohl am eindrucksvollsten in der unauflösbaren Selbstbezüglichkeit, die darin besteht, dass der in der Naturgeschichte entstanden Mensch mit seinem Verstand die Naturgeschichte (zu der er selbst gehört) zu erklären versucht. Aus naturgeschichtlicher Sicht ist also Wissenschaft ein Emergenzphänomen der Evolution und die Frage, wie Wissenschaft in den in Raum und Zeit selbstwechselwirkenden und miteinander wechselwirkenden Emergenzebenen des unbelebten Materiell-Energetischen, des Biotischen, des Psychischen, des Sozialen etc. entstand, deswegen keinesfalls abwegig.

Etwa 600 v.Chr. enstehen bei den Griechen die Emergenzphänomene „wissenschaftliche Mathematik“ und „(abendländische) Philosophie“ und mit ihnen erstens die Tradition menschlichen Denkens in reflektierender Innensicht (vgl. Klix 1993, S. 322-332, insbes. S. 338-340) und zweitens die lange Entwicklung zu unserem heutigen Wissenschaftsgefüge, zunächst in Ablösungsprozessen von der Philosophie.

Der Entwicklungspfad der Philosophie und der Wissenschaften von den Griechen bis heute liefert uns nicht nur Wissen, sondern in der inhaltlichen und sozialen Struktur dieses Wissens ein Erbe, mit dem wir uns insbesondere dann auseinandersetzen müssen, wenn es uns mit Problemen konfrontiert, die den Weg zur Lösung von Sachproblemen verstellen. Zwei Bifurkationen auf diesem sehr komplexen Entwicklungspfad sind – aus naturgeschichtlicher Sicht – für die vorliegende Untersuchung besonders wichtig: Erstens die Herausbildung der empirischen Methode etwa zur Zeit GALILEIS, zunächst für die Wissenschaft, die wir heute Physik nennen, die sich damit von der nicht empirisch arbeitenden Philosophie emanzipierte. Zweitens die Entwicklung einer Geisteswissenschaft – mit der ihr eigentümlichen ideographisch-verstehenden historischen Methode neben anderen –, zu der auch die Geschichtswissenschaft zählt – in der die historische Methode dominant ist.[1] Mit der ersten Bifurkation entstanden die Vorausetzungen für die Möglichkeit, neben der mit den Griechen beginnenden apriorischen (z.B. PLATON) und empirischen (z.B. ARISTOTELES) Sicht auf die Mathematik im Rahmen philosophischer Reflexionen, Mathematik auch im Rahmen von empirisch arbeitenden Einzelwissenschaften zu untersuchen, was jedoch erst langsam in den etwa letzten hundert Jahren begonnen wurde, nachdem sich im 19. Jahrhundert unser modernes Wissenschaftsgefüge herausgebildet hatte. Die zweite Bifurkation hat uns ein problematisches Erbe damit geschaffen, dass sich die Geschichtswissenschaft als eine Geisteswissenschaft etabliert und dabei von den empirisch arbeitenden Wissenschaften – und damit ganz entschieden von den Naturwissenschaften – abgegrenzt hat. Seitdem versteht sich auch die Mathematikgeschichtswissenschaft (d.h. die Ge-

[1]Die Tatsache, dass sich die Geisteswissenschaften in einem Abgrenzungs- und Selbstbehauptungsprozess gegenüber den modernen Naturwissenschaften in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts etablierten, ist für uns weniger wichtig.

Auch die Ablösung der Psychologie – auf ihrem Weg zu einer etablierten Wissenschaft – von der Philosophie im so genannten „Psychologismusstreit der (deutschen) Philosophie“ (vgl. Rath 1994) ist hier wenig interessant, obwohl dieser im FREGE-HUSSERL-Streit auch anhand logisch-mathematischer Themen ausgetragen wurde.

schichtswissenschaft, die die Geschichte der Mathematik aufarbeitet) als eine Geisteswissenschaft und der historischen Methode im Wesentlichen verpflichtet, womit eine an empirischen Wissenschaften orientierte und insbesondere naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik außerhalb ihres Zuständigkeitsbreichs liegt.[2] Aber nicht nur das von der Menschheit hervorgebrachte mathematische Wissen, sondern auch die Versuche seiner Charakterisierung[3] werden von der Mathematikgeschichtswissenschaft gesammelt, geordnet und kommentiert.

Geschichte, Fachwissenschaft, Fachwissenschaftsgeschichte und Mathematik

Die nun folgenden Überlegungen dienen der Sprachregelung, sie rekapitulieren und präzisieren einige Begriffe, auf die sich die Gliederungsgesichtspunkte des vorliegenden Kapitels beziehen. Die dabei konstruierten Wortungetüme wie „Fachwissenschaftsgeschichtswissenschaft“ versprechen wir jenseits unserer Vorüberlegungen nicht mehr zu verwenden.

Versteht man Geschichte als die Veränderungen von Tatsachen und Sachverhalten in Raum und Zeit (in der modernen Physik auch von Raum und Zeit selbst) sowie die Resultate dieser Veränderungen und demgegenüber die Tätigkeit der Produktion und Akkumulation von derartigen Kenntnissen als Fachwissenschaften, dann ist es natürlich, die Erforschung der Prozesse der Kenntnisgewinnung in den Fachwissenschaften als Gegenstand der so genannten Fachwissenschaftsgeschichtswissenschaft und die Gesamtheit dieser als Wissenschaftsgeschichtswissenschaft zu bezeichnen.

1. Anmerkung: Disziplin (z.B. Fachgeschichte im Sinne der realen Geschichte des Fachs) und Metadisziplin (Fachgeschichtswissenschaft) tragen oft die Bezeichnung der Disziplin (Fachgeschichte). Was gemeint ist, muss dann im Einzelfall aus dem Kontext erschlossen werden.

2. Anmerkung: Forschungsergebnisse aus der Wissenschaftsgeschichtswissenschaft zeigen, dass alle Wissenschaften eine Vorgeschichte und eine Phase ihrer Etablierung durchlaufen, nach der sie schließlich zur Reife gelangen (vgl. Guntau/Laitko 1987). Dabei durchlaufen sie in der Regel Einengungen, Erweiterun-

[2] Teile des vorliegenden Kapitels können deswegen auch als ein Pädoyer für eine Öffnung der Geschichtswissenschaft für eine naturgeschichtliche Forschungsmethode gelesen werden.

[3] Die Charakterisierungsversuche des mathematischen Wissens unter inhaltlichen oder methodischen Gesichtspunkten zählen zu jenem Teil der Geschichte der Mathematik, der systematisch besonders von der Philosophie unter den Schlagworten „Philosophie der Mathematik“ oder “Grundlegungen der Mathematik“ bearbeitet worden ist.

gen oder Wandlungen in Gegenstand oder Methode. Manche Wissenschaften sind verschwunden, einige sind scheinbar verschwunden, nachdem sie einen anderen Namen bekommen haben.

3. Anmerkung: Im Allgemeinen konkurrieren sehr verschiedene Konzeptionen von Geschichtswissenschaft miteinander, die ihrerseits auch dem Wandel in der Zeit unterliegen (vgl. Bialas 1990).

Den obigen Unterscheidungen entsprechend ist die Geschichte des Lebendigen das Biotische[4], die zugehörige Fachwissenschaft die Biologie und die zugehörige Fachwissenschaftsgeschichtswissenschaft die Biologiegeschichte.

Weil mathematische Begriffsstrukturen jedoch erst von Menschen geschaffen werden – die Tatsache, dass dabei z.B. auch stammesgeschichtliche Strukturen noch heute eine Rolle spielen, wird in der herkömmlichen Sicht zur Einteilung der Wissenschaften ausgeblendet –, ist das Schema der obigen Unterscheidungen hier nur verkürzt anwendbar: Die Tätigkeit der Produktion und der Akkumulation von mathematischen Begriffsstrukturen selbst ist Gegenstand der Fachwissenschaft Mathematik, die darum mit der Geschichte dieser Strukturen identifiziert wird. Demgegenüber ist die Erforschung der Prozesse, in denen mathematische Begriffsstrukturen entstehen, Gegenstand der Mathematikgeschichtswissenschaft. Sie wird meist als Geschichte der Mathematik oder als Mathematikgeschichte bezeichnet.

Wissenschaftsgeschichte und Mathematikgeschichte

Die Wissenschaftsgeschichtswissenschaft – also die Wissenschaft von der Geschichte der Wissenschaft –, wie wir sie eingeführt haben, darf nicht einfach mit der Wissenschaftsgeschichte identifiziert werden[5]. Letztere habe laut V. Bialas „traditionsgemäß“ nur „die Geschichte der Naturwissenschaften, der Technik und der Medizin“ zum Gegenstand (vgl. Bialas 1990, S. 121), während J. Mittelstrass sie „insbes. im Bereich der Naturwissenschaften und der Mathematik [als] disziplinenbildende Bezeichnung“ ausweist und auf ihre komplizierte, ihre Bedeutung erweiternde Geschichte hinweist (vgl. Mittelstraß 1996a).

[4] Hier wird die Position eines Realismus unterstellt. Offenbar hängen die Unterscheidungen im Text von dieser Annahme ab. In der vorliegenden Arbeit wird ein hypothetischer Realismus vertreten, vgl. 2.4.3 Fußnote 17.

[5] „In der Epoche der Aufklärung haben sich mit der philosophischen Begründung der Geschichtswissenschaft die Konturen der Wissenschaftsgeschichte herausgebildet“ (Bialas 1990, S. 28).

Hier sei auf zwei Gemeinsamkeiten von Wissenschaftsgeschichte und Mathematikgeschichte hingewiesen: Beide wurden von überwiegend historisch und philosophisch interessierten, aber nicht historisch geschulten Vertretern der jeweiligen Fachwissenschaft verfasst (vgl. Bialas 1990, S. 80). Außerdem dominiert in der Wissenschaftsgeschichte und in der Mathematikgeschichte noch heute die ideographische, verstehende Geschichtskonzeption, die auch als „historistische Geschichtskonzeption" (nach dem Zeitalter des Historismus benannt) bezeichnet wird oder ihr nahe steht und dergemäß, wie es heißt, aus der Geschichte nichts zu lernen sei (s.u., Fußnote 6 und vgl. Bialas 1990, S. 50). Diese Tatsache hat zur Folge, dass die Schwerpunkte in den wissenschaftlichen Arbeiten deswegen überwiegend die innere Entwicklung der betrachteten Wissenschaft aus der Sicht ihrer Fachvertreter betreffen: Die meisten Arbeiten stützen sich auf Texte (als Quellen) und haben problemgeschichtliche Detailfragen zum Inhalt, und insofern es sich um Überblicksdarstellungen handelt, sind auch diese überwiegend aus der Sicht des Fachwissenschaftlers der betrachteten Einzelwissenschaft verfasst. Typisch für mathematikhistorische Arbeiten, die nach der historistischen Geschichtsaufassung verfasst werden, ist weiter, dass „große Mathematiker" mit ihren mathematischen Werken, Biographien, Korrespondenzen etc. im Mittelpunkt des Interesses stehen, während der Mathematiker als Mensch in seiner materiell-energetischen und sozialen Umwelt aus biologischer, psychologischer oder soziologischer Sicht keine oder nur sehr wenig Beachtung erhält.

Historische und systematische Wissenschaften

Wir erinnern kurz an die Unterscheidung von historischen und systematischen Wissenschaften und führen eine Differenzierung der systematischen Wissenschaften in dynamische und statische ein. Den Unterscheidungen entsprechend werden wir die in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels gegebenen Begriffsexplikationen der Mathematik gliedern.

1. Innerhalb der geschichtswissenschaftlichen Tradition entstand in der Zeit unmittelbar nach G.W.F. Hegel die Geistesbewegung des Historismus und mit ihr die „historistische Geschichtsposition" (Bialas 1990, S. 50-51), dergemäß erstens „die Geschichte stets ein individuelles und untereinander unvergleichbares Geschehen zum Inhalt habe" (Bialas 1990, S. 50), zweitens „der Wert einer geschichtlichen Epoche in sich selbst beruhe" (Bialas 1990, S. 50), sodass „aus der

Geschichte nichts zu lernen sei“ (Bialas 1990, S. 50)[6]. Diese in ihrer radikalen Fassung nur das Einzelne im Ganzen betrachtende – also den Sinn des Wissenschaftlers für das Systematische, d.h. für übergeordnete Regelmäßigkeiten oder gar Gesetzmäßigkeiten im Forschungsgegenstandsfeld ausblendende – historistische Methode wird auch als ideographische und verstehende historische Methode, in unpräziser Rede – verkürzt und andere geschichtswissenschaftliche Forschungsmethoden vernachlässigend – häufig die historische Methode genannt. Die ideographische und verstehende historische Methode ist bis heute die zentrale und dominierende Methode in den Geschichtswissenschaften. Wissenschaften, die überwiegend die historische Methode verwenden, werden als *historische Wissenschaften* bezeichnet.

2. Wissenschaften, die in einem Forschungsgegenstand nach übergreifenden Regelmäßigkeiten, – z.B. Gesetzmäßigkeiten in Raum und Zeit oder Strukturen in Abhängigkeit von einem Ordnungsparameter – suchen und diese zur Interpretation oder Erklärung vorliegender Tatsachen (z.B. Ereignisse, Fossilien, Dokumente, empirisch erhobene Daten) bzw. Sachverhalte (z.B. in Modellen) verwenden, werden als *ahistorische oder systematische Wissenschaften* bezeichnet und den historischen Wissenschaften gegenübergestellt[7].

Innerhalb der systematischen Wissenschaften führen wir nun noch die folgende, weitergehende Unterscheidung ein: Systematische Wissenschaften, die überzeitlich gültige Aussagen über in Raum und Zeit veränderliche Gegenstände

---

[6]Schon während des Historismus blieb die historistische Geschichtsauffassung nicht ohne Gegenbewegung: So wendet sich H.T. Buckle dagegen, „daß die Historiker sich darauf beschränken, Begebenheiten bloß zu erzählen, und sich gegen jede Verallgemeinerung in der Geschichtsschreibung wenden. ... Mit der Hervorhebung der allgemeinen Ordnung, der Begründung der Methode und der Entdeckung der Gesetzmäßigkeiten sind nach Buckle die wichtigsten Aufgaben der Geschichtswissenschaft umrissen.“ (Bialas 1990, S. 51-52).

Auch J.W. Draper wendet sich gegen die historistische Geschichtsauffassung, indem er „die zivilisatorische Entwicklung in den Zusammenhang einer naturhaft bedingten Gesetzlichkeit stellt, wobei er auch die Ergebnisse der zeitgenössischen Evolutionstheorie in seine Beweisführung mit einbezieht.“ (Bialas 1990, S. 52).

Für eine detailliertere Darstellung des Historismus, der historistischen Geschichtskonzeption und der dort verwendeten Methoden siehe (Bialas 1990, S. 49-56).

Es sei hier angemerkt, dass die historistische Geschichtsauffassung in der Reaktion auf die aufklärerische universalististische Geschichtsposition, insbesondere auf die von der Geistesbewegung des Positivismus hervorgebrachten, systematisch ausgerichteten Geschichtskonzeptionen entstand (vgl. Bialas 1990, S. 36).

[7]Für eine Gegenüberstellung der Begriffe „historisch/systematisch“ z.B. (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994, s.v.: Historisch/Systematisch).

formulieren (wie z.B. die Physik oder die Biologie) bezeichnen wir als *dynamische Wissenschaften* und solche, die überzeitlich gültige Aussagen über in Raum und Zeit unveränderliche Sachverhalte formulieren (wie z.B. die Mathematik oder die Logik) nennen wir *statische Wissenschaften*.

3. Ist z.B. eine Ereignisfolge in Raum und Zeit gegeben, dann beschränkt sich eine ideale Untersuchung einer historischen Wissenschaft nur auf die Tatsachen als ein einmaliges Geschehen, ohne dass irgendwelche Strukturen darüber hinaus dabei herangetragen werden. Eine Bearbeitung der Ereignisfolge von einer systematischen Wissenschaft wird demgegenüber über die vorliegenden Tatsachen hinausgehend Theorien, Modelle, Arbeitshypothesen etc. verwenden, um die vorliegenden Tatsachen zu erklären, z.B. sie als eine Spezialfall einer gesetzesartigen Aussage auszuweisen. Eine systematische Bearbeitung von Forschungsgegenständen ist sowohl in statischen Wissenschaften – so z.B. in der Mathematik, in der die Begriffsstrukturen eines Forschungsgebiets in ihren logischen und begrifflichen Abhängigkeiten dargestellt werden – als auch in dynamischen Fachwissenschaften kanonisch: So z.B. in der Physik, in der die Lebensphasen eines Sterns mithilfe von mathematischen Gleichungen für die relevanten physikalischen Größen in Raum und Zeit modelliert werden; in der Biologie, in der die Zeitentwicklung einer Population untersucht wird; in der Psychologie, in der das menschliche Gedächtnis als Computerprogramm modelliert wird; in der Soziologie, in der der gesellschaftliche Wandel Gegenstand der Forschung ist. Tatsächlich kommt keine historische Wissenschaft ohne Systematik aus und jede systematische Wissenschaft unterliegt dem zeitlichen Wandel. Die Naturwissenschaften und die Mathematik überbetonen meist das Systematische und vernachlässigen oft ihre Wissenschaftsgeschichte in ihrer Arbeit. Die Geschichtswissenschaft nutzt zwar naturwissenschaftlichen Methoden z.B. zur Altersbestimmung von Funden, aber in ihrer eigentlichen Arbeit dominiert die historische Methode, die bestenfalls durch eine philosophische, soziologische, ethnologische oder psychoanalytische Systematik ergänzt wird. Eine Systematisierung ihrer Forschungsgegenstände mithilfe von z.B. naturwissenschaftlichen Theorien und Modellen erkennt die gegenwärtige Geschichtswissenschaft nicht als ihrem Arbeitsbereich zugehörig an.

Nachdem wir in 2.2 die den zeitlichen Wandel mathematischer Begriffe systematisch ausblendenden Begriffsexplikationen auf Grund von erstens Aufzählungen und Beispielen und zweitens von Grundlegungsversuchen problematisiert haben – wir nennen sie systematisch-statische Begriffsexplikationen –, referieren wir in 2.3 eine Folge von geschichtswissenschaftlichen Begriffsexplikationen der Mathematik, die mit einer „nur historischen“ Explikation beginnt und dann – geschichtswissenschaftlich anerkannte – systematische Einschläge z.B. aus der Philosophie bzw. den Sozialwissenschaften aufnimmt. In 2.4 überschreiten wir den Bereich der von der Geschichtswissenschaft anerkannten Systematik, indem wir die Entwicklung von mathematischem Wissen aus empirischer, naturwissenschaftlicher Perspektive analysieren. Wir werden diese ahistorische – systematisch-dynamische – Perspektive zu einer die Psychologie, die Biologie bis zur Physik umschließenden naturgeschichtlichen Systematik ausbauen, die auch fruchtbare Beiträge von Forschungsprogrammen enthält, denen ein umfassender evolutionärer Gesichtspunkt zu Grunde liegt, wie z.B. von der Evolutionären Erkenntnistheorie.

2.2 Systematisch-statische Begriffsexplikationen der Mathematik

2.2.1 Explikationen mithilfe von (diskriminierenden) Beispielen und der Aufzählung von Gebieten

Eine Begriffsexplikation der Mathematik, die den Wünschen der meisten Menschen vielleicht am besten entspricht, ist die der Aufzählung jener Gebiete (Geometrie, Arithmetik, Wahrscheinlichkeitstheorie etc.), Gegenstände (Zahl, Zahlenkörper, Unendliches, Vektorraum, Mannigfaltigkeiten etc.) und Methoden (vollständige Induktion, Widerspruchsbeweis, konstruktive Beweise, Algorithmen etc.), die als zur Mathematik gehörig bezeichnet werden.

Die Entscheidung, was überhaupt zur Mathematik, was zu welchem Teilgebiet der Mathematik gehören soll oder wie Teilgebiete der Mathematik voneinander abzugrenzen sind, könnte das Ergebnis einer Diskussion über diskriminierende Beispiele sein, doch oft wird eine solche Entscheidung nicht inhaltlich, sondern wissenschaftssozial bestimmt. Pragmatische Gesichtspunkte sind für die Lösung dieser Probleme unvermeidbar.

1. Beispiel: Viele bewährte von Physikern für die Physik entwickelte Kalküle, sind erst viel später mathematisch korrekt formuliert worden, für manche steht eine solche Formulierung noch aus. Es stellt sich die Frage, ob derartige Kalküle

bereits im Zustand ihrer heuristischen Formulierung zur Mathematik gezählt werden sollen, sobald sich Mathematiker für sie interessieren, oder ob sie erst zur Mathematik gehören, nachdem sie mithilfe von anerkannten mathematischen Mitteln korrekt formuliert worden sind.
2. Beispiel: Sind alle Muster, die man im Alltag vorfindet, automatisch auch Gegenstände der Mathematik, nur weil man sie etwa mithilfe einer Klassentheorie (bzw. Mengenlehre) oder mithilfe von Lagebeziehungen, Koordinaten und anderen Begriffen der Mathematik teilweise formal beschreiben könnte?
3. Beispiel: Ist es sinnvoll, die Vermessung von Strukturen in Räumen mit mehr als drei Dimensionen noch als Geometrie zu bezeichnen?
4. Beispiel: Wird die Unterteilung der Mathematik in „reine Mathematik“ und „angewandte Mathematik“ sinnvoll dadurch charakterisiert, dass man die Gebiete der Mathematik, die von konkreten Anwendungen losgelöst entwickelt werden, „reine Mathematik“ nennt und die Gebiete der Mathematik, die aus konkreten Anwendungen in den Wissenschaften, der Technik oder dem sozialem Bereich hervorgehen, „angewandte Mathematik“ nennt? Oder sollte nur die aus dem Zahlbegriff ohne Bezug auf anschauliche Formen abstrahierte Mathematik als „reine Mathematik“ bezeichnet werden?

Die Begriffsexplikation der Mathematik durch Aufzählung ihrer Gebiete und durch eine auf einer Diskussion über diskriminierende Beispiele fußenden Grenzziehung zwischen dem, was Mathematik oder ein mathematisches Gebiet heißen soll, und dem, was außerhalb dessen liegen soll, zeichnet aus, dass sie besonders konkret ist. Aber sie hat mindestens zwei große Nachteile: Erstens ist eine differenzierte Aufzählung aller Gebiete der Mathematik sehr mühsam, unübersichtlich und wegen inhaltlicher Überschneidungen nicht eindeutig. Auch eine Darlegung aller Gebiete der Mathematik, die sich auf eine gelungene Systematik – wie z.B. die von N. Bourbaki (s. 2.2.2: Formalismus) – stützt, macht es nicht viel einfacher. Zweitens ist die Art dieser Begriffsexplikation statisch, während ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt, dass nicht nur viele mathematische Gebiete, sondern auch die mathematischen Begriffe und Argumentationsverfahren durch Abstraktion, Generalisierung, Transformation und Integration einem Wandel in der Zeit unterliegen, wobei sich oft auch die Bezeichnungen ändern. Würde man z.B. die Wissensgebiete aufzählen, die in der Zeit eines Euklid, G.W. Leibniz bzw. Bourbaki unstrittig zur Mathematik gehören, so würde ein Vergleich der Listen den zeitlichen Wandel zeigen.

Begriffsexplikationen der Mathematik mithilfe von Beispielen und einer Aufzählung ihrer Gebiete bewegen sich aus naturgeschichtlicher Sicht betrachtet in der Emergenzebene des Wissenschaftssozialen, die Wirksamkeit anderer Emergenzebenen wird übersehen.

Bezüge zur Mathematikdidaktik

Tatsächlich lernen Kinder, nachdem sie im Anfangsunterricht mit den elementarsten Begriffen – wenig reflektiert – vertraut gemacht worden sind, die Mathematik anhand von ausgewählten (meist kontexorientierten) Beispielen kennen, die später zu Beispieltypen und dann zu einem kleinen mathematischen Gebiet mit einer Gebietsbezeichnung zusammengefasst werden. Die Auswahl von Aufgaben und Aufgabentypen durch Lehrkräfte für die als Mathematikunterricht ausgewiesenen Unterrichtsstunden und die Eingliederung derselben in Abschnitte von Schulbüchern strukturieren das Wissen in den Köpfen von Kindern und Jugendlichen und vermitteln ihnen zunächst beiläufig, was zum so genannten mathematischen Wissen zählt.

Nicht grundsätzlich anders geht es an den meisten Hochschulen und Universitäten zu: Die Mathematikstudenten hören in ihren Lehrveranstaltungen zunächst systematische Darstellungen mathematischer Gebiete und bearbeiten Aufgaben, indem sie Beweistechniken und Begriffe „imitierend“ anwenden und Gebietsbezeichnungen übernehmen. Im Laufe der Zeit wächst ihr Überblick. Nur wenige Mathematiker belegen Lehrveranstaltungen, in denen Begriffsexplikationen der Mathematik thematisiert werden, oder denken gründlich über die „Natur“ des mathematischen Wissens nach.

Eine Begriffsexplikation der Mathematik auf Grund von (diskriminierenden) Beispielen und der Aufzählung von Gebieten wird sowohl in der Schule als auch in der Hochschule eher beiläufig vermittelt.

2.2.2 Explikationen mithilfe von Grundlegungsversuchen

Die Reflexion der Grundlagen der Mathematik ist so alt wie die wissenschaftliche Mathematik selbst (sie beginnt also ebenfalls mit den Griechen) und in ihren 26 Jahrhunderten wechselten sich Phasen, in denen die Entwicklung von neuer Mathematik stärker heuristisch verlief (so in 17. und 18. Jahrhundert), mit Phasen vermehrten Bemühens um die Klärung ihrer Grundlagen ab. Der nun folgende, die Sicht vieler Philosophen und vieler Mathematiker repräsentierende Ansatz für eine Begriffsexplikation der Mathematik geht von den gegenstandsorientierten oder beweisorientierten „Grundlegungsversuchen“ für die Mathematik aus, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einsetzten und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts die so genannte Grundlagenkrise der Mathematik auslösten[8]. Von den Vertretern dieses Ansatzes wird Mathematik nicht empirisch, sondern aus der reflektierenden Innensicht des Denkens untersucht. Dies ist aus ihrer Sicht plausibel, denn das Nachdenken über z.B. „Eigenschaften von Schiefkörpern“ oder „Infinitesimalitäten“ hat wenig mit Empirie zu tun und auch der Zahlbegriff des Intuitionismus (s.u.) geht von einer angeborenen Urintuition des Zählens aus.

Zunächst wird von den prominentesten Grundlegungsversuchen der Mathematik die Rede sein, erst danach werden sie hinsichtlich einer Begriffsexplikation für die Mathematik ausgelotet.

Logizismus

Wenn mathematisches Wissen überhaupt als sicheres Wissen gelten kann, dann nur insoweit es unabhängig von der Erfahrung ist. Fasst man die mathematischen Begriffe als die „Gegenstände“ einer von der Erfahrung unabhängigen (d.h. apriorischen) Mathematik auf, die von den Mathematikern nicht erfunden, sondern entdeckt werden, dann können diese Entdeckungen nur das Ergebnis einer Untersuchung in einer nicht empirischen Welt, z.B. PLATONischer Gegenstände (Ideen), sein (vgl. Poser 1994, S. 207-209). Fasst man die mathematischen Begriffe als allein vom Denken hervorgebracht auf und bezeichnet diese Gesamtheit mit dem Wort „Welt“, dann ist diese Welt der mathematischen Begriffe nur insoweit nicht empirisch, wie z.B. nicht nach den biologisch-psychologischen Voraussetzungen für die Möglichkeit der Erzeugung dieser Begriffe gefragt wird.

Eine Grundlegung der Mathematik mithilfe ihres Gegenstandsbereichs kann als ontologische Grundlegung bezeichnet werden und die Grundlegungsversuche der Mathematik, die dem Namen „Logizismus“[9] subsumiert sind, stehen für die Bemühung einer ontologischen Reduktion der Mathematik auf die Logik. Zu beachten ist, dass „Logik“ hier nicht psychologisch, sondern als (nicht empirischer) Gegenstand der philosophischen und mathematischen Tradition aufzufassen ist.

[8]Die Bemühungen um die Klärung der Grundlagen der Mathematik während der gesamten Geschichte der Mathematik hat O. BECKER zusammengefasst (vgl. Becker 1964).

[9]Logizismus im Allgemeinen bezeichnet in der Philosophie den Ansatz, Erkenntnis allein mithilfe von Logik zu begründen. Der mathematische Logizismus ist somit ein Spezialfall des Allgemeinen Logizismus (vgl. Mittelstraß 1984: s.v. Logizismus).

Das logizistische Programm wurde von G. Frege für die Arithmetik in seiner „Begriffsschrift“ (1879) durchgeführt und von B. Russell und N. Whitehead in ihrer „Principia mathematica“ (1910) fortgeführt. Die in Freges Begriffsschrift enthaltene Inkonsistenz (die Russellsche Antinomie) und andere konstruierbare Inkonsistenzen konnten in der Principia mathematica durch Verbote von bestimmten Mengenbildungen (Typentheorie, eingeschränkte Verwendung imprädikativer Verfahren[10]) zwar ausgeschlossen werden, aber damit „bestimmt nicht mehr [allein] der Gegenstandsbereich, welches die zu untersuchenden Sachverhalte der Mathematik sind,...“ (Poser 1994, S. 208), sodass sich das logizistische Programm in seiner intendierten Radikalität als nicht durchführbar zeigt.

Darüber hinaus stellt sich erstens die erkenntnistheoretische Frage, „wie man sich den Zugang zum platonischen Dingbereich der Mathematik und der Logik denken müsse“ (Poser 1994, S. 208) und zweitens, warum sich die Mathematik für die Beschreibung der empirischen Welt (Mathematisierung und mathematische Modellierung) bewährt.

Formalismus

Ein anderer Typus von Grundlegungsversuchen der Mathematik geht auf das von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern geschaffene so genannte Hilbert-Programm zurück, der L.E.J. Brouwer folgend, bis heute „Formalismus“ genannt wird (vgl. Mittelstraß 1984, s.v.: Hilbertprogramm).

Dem „Formalismus“ entsprechend ist die Gesamtheit des vorliegenden begrifflichen mathematischen Wissens (etwa mithilfe eines Axiomensystems der Mengenlehre) zu axiomatisieren, wobei von der intuitiven Bedeutung, die den Mathematiker zur Formulierung der Axiome führte, vollkommen abgesehen wird. Die Aussagen, die aus einem Axiomensystem gewonnen werden können, werden mithilfe eines Kalküls erzeugt; hier bezeichnet ein Kalkül ein formales Verfahren, welches aus einem Alphabet von Grundfiguren (Zeichen) und Grundregeln, komplexe Figuren zu konstruieren – m.a.W. herzustellen bzw. abzuleiten – erlaubt. Insofern nun die Widerspruchsfreiheit eines der formu-

[10] Die Typentheorie wurde in Systemen der Logik bzw. Mengenlehre mit dem Ziel konstruiert, durch Unterscheidung von z.B. Element, Menge, Menge von Mengen usw. Widersprüche in diesen Systemen auszuschließen (vgl. Mittelstraß 1996, s.v.: Typentheorie).

Die vielfach kritisierten imprädikativen Verfahren kennzeichnen einen Gegenstand mithilfe einer Gesamtheit, die den zu kennzeichnenden Gegenstand selbst enthält, genauer (vgl. Mittelstraß 1984, s.v.: imprädikativ/Imprädikativität).

lierten Axiomensysteme nachgewiesen werden kann, sind auch alle aus diesem Axiomensystem ableitbaren Aussagen als widerspruchsfrei nachgewiesen und die durch ein widerspruchsfreies Axiomensystem gegebenen Aussagen gelten dann im Formalismus als begründete Mathematik.

Während im Formalismus HILBERTs für die Mathematik sowohl das Tertium non datur als auch das Aktual-Unendliche (d.h. das fertig gegebene Unendliche im Gegensatz zum werdenden – potenziell – Unendlichen) akzeptiert werden, sind für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems für die Mathematik nur „finite" Methoden (vgl. Hilbert/Bernays 1968, Bd. 1: S. 32; 1970, Bd. 2: S. VII u. S. 361) zugelassen. Im Gegensatz zu den zu untersuchenden Axiomen, die zur Mathematik gehören, heißt die Argumentationsebene, in der die Widerspruchsfreiheit dieser Axiome untersucht wird, „Metamathematik" oder „Beweistheorie" (Hilbert/Bernays 1968, Bd. 1: S. 44). Was unter „finit" verstanden werden soll, ist einerseits nur vage bestimmt als: nicht axiomatisiert, sondern inhaltlich, konstruktiv, anschaulich sowie vorstellungsmäßig. Andererseits unterlag das Wort „finit" mit dem Erscheinen der Sätze von K. GÖDEL einer Bedeutungserweiterung (vgl. Hilbert/Bernays 1968, Bd. 1: S. 43; 1970, Bd. 2: S. VII). So beruht z.B. der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie von G. GENTZEN auf einer bedeutungserweiterten Auffassung von „finit", die durch eine konstruktive Verwendung der transfiniten Induktion charakterisiert ist (vgl. Hilbert/Bernays 1970, Bd. 2: Paragraph 5, S. 263-387; Becker 1964, S. 383, 387-392).

Wird die Mathematik im Logizismus gegenständlich begründet, so wird sie im Formalismus mithilfe eines Zeichensystems begründet (vgl. Poser 1994, S. 207-208, 210): Mathematik heißt alles, was als widerspruchsfrei im Rahmen des angenommenen Zeichensystems nachgewiesen wurde; mathematische Existenz ist somit synonym mit Widerspruchsfreiheit. Und insofern man das Zeichensystem nicht spezifiziert, kann man mit H.B. CURRY (1958) Mathematik als die Wissenschaft von den formalen Systemen definieren (vgl. Poser 1994, S. 206, 210). Wie im Logizismus sind auch die im Sinne des Formalismus existierenden Gegenstände der Mathematik nicht von empirischer Art, ihnen kommt somit auch ein nicht empirischer (oft apriorisch genannter) ontologischer Status zu. Im Gegensatz zum Logizismus resultiert der ontologische Status der mathematischen Gegenstände im Formalismus jedoch aus der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems (vgl. Poser 1994, S. 210).

Der Formalismus ist wegen seiner Erfolge die heute am weitesten verbreitete Grundlegung der Mathematik: Die Gruppe von Mathematikern, die unter dem Pseudonym Nicolas Bourbaki publizierte (vgl. Mittelstraß 1980, s.v.: Bourbaki), hat in mengentheoretischer Formulierung die grundlegenden Axiomensysteme (algebraische, topologische und Ordnungsstrukturen) der Mathematik, die so genannten „Mutterstrukturen“ herausgearbeitet, die dann zu neuen Axiomensystemen zusammengestzt werden können (vgl. Ruzavin 1977, S. 43-47). „Konkretere“ Strukturen der Mathematik ergeben sich dann als Modelle der Axiomensysteme.

Trotz großer Erfolge zeigte sich bereits früh (1931), dass das formalistische Programm für die Grundlegung der Mathematik in der von Hilbert konzipierten, ursprünglichen Form nicht durchführbar ist: Denn Gödel konnte für jedes formale Axiomensystem, das eine Axiomatisierung der Arithmetik enthält, zeigen, dass erstens seine Widerspruchsfreiheit nicht mithilfe der Mittel bewiesen werden kann, die im gegebenen formalen System zugelassen sind, und dass zweitens wahre Aussagen formulierbar sind, welche im gegebenen formalen System nicht ableitbar sind (Unvollständigkeit) (vgl. Poser 1994, S. 211).

Darüber hinaus stellt sich auch hier, wie für den Logizismus, erstens die erkenntnistheoretische Frage, „wie man sich den Zugang zum platonischen Dingbereich der Mathematik und der Logik denken müsse“ (Poser 1994, S. 208) und zweitens, warum sich die Mathematik für die Beschreibung der empirischen Welt (Mathematisierung und mathematische Modellierung) bewährt.

Intuitionismus

Der Grundlegungsversuch der Mathematik vom Typ „Intuitionismus[11]“ wurde 1907 von Brouwer begründet und von A. Heyting weitergeführt. Er wendet sich zunächst gegen den Logizismus und dann gegen den Formalismus, indem er gegen

- den Gebrauch des Aktual-Unendlichen (d.h. von überabzählbar unendlichen Mengen)
- einen uneingeschränkten Gebrauch des tertium non datur in der Logik (z.B. in indirekten Beweisen durch Widerspruch oder in Existenzbeweisen mit unendlichen Mengen)
- imprädikative Verfahren

[11] In der Philosophie bezeichnet „Intuitionismus“ alle Versuche, Erkenntnis intuitiv anstatt argumentativ zu gewinnen. Der mathematische Intuitionismus ist somit ein Spezialfall davon (vgl. Mittelstraß 1984, s.v.: Intuitionismus).

- die Akzeptanz von Axiomen als Grundaussagen der Mathematik
- eine Begründung der Mathematik allein durch das Vorlegen eines Widerspruchsfreiheitsbeweises ihrer Axiomensysteme

Position bezieht (vgl. Poser 1994, S. 209; Mittelstraß 1984, s.v.: Intuitionismus).

Der Ausgangspunkt des intuitionistischen Programms für die Grundlegung der Mathematik sind die intersubjektiv nachvollziehbaren Verfahren des konstruktiv tätigen menschlichen Verstandes. Insbesondere die Urintuition des Zählens und des Messens gelten als solche Verfahren, die auf einer zumindest in Gedanken effektiv durchführbaren Tätigkeit beruhen und mit innerer Erfahrung einhergehen. Dementsprechend existiert als Gegenstand der Mathematik nur das, was der menschliche Verstand effektiv konstruieren kann. Insbesondere ist nur eine effektive Konstruktion als Beweis anerkannt. Da neben diesen keine weiteren Mittel im Intuitionismus zugelassen sind, ist die Kritik am Logizismus und am Formalismus konsequent. Aber der Preis dafür ist die Tatsache, dass einige der mit logizistischen oder formalistischen Methoden erzielten Resultate der Mathematik nicht mit intuitionistischen Methoden reproduziert werden konnten, und es stellt sich die Frage, ob man bereit ist, auf derartige Resultate (z.B. die transfinite Mengenlehre, die transfinite Arithmetik) zu verzichten (vgl. Poser 1994, S. 209; Mittelstraß 1984, s.v.: Intuitionismus).

Indem der Intuitionismus die Mathematik als die ursprünglich mit dem Zählen und Messen beginnenden und darauf aufbauenden effektiv zumindest in Gedanken durchführbaren Konstruktionen des intersubjektiv nachvollziehbaren menschlichen Verstandes definiert, werden die nicht empirischen Gegenstände der Mathematik nicht entdeckt, sondern erfunden, womit erstens das Erkenntnisproblem der Mathematik befriedigender gelöst wird als durch einen PLATONischen Begriffsrealismus wie im Logizismus und Formalismus. Warum sich die Mathematik jedoch für die Beschreibung der empirischen Welt bewährt, kann zwar mit dem Hinweis auf das Zählen und Messen in der Lebenspraxis angedeutet werden, aber es bleibt im Dunkeln.

Konstruktivistische Grundlegungsversuche der Mathematik kritisieren den intuitiven Begriff der Konstruktion, so wie er im Intuitionismus verwendet wird, und versuchen diesen zu präzisieren (vgl. Poser 1994, S. 209).

Konstruktivismus

Die Gesamtheit der als mathematischer Konstruktivismus[12] bezeichneten Grundlegungsversuche für die Mathematik bündelt viele verschiedene Versionen. Ihnen ist gemeinsam, dass sie für den Aufbau der Mathematik nur explizit angegebene Verfahren, so genannte Konstruktionen, zulassen, in denen aus einfachsten Grundobjekten und nach explizit angegebenen Regeln komplexere Objekte hergestellt werden können.

Sieht man von den intuitiven Aspekten des Intuitionismus ab, dann erscheint der Intuitionismus als eine Spielart des Konstruktivismus. Auch die (finite) Metamathematik des Formalismus (siehe oben) kann als konstruktiv bezeichnet werden (vgl. Hilbert/Bernays 1968, Bd. 1: S. 1, 43; Mittelstraß 1984, s.v.: Konstruktivismus). Während im mathematischen Konstruktivismus überwiegend einheitlich eine konstruktivistische Logik (z.B. die intuitionistische Logik, in welche die klassische Logik durch Hinzunahme weiterer Voraussetzungen als Spezialfall eingebettet werden kann) verwendet wird, bestehen z.B. für den Umgang mit imprädikativen Verfahren sowie mit dem Unendlichen verschiedene Auffassungen (vgl. Mittelstraß 1984, s.v.: Konstruktivismus; Mathematik, konstruktive), sodass sich im Einzelfall davon abhängig verschiedene Typen konstruktivistischer Mathematik ergeben.

Die Lösung des erkenntnistheoretischen Problems und der ontologische Status der konstuktivistischen Mathematik steht dem Intuitionismus nahe.

Die konstruktivistische Grundlegung der Mathematik von P. Lorenzen *im Rahmen des Konstruktivismus der* Erlanger Schule

Sie sei hier unter vier Aspekten genauer betrachtet (vgl. Lorenzen 1987):

Erstens weist Lorenzen darauf hin, dass die Geometrie (als Theorie der Raummessung) üblicherweise zur Mathematik, aber die Chronometrie (als Theorie der Zeitmessung) zur Physik gezählt werde (vgl. Lorenzen 1987, S. 148). Als eine Theorie der Messung sollte aber auch die Geometrie zur Physik gehören. Würde man nun die Geometrie, nur insofern sie eine axiomatische Theorie ist, zur Mathematik zählen, dann müsste man dies aus demselben Grund auch mit

[12]Der Begriff Konstruktivismus ist heute in Philosophie, Wissenschaftstheorie und Einzelwissenschaften weit verbreitet und bezeichnet alle Ansätze, die Verfahren angeben, gemäß denen mithilfe von Regeln aus einfachen Objekten eines beliebigen Bereichs komplexere synthetisiert (hergestellt) werden können. Der mathematische Konstruktivismus ist somit nur ein Spezialfall (vgl. Mittelstraß 1984, s.v.: Konstruktion, Konstruktivismus).

jeder axiomatisierten Theorie einer Wissenschaft tun, doch das wäre unüblich.

Zweitens schlägt er vor, die Geometrie (d.h. die Messung von Längen und die davon abgeleiteten Größen) und die Chronometrie der von ihm als Protophysik bezeichneten Disziplin zu zurechnen, weil beide (sie bilden zusammen die Grundlagen der Kinematik) als Teilgebiete der Messkunst (d.h. der Lehre von den Messungen) der empirischen Physik methodisch vorausgehen und ihr „Status zwischen (formaler) Mathematik und empirischer Physik“ auf diese Weise deutlicher werde (vgl. Lorenzen 1987, S. 191-192). LORENZEN zählt also die Geometrie nicht zur Mathematik (vgl. auch Lorenzen 1987, S. 150).

Drittens ist Mathematik für ihn der im Alltag des Menschen entstandene Zahlbegriff zusammen mit der daraus entstandenen Tradition einer Arithmetik, Analysis und Algebra (vgl. Lorenzen 1987, S. 150) und nur diese sind im Rahmen der konstruktiven Mathematik zu begründen. (Für P. LORENZENs Beweis der Widerspruchsfreiheit der konstruktiven Analysis siehe (Becker 1964, S. 398ff.).) Die Grundlegung der Geometrie gehört dann zur Grundlegung der Protophysik.

Viertens: Auch wenn LORENZEN die Mathematik mithilfe von sprachlichem Handeln konstruktiv begründet, so versteht er sprachliches Handeln in seiner konstruktiven Wissenschaftstheorie nicht als einen psychischen Prozess. Für den Abstraktionsprozess formuliert er explizit: „Die Abstraktion ist kein psychischer Prozeß, sondern ein logischer Prozeß, d.h. eine Operation mit Aussagen.“ (Lorenzen 1987, S. 164) P. LORENZEN versteht sich offenbar als Philosoph und nicht als Psychologe. Er verwendet dabei das empirische Wissen seiner Zeit, zielt aber nicht auf eine (z.B. historisch-genetische) Erklärung für das sich bildende Wissen und Können, wie der fachwissenschaftlich arbeitende Psychologe, sondern auf eine systematische, umfassende und methodische Begründung durch Konstruktionen, die seinem Ansatz entsprechend im sprachlichen Handeln entwickelt wird und mit der er eine Arbeitsplattform für die zukünftige wissenschaftliche Arbeit anstrebt.

Diskussion

1. Da jede Grundlegung der Mathematik aus einer besonderen Sicht entwickelt wurde und im Vergleich mit anderen typische Vor- und Nachteile aufweist, ist es nur natürlich, die verschiedenen Grundlegungen der Mathematik als verschiedene Begriffsexplikationen für (die) Mathematik zu interpretieren. Für einen Vergleich der angeführten Grundlegungsversuche der Mathematik geht H. POSER davon aus, „daß Mathematik – wie jede Wissenschaft – sprachlich formuliert ist“[13] (Poser 1994, S. 207). Im Folgenden betrachtet er Sprache aus semiotischer Sicht:

> „Sprache läßt sich als Relation mit drei Gliedern auffassen: erstens dem *Zeichensystem* der Sprache, zweitens dem *Gegenstand* oder dem Sachverhalt, auf den sich Sprache bezieht, drittens der *Gemeinschaft*, in der Sprache gesprochen wird. Je nach dem, von welchem Relationsglied ausgegangen wird, ergibt sich ein anderer Begründungsstandpunkt. Die Begründung auf den Gegenstandsbereich findet sich im *Logizismus*, der Ausgang vom Zeichensystem im *Formalismus*, während der Zugang vom denkenden Subjekt als Teil der Sprachgemeinschaft für den *Intuitionismus* und *Konstruktivismus* charakteristisch ist.“ (Poser 1994, S. 207)

Welche Begriffsexplikation für die Mathematik zu bevorzugen ist, kann nur auf einer nach pragmatischen Kriterien (z.B. Angemessenheit für eine mathematische Problemstellung, sich einfügen in eine oder abgrenzen von einer Forschergruppe) getroffenen Entscheidung beruhen: Wer z.B. „eine gänzliche Beschränkung auf finite Gegenstandsbereiche, Strukturen und Beweise und die Verwendung nur effektiv überprüfbarer Negationen fordert“, vertritt einen „Finitismus (strikter Intuitionismus, Ultraintuitionismus, positive oder negationsfreie Mathematik)“ (vgl. Poser 1994, S. 209), der ausdrucksschwächer als die weniger in den Mitteln beschränkten Konzeptionen von Mathematik sind. Wer andererseits Mathematik als die „Wissenschaft von den formalen Systemen“ (Curry) expliziert (vgl. Poser 1994, S. 206, 210), hat damit eine zwar alle bisher angeführten Explikationen umfassende Begriffsexplikation für Mathematik in der Hand, die aber für differenzierte Fragestellungen wenig brauchbar ist.
2. War soeben von den Vor- und Nachteilen einer Grundlegung der Mathematik gegenüber einer anderen die Rede, so sei jetzt betont, dass auch jede Begriffsexplikation der Mathematik, die mithilfe eines Grundlegungsversuchs gewonnen wurde, im folgenden Sinne defizitär ist: „jedes für die Darstellung der elementaren Zahlentheorie ausreichende und zugleich widerspruchsfreie formale System

[13] Auch die analytische Philosophie fasst Mathematik als eine Sprache auf.

Der formale Sprachbegriff ist z.B. in (vgl. Ebbinghaus/Flum/Thomas 1992; Claus 2003 ; Mittelstraß 1996, s.v.: Sprache, formale) expliziert und es ist möglich, Mathematik als eine formale Sprache aufzufassen.

Die hier angesprochenen formalen Sprachen sind zur Vermeidung von Inkonsistenzen in der Argumentation streng vom sprachlichen psychischen Verhalten eines Organismus zu unterscheiden (s.o.), aber auch von semiotischen Interpretationen (vgl. Bense/Walther 1973).

ist unvollständig, und seine Widerspruchsfreiheit kann nicht mit den in ihm formalisierten (geschweige denn,..., mit schwächeren) Mitteln [wohl aber mit ausdrucksstärkeren Mitteln] bewiesen werden.“ (Haas 1980) Widerspruchsfrei heißt ein formales System, wenn in diesem nicht sowohl ein Ausdruck, als auch dessen Negation ableitbar ist. Ein widerspruchsfreies formales System, welches für die Darstellung der elementaren Zahlentheorie (d.h. für die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation) ausreichend ausdrucksstark ist, heißt nun (klassisch) unvollständig, wenn nicht für jeden im formalen System formulierbaren Ausdruck entweder der Ausdruck oder dessen Negation im formalen System ableitbar ist (vgl. Mittelstraß 1996, s.v.: Unvollständigkeit).

Diese Sätze zeigen einerseits die Begrenztheit der formalsprachlichen sowie der axiomatischen Methode und andererseits, dass das im Rahmen einer Grundlegung der Mathematik geschaffene formale System und damit die betrachtete Grundlegung der Mathematik keine scharfe Begriffsexplikation für das, was zur Mathematik gehören soll, zulässt. Denn: Soll man eine im Rahmen eines formalen Systems formulierte, heute unbewiesene Behauptung (d.h. einen korrekt gebildeten Ausdruck, dessen Ableitbarkeit noch nicht gezeigt ist) als Mathematik bezeichnen, obwohl die Möglichkeit besteht, dass diese Behauptung weder beweisbar (d.h. ableitbar) noch widerlegbar (d.h. ihre Negation ableitbar) sein könnte?

3. Betrachtet man die Mathematik (hier unabhängig von den Überlegungen unter 2.) mit Curry als die Wissenschaft der formalen Systeme oder auch eingeschränkter als die im Rahmen einer mengentheoretischen Formulierung definierbaren Verknüpfungen, dann kann man die Frage stellen, ob auch dieser bereits eingeschränkte Begriff von Mathematik vielleicht noch zu weit ist und ob man besser noch zusätzliche Bedingungen an die Verknüpfungen stellen sollte, um einen so engen Begriff von Mathematik zu haben, der genau das enthält, was in der aktuellen Mathematik tatsächlich als interessant gilt. Auch darin kann die Leistung von Bourbaki gesehen werden, der aus der aktuellen Mathematik jene Mutterstrukturen herausgearbeitet hat, aus denen alle anderen Axiomensysteme der heutigen Mathematik zusammengesetzt werden können. So sind Restriktionen für die Zusammensetzung der Mutterstrukturen denkbar: Ein Blick in die aktuelle Algebra zeigt, dass von allen denkbaren Verknüpfungen nur wenige das Interesse der Mathematiker auf sich ziehen. Dabei gilt als interessant, was pragmatischen, ästhetischen oder sozialen Kriterien genügt. Was würde dagegen sprechen, nur diese interessanten Strukturen als Mathematik zu bezeichnen?

4. Zusammenfassend ist festzuhalten, dass jede Grundlegung der Mathematik nur zusammen mit pragmatischen, ästhetischen und sozialen Kriterien eine Begriffsexplikation der Mathematik zu geben erlaubt, die zwar einer aktuellen Fragestellung angemessen ist, die aber weder in methodischer noch in begrifflicher Hinsicht allen Wünschen gerecht werden kann. Weiter zeigen die Überlegungen und Bemerkungen zu den Grundlegungsversuchen der Mathematik, dass jede Grundlegung der Mathematik nur statisch zu formulieren erlaubt, was Mathematik heißen soll. Die Tatsache, dass Mathematik dem Wandel in der Zeit unterworfen ist, ist in keinem Grundlegungsversuch der Mathematik implementiert.

Aus naturgeschichtlicher Sicht haben leibhaftige Menschen in ihrer der Innensicht ihres reflektierenden Denkens verpflichteten Arbeit Grundlegungen der Mathematik vorgelegt, nach denen die Mathematik als nicht empirisch (apriorisch) und damit als von der Naturgeschichte losgelöst erscheint. Tatsächlich ist auch jede auf Grundlegungen der Mathematik zurückgehende Begriffsexplikation der Mathematik in der wissenschaftlichen Aktivität von Menschen entstanden und damit ein Produkt der Emergenzebene des Wissenschaftssozialen.

Bezüge zur Mathematikdidaktik

Während der Grundlegungsdebatte und parallelen Entwicklungen in der Mathematik und Logik bildete sich der strukturelle Standpunkt heraus, dementsprechend Mathematik eine Strukturwissenschaft ist. Er wurde ab 1938 von Bourbaki programmatisch ausgearbeitet, ab 1950 in den Lehrveranstaltungen der Universitätsmathematik und ab 1955 didaktisch in Deutschland wirksam (vgl. Poser 1994, S. 206-207; Lenné 1969, S. 77). Von Dieudonné, einem Mitbegründer von Bourbaki, wurde der strukturelle Standpunkt „nachhaltig gymnasialdidaktisch ausformuliert“ (Lenné 1969, S. 77). Für eine ausführliche Darstellung der Einflüsse von der Grundlegungsdebatte und Bourbaki auf die Didaktik und die Schulmathematik sei auf (Lenné 1969, B.3.-B.5.: S. 77-102; Vollrath 1988) verwiesen. Wir streifen die Thematik noch einmal im Abschnitt 5.4.1 Item 9., wenn wir zum Mathematikunterricht aus historischer Sicht referieren.

2.3 Geschichtswissenschaftliche Begriffsexplikationen der Mathematik

2.3.1 Historische Explikationen ohne ausgewiesene Systematik

Für Begriffsexplikationen der Mathematik aus mathematikhistorischer Sicht ohne eine explizit ausgewiesene Systematik sei hier beispielhaft für viele andere aus dem von K. MAINZER verfassten Beitrag eines philosophischen Wörterbuches zum Stichwort „Mathematik“ zitiert.

> „*Mathematik* ... , ursprünglich aus den praktischen Aufgaben des Rechnens und Messens hervorgegangene Disziplin, die unter griechischem Einfluß zu einer beweisenden Wissenschaft ausgebaut, seit dem Beginn der Neuzeit zunehmend auf die technisch-physikalischen Wissenschaften angewendet und seit dem 19. Jahrhundert zu einer abstrakten Strukturwissenschaft verallgemeinert wurde. Unter Einsatz der Computertechnologie trägt die M. heute zur Bewältigung technisch-wissenschaftlicher Probleme aller Art bei ... Ihre Grundlagenprobleme werden seit der griechischen M. auch in der Philosophie diskutiert.“ (Mainzer 1984)

MAINZER gibt drei statische Antworten auf die Frage „Was ist Mathematik?“ in zeitlich geordneter Folge und, weil damit auch der Wandel der Mathematik in der Zeit dargestellt wird, zugleich eine Antwort auf die Frage „Wie entstand Mathematik?“. In ihren Anfängen, so heißt es, war Mathematik die Disziplin (d.h. Tradition und Methode), die aus Tätigkeiten, wie denen des Rechnens und Messens entstand (1), von denen beim Leser bereits ein Vorverständnis vorausgesetzt wird. Die Griechen entwickelten die Mathematik zu einer beweisenden Wissenschaft (2), und seit dem 19. Jahrhundert bildete sich die Auffassung heraus, dass Mathematik eine abstrakte Strukturwissenschaft sei (3). Da hier nur drei verschiedene Epochen der Mathematik erwähnt und in Folge gesetzt sind, liefert MAINZER nur eine sehr grobe Explikation der Mathematik. Doch bereits seiner groben Einteilung in die drei genannten Epochen müssen systematische Gesichtspunkte zu Grunde liegen, so z.B. inhaltliche, methodische und anwendungsbezogene Eigenschaften der Mathematik, die ihn gerade zu dieser Einteilung führten. Diese systematischen Gesichtspunkte sind sowohl von statischer als auch von dynamischer Art. Ohne sie beide könnten keine sich in der Zeit wandelnden Strukturen erkannt werden und eine Einteilung in Epochen wäre gar nicht möglich. Sie beziehen sich auf fundamentale Lebensäußerungen des Homo sapiens als auch auf deren Bedingungen. Die zugehörigen Emergenzebenen und Wechselwirkungen wurden aber nicht herausgearbeitet. Ihre formenden Einflüsse auf die Mathematik wurden bisher kaum wahrgenommen bzw. nicht für wichtig gehalten.

Ergänzender Einschub: Eine feinere epochale Gliederung der Geschichte[14] der Mathematik

Für einen besseren Überblick referieren wir eine von G.I. Ruzavin – im Rahmen des dialektischen und historischen Materialismus – verfasste etwas feinere epochale Untergliederung der Geschichte der Mathematik (vgl. Ruzavin 1977, S. 38ff.).

1. Die „Periode … des *Werdens* der Mathematik als Wissenschaft" (S. 39): Zeugnisse aus der Frühgeschichte und der Vorgeschichte zeigen, dass die von Menschen jener Epochen (z.B. Ägypter, Babylonier) betrachteten Quantitätsverhältnisse und Raumformen unmittelbar mit den Bedürfnissen ihres wirtschaftlichen Lebens verbunden waren. Sie waren in der Lage, die Anzahl von Gegenständen zu bestimmen und das Messen von Größen (Längen-, Fächen- und Volumenmaße) führte sie zu gebrochenen Zahlen. Da einige der überlieferten Aufgaben und Lösungen unabhängig von konkreten praktischen Anwendungen formuliert sind, wird vermutet, dass die Arithmetik bereits in der vorgriechischen Mathematik systematisiert wurde.

2. Die „Periode der Mathematik *konstanter* Größen" (S. 39): Diese Periode beginnt mit den Griechen des 7. Jahrhundert v. Chr. und reicht bis an das 17. Jahrhundert n. Chr. heran. Bis zum Ende des 3. Jahrhundert v. Chr. hatten die Griechen die Mathematik in eine abstrakt-theoretische, beweisende Wissenschaft überführt, die von konkreten Anwendungen unabhängig formuliert ist und durch Euklid erhielt die Geometrie einen axiomatischen Aufbau. Während

[14]Die Geschichtswissenschaft teilt ihren Forschungsgegenstand in die zwei großen Zeitabschnitte „Vorgeschichte" – auch Urgeschichte oder Prähistorie genannt, z.B. (vgl. Brockhaus 2006, Bd. 29, s.v.: Vorgeschichte) – und „Geschichte" (im engeren Sinne) ein. Mit dem Auftreten schriftlicher Quellen in einem Kulturraum beginnt dort die Geschichte und endet die Vorgeschichte des Menschen. Die Anfänge der geschichtlichen Zeit, in der die schriftlichen Überlieferungen für die Erstellung eines zuverlässigen Geschichtsbildes noch nicht ausreichen, werden als „Frühgeschichte" bezeichnet. Die frühgeschichtlichen Forschung ist hauptsächlich auf Quellen wie Bauten, Werkzeuge, Münzen, mündliche Überlieferungen etc. angewiesen.

des abendländischen Mittelalters brachten vor allen die Araber die Mathematik voran, und insbesondere sind hier ihre Beiträge zur Algebra zu nennen. Im Abendland selbst gelangte man im Wesentlichen erst im 16. Jahrhundert und vor allem im 17. Jahrhundert zu wirklich neuer Mathematik.

3. Die Periode „der Mathematik *veränderlicher* Größen" (S. 40-41): Erste Ideen dazu, außer Konstanten auch Abhängigkeiten von Variablen in Prozessen messbarer Größen (d.h. in moderner Terminologie: Abbildungen zwischen quantifizierbaren Größen) zu studieren, gehen auf die Antike (insbesondere auf ARCHIMEDES) zurück. Diese Ideen wurden aber erst im 17. Jahrhundert systematisch entwickelt und dominierten die Mathematik bis ins 19. Jahrhundert hinein. Diese Periode wird als Mathematik der veränderlichen Größen bezeichnet. Als Meilensteine in dieser Entwicklung sind hier die Koordinatenmethode von R. DESCARTES und J.B. FERMAT sowie die Diffenrential- und Integralrechnung von G.W. LEIBNIZ und I. NEWTON zu nennen. Mithilfe der Koordinatenmethode konnte die Geometrie algebraisch formuliert werden und geometrische Fragestellungen wurden in Form funktionaler Abhängigkeiten mithilfe der Differential- und Integralrechnung analysierbar. Vielleicht, weil den Naturwissenschaften (besonders der Physik) mit der Differential- und Intergralrechnung ein kraftvolles Werkzeug zur Erforschung voneinander abhängiger messbarer Größen zur Verfügung stand und außerdem die Naturwissenschaften die Mathematik stark für sich einnahmen, wurde die Mathematik dieser Periode von vielen Gelehrten als die Wissenschaft von den quantifizierbaren (zählbaren und messbaren) Größen aufgefasst.

4. Die bis heute andauernde Periode der modernen Mathematik (S. 41ff.): Die bis heute andauernde Periode der modernen Mathematik ist aus den Entwicklungen der Mathematik des 19. Jahrhunderts hervorgegangen. Aus einem Abstraktionsprozess, der am quantifizierbaren Größenbegriff ansetzt, vom besonderen Charakter der Größen und ihrer Relationen absieht, entstand im 20. Jahrhundert der Begriff der abstrakten mathematischen Struktur und deswegen gilt die heutige Mathematik als eine abstrakte Strukturwissenschaft (S. 38, 43ff.).

Anmerkung:

Die meisten Gesamtdarstellungen der Mathematikgeschichte vermitteln den Eindruck, dass sich die Mathematik aus dem vorgeschichtlichen Dunkeln über verschiedene frühgeschichtliche Anfänge, dann von den Griechen zu einer Wissenschaft gemacht, in den letzten Jahrhunderten zur weltweiten Strukturwissenschaft entwickelt hat. Diese linearisierte Darstellung kann nur eine grobe Vereinfachung sein. Es ist zwar richtig, dass die in 2.2 beschriebene strukturwissenschaftliche Mathematik weltweit untrennbar mit den modernen wissenschaftlichen und technologischen Entwicklungen verbunden ist, aber in der Geschichte gab es regionale mathematische Entwicklungen, die, soweit sie heute noch bestehen, neben der „Weltmathematik“ ein Eigenleben im Alltag der Menschen hat. H. Wussing weist darauf hin in (vgl. Wußing 2008, Kap. 1, insbes. 1.2: S. 16-22).

Bezüge zur Mathematikdidaktik

In den mathematischen Unterrichtswerken und im mathematischen Unterricht der Schule oder der Hochschule steht die systematische Darlegung eines mathematischen Gebiets im Mittelpunkt. Mathematikgeschichtliche Bemerkungen stehen, Sachzusammenhänge motivierend, auflockernd oder den Lehrstoff einordnend, wenn überhaupt, dann eingestreut am Rande. Es geht vorrangig um den Erwerb mathematischer Wissensstrukturen, kaum um das Verständnis der Bedingtheit ihres Entdeckungszusammenhangs.

Auf die aus ihrer Vorgeschichte heraus entstandene spezifische historische Situation, in der ein mathematisches Problem gelöst oder nicht gelöst werden konnte, wird nahezu nie eingegangen. Letzteres wäre für den Hochschul- und universitären Mathematikunterricht wichtig: Angehende Mathematiker sollten doch aus der Geschichte Beispiele kennenlernen, an denen klar wird, woran man ein interessantes Problem erkennt, wie mathematische Probleme reifen, bis sie gelöst werden können, wie und unter welchen Bedingungen mathematische Gebiete entstehen, sich wandeln, Anwendungen haben und vielleicht sogar wieder vergessen werden.

In der Schule können die Inhalte jedes mathematischen Curriculums nur Themen aus der Mathematikgeschichte sein, aber sie werden im Unterricht fast immer so behandelt, als entstünden die Leistungen von Euklid, Leibniz und Bernoulli heute im Unterrichtsraum. In Schulbüchern gibt es häufig besonders ausgewiesene Abschnitte oder Aufgaben, die auf die Geschichte der Mathematik verweisen (geometrische Konstruktionen, Aufgaben aus alten Lehrtexten, frühe Zahlensysteme etc.) oder Kapitelchen, die die Geschichte der Mathematik anhand von bedeutenden Mathematikern im Zeitraffer rekapitulieren. Könnte es nützlich sein, mathematische Inhalte in der Schule in einem geschichtlichen Zusammenhang zu unterrichten, in dem deutlich wird, unter welchen Bedingungen mathematisches Wissen entstanden ist und bis heute entsteht?

2.3.2 Historische Explikationen mit ausgewiesener Systematik

Dieser Abschnitt beleuchtet, inwieweit aus Beiträgen zur Geschichtswissenschaft, die – ausgewiesen – in einer philosophischen oder sozialwissenschaftlichen (auch ökonomischen oder ethnologischen) Systematik verfasst sind, Begriffsexplikationen der Mathematik gewonnen werden können. „Ausgewiesen“ bedeutet hier, dass die Systematik jeweils direkt für die inhaltliche Arbeit mit dem Gegenstand des Interesses verwendet wird. Die Darstellung der von uns angeführten Beispiele ist so: Nachdem die Systematik skizziert ist, wird die Mathematik aus dieser Perspektive beleuchtet; schließlich wird die dem Ansatz inhärente Begriffsexplikation der Mathematik formuliert.

1. Beispiel: Philosophische – dialektisch- und historisch-materialistische – Systematik (statisch)

Von der Position des dialektischen und historischen Materialismus aus wurden Arbeiten zur Geschichte der Mathematik zwar nicht nur, aber vor allem von Wissenschaftlern aus sozialistischen Ländern verfasst.

Der dialektische und historische Materialismus[15] (vgl. Klaus/Buhr 1970, S. 684ff.) gilt als ein monistisches und geschlossenes philosophisches System, dessen Grundkategorie der Begriff „Materie“ ist und von dem angenommen wird, dass er die außerhalb des menschlichen Bewusstseins existierende und objektive Realität im individuellen bzw. sozialen Bewusstsein des Menschen adäquat widerspiegelt. Prozess und Resultat dieser Widerspiegelung (vgl. S. 1161, 32-35) bestimmen jede Erkenntnis (vgl. S. 315ff.) und sind zentrale Bestandteile der marxistischen Erkenntnistheorie (vgl. S. 316ff. u. insbes. S. 325-326). Für die Bearbeitung des Erkenntnisproblems wird angenommen, dass Materie und ihre Bewegung (d.h. ihre Veränderung) untrennbar miteinander verbunden sind (vgl. S. 188) und das Bewusstsein vom materiellen Substrat des Organismus (insbesondere vom Gehirn) erzeugt wird (vgl. S. 458). Das Erkenntnisproblem ist ferner nicht nur Gegenstand der Philosophie, sondern wird auch aus wichtigen einzelwissenschaftlichen Perspektiven interdisziplinär untersucht (vgl. S. 34, 685), und um die Dynamik (die sich in der Dialektik der Begriffe widerspiegelt) in möglichst umfassender Komplexität zu erfassen, werden dafür auch kybernetische bzw. systemtheoretische Ansätze und Modelle verwendet (vgl. S. 314-315,

[15] Alle Seitenangaben in diesem Abschnitt beziehen sich auf (Klaus/Buhr 1970, Bd. 1 u. 2).

325), die das Erkenntnisproblem ihrerseits in einen erweiterten (vgl. S. 325), z.B. phylogenetischen (vgl. S. 315, 326, 702), anthropogenetischen (vgl. S. 75ff.) etc. Rahmen stellen. Konkret wird in der Arbeit am Erkenntnisproblem auf die einzelwissenschaftliche Forschung, so z.B. auf die Neurophysiologie, auf die Physiologie der höheren Nerventätigkeit sowie auf die Neurokybernetik (vgl. S. 34), auf die Psychologie (vgl. S. 325), auf die Soziologie des Marxismus-Leninismus und auf die Geschichte der Wissenschaften (S. 325) insbesondere verwiesen. Die Soziologie des Marxismus-Leninismus, insofern sie sich mit der Geschichte der gesellschaftlichen Praxis als Ganzes befasst, ist identisch mit dem historischen Materialismus (vgl. S. 1024).

Die Dogmatik, mit welcher der historische Materialismus häufig vertreten wurde (sie wird z.B. auf S. 1025 u. S. 1027 erkennbar), brachte nicht nur ihn, sondern zugleich auch den dialektischen Materialismus in Misskredit, obwohl der dialektische und historische Materialismus eine nützliche Arbeitsplattform und ein nützliches Rahmenmodell für multidisziplinäre Forschung ist.

Auf dem dialektischen und historischen Materialismus gründend oder zumindest vom dialektischen und historischen Materialismus geprägt verfasst H. Wussing seine „Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik“. In der 2. Vorlesung stellt er fest:

> „Die Geschichte der menschlichen produktiven Tätigkeit, des Denkens und der Sprache begann mit dem Auftreten des homo sapiens um 50000 v.u.Z. und der seitdem bis etwa 10000 v.u.Z. erfolgenden Herausbildung der Urgesellschaft. Mit dem homo sapiens lag aus biologischer Sicht der moderne Mensch vor; alle folgenden Entwicklungen sind Ergebnisse sozialer Prozesse.“ (Wußing 1979, S. 31)

Die Mathematik ist für H. Wussing ein Ergebnis sozialer Prozesse und in seinen Vorlesungen versucht er im Folgenden verständlich zu machen, wie die Begriffe, Sätze und Methoden der Mathematik in den Wechselwirkungen der sozialen und der materiellen Umwelt des Menschen entstanden sind. Im Gegensatz zu den meisten Arbeiten zur Geschichte der Mathematik hat er aber auch die biologisch-anthropologischen Grundlagen des Menschen im Auge, die in Arbeiten zur Geschichte der Mathematik sonst überhaupt nicht erwähnt werden. Wie das Zitat zeigt, betrachtet er die in der biologischen Evolution erworbene kognitive Ausstattung des Homo sapiens (ohne die Mathematik gar nicht möglich wäre) allerdings wie eine konstante Größe und berücksichtigt diese konstante

Größe in ihrer Wirkung für die Genese der Mathematik und in seiner Geschichte der Mathematik nicht weiter.

Rückblickend sei festgestellt, dass die systematisch-historische Sicht des dialektischen und historischen Materialismus zu Einsichten in die Geschichte der Mathematik führen kann, welche mithilfe von Ansätzen eines weniger umfassenden systematischen Einschlags gar nicht erreichbar wären.

Der dialektische und historische Materialismus mit seinem alle Materieschichten umfassenden Materiebegriff, mit seinem allgemeinen Bewegungsbegriff, einer natürlichen systemtheoretischen und kybernetischen Sicht sowie seiner interdisziplinären Ausrichtung bei der Lösung des Erkenntnisproblems ist ein Rahmenmodell für historische Untersuchungen, das gerade wegen seines Umfangs und seiner Allgemeinheit anderen Forschungsansätzen für die Bearbeitung vieler Fragestellungen überlegen sein kann.

Aus diesen Einsichten ergibt sich das folgende Profil für eine Begriffsexplikation der Mathematik aus dialektisch-materialistischer Systematik: Eine mithilfe der Systematik des dialektischen und historischen Materialismus durchgeführte Analyse der Geschichte der Mathematik hebt in natürlicher Weise hervor, dass Mathematik in der Auseinandersetzung der Menschen mit ihrer Umwelt entstanden ist, womit materiell-energetische, evolutionsbiotische, psychische und soziale Gesichtspunkte des Menschen und ihrer Umwelt in natürlicher Weise eingeschlossen sind.

Um den Weltbezug der Mathematik noch deutlicher herauszustellen, sei nun aus der Perspektive des dialektischen und historischen Materialismus die erkenntnistheoretische und die ontologische Antwort auf die Frage skizziert, warum Mathematik so oft für Beschreibungen von Sachverhalten oder für die Handlungsplanung in der Lebenspraxis geeignet (d.h. anwendbar) ist (vgl. Ruzavin 1977, Kap. 1: S. 17-52, Kap. 5.5: S. 189-196; Poser 1994, S. 213): Der dialektische und historische Materialismus betrachtet „Mathematik ... als Wissenschaft von den Quantitätsverhältnissen und Raumformen der wirklichen Welt ... “ (Ruzavin 1977, S. 38). Deswegen spiegelt auch die Mathematik Aspekte der objektiven Realität, d.h. auch der Lebenspraxis des Menschen wider und die Existenz eines mathematischen Objektes, wie abstrakt es auch sein mag, ist letztlich mit der objektiven Realität verbunden. Die hier verwendeten Begriffe „Quantitätsverhältnisse“ und „Raumformen“ stimmen jedoch nicht mit jenen des 19. Jahrhunderts überein, als Mathematik noch als eine Größenlehre galt (s.o.), sondern umfassen auch alle inzwischen aus ihnen gewonnenen abstrakten Strukturen sowie ihre Beziehungen zueinander (vgl. Ruzavin 1977, S. 38). Die Widerspiegelung der objektiven Realität und Lebenspraxis der Menschen in den mathematischen Begriffen wird gemäß dem dialektischen Materialismus von dem folgenden zweistufigen Verfahren erfasst: Im ersten Schritt erfolgt eine Abstraktion aus Sachverhalten, wobei vom Inhaltlichen zur Form übergegangen wird. Die auf diese Weise geschaffenen basalen Begriffe können dann in einem zweiten Schritt, einer „idealisierenden Abstraktion“ (Poser 1994, S. 213), unterworfen werden, in der Eigenschaften, Merkmale und Relationen von Begriffen durch weitere Abstraktionen sowie durch Idealisierungen (z.B. Hinzufügungen) verändert werden und so zu neuen Begriffen führen. Die modernen mathematischen Begriffe sind gerade solche, die den ersten und den zweiten Schritt durchlaufen haben (vgl. Poser 1994, S. 213).

So umfassend der von der Systematik des historischen und dialektischen Materialismus gesteckte Rahmen für eine Analyse der Geschichte der Mathematik auch ist, üblicher Weise bleibt er eine philosophische Systematik (statisch) und insofern im Begrifflichen.

Anders ist die Situation z.B. für eine sozialwissenschaftliche Systematik, die wesentlich stärker empirisch ausgerichtet ist und die in Verbindung mit Befunden, Modellvorstellungen und Theorien auch Erklärungen in der Geschichtswissenschaft der Mathematik ermöglicht. Dieser neue Gesichtspunkt ist Gegenstand des nun folgenden Beispiels.

2. Beispiel: Sozialwissenschaftliche (dynamische) Systematik

Von soziologischer Systematik geprägt sollen hier historische Arbeiten über Mathematik heißen, welche die Mathematik als von Menschen in ihrer sozialen Umwelt (in kommunikativen Prozessen) erzeugt verstehen und dabei auf sozialwissenschaftliche Befunde, Modellvorstellungen oder Theorien[16] Bezug nehmen. Diese systematische Sicht auf die Mathematik ist dynamisch, denn mit der Erzeugung mathematischen Wissens ist sein zeitlicher Wandel von Anfang an ins Auge gefasst.

Beispiele der umfangreichen – die Möglichkeiten längst nicht ausschöpfenden – sozialwissenschaftlich geprägten Literatur zur Mathematikgeschichte sind:

- (Restivo 1992), hier ist eine soziologische Systematik erkennbar.

[16] Einen Blick über die Landschaft soziologischer Theoriebildung geben z.B. J. Morel/u.a. in (Morel/u.a. 1995) und H. Willke in (Willke 1991).

– (Resnikoff/Wells 1983), ihre „Mathematik im Wandel der Kulturen“ berücksichtigt Anwendungen der Mathematik unter sozialen Aspekten und enthält etwas Wissenschaftsforschung (Einleitung).
– (Wilder 1981) gibt eine Abhandlung in kulturevolutionärer Systematik mit vielen theoretischen Vorüberlegungen und Erklärungsansprüchen.
– (Pöppe 2006) ist eine Aufsatzsammlung zur Ethnomathematik.
– (Wußing 2008) berücksichtigt soziale Bezüge und widmet den Abschnitt 1.2 der Ethnomathematik insbesondere.

Zur sozialwissenschaftlichen Systematik zählen ferner Untersuchungen, die z.B. auf die Wissenssoziologie, die Wissenschaftssoziologie oder die Wissenschaftsforschung zugreifen, in denen neben Literaturstudien auch empirische Untersuchungen zur Wissenschaftsentwicklung üblich sind, mit denen ein Erklärungsanspruch verbunden ist. Einen guten Überblick über diese und andere Forschungsgebiete, zusammen mit ihren Verbindungen mit der Wissenschaftstheorie und Wissenschaftsgeschichte, gibt E. Oeser in (Oeser 1976), siehe auch (Mittelstraß 1996a, s.v.: Wissenschaftsforschung, Wissenschaftsgeschichte, Wissenschaftssoziologie, Wissenssoziologie). Eine „Wissenschaftspsychologie“, wie sie von H. Hiebsch in (Hiebsch 1977) skizziert wird, kann nur schwer von einer sozialwissenschaftlichen Systematik unterschieden werden; der Übergang zur (Sozial-)Psychologie ist fließend. Diese Forschungsgebiete liefern Ansätze und Methoden, mit deren Hilfe die Prozesse des Erwerbs, der Transformation, der Kodierung, der Kommunikation, der Akkumulation und der Erzeugung mathematischen Wissens untersucht werden können, die ihrerseits raumzeitlichen, politischen, ökonomischen, technischen und vielen anderen Einflüssen unterliegen. Beispielsweise gehört zur Geschichte jeder Wissenschaft – nicht nur der Mathematik – neben dem Fachwissen und Können auch das Forschungshandeln, welches in das umfassendere Wissenschaftshandeln eingebettet ist. Während zum Forschungshandeln jene Tätigkeiten zählen, die zur Erzeugung neuen wissenschaftlichen Wissens führen sollen, umfasst das Wissenschaftshandeln, über das Forschungshandeln hinaus, die Verflechtungen mit der (vor allem sozialen) Umwelt, insbesondere z.B. administrative, lehrende, politische Tätigkeiten, welche in der Absicht ausgeübt werden, auch dem Forschungshandeln zu dienen (vgl. Krohn/Küppers 1989).

Eine mathematikgeschichtliche Untersuchung, die um eine sozialwissenschaftliche Systematik bereichert ist, erweitert somit den Blick auf die Mathematik und ermöglicht eine Integration von neuen Gesichtspunkten in eine Begriffsexplikation der Mathematik, die ohne diese Systematik nicht erreichbar gewesen wären: Die Entstehung und Auflösung von Arbeitsgruppen, Schulen und Moden, die Anregung von außen und innen zur Arbeit an bestimmten Problemkreisen, die vorliegenden Kommunikationsstrukturen (Publikationswesen, Sprachen etc.), die ökonomische Absicherung der Forscher etc., all dies beeinflusst in erklärbarer Weise das Werden des mathematischen Wissens bis hin zur weit verbreiteten Interpretation, dass mathematisches Wissen apriorisch sei.

Bezüge zur Mathematikdidaktik

Eine dialektisch-materialistische Systematik war vermutlich in allen sozialistischen Ländern für den Mathematikunterricht an Schulen, Hochschulen und Universitäten verpflichtend. Im Vorwort seiner „Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik" (Wußing 1979, S. 5) teilt der Autor mit, dass auf Grund eines Beschlusses vom Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR nicht nur für Lehrerstudenten, sondern ab 1978 auch für Studenten der Mathematik eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik verbindlich wurde. H. Wussings Vorlesungen sind aus marxistisch-leninistischer Sicht verfasst und beziehen deswegen auch soziale, wirtschaftliche und technische Entwicklungen ein. Soweit die historischen Ausführungen dem dialektischen und historischen Materialismus in dogmatischer Weise folgen, stehen sie in einer statischen (philosophischen) Systematik, soweit soziale, ökonomische und die Technikentwicklung betreffende Gesichtspunkte im Vordergrund der Darstellung stehen, handelt es sich um eine in dynamischer Systematik verfasste Geschichte der Mathematik.

An Hochschulen und Universitäten in der Bundesrepublik Deutschland gehört weder eine sozialwissenschaftliche noch eine der Wissenschaftsforschung oder Ähnlichem folgende systematisch verfasste Geschichte der Mathematik zum Curiculum eines Mathematikstudiums; Unterricht zur systematischen Mathematikgeschichte ist im Curiculum für Schulen nicht vorgesehen.

Mit der Emergenzebene des Sozialen ist die Mathematik keinesfalls vollständig erfasst. Die Erweiterung auf eine naturgeschichtliche Sicht erfordert eine dynamische Systematik, die auch die psychische, die biotische und die unbelebte materiell-energetische Emergenzebene mit einbezieht. Werden historische Untersuchungen mit sozialwissenschaftlicher Systematik zur Mathematik noch dem Gegenstandsbereich der Geschichtswissenschaft zugeordnet, so ist mit einer psychologischen, spätestens mit einer biologischen Systematik der Bereich anerkannter Geschichtswissenschaft überschritten. Deswegen wird eine Gliederung in Anlehnung an die Geschichtswissenschaft im Folgenden nicht mehr weitergeführt. Stattdessen liegt der Fokus nun auf den – für die vorliegende Arbeit gewichtigen – naturwissenschaftlichen und kognitionswissenschaftlichen (systematisch-dynamischen) Forschungsansätzen sowie auf dem Forschungsstand des auch emipirische Wissenschaften einbeziehenden interdisziplinären Forschungsprogramms, das als „Evolutionäre Erkenntnistheorie" bezeichnet wird.

2.4 Systematisch-dynamische Begriffsexplikationen der Mathematik

2.4.1 Vorüberlegungen

Ruzavin datiert die „Periode des *Werdens* der Mathematik als Wissenschaft" in die frühgeschichtlichen Hochkulturen, z.B. Ägyptens oder Babyloniens (vgl. 2.3.1); das ist auch die allgemeinen Lehrmeinung. Aber diese Kulturen fußen auf den Kompetenzen des vorgeschichtlichen Menschen, die von Generation zu Generation weitergegeben und weiterentwickelt wurden. Jede Suche nach dem Ursprung der Kompetenzen, die mit guten Argumenten als mathematische bezeichnet werden können, führt somit zwangsläufig vom Homo sapiens zu seinen vorgeschichtlichen Ahnen und damit zur Frage nach dem phylogenetischen Wandel der Vorfahren des Homo sapiens zum Homo sapiens in ihrer Umwelt. Für eine umfassende Antwort auf die Frage nach dem Ursprung mathematischer Fähigkeiten ist nun evident, dass eine Untersuchung der kulturellen Evolution des mathematischen Wissens und Könnens um die Evolution des Menschen in seiner Umwelt ergänzt werden muss: Dies erfordert Forschungsansätze der systematisch-dynamischen empirischen Wissenschaften, insbesondere auch Ansätze aus der Evolutionsbiologie und der Evolutionspsychologie.

Aber für eine Rekonstruktion der wenigen uns bekannten – meist indirekt erschlossenen – mathematischen Kompetenzen des vorgeschichtlichen Homo und erst recht seiner Ahnen, stehen nur wenige Lebensspuren (Werkzeuggebrauch, Werkzeugherstellung, Wohngewohnheiten, Bestattungsrituale, vorgeschichtliche Kunst, Orientierung an Sternen bei Wanderungen etc.) zur Verfügung. Bei der Deutung dieser Lebensspuren ist zu klären, inwieweit sie überhaupt mit mathematischen Begriffen der geschichtlichen Zeit in Beziehung gesetzt werden dürfen. Erst dann macht die Rede von „mathematische Kompetenz“ für den vorgeschichtlichen Menschen Sinn. Für die steinzeitliche Mathematik siehe z.B. (Huylebrouck 2006; Struik 1948).

Weil aus den Lebensspuren der Vorfahren des Homo sapiens kaum bzw. nur vage Schlüsse auf ihre mathematischen Kompetenzen möglich sind, motiviert z.B. der Befund, dass der rezente Pan (Schimpanse) und der Homo sapiens von einem gemeinsamen Vorfahren abstammen, dazu, die Kompetenzen und kognitiven Voraussetzungen für Mathematik für die Vorfahren des Homo sapiens aus Versuchen mit dem rezenten Pan zumindest in grober Weise abzuschätzen. Mathematischen Kompetenzen des rezenten Pan referieren z.B. (Woodruff/Premack 1981; Matsuzawa 1985; Boysen/Berntson 1990, 1996; Boysen/Capaldi 1993). Spricht man dem vorgeschichtlichen Menschen, seinen Vorfahren im Tier-Mensch-Übergangsfeld der frühen Steinzeit und auch dem rezenten Pan mathematische Fähigkeiten zu, dann liegt die Idee nicht fern, auch beliebige renzente Tiere auf ihre mathematischen Fähigkeiten hin zu untersuchen und miteinander zu vergleichen; erste Ergebnisse zu mathematischen Fähigkeiten von rezenten Tieren gewann bereits O. Köhler (1941), für einen neueren Überblick (vgl. Dehaene 1999; Siemann/Fersen/Delius 1998; Delius/Siemann/Emmerton/Xia 2001).

Auf Grund der Tatsache, dass – mit Einschränkungen – auch Tieren in sinnvoller Weise einige mathematische Fähigkeiten zugesprochen werden können, liegt es nicht fern, den Bezugsrahmen so zu erweitern, dass nicht nur der Mensch, sondern ein geeigneter Organismus in seiner Umwelt mathematische Kompetenzen erzeugen kann. Gemäß diesem Ansatz ist Mathematik keine charakteristische Fähigkeit des Menschen allein, sondern eine spezifische Fähigkeit von Organismen in ihrer Umwelt, deren unbelebte, biotische, psychische, soziale und kulturelle Komponenten hinsichtlich ihrer Herausbildung und ihrer Stabilität gegenüber dem zeitlichen Wandel ungeklärt ist. Die Antworten auf die Fragen (1) nach dem Anfang der Mathematik und (2) nach den unbelebten materiell-energetischen, biotischen, psychischen, sozialen und kulturellen Voraussetzungen für die Möglichkeit von Mathematik werden eine Antwort auf die Frage (3) nach einer Begriffsexplikation der Mathematik beeinflussen.

Damit sind nun auch die Emergenzebenen des Psychischen und des Biotischen für eine Bestimmung dessen, was „Mathematik“ heißen soll, als wichtig erkannt worden, und es werden nun die wichtigsten systematisch-dynamischen Forschungsansätze referiert, in denen Mathematik aus biologischer oder psychologischer Sicht beleuchtet worden sind.

Im 3. Kapitel formulieren wir dann einen naturgeschichtlichen Forschungsansatz, der auch die unbelebte materiell-energetische Emergenzebene (sie steckt im vorliegenden Abschnitt noch latent in der Umwelt) explizit mit umfasst. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass alles Biotische ein Emergenzphänomen der Evolution des unbelebten Materiell-Energetischen auf der Erde ist und die kognitive und soziale Entwicklung des seit etwa $2 \cdot 10^5$ Jahren aus biologischer Sicht nahezu unveränderten Homo sapiens, die mit der Emergenzebene des Unbelebten koevolviert, auch von sehr stabilen kosmischen und physikalischen Invarianten bestimmt wird, die die Struktur des mathematischen Wissens prägen und deswegen für eine Begriffsexplikation der Mathematik bedeutsam sind.

Die hier referierte Auswahl ist nicht vollständig, doch trägt sie zur Begriffsexplikation der Mathematik bei und kennzeichnet damit den das Biotische und Psychische umfassenden Forschungsstand in einer für die geplante Untersuchung hinreichenden Weise. Die Auswahl berücksichtigt

(1) die biologisch-kybernetische Sicht auf die Mathematik von J. Piaget (2.4.2)

(2) Mathematik aus der Sicht der Evolutionären Erkenntnistheorie (2.4.3)

(3) die evolutionspsychologische Sicht auf die Mathematik von F. Klix, die um neuropsychologische und kognitiv-psychologische Resultate und Einsichten zur mathematischen Informationsverarbeitung ergänzt wird (2.4.4, 2.4.5, 2.4.7, 2.4.8) und einen evolutionspsychologischen Beitrag zur Begriffsexplikation der Mathematik von N. Krebs (2.4.6).

An dieser Stelle sei angemerkt, was nicht nur für diese Beiträge gilt: Jede wissenschaftliche Arbeit hat sachliche und methodische Schwerpunkte und wird dementsprechend einem wissenschaftlichen Gebiet oder einer Disziplin zugeordnet. Eigentlich multidisziplinäre Arbeiten, die z.B. von einem etablierten Vertreter eines bestimmten Arbeitsgebiets verfasst wurden, werden nicht selten wissenschaftssozial nicht voll wirksam, weil erstens ihre multidisziplinäre Bedeutung nicht hinreichend kommuniziert wurde oder ihr zweitens vorherrschende Traditionen entgegenstehen. Als ein Beispiel für den ersten Fall, kann Klix angeführt werden, der als Psychologe sehr früh (spätestens 1970) evolutionstheoretische Geschichtspunkte konsequent in seinen Arbeiten verfolgte, lange bevor eine Evolutionspsychologie (nach 1990) etabliert war, und es ist bemerkenswert, dass Klix kaum als ein Pionier der Evolutionspsychologe bekannt ist. Als Beispiel für den zweiten Fall sei angeführt, dass sich die kontinentale – anders als die angelsächsische – Philosophie bis heute schwer tut, die höchst multidisziplinäre Evolutionäre Erkenntnistheorie als eine Erkenntnistheorie anzuerkennen (vgl. Vollmer 2003, S. 7). Dass multidisziplinäre Arbeiten als wichtig angesehen werden, ihre Bindung an etablierte Fachbereiche jedoch oft schwierig ist, macht es nicht leichter, die oben genannten Beiträge in das heutige Wissenschaftsgefüge einzuordnen.

2.4.2 Die biologisch-kybernetische Sicht auf die Mathematik von J. Piaget

J. Piaget hat in einem großen, programmatischen Entwurf kybernetische und evolutionsbiologische Überlegungen für die Erklärung menschlicher Erkenntnis systematisch verbunden und damit nicht nur die Entwicklungspsychologie, Pädagogik und Mathematikdidaktik stark beeinflusst; sein Forschungsansatz ist als „genetische Erkenntnistheorie“ auch in die philosophische Diskussion eingegangen. Im umfangreichen Lebenswerk von Piaget (vgl. Piaget 1975) nehmen Arbeiten zur Entwicklung des logisch-mathematischen Denkens viel Raum ein. Die meisten dieser Arbeiten haben die kognitive Entwicklung des Menschen im Zeitintervall von der Geburt bis zur Adoleszenz zum Thema, deren Einsichten ihn zur Aufstellung seiner Stufentheorie der kognitiven Entwicklung führten. Bereits hier und in seinen frühen Jahren lässt Piaget sich von kybernetischen Konzepten leiten.

Aber erst 1967 in seinem Spätwerk „Biologie und Erkenntnis“ (vgl. Piaget 1992) analysiert er mithilfe eines umfassenden kybernetischen Forschungsansatzes (vgl. S. 27, 379), der seine entwicklungspsychologische Stufentheorien (vgl. S. 18-19) umgreift, die Bildung und Organisation der Strukturen und Funktionen von Organismen mit ihren Selbstregulationen und Austauschprozessen mit ihrer Umwelt, wobei er das Ineinandergreifen von Ontogenese und Phylogenese, die sich zum Teil auf die Ontogenese stützt (vgl. S. 81), berücksichtigt.

Wenngleich die Anlage des Werkes sehr allgemein gehalten ist und somit zur Charakterisierung beliebiger Verhaltensweisen und Kognitionen herangezogen werden kann, betont Piaget, dass das „eigentliche Ziel dieses Werkes darin besteht, für ... logisch-mathematischen Operationen ... eine ... Art von biologischem Status zu finden“. (S. 70)

Die Methoden

Bevor Piaget sich der Durchführung seines Vorhabens zuwendet, betont er im methodischen Kapitel, dass diese „Arbeit … der Versuch einer epistemologischen Analyse, keine experimentelle Untersuchung“ ist (Piaget 1992, S. 50).

Die Methoden, die er anwendet, sind

(I.) „die Verwandtschaft zwischen biologischen und kognitiven Problemen aufzudecken“ (S. 51).

(II.) „das vergleichende Studium“ der „Erkenntnisfunktionen und der biologischen Funktionen im allgemeinen“ (S. 55).

(III.) „die partiellen Isomorphien zwischen vergleichbaren Strukturen auf verschieden Ebenen [Genom, Organe, Verhalten, …] aufzudecken“ (S. 60).

(IV.) „die Verwendung abstrakter und kybernetischer Modelle“ (S. 61).

(V.) das „Studium der funktionellen (II) und strukturellen (III) Isomorphien und ihrer Modelle (IV)“ (S. 62). Es „führt natürlich zu Vergleichen, die sich nicht nur auf die Extreme (wie z.B. das Genom und die logisch-mathematischen Operationen des Denkens) beziehen, sondern nach und nach von einer Organisationsstufe zur nächsten vorrücken müssen“ (S. 62-63).

Weiter führt er aus:

> „Als fünfte unserer Untersuchungs- und Kontrollmethoden ist daher die vergleichende Epistemologie der Erkenntnisebenen zu nennen. ‚Epistemologie‘ meint nicht das kausale, also psychophysiologische Studium der zu einem Erkenntnisakt führenden Faktoren …, sondern die Analyse der Wahrheitsbedingungen (oder Angemessenheit, Angepaßtheit usw.) der Erkenntnisse als Informationsbeziehungen zwischen dem Subjekt und den Objekten.“ (S. 63)

Die Informationsbeziehungen zwischen Subjekt und Objekt sind dabei spezielle Aktivitätsbeziehungen zwischen Organismus und Umwelt (vgl. S. 64).

(VI.) die „Epistemologie der biologischen Erkenntnis“ (S. 65) und der „Vergleich [dieser] mit der ‚Kritik‘ der psychogenetischen oder auch der epistemologischen Erkenntnisse“ (S. 65).

(VII.) die „biologische Interpretation der Erkenntnisformen“ (S. 67). Sie „besteht in dem Versuch, erklärende Theorien der Biologie auf die psychogenetischen Fakten anzuwenden, die sich auf kognitive Funktionen beziehen“ (S. 67).

Die Verwendung der (VII.) Methode befürwortet PIAGET, obwohl er weiß, dass dafür noch nicht hinreichend viele Ergebnisse aus biologischen Experimenten vorliegen (vgl. S. 67-68).

Die Analyse – kybernetischer Ansatz: Selbstregelung

Der Ausgangspunkt für seine Analysen ist die Einsicht, dass Leben im Wesentlichen Selbstregelung ist (vgl. S. 27). Wichtig ist dann seine Zerlegung der Beziehungen von Organismus und Umwelt (vgl. S. 53)

1. in den „Bereich der *allgemeinen* formbildenden phyletischen Strukturen (Genom, erbliche Anpassung und Evolutionsmechanismen)“.

2. in die Bereiche „der *ontogenetischen* Entwicklung (Präformation und Epigenese) und der phänotypischen Variation“.

3. in den Bereich der „Beziehungen zwischen der inneren Organisation und den Beiträgen von außen (z.B. der chemischen oder energetischen Versorgung aus der Umwelt) im Mechanismus der *Regulationen* auf allen Ebenen (genetisch, epigenetisch, physiologisch usw.)“.

Den kognitiven Funktionen eines Organismus kommt nach PIAGET nun die folgende Rolle zu:

> „*Die kognitiven Prozesse erscheinen ... zugleich als die Resultante der organischen Selbstregelung, deren Hauptmechanismen sie reflektieren, und als die differenziertesten Organe dieser Regulation der Interaktionen mit der Außenwelt*, dergestalt, daß sie diese beim Menschen schließlich auf das ganze Universum ausdehnen.“ (S. 27)

Oder einfacher, nicht mithilfe des Begriffs „Prozess“, sondern mithilfe des Begriffs „Funktion“ formuliert er „daß die kognitiven Funktionen die organischen Regulationen fortsetzen und daß sie ein differenziertes Organ zur Steuerung der Austauschprozesse mit der Außenwelt bilden“ (S. 379).

In einem differenzierteren Bild betrachtet Piaget nun Erkenntnismodi (vgl. S. 271), sie umfassen die kognitiven Funktionen, die Wahrnehmungen, die Instinkte etc., und nimmt zunächst eine Unterscheidung danach vor, ob sie „angeboren" oder „erworben" sind.

> „jeder Erkenntnismodus ... setzt Informationen über die Außenwelt voraus; aber ebensosehr setzt er ... auch eine Strukturierung voraus, die durch das mit der Organisation des Subjekts verbundene interne Funktionieren bestimmt wird. Diese Strukturierung manifestiert sich ... in einer angeborenen, bis in alle strukturellen Einzelheiten vorprogrammierten erblichen Form (wobei immer ein mehr oder weniger breiter Spielraum für Erwerbungen bleibt) ... und in einer nicht in erblichen Einzelheiten vorprogrammierten Form, die als Assimilationsmechanismus an jedem noch so elementaren Lernprozeß beteiligt ist ... Diese ... Assimilationstätigkeit setzt entweder unmittelbar eine angeborene Aktivität fort ... oder sie entfaltet sich in Konstruktionen, die immer weniger mit Angeborensein zu tun haben, obwohl sie ein endogenes Element enthalten, das vor allem in der Aktivität als solcher zum Ausdruck kommt." (S. 271-272)

Nun fragt Piaget weiter, was von den erworbenen Erkenntnismodi „von außen – aus der Umwelt oder der Erfahrung – stammt, und was auf die endogene Aktivität des Subjekts zurückgeht" (S. 272). Im Verlauf seines Werkes argumentiert er für seine Vermutungen, dass

1. die endogene Aktivität des Subjekts, insofern sie „auf den Koordinationen der Verhaltensakte des Subjekts und nicht auf den Objekten als solchen beruht, schon logisch-mathematischer Natur ist" (S. 272). Dementsprechend sind auch die so erzeugten (erworbenen, treffender: „konstruierten" (vgl. S. 272)) Erkenntnismodi von logisch-mathematischer Natur.

2. zwar die endogene Aktivität des Subjekts, insofern sie auf den Koordinationen der Verhaltensakte des Subjekts im Umgang mit Objekten der Umwelt oder der Erfahrung bezogen ist, zu empirischer Erkenntnis führt, aber „kein Lernen und keine empirische Erkenntnis ohne ein logisch-mathematisches Gerüst möglich ist" (S. 320, vgl. 341ff.).

Piaget betont, dass die erworbenen Erkenntnismodi nicht auf der sensomotorischen Entwicklungsstufe des Organismus, sondern erst unter dem Einfluss des Denkens den angeborenen (hereditären) Erkenntnismodus in einen logisch-mathematischen Erkenntnismodus und in einen empirischen Erkenntnismodus aufspalten (vgl. S. 272). Den Mechanismus für diese Aufspaltung stellt er sich so vor:

> Wenn „jede angeborene oder erworbene Erkenntnis als notwendige Bedingung ein bestimmtes überdauerndes Funktionieren voraussetzt, aus dem die Assimilationsschemata und ihre Koordinationen hervorgehen, dann trennen sich die erblichen Formen kognitiven Verhaltens, ..., sobald sich dieses Feld durch das Funktionieren der Vorstellung oder des Denkens erweitert, in zwei komplementäre Richtungen: in eine Richtung der Exteriorisierung ..., d.h. des Lernens, der Erfahrung und der Objekt-Erkenntnisse ... und in eine Richtung der Interiorisierung oder formalen Strukturierung der durch Bewußtwerdung der inneren Bedingungen jedes Funktionierens oder, genauer, durch von diesen Bedingungen (also den allgemeinen Organisationsformen des Funktionierens, die, über die kognitive Assimilation hinaus, die gemeinsamen Mechanismen und folglich die zentralsten Prozesse jeder lebenden Organisation in sich vereinen) ausgehende reflektierende Abstraktion.“ (S. 275)

Mit „reflektierende Abstraktion“ meint Piaget dabei „diesen sich auf Neukombinationen stützenden Rekonstruktionsprozeß, der die Integration einer operatorischen Struktur einer früheren Stufe in eine reichere Struktur höherer Stufe ermöglicht“ (S. 328).

Seine Vorstellungen von den Prozessen in Richtung der Interiorisierung, die ja zu den logisch-mathematischen Erkenntnissen führen, beschreibt er noch ein wenig präziser:

> „Die Konstruktion der logisch-mathematischen Strukturen hat man sich mithin nicht als eine Entwicklung vorzustellen, die auf unvorhersehbare Weise äußere Elemente integriert, sondern als etappenweise endogene Entfaltung, bei der die für eine Etappe charakteristischen Kombinationen einerseits als Kombinationen neu sind, andererseits aber doch nur aus schon in der vorangegangenen Etappe vorhandenen Elementen bestehen.“ (S. 326)

> „Die logisch-mathematischen Strukturen können nicht das Ergebnis von Lernen im streng assoiziativen Sinne sein; denn, obwohl ständig auf die

äußeren Gegebenheiten angewandt, assimilieren sie das Gelernte, ohne dadurch strukturell verändert zu werden. … Andererseits können diese Strukturen auch nicht das Ergebnis einfacher Vererbung sein; denn wenn sie an Gene gebunden wären …, so wären sie weder notwendig noch allgemein noch von solch erstaunlicher konstruktiver Plastizität. Schließt man, biologisch gesprochen, Lernen und Vererbung aus, dann bleibt als grundlegender Tatbestand, …, das organisatorische Funktionieren in seiner absoluten Kontinuität bestehen, ein Funktionieren, das sich nicht vererbt, sondern im Laufe der Übermittlungen fortsetzt und erhält.“ (S. 329-330)

Insgesamt kommt Piaget auf Grund seiner biologischen Überlegungen somit zu drei Modi, Formen oder Kategorien der Erkenntnis, die bei Menschen einer gewissen Zivilisationsstufe (durch Übung seiner kogniven Funktionen) anzutreffen sind (S. 272, 274):

1. Die „hereditären Formen, deren Prototyp der Instinkt ist und die … schon eine – allerdings um ein angeborenes, starres Programm kristallisierte – Logik enthalten, deren Inhalt sich auf ebenfalls großenteils angeborene Informationen über die Umwelt bezieht“ (S. 272).
   Diese Erkenntniskategorie ist bemerkenswert eng „und hinsichtlich ihrer wirklichen Ausdehnung ziemlich umstritten“ (S. 274).
   Zu diesen „durch hereditäre Programmierung strukturierten Erkenntnisse[n]“ gehören „vielleicht bestimmte Wahrnehmungsstrukturen (Farbensehen, zwei oder drei Raumdimensionen usw.)“ (S. 274).

2. Die „progressiv konstruierten logisch-mathematischen Formen, die namentlich für die relativ höheren Stufen der Intelligenz charakteristisch sind“ (S. 272).
   Diese „Kategorie, die mindestens so umfassend ist wie die“ dritte, „ist die der logisch-mathematischen Erkenntnisse, die schnell von der Erfahrung unabhängig werden und die, obwohl ihr Ursprung in der Erfahrung liegt, nicht von den Objekten als solchen, sondern von den allgemeinen Koordinationen der vom Subjekt in bezug auf die Objekte vollzogenen Akte abgeleitet zu sein scheinen.“ (S. 274).

3. Die „durch Erfahrung (vom primitivsten Lernen bis zur naturwissenschaftlichen Erkenntnis) erworbenen Formen“ (S. 272).

> Die diese Kategorie bildenden erworbenen Erkenntnisse, entstehen „durch Objekt-Erfahrung jeder Art – durch die Erfahrung der Objekte oder ihrer Relationen –“ wobei „durchaus schon von den Objekten als solche“ abstrahiert wird (S. 274).

Diese Überlegungen von Piaget klären den biologischen und psychologischen Status der logisch-mathematischen Erkenntnisse im Allgemeinen aus seiner Sicht und liefern damit eine Begriffsexplikation für die logisch-mathematischen Erkenntnisse, dergemäß

> „die logisch-mathematischen Strukturen weder der Ojekt-Erfahrung noch einer instinktmäßigen oder hereditären Übermittlung zu verdanken sind, sondern durch reflektierende Abstraktion aus den allgemeinen Koordinationen des Verhaltens, aus nervösen Koordinationen und so fort bis hin zu den allgemeinesten organisierenden Funktionsweisen des Lebens gewonnen werden“ (S. 350).

Wenn Piaget hier von Strukturen spricht, dann sind dies Erkenntnisse: Da in seinem hier zu besprechenden Werk (Piaget 1992) die Probleme der logisch-mathematischen Wahrheit, eines Beweisbegriffs usw. nicht vorkommen, sondern nur die Genese logisch-mathematischer Strukturen (Begriffe) diskutiert wird, dürfen „logisch-mathematische Strukturen“ und „logisch-mathematische Erkenntnis“ vermutlich synonym verwendet werden.

Zur Notwendigkeit der logisch-mathematischen Erkenntnisse

Die Frage, ob und wenn ja, inwieweit und in welchem Sinne die logisch-mathematischen Erkenntnisse notwendig sind, diskutiert Piaget insbesondere in §20 von (Piaget 1992). Hier sei dazu nur angeführt, dass er die logisch-mathematischen Erkenntnisse für notwendig hält, weil sie „durch die Gesetze des Funktionierens [des Organsimus] notwendig geworden“ sind (S. 336) und dass sie deswegen weder „Erfindungen noch Entdeckungen“ sein können (S. 325).

Zur Anwendbarkeit der logisch-mathematischen Erkenntnisse

Die Frage nach der Anwendbarkeit der logisch-mathematischen Erkenntnisse, also nach „der Übereinstimmung zwischen den logisch-mathematischen Strukturen und der Erfahrung“ (S. 353) oder nach der „Adaption der logisch-mathematischen Strukturen an die physikalische Welt in der Perspektive der biologischen

Erklärungen der Evolution und der Adaption im allgemeinen“ (S. 68) beantwortet Piaget vage, aber in seinem Ansatz konsistent.

> „Tatsächlich liefert schon die Annahme, der letzte Ursprung der zu den logisch-mathematischen Strukturen führenden Koordinationen sei in den allgemeinsten Funktionsweisen der lebenden Organisation, ..., zu suchen, die Elemente einer Lösung für das Problem der Übereinstimmung zwischen diesen Koordinationen oder Strukturen und der äußeren Umwelt. Die lebende Organisation ist, wie Bertalanffy immer wieder betont hat, ein ‚offenes System‘. ... Die lebende Organisation ist damit die eines Austauschsystems, und der Terminus ‚Organisation‘ bezeichnet nur den inneren Aspekt eines in kontinuierlicher Anpassung begriffenen Systems. ... Das bedeutet ..., daß die Organisation auf allen Stufen nur im Einklang mit der Umwelt funktionieren kann: die Übereinstimmung zwischen Mathematik und Erfahrung ist nur ein – wenn auch besonders interessanter – Sonderfall dieses ständigen Einklangs. Wenn man die Logik und die Mathematik auf die allgemeinen Koordinationen der Akte des Subjekts zurückführt, so wird damit ... daran erinnert, daß der Reichtum seines Denkens sich wohl aus den inneren Quellen des Organismus speist, die Wirksamkeit dieses Denkens aber darauf beruht, daß der Organismus nicht unabhänigig von der Umwelt ist, sondern nur in Wechselwirkung oder Interaktion mit ihr lebt, sich verhält und denkt.“ (S. 353-354).

Piagets Argumente für seine Vorstellungen von logisch-mathematischer Erkenntnis

Seine Vorstellungen von den logisch-mathematischen Erkenntnissen stützt Piaget nun erstens mit Einsichten, die er (zum Teil mit seinen Mitarbeitern) aus entwicklungspsychologischen Untersuchungen (vgl. S. 51) zum logischen Denken (vgl. S. 313-315), zum Zahlbegriff (vgl. S. 315, 317-319) und zum reinen (d.h. nicht auf Merkmale der räumlichen Erfahrung bezogenen) geometrischen Denken (vgl. S. 315-316, 319-320) gewonnen hat. Bei der Diskussion des Zahlbegriffs berücksichtigt er darüber hinaus auch Befunde zum „Zählen“ bei Tieren. Mehr Informationen zu seinen entwicklungspsychologischen Untersuchungen findet man in (Piaget 1975).

Zweitens stützt er seine Vorstellungen von den logisch-mathematischen Erkenntnissen mit der Behauptung:

> „Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften dieser reflektierenden Abstraktionen, die sich durch die ganze Geschichte der Logik und der Mathematik verfolgen lassen, ist ihre vollständige Konvergenz mit dem psychogenetischen Prozeß des allmählichen Aufbaus der operatorischen Strukturen beim Kinde“ (S. 328).

Den psychogenetischen Prozess des Aufbaus operatorischer Strukturen beim Kinde beschreibt Piaget mit seiner Stufentheorie (vgl. S. 18-19). Behauptet wird hier offenbar, dass die Geschichte der Logik und der Mathematik (allerdings in anderer Zeitskalierung) ähnlich wie die kognitive Entwicklung eines heutigen Kindes vom Sensomotorischen zum Formaloperatorischen verläuft. Daran ist zwar richtig, dass auch die Geschichte der Logik und der Mathematik mit einfachen Sachverhalten beginnt und zu komplexen Strukturen hin fortschreitet, aber es ist mit heutiger Kenntnis nicht anzunehmen, dass beide Verläufe vom gleichen universellen Prinzip bestimmt werden (vgl. Damerow/Lefèvre 1998, S. 102-103).

Kritik des Ansatz von Piaget

Die umfangreiche Kritik des Ansatzes von Piaget kann hier nicht dargestellt werden. Sie ist teilweise in den neueren Piaget-Reziptionen bzw. neueren in der Piagetschen Tradition stehenden Forschungsberichten enthalten, z.B. (vgl. Reusser 2006; Demetriou 2006). Hier beschränken wir uns auf einige wesentliche Aspekte, die für das Vorhaben der vorliegenden Arbeit wichtig sind. Sie sind zur besseren Übersicht aufgelistet.

1. Piaget vertritt eine universalistische Position, dergemäß die logisch-mathematischen Erkenntnisse unabhängig von bereichsspezifischem Wissen in der reflektierenden Abstraktion erzeugt werden (vgl. Reusser 1998, S. 127). Neuere Auffassungen, die von empirischen Befunden nahegelegt werden, betrachten das Gehirn als ein komplexes System, das viele Module enthält, die für die Bewältigung hochspezieller Umweltanforderungen phylogenetisch enstanden sind (vgl. Waldmann 1996, S. 323; Reusser 1998, S. 125) und Artikel in (Crawford/Krebs 1998). Dafür, dass es im Gehirn auch bereichsspezifische Module für die Verarbeitung mathematischer Anforderungen gibt, sprechen viele empirische Befunde (vgl. Dehaene 1999).

2. Piaget spricht zwar gelegentlich von sozialen und kulturellen Einflüssen auf die kognitive Entwicklung (vgl. S. 314, 370, 378-379), bezieht sie jedoch

nicht wirklich in seine Überlegungen ein (vgl. Reusser 1998, S. 125, 128). Zur Kulturabhängigkeit von PIAGETs Stufentheorie siehe (Stotz 1996).

3. PIAGETs Stufentheorie der kognitiven Entwicklung gilt nur eingeschränkt. Diese Einschränkungen beziehen sich z.B. auf den zeitlichen Verlauf, auf soziale und auf kulturelle Einflüsse (vgl. Reusser 1998, S. 125-127; Stotz 1996).

4. PIAGET hat die zu seiner Zeit bereits vorliegenden Befunde und Einsichten zur Phylogenese des Menschen in seiner Umwelt nicht konkret für seine Überlegungen genutzt. Er hat dies mit der spärlichen Befundlage gerechtfertigt (vgl. Vollmer 2003, S. 66).

5. Auch seinerzeit vorliegende Befunde und Einsichten zur Struktur und Funktion des menschlichen Nervensystems nutzt PIAGET für seine Überlegungen jedenfalls nicht explizit.

6. PIAGET sichert seine Vorstellungen nicht mithilfe von Fallbeispielen ab, die auf konkreten Befunden und Einsichten aus der Geschichte der Wissenschaften beruhen.

7. Seine entwicklungspsychologischen Arbeiten betreffend wird ihm vorgeworfen, er habe mit seiner klinischen Methode nicht sauber gearbeitet (vgl. Reusser 1998, S. 126) und spätere Ergebnisse (auch die seiner Mitarbeiter) nicht zur Verbesserung seiner Vorstellungen herangezogen.

8. F. KLIX bemerkt, dass PIAGET die Ausbildung von kognitiven Inferenzen verschiedener Art wenig bedacht und die Ausbildung und Entwicklung sprachlicher Kompetenz in seine Theorie nur schwach einbezogen hat (vgl. Klix 1992, S. 403-404).

Zusammenfassung

PIAGET entwirft einen methodisch überlegten, die biotische und die psychische Emergenzebene umfassenden kybernetischen Ansatz, um den Status der logisch-mathematischen Erkenntnis zu lokalisieren. Mit dem von ihm herausgearbeiteten Status der logisch-mathematischen Erkenntnis liefert er einen wichtigen Beitrag zur Begriffsexplikation der Mathematik, der jedoch aus der Sicht des heutigen Forschungsstandes teilweise korrigiert und ergänzt werden muss.

Denn abgesehen von der neueren Einsicht, dass seine universalistische Position nicht haltbar ist, verzichtet er auf konkrete Befunde zur Stammes- und Vorgeschichte des Menschen in seine Überlegungen, sichert seine Vorstellungen nicht durch konkrete Befunde aus der Geschichte (der Wissenschaften, insbesondere der Logik und der Mathematik) ab und unterschätzt die soziokulturellen Einflüsse oder berücksichtigt sie nicht angemessen.

Bezüge zur Mathematikdidaktik

PIAGETs Arbeiten zur kognitiven Entwicklung des Kindes hatten einen bedeutenden Einfluss auf die Pädagogik und Didaktik im Allgemeinen und auf die Mathematikdidaktik für Schulen insbesondere. Vor allem, weil seit ca. 1990 mithilfe einer besseren Computertechnologie die empirische Befundlage detaillierter wurde und PIAGETs Ergebnisse experimentell und theoretisch überprüft werden konnten, wurde seine Position relativiert. Anders als PIAGETs kognitive Entwicklungslehre ist sein Spätwerk „Biologie und Erkenntnis“ (Piaget 1992) seltener rezipiert worden, und auf den Mathematikunterricht der Schulen wirkten seine in diesem Buch festgehaltenen biologisch-kybernetische Einsichten nicht. Auch unter Mathematiklehrern und Mathematikdidaktikern war/ist „Biologie und Erkenntnis“ keine Standardlektüre, und auch zur Begriffsexplikation der Mathematik wurde es nach Kenntnis des Autors nicht herangezogen. Für Begriffsexplikationen der Mathematik hielt man sich mehr an historische oder philosophische Arbeiten, einschließich der Arbeiten zu Grundlegungen der Mathematik.

2.4.3 Mathematik aus der Sicht der Evolutionären Erkenntnistheorie (EE)

Evolutionäre Erkenntnistheorie (EE)

In Arbeiten von 1941 und 1943 verband K. LORENZ evolutionsbiologische mit philosophisch-erkenntnistheoretischen Überlegungen und begründete damit ein multidisziplinäres Forschungsprogramm (vgl. Vollmer 2003, S. 14, 87), dessen Bezeichnung „Evolutionäre Erkenntnistheorie“ (EE) auf den Psychologen D.T. CAMPELL zurückgeht (vgl. Vollmer 2003, S. 49, 86, 87). Von einer hypothetisch realistischen Position[17] ausgehend, steht die EE in ihrer aktuellen Fassung für

[17]Die hypothetisch-realistische Position geht davon aus, dass es erstens eine Welt gibt, deren Strukturen nicht von erkennenden Systemen abhängen (ontologischer Realismus), die wir

den Versuch, im 1. Schritt die Genese und Funktionen der Erkenntnisfähigkeit des Menschen mithilfe der Evolutionsbiologie (EE_1) und, weitergehend im 2. Schritt, mithilfe von weiteren empirischen Wissenschaften z.B. die Evolution der wissenschaftlichen Theorien (Theoriendynamik) in einer evolutionären Wissenschaftstheorie (EE_2) zu erklären (vgl. Vollmer 2003, insbes. S. 22 u. S. 69-73; 1990, S. 213-214) und (vgl. Oeser 1996).

An der EE haben sich Wissenschaftler vieler Disziplinen beteiligt, auch um erkenntnistheoretische Fragen, die traditionell von Seiten der Philosophie bearbeitet worden sind, im evolutionären Paradigma und auf der Grundlage einzelwissenschaftlicher Befunde zu beantworten. Den Anspruch der EE, auch eine philosophische Erkenntnistheorie[18] zu sein und Antworten auf philosophisch-erkenntnistheoretische Fragen geben zu können, lehnten Vertreter der kontinentalen Philosophie überwiegend ab; der angelsächsischen Philosophie fiel die Anerkennung der EE leichter (vgl. Vollmer 2003, S. 7).

Nachdem die Vertreter der EE die bereits von LORENZ im Wesentlichen aufgeworfenen Probleme strukturiert und zum Teil überzeugend – aber überwiegend heuristisch – beantwortet haben, scheint sich das Forschungsprojekt EE immer mehr in Einzelanalysen aufzulösen, die zum Teil multidisziplinär in den vor allem empirisch arbeitenden Fachwissenschaften durchgeführt werden und in denen sich die ursprünglichen Fragen und Methoden, wie auch der Name „EE“ immer mehr verlieren. Umgekehrt gibt es bedeutende Fachwissenschaftler – wie z.B. den Psychologen und Pionier der Evolutionspsychologie F. KLIX, dessen Beiträge zur EE von erstem Range sind – die im Zusammenhang mit der EE kaum oder gar nicht zur Kenntnis genommen wurden[19]. Wir werden uns mit F. KLIX in den Abschnitten 2.4.4, 2.4.7 und 2.4.8 noch ausführlich befassen.

Beiträge zur EE werden im Folgenden nur referiert, insoweit sie für das

---

zweitens zumindest teilweise erkennen (epistemologischer Realismus) und drittens beschreiben (methodologicher Realismus) können (vgl. Vollmer 2003, S. 94). Der Erfolg der Wissenschaften oder der Erfolg wissenschaftlich interpretierter Theorien, so betont VOLLMER, stütze zwar die realistische Position und der Realismus erkläre mehr als seine Gegenpositionen, aber beweisen oder widerlegen lasse er sich nicht (vgl. Vollmer 2003, S. 96-97) und, weil er nicht empirisch prüfbar ist, heißt er metaphysischer Realismus (vgl. Vollmer 2003, S. 96). Die hypothetisch-realistische Position ist die fundamentale Arbeitsannahme für die EE.

[18] Für den „Evolutionären Naturalismus“ bzw. „philosophischen Naturalismus“ siehe (Vollmer 2003, S. 21-24; 1990, S. 214).

[19] Im „Nachwort zur 5. Auflage“ wird F. KLIX als ein Autor, der eine hervorragende Rolle für die „Evolution der Evolutionären Erkenntnistheorie“ spielt (vgl. Vollmer 1990, S. 214) spielt, lediglich erwähnt.

Vorhaben der vorliegenden Arbeit wichtige strukturelle Einsichten enthalten oder die in ihnen vorkommenden mathematikspezifischen Überlegungen und Beispiele für einen naturgeschichtlichen Blick auf die Mathematik von Interesse sind. Für Literatur zur EE siehe z.B. (Vollmer 2003, S. 46 Anmerkung 5) – überwiegend EE_1 – und z.B. (Oeser 1988) – überwiegend EE_2.

Die Beiträge zur Mathematik aus evolutionär-erkenntnistheoretischer Sicht von G. Vollmer

Der Physiker und Philosoph G. Vollmer publizierte 1975 in seinem Buch (vgl. Vollmer 1990) den ersten umfassenden Entwurf einer EE, den er bis heute unter verschiedensten Gesichtspunkten ausarbeitet und erweitert. Wir beschränken uns hier allein auf seine Beiträge, die mit einer evolutionär-erkenntnistheoretischen Sicht auf die Mathematik und Verwandtes zu tun haben. Prominente und von ihm selbst verfasste Reflexionen über Mathematik und Logik sind in seinen Arbeiten zusammen mit einzelwissenschaftlichen Fakten – der Sache entsprechend – schwer trennbar miteinander verwoben. Wenngleich er die große Bedeutung empirischer Untersuchungen für die Lösung von Problemen der EE (nicht nur für die Probleme der mathematischen Erkenntnis) betont (vgl. Vollmer 1988a, S. 113), deutet er die Mathematik aus der Sicht der EE und verzichtet auf einzelwissenschaftliche – biologische, psychologische etc. – Untersuchungen oder Entwürfe, die seine reflexive Sicht mit dem einzelwissenschaftlichen Forschungsstand in einer die Mathematik betreffende Frage verbinden würden.

Vollmer*s Beitrag zur Begriffsexplikation der Mathematik*

Vollmer überführt die die Natur des mathematischen Wissens betreffenden Fragen also nicht in einzelwissenschaftliche empirische Forschungsprojekte, sondern nennt die großen naturgeschichtlichen Voraussetzungen für die Tatsache, dass wir Mathematik – zunächst nur – zur Strukturierung unseres Mesokosmos schaffen, in der Feststellung einer phylogenetischen Passung von Mesokosmos und Organismus (vgl. Vollmer 2003, S. 133-140) und leistet damit einen Beitrag zur Begriffsexplikation der Mathematik. Diese großen Voraussetzungen, so führt er aus, beruhen darauf, dass es verschiedene physikalische Grundkräfte gibt, die mit verschiedenen Stärken nicht auf alle Materie in gleicher Weise wirken, sodass eine teilweise strukturierte und teilweise stabile Welt entstanden ist (vgl. Vollmer 2003, S. 134-135), in der sich Leben entwickeln kann und sich erhält, solange es auf seine Umwelt überlebensadäquat reagieren kann. Wir bezeichnen den Weltausschnitt der für uns mittleren Größenordnungen, in dem wir uns phylogenetisch so verhielten, dass wir bis heute überlebt haben, als unseren Mesokosmos (vgl. Vollmer 1990, S. 161-165; 1988a, S. 136-140, 146-149; 1988b, S. 138-140), VOLLMER spricht hier nach J. VON UEXKÜLL auch von unserer kognitiven Nische (vgl. Vollmer 2003, S. 20-21; 1988a, S. 77). Mesokosmische Mathematik ist auf kleine Zahlen, alltagsgeometrische Konzepte und alltägliche Invarianten beschränkt (vgl. Vollmer 2003, S. 140). Das unverzichtbare kognitive Werkzeug für uns, mit dem wir auch unanschauliches – z.B. mathematisches, mikro- oder makrophysikalisches – Wissen schaffen und dabei unseren Mesokomos verlassen können, ist für VOLLMER die Sprache (vgl. Vollmer 2003, S. 140). Mathematisches Wissen erscheint somit als ein mithilfe von Sprache über seine mesokosmischen Gegebenheiten hinaus konstruiertes kognitives Werkzeug, das uns dabei helfen kann, wenn wir uns überlebensadäquat in unserer – nicht nur mesokosmischen – Umwelt verhalten wollen. In diesem Punkt sind sich wohl alle Vertreter der EE, PIAGET sowie KLIX (s.u.) einig und auch wir stehen dafür.

Einzelne Beiträge zur Mathematik aus evolutionär-erkenntnistheoretischer Sicht
Wir weisen nun auf die wichtigsten aus evolutionär-erkenntnistheoretischer Sicht verfassten Beiträge zur Mathematik von VOLLMER hin:

(1) Reflexionen über Mathematik im Allgemeinen und ihr Umfeld (z.B. Logik, Kalküle, formale Systeme etc.), insofern sie Einsichten über die Mathematik vermitteln, findet man in (Vollmer 1990, S. 11-17, 108, 132-133, 169, 181-182; 1988a, insbes. S. 5-11, 23, 26-27, 98-102, 167-169; 1988b, insbes. S. 130-131, 160-161; 2003, S. 121-142).

(2) In den Abschnitten „Das alte Gehirn und die neuen Probleme“ und „Über vermeintliche Zirkel in einer empirisch orientierten Erkenntnistheorie“ gibt er unter anderem eine Interpretation der GÖDELschen Sätze (Vollmer 1988a, S. 153-156, 224-230, 238-239).

(3) Sehr ausführlich befasst sich VOLLMER mit Fragen der Anschaulichkeit von mathematischen Strukturen und der Anschaulichkeit der von der physikalischen Forschung nahegelegten Raumkonzepte in Verbindung mit der Frage, welches Raumkonzept denn unserem physikalischen Raum entspreche und wie man die Dreidimensionalität unseres physkalischen Raumes erklären oder begründen könne (vgl. Vollmer 1990; 1988a; 1988b; 2003, S. 197-256). Die Items (4), (5), (6), (7) und (8) handeln diesen Komplex ab.

In nicht evolutionär-erkenntnistheoretischer Absicht findet man diesen Problemkomplex auch von P. Janich bearbeitet in (Janich 1989).

(4) In seinen Arbeiten an diesem Problemfeld analysiert Vollmer einige Positionen der Philosophiegeschichte – insbes. I. Kants Anschauungsformen (vgl. Vollmer 1988a, S. 166-216; 1990, S. 11, 126-131) –, referiert biologische sowie wahrnehmungspsychologische Befunde (vgl. Vollmer 1990, S. 40-106; 1988b, S. 67-70), entwirft eine projektive Erkenntnistheorie (vgl. Vollmer 1990, S. 122-126; 1988a, S. 28-35, 85-91, 113-114; 1978), nähert sich damit dem Begiff der Anschaulichkeit einer Struktur (vgl. Vollmer 1988a, S. 77-85, insbes. S. 80-81; 1988b, S. 100-137, 141-145 insbes. S. 111, 113-115) und definiert eine Struktur als „anschaulich genau dann, wenn sie regulär in eine mesokosmische Struktur transformiert werden kann[20]“ (Vollmer 1988b, S. 115). Damit sind insbesondere mesokosmosmische Strukturen anschaulich (vgl. Vollmer 1988b, S. 103-105). Anschaulichkeit, so zeigt er in (Vollmer 1988a, S. 83), ist „weder notwendig noch hinreichend für Verstehbarkeit“.

(5) Mit seinem Anschaulichkeitsbegriff untersucht er, ob bzw. inwieweit die Strukturen der klassischen Physik, der modernen Physik oder die Räume nicht euklidischer Geometrien anschaulich bzw. unanschaulich sind (Vollmer 1988b, S. 116-124, 145-148) und resümiert und deutet seine Ergebnisse in verallgemeinertem Zusammenhang (Vollmer 1988b, S. 124-132). Weitere Beispiele für höherdimensionale mathematisch-geometrische Räume und deren Objekte gibt er in (Vollmer 2003, S. 226-231, 241). Seine wichtigste Schlussfolgerung aus diesen Überlegungen ist die, dass der abstrakten Mathematik mit ihren Kalkülen überragende Bedeutung für die Erforschung von Strukturen jenseits unseres Mesokosmos zukommt (Vollmer 1988b, S. 130-131).
Eines der einfachsten Beispiel für eine insgesamt nicht anschauliche geometrische Struktur, findet man immer wieder bei Vollmer: Den vierdimensionalen Würfel (Hyperkubus oder Tesseract mit seinen niederdimensionalen Teilstrukturen 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Flächen und 8 dreidimensionalen Würfeln) (vgl. Vollmer S. 2003, S. 19; 1988a, S. 29, 83; 1988b, S.

[20] Das Zitat ist im Original ab „regulär“ kursiv gedruckt. Vollmer gibt keine Definition für „reguläre“ Transformation. Vermutlich meint er damit eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung.

110; 1978, S. 79-82). Bauen oder zeichnen können wir nur Projektionen von ihm in drei bzw. zwei Dimensionen (vgl. Vollmer 2003, S. 20; 1978, S. 79-82). Mit dem Anschaulichkeitskriterium von G. Vollmer erweist sich der vierdimensionale Würfel als nicht anschaulich.

(6) Unseren Mesokosmos erleben wir als dreidimensional und bis heute gibt es keinen empirischen Hinweis dafür, dass der uns bekannte physikalische Raum im Großen wie im Kleinen nicht die Dimension drei hat und theoretisch-physikalische Überlegungen bestätigen dies in dem Sinne, dass stabile physikalische Systeme unserer Welt in einer anderen Dimension instabil würden; in der Relativitätstheorie sind zwar Raum und Zeit zu einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum zusammengefasst, aber in ihr spielen der dreidimensionale Raum und die Zeit jeweils ihre Sonderrolle, und alle vorgelegten Theorieentwürfe zur Vereinheitlichung der fundamentalen Wechselwirkungen (elektroschwache, starke und Gravitation), die mehr als drei Dimensionen für den Raum vorhersagen (z.B. Stringtheorien und Nachfolger davon) sind bis heute spekulativ (vgl. Vollmer 2003, S. 232-252; 1988a, S. 62; vgl. auch Janich 1989).

(7) Aber nicht nur die physikalische Erfahrung mit unserem Außenraum, sondern auch die phylogenetisch erzeugten anatomischen Strukturen unseres Körpers (ebenso die von Tieren) und ihre verhaltenssteuernden Funktionen deuten stark darauf hin, dass unser physikalische Mesokosmos dreidimensional ist (vgl. Vollmer 1990, S. 36-37, 45, 49-54, 80, 93-94, 101-102, 104-105; 1988a, S. 47, 62-63, 68; 1988b, S. 71-72; 2003, S. 202-206, 225-226; vgl. auch Janich 1989).

(8) Unter (6) und (7) wurden zwar Begründungen auf die Frage „Warum ist der Raum dreidimensional?“ (Vollmer 2003, S. 243) gegeben, aber eine befriedigende Erklärung dafür, so stellt Vollmer fest, gibt es bis heute nicht (Vollmer 2003, S. 243-248): Im Gegensatz zu Begründungen, von denen man lediglich Überzeugskraft verlangt, sollen Erklärungen auf Naturgesetze gründen. Bis heute ist aber kein Naturgesetz bekannt, auf Grund dessen die Dreidimensionalität des Raumes erklärt werden kann. Wie bereits in (6) erwähnt, gibt es für die bis heute diskutierten Theorien (z.B. Stringtheorien), aus denen auch Aussagen über die Dimension des Raumes folgen, keine empirische Evidenz.

(9) Vollmer behandelt in „Das alte Gehirn und die neuen Probleme“ (Vollmer 1988a, S. 116-165) anhand von Beispielen aus der Mechanik (vgl. Vollmer 1988a, S. 146-149; 1988b, S. 149-153), aus der Logik und Metamathematik (vgl. Vollmer 1988a, S. 153-156) und aus der Mathematik (vgl. Vollmer 1988a, S. 116-127) kognitive Fehlleistungen jenseits unseres Mesokosmos. Diese und weitere kognitive Fehlleistungen hat er unter dem Stichwort „Paradoxien“ in seinem Buch „Wissenschaftstheorie im Einsatz“ (Vollmer 1993, S. 31-93) zusammengetragen und kommentiert. (Es sei hier angemerkt, dass kognitive Fehlleistungen seit geraumer Zeit Gegenstand empirischer Untersuchungen in der kognitiven Psychologie sind; dazu siehe die Literatur in 2.4.8. und (vgl. Reason 1994).)
Die von Vollmer in (Vollmer 1988a, S. 116-127)) angeführten mathematischen Beispiele stammen aus dem Bereich der (a) dynamischen Systeme und (b) der Stochastik. Diskutiert werden in heuristischer Weise die Fehleinschätzungen (kognitiven Fehlleistungen)

   (a) von Wachstumsprozessen anhand der Beispiele: Zinseszins, Bevölkerungswachstum und Verhalten von simulierten Ökosystemen,
   (b) von zufälligen Ereignissen anhand der Beispiele: gleichzeitige Geburtstage, Roulette und Entscheidungen unter Risiko.

Vollmer *schlägt eine „kontrastierende Didaktik“ vor*

Im Anschluss an die Diskussion kognitiver Fehlleistungen von Menschen bei der Lösung von Mechanikaufgaben (vgl. Vollmer 1988b, S. 149-153) regt Vollmer die Ausarbeitung einer „kontrastierenden Didaktik“ für die Physik an (vgl. Vollmer 1988b, S. 153-156) und speist seine Überlegungen dazu an einer Stelle (vgl. Vollmer 1993, S. 138) in „Didaktische Konsequenzen der Wissenschaftstheorie“ (vgl. Vollmer 1993, S. 131-139) ein. Der Frage, inwieweit eine kontrastierende Didaktik auch für die Evolutionäre Pädagogik oder Mathematikdidaktik fruchtbar sein könnte, ließe sich mit den Einsichten unseres 5. Kapitels nachgehen.

Die Beiträge zur Mathematik aus der EE-Sicht von E. Oeser

E. Oeser hat zahlreiche Arbeiten zur EE publiziert. Wir beziehen uns hier nur auf sein Buch „Das Abenteuer der kollektiven Vernunft. Evolution und Involution der Wissenschaft“ (Oeser 1988), in dem er den Ausstieg der Menschheit aus dem Mesokosmos im Rahmen einer Evolutionären Wissenschaftstheorie EE_2 anhand von Beispielen nachzeichnet und dabei Strukturen und Funktionen des

Selbstorganisationsprozesses Wissenschaft herausarbeitet. Empirische Untersuchungen – etwa im Bereich der Wissenschaftsforschung oder Wissenspsychologie – macht er nicht. Wir verweisen hier lediglich auf die von ihm untersuchten mathematischen sowie auf die mit diesen in engem Zusammenhang stehenden Beispiele.

(a) Die Evolution des Zahlbegriffs bis zum Positionssystem handelt er sehr kurz ab (Oeser 1988, S. 59-62) und zitiert hier (Klix 1993, in der Auflage von 1983).

(b) Die Evolution des Raumbegriffs – sie beginnt mit der genetisch prädisponierten Raumwahrnehmung und führt über den Horizont hinaus bis zu Vorstellungen und Vermessungen des Weltraums (Makrokosmos) sowie des Mikrokosmos – durchleuchtet er in (Oeser 1988, S. 21-39). Einiges dazu bemerkt er außerdem in (Oeser 1988, 39-50).

(c) Den Weg der Geometrie von EUKILD zu den nichteuklidischen Geometrien analysiert er in (Oeser 1988, S. 107-110, 112).

(d) Den Wahrscheinlichkeitsbegriff (Apriori- und Aposteriori-Wahrscheinlichkeit), das BERNOULLI-Gesetz der großen Zahlen und das BAYES-Theorem analysiert er in (Oeser 1988, S. 82-94).

Die Systemtheorie der Evolution (STE) von R. RIEDL und relevante Folgearbeiten für ein naturgeschichtliches Verständnis der Mathematik

Weil der Biologe R. RIEDL die selbstorganisierenden Systeme und Prozesse des Lebendigen nicht nur vage (wie z.B. PIAGET, siehe oben, oder H.R. MATURANA und F.J. VARELA[21]) beschreibt, sondern – zumindest vom Bereich des Genetischen bis zum Verhalten – Schritt für Schritt durch viele empirisch prüfbare Beispiele stützt und mit seinen Einsichten dann auch die Natur des mathematischen Wissens erörtert, referieren wir nun seine wesentlichen Überlegungen. Im vorliegenden Abschnitt geht es zunächst um Biologie, dann um EE_1 und danach um EE_2, obwohl die Arbeiten von RIEDL dieser natürlichen Gliederung nicht

[21]Die konstruktivistische Theorie von MATURANA und VARELA (Maturana/Varela 1987) referieren wir hier nicht, weil die Autoren darin nicht die Mathematik reflektieren und ihre Aussagen weit von einer empirischen Prüfbarkeit entfernt sind.

immer folgen.

Die Systemtheorie der Evolution (STE)

In seinem Buch „Die Ordung des Lebendigen“ (Riedl 1975) legt RIEDL eine über die Synthetische Evolutionstheorie (Zusammenfassung der Mechanismen Selektion sowie Mutation, ergänzt um die Populationsdynamik) hinausgehende Systemtheorie der Evolution (STE) vor und stellt in Aussicht, dass mit ihrer Hilfe auch die transspezifische Evolution (Evolution der Familien, Ordnungen, Stämme etc.) erklärt werden könnte. Er rehabilitiert die den umstrittenen Begriff des Typus (vgl. Riedl 1975, S. 92; 2003, S. 167) verwendenden Disziplinen Morphologie (vgl. Riedl 1975, S. 56) und vergleichende Anatomie und bezweifelt, dass die Großabläufe der Stammesgeschichte allein mithilfe der Synthetischen Evolutionstheorie erklärt werden können.

Die STE gründet auf den Einsichten, dass Ordnungsbildung nur in Systemen möglich ist, die sich in Zuständen weit weg vom statistisch-mechanischen bzw. thermodynamischen Gleichgewicht befinden und dass die Systeme des Lebendigen im Kosmos gerade solche materiell-energetischen Systeme sind (vgl. Riedl 1975, S. 94-96). Zu ihrer Beschreibung verwendet RIEDL die üblichen Begriffe Wahrscheinlichkeit, Information und Komplexität. Die STE geht weiter

> „von einem vollständigeren [als dem linearen] Kausalkonzept aus, von der Einsicht, daß die Wirkungen des Evolutionsmechanismus auf das, was wir seine Ursachen nennen, selbst zurückwirken. Ich werde zeigen,“ so RIEDL, „daß die Chancen, nämlich mit mutativer Änderung Erfolg zu haben, in allen Ebenen der Organisation verschieden sind; und deshalb die Erfolgschancen der Änderung von Merkmalen (Phänen, Ereignissen) über diejenigen der Gene (genetische Entscheidungen) ebenso wachen wie die der Gene über die der Merkmale. Entscheidungen wie Ereignisse sind über einen … Rückkoppelungsmechanismus zu einem Gesamtsystem von Wirkungen verbunden. Dies ist im Wesen ein Selektionsmechanismus, der den Gesetzen der Zufallswahrscheinlichkeit die wachsende Zufalls-Unwahrscheinlichkeit der Organisation des Lebendigen abringt. Dabei führt die Ausnützung der möglichen Wechselabhängigkeiten sowohl zur Ausbildung der vier bekannten molekularen Schaltmuster der Entscheidungen [Replizierschaltung, Vorschaltung, Gleichschaltung und Folgeschaltung (vgl. Riedl 1975, S. 289, 103-110)] als auch zu vier korrespondierenden morphologischen Ordnungsmustern der Ereignisse (die wir

> Norm, Hierarchie, Interdependenz und Tradierung nennen werden [(vgl. Riedl 1975, S. 74-87)]). Dynamisch bedeutet dies ... eine Selbststeuerung in der Evolution“ (Riedl 1975, S. 6),

aus welcher die anderen Ordnungsstrukturen des Lebendigen zu erklären sind. Charakteristisch für die STE ist also, dass nicht nur die Gene die Phäne bestimmen, sondern auch die Phäne – infolge selbstorganisierender Prozesse des Organismus, mittelbar – auf die Gene wirken (vgl. Riedl 2003, S. 203). Dazu (Riedl 1975, S. 297): „Es wirkt nur Mutation und Selektion, aber letztere nicht nur von ‚außen‘ “, sondern auch von „innen“. Hier verweist „außen“ auf Außenfunktionen des Organismus bzw. auf das Außensystem, von dem Außenselektion auf den Organismus wirkt. Entsprechend verweist „innen“ auf Binnenfunktionen des Organismus bzw. auf sein Binnensystem, von dem Binnenselektion ausgeht. Die vier erkannten morphologischen Grundmuster bilden, Riedl schließt weitere nicht aus, einen Zusammenhang, der aus dem Prinzip der mathematischen oder geometrischen Symmetrien folgt (vgl. Riedl 1975, S. 86-87). Die Systemisierung der Organismen führt – so zeigt Riedl sowohl für die molekulargenetische Ebene als auch für die Ebene der Merkmale (Funktionen) mithilfe von Wahrscheinlichkeitsabschätzungen – zu drei Phänomenen, die er „Bürde“, „Kanalisation“ und „Überdetermination“ nennt (vgl. Riedl 1975, S. 111, 113-114, 120; 2003, S. 206-209). „Bürde“ bezeichnet die zum adaptiven Erfolg in seiner Umwelt vom organismischen System getroffene Sequenz der (mit erdrückender Wahrscheinlichkeit irreversiblen) Evolutionsentscheidungen (auf genetischer Ebene wie auf Merkmalsebene) und „Kanalisation“ die aus den Bürden folgende „Einengung der evolutiven Möglichkeiten, die ... dabei ganz den Mustern der Bürde folgen muss.“ (Riedl 1975, S. 113). Beiden gegenüber bezeichnet „Überdetermination“ „eine Superpräzision, die weder der Mechanismus der einzelnen Determinationsentscheidungen, noch der ihrer Überwachung allein zu erreichen vermöchte, sondern die auf jenen Systembedingungen beruht, deren Glieder wir als Systemisierung, Bürde und Kanalisation beschrieben“ (Riedl 1975, 114) haben.

Die STE – Riedl entwickelt und stützt sie mithilfe vieler Beispiele (vgl. Riedl 1975) – erklärt in empirisch nachprüfbarer Weise die Ordnungsbildung in der biotischen Emergenzebene (lebende Systeme). Sie wurde von der Scientific Community zwar zunächst – positiv – zur Kenntnis genommen, blieb aber ohne Einfluss (vgl. Riedl 2003, S. 203-204).

Wir haben die STE von Riedl hier skizziert, weil

- sie die biotische Emergenzebene mithilfe eines für den Kosmos gültigen physikalischen Ansatzes erklärt und die Phänomene der biotischen Emergenzebene so konkret strukturiert, dass sie einzelwissenschaftlichen Untersuchungen zugänglich sind,

und

- RIEDL in nachfolgenden Arbeiten aus der STE eine Evolutionäre Erkenntnistheorie (EE_1) gewinnt, mit deren Hilfe er dann Teile der Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte rekonstruiert (diese Rekonstruktionen fallen in den Bereich einer EE_2), wie z.B. Teile der Logik, aus denen wir Einsichten in die Mathematik gewinnen können.

Wir wenden uns nun der Evolutionären Erkenntnistheorie von RIEDL zu.

Die Version der Evolutionären Erkenntnistheorie (EE_1) von RIEDL

RIEDL weist bereits im Schlusskapitel von „Die Ordnung des Lebendigen" über den unmittelbaren Bereich der Biologie (einschließlich der Biologie des Verhaltens) hinaus auf Erfahrung, Wahrnehmung, Denken und Zivilisation und begründet, warum die Mechanismen der STE auch hier gültig sein und die Systemisierung bestimmen müssen (vgl. Riedl 1975, Kapitel VIII B7). Wie manche Denker in der Philosophiegeschichte, so begreift auch RIEDL die Denkordnung als eine Nachbildung der Naturordnung. Die Ursachen für die Erhaltung der Nachbildung der Natur im Denken erkennt er zum Teil in Selektionsvorteilen, aber auch in Kanalisierungen, wie sie sich z.B. in den ökonomischen Begriffshierarchien des Gedächtnisses zeigen (vgl. Riedl 1975, S. 331-333). Soweit es hier um die Nachbildung der vorbegrifflichen Fähigkeiten und Erfahrungen unseres Denkapparates geht, so RIEDL, spricht K. LORENZ von ratiomorphen (im Gegensatz zu rationalen) Leistungen. Zu diesen zählen jene Phänomene, die in der philosophischen Diskussion als apriorische Vernunftbegriffe und von den Vertretern der EE als stammesgeschichtlich aposteriori ausgewiesen werden (vgl. Riedl 1975, S. 332; 1980). Den empirisch nachprüfbaren Charakter der vom Bereich des Biologischen in den Bereich des Erkennens führenden Überlegungen betont RIEDL bereits im Schlusskapitel von (Riedl 1975): „Drei Methoden, so sehen wir voraus, werden den Nachweis erbringen: [erstens] die tierpsychologische Analyse des vorbegrifflichen Denkens (wohl zurück bis zu den primitiven Amnioten, ja Tetrapoden), die Untersuchung der Logik unserer [zweitens] letzten phylogenetischen und [drittens] ontogenetischen Vorstadien (die ja bei

Naturvölkern und Kindern noch zugänglich sind).“ (S. 332) Und auch im Vorwort sowie in der Einführung von (Riedl 1980) stellt er heraus: „Die Methode bleibt die der vergleichenden Naturwissenschaft. ... Die Lösungen, welche diese ‚evolutionäre Erkenntnistheorie‘ liefert, stehen also auf der Grundlage der empirischen Prüfbarkeit.“ (S. 7-8) und: „Zu den Erwartungen zählt es, dass sich dieses Konzept [einer evolutionären Theorie der Erkenntnis, hier im Sinne der EE_1 gemeint] zu einer geschlossenen Theorie entwickeln werde.“ (S. 14)

Das Lebendige löst das Problem der Erkenntnis (zunächst des Erkennens) auf der niedrigsten hierarchischen Stufe durch den Aufbau genetischer Programme zur Steuerung der das Überleben sichernden Wechselwirkungen des Organismus mit der Umwelt, die es in Replikationsprozessen an die nachfolgenden Generationen weitergibt. Die stammesgeschichtlich bewährten genetischen Programme halten das Risiko der Fehlpassung für die Population in ihrer natürlichen Umwelt sehr gering. Auf einer höheren Stufe brechen einige geschlossene Programme auf und es entstehen bedingte Reflexe, mit denen der Pfad zum individuellen Lernen gekennzeichnet ist. Individuelles Lernen auf dieser Stufe erfordert noch keine Bewusstheit, verläuft um viele Zehnerpotenzen schneller, erlaubt eine flexiblere Anpassung an eine sich verändernde Umwelt, doch individuell Gelerntes vererbt sich nicht genetisch, sondern muss von jedem Organismus neu erworben werden. Erfolg und Risiko des individuell Gelernten sterben mit dem Individuum aus und bleiben deswegen auf dieser Stufe für die Population gering. „Dies wird erst mit der Sprache an der Schwelle zum Menschen anders. Mit einer Sprache in Begriffen und noch mehr mit der Schrift entsteht ein neues Codesystem, welches gewonnene Erfahrung nun ein zweites Mal für die Art unverlierbar macht.“ (vgl. Riedl 1980, S. 28) Begriffssprache gibt es nicht ohne Bewusstsein und Erfahrungstransfer geschieht in kommunikativen begriffssprachlichen Prozessen.

Riedl entfaltet nun seine Evolutionäre Erkenntnistheorie, indem er nach K. Popper vorschlägt, eine Erklärung für Erkenntnis beim Alltagsverstand und nicht mit einem philosophischen Problem zu beginnen, weil Erkenntnis immer auf biologischem (Vor-)Wissen und Bedingungen gründet, die zum allergrößten Teil genetisch vererbt oder angeboren sind (vgl. Riedl 1980, S. 36) und fährt fort:

> „Das biologische Wissen enthält ein System vernünftiger Hypothesen, Voraus-Urteile, die uns im Rahmen dessen, wofür sie selektiert wurden, wie mit höchster Weisheit lenken; uns aber an dessen Grenzen vollkom-

> men und niederträchtig in die Irre führen. Es sind das im Wesentlichen die vier Hypothesen ...; wie sie in der Evolution der Organismen eine nach der anderen entstanden und wie sie, einander voraussetzend, als Algorithmen zur Lösung von Problemen des Überlebens, stufenweise auseinanderfolgen.
>
> Wir beziehen damit zur Erforschung des Erkenntnisprozesses einen Standpunkt außerhalb unseres eigenen Erkenntnisvorgangs; einen biologisch objektiv beschreibenden." (Riedl 1980, S. 37)

RIEDL*s erste „Hypothese vom anscheinend Wahren"* (vgl. Riedl 1980, S. 38-79) fasst die Einsicht zusammen, dass es in Umwelten, die dauerhaft zumindest teilweise strukturiert sind, für eine Population überlebensvorteilhaft ist, wenn ihre Organismen zur Steuerung ihres Verhaltens bewährte Vorurteile und gespeicherte Verhaltensprogramme an die Umwelt herantragen, als für jeden einzelnen Fall eine Lagebeurteilung und ein Verhaltensprogramm neu zu konstruieren. Mit dieser Hypothese ist angenommen, wie für die EE typisch, dass Organismen hypothetische Realisten sind. RIEDL erklärt nun die Herkunft des Vorurteils damit, dass Ordnung in der Welt redundant ist:

> „Das Leben kann sich in der Mehrzahl der Fälle darauf verlassen, dass sich die Gegenstände wie die Ereignisse wiederholen werden. Ja, es wiederholt sie selbst in der fortgesetzten Wiederholung der Generationen, der Reaktionen, der Bewegungsabläufe, identische Worte und zu überprüfende Experimente. Das Zusammentreffen, die Koinzidenz eines Ereignisses mit einer bestimmten Lebensbedingung wird sich in der Regel unzählige Male wiederholen oder im explorativen Verhalten wiederholen lassen. ...
>
> Dabei müssen die Koninzidenzen keineswegs zwingend sein. ... Nicht die Notwendigkeit, sondern die Wahrscheinlichkeit von Koinzidenzen wird abgebildet." (Riedl 1980, S. 42)

Detailliert und anhand vieler Beispiele legt RIEDL nun für die verschiedenen Organisationsebenen der Organismen – von der molekulargenetischen bis zur Ebene des individuellen symbolsprachlichen wissenschaftlichen Lernens – dar, wie die Wahrscheinlichkeiten der Koinzidenzen zu stabilisierten Programmen werden, die er suggestiv als Vorurteile bezeichnet und die nur in ihrem Passungsbereich dem Organismus überlebensadäquate Prädiktionen und Verhaltensabläufe erleichtern. Deswegen sieht RIEDL in seinen Überlegungen zur „Hypothese des anscheinend Wahren" den natürlichen Ansatz, mit dem die Debatten um den induktiven Schluss und um die Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie einen naturwissenschaftlichen, empirisch prüfbaren Boden erhalten (vgl. Riedl 1980, S. 53-75). Dies ist aber bereits ein Thema der EE_2, auf das wir auch unten hinweisen werden. Es erfordert darüber hinaus bereits die auf der „Hypothese des anscheinend Wahren“ aufbauenden Hypothesen (vgl. Riedl 1980, S. 76), denen wir uns nun zuwenden.

RIEDL*s zweite „Hypothese vom Ver-Gleichbaren“* (vgl. Riedl 1980, S. 80-117) betrifft die organismischen Verrechnungen koinzidenter Zustände oder Ereignisse für die Erfassung von Ordnungsstrukturen in der Umwelt. Der diese Verrechnung leistende und „aus dieser Welt die Ordnung der Ähnlichkeiten ... abstrahieren[de]“ biologische Mechanismus, so stellt RIEDL fest, „besteht einfach darin, aus der Fülle der Eigenschaften jene zu entnehmen, die am regelmäßigsten koinzidieren.“ (Riedl 1980, S. 84) Auf diese Weise wird „das Konstante vom Variierenden, das mutmaßlich Notwendige vom Zufälligen“ (Riedl 1980, S. 84) geschieden. Und beginnend mit konstanten Grundeigenschaften der Umwelt (Richtung der Schwerkraft, Energie und Intensität von Strahlung, Konzentrationseigenschaften von Substanzen, Festigkeitseigenschaften etc.), denen genetische Programme, Stoffwechselprozesse und anatomische Strukturen korrespondieren, erhebt sich eine komplexe und vielschichtige Architektur von Strukturerkennensmechanismen des Nebeneinanders und des Nacheinanders in der materiellen wie in der sozialen Umwelt, zu denen jene der Form-, Gestalt- und Symmetrieerkennung in der Anschauung, jene der Begiffsbildung sowie der begrifflichen Ordnung, jene des (z.B. schlussfolgernden) Denkens und schließlich auch jene für die Bildung von abstrakten mathematischen Strukturen gehören, deren Ergebnisse wir in unserem Bewusstsein reflektieren (vgl. Riedl 1980, S. 86-117).
RIEDL*s dritte „Hypothese von der Ur-Sache“* (vgl. Riedl 1980, S. 118-147) hat zum Inhalt, dass Organismen annehmen, dass sich „Gleiches ... nicht nur in gleicher Weise wiederholen werde, sondern daß Gleiches, ..., auch dieselbe Ursache haben [und gleiche Wirkungen tun] werde.“ (Riedl 1980, S. 119) RIEDL wirft einige Blicke in die Philosophiegeschichte des Ursachenbegriffs und zitiert ARISTOTELES als jenen Denker, der schon die Einheit der Ursache bezweifelt hat und vier Formen der Ursache – Antriebs-Ursache (z.B. Energie, Geld), Material-Ursache (z.B. Rohstoffe), Form-Ursache (z.B. Bauplan, Skizze) und Zweck-Ursache (z.B. eine Absicht) – unterscheidet, von denen jede unverzichtbar ist. Aber die Unverzichtbarkeit einer Teilursache begründet nicht, warum es genau vier Teilursachen gibt. Auch ein Fragen nach Ur-Ursachen führt nicht

weiter (vgl. Riedl 1980, S. 120-121). Riedl verfolgt deswegen einen anderen Gedanken, nämlich den, dass die Hypothese von der Ur-Sache Ausdruck eines Regulatives ist, das zum lebenden Organismus gehört (vgl. Riedl 1980, S. 122). In seiner Ausarbeitung konzentriert er sich hier allein auf die Antriebs-Ursache, also auf die Kausalität im Sinne der heutigen Naturwissenschaft (vgl. Riedl. 1980, S. 122). Seine Einsichten dazu fasst er so zusammen: „Die Erwartung kausaler Zusammenhänge erweist sich als einer jener selektionsbewährten Algorithmen, welche die Evolution zum Zwecke einer ökonomischen Verarbeitung von Daten dem Zentralnervensystem eingebaut hat. Wie Wahrscheinlichkeit und Vergleich erweist sich auch die Kausalität gleichzeitig als ein Apriori der Individuen und als ein Aposteriori[22] ihres Stammes.“ (Riedl 1980, S. 131) Selektionsbewährt sind vor allem die Algorithmen linearer Kausalität, die Organismen in ihrer mesokosmischen Umwelt aufgebaut haben. Kontrastierend führt Riedl Beispiele an, die deutlich machen, wie in nicht-mesokosmischen Umwelten mit zyklischer Kausalität fehlangepasstes Verhalten auftritt (Riedl 1980, S. 143-147). Dem Erklärungsversuch der Zweck-Ursache widmet er den Abschnitt seiner vierten Hypothese.

Riedl *motiviert seine vierte „Hypothese vom Zweckvollen“* – er spricht auch von der „Sinn-Hypothese“ – (vgl. Riedl 1980, S. 148-174) sowohl denkgeschichtlich als auch aus dem Alltag. Auch sie abstrahiert er aus naturgeschichtlichen Beobachtungen: Die Funktion, die jedes Teil eines evolvierenden Systems im evolvierenden System besitzt, bezeichnet er als dessen Zweck-Ursache oder Final-Ursache im teleonomen Sinne (vgl. Riedl 1980, S. 151). Beispielsweise haben die Nukleinsäuren „den Zweck, den Bau des Organismus anzuleiten“ (Riedl 1980, S. 152) und die komplexeren Strukturen des Organismus den Zweck, seine Organisation in der selektierenden Umwelt zu erhalten; etwas differenzierter: „Die ganze tausendfältige Hierarchie der Lebensstrukturen mit ihren ineinander geordneten Funktionen ist, . . ., eine ebensolche Hierarchie von Zwecken, die sämtlich darauf selektiert sind, den Erhaltungsbedingungen des jeweils nächsthöheren Rahmens zu entsprechen.“ (Riedl 1980, 152-153) Weiter stellt er fest, dass man in der Naturgeschichte keinen ersten und keinen letzten Zweck, sondern nur Zwecke (m.a.W. Zweck-Ursachen) für einander findet (vgl. Riedl 1980, S. 151-152), so, wie man auch keinen Anfang und kein Ende von Kausalketten, sondern eben nur zyklische Kausalität vorfindet. Riedl analysiert nun die systemische Organisation der Naturgeschichte, arbeitet ihren Schichtenbau heraus und be-

[22]„Apriori“ und „Aposteriori“ sind im Original hervorgehoben gesetzt.

gründet, dass neue Zwecke immer mit neuen Teilsystemen gekoppelt sind und neue Teilsysteme immer zwischen einem Obersystem und einem Untersystem entstehen (vgl. Riedl 1980, insbes. S. 160-163; 1985). Zu diesem Schichtenbau, in dem die systemischen Wechselwirkungen in alle Richtungen in den Schichten und Schichten verbindend verlaufen, zählt nicht nur das Anorganische und das Organische, sondern auch das Psycho-Soziale (mit menschlichen Spitzenleistungen) (vgl. Riedl 1980, S. 161 Abb. 53, S. 163 Abb. 54, S. 169-171; 1985). Ohne die Sprache der vier Hypothesen zu verwenden, werden auch wir im 3. Kapitel die Naturgeschichte mithilfe von einem – dem von RIEDL sehr ähnlichen – Emergenzebenen verbindenden Schichten-Modellschema strukturieren.

Rückblick auf die EE_1 von 1980 und Folgearbeiten (EE_2)

RIEDL bearbeitet mit seiner Evolutionären Erkenntnistheorie (EE_1) das weite Problemfeld vom organismischen Erkennen bis zur philosophischen Erkenntnistheorie ausgehend von seiner STE. Bekannte und mutmaßliche selbstorganisierende Prozesse, welche die Erkennensleistungen von Organismen hervorbringen, hat er strukturiert und in vier aufeinander aufbauenden Hypothesen zusammengefasst. Die Hypothese vom anscheinend Wahren ist mit der STE nachvollziehbar gestützt, auch die Hypothese vom Ver-Gleichbaren ist mit der STE noch eng geführt. Es liegt in der Komplexität der Sache, dass Metaverrechnungen, wie sie in der dritten und vierten Hypothese postuliert sind, schon prinzipiell nur schwieriger mit elementaren Algorithmen der STE verbunden werden können. Das Unternehmen von RIEDL, die STE mit den vier formulierten Hypothesen zu verbinden, war aber 1980, als es außer der sich sehr mit der philosophischen Tradition auseinandersetzenden Arbeit „Evolutionäre Erkenntnistheorie“ von VOLLMER – und (Piaget 1992), vgl. 2.4.2 – noch gar keinen weit zielenden Versuch einer naturwissenschaftlichen Erklärung der Probleme des Erkennens und der wissenschaftlichen sowie philosphischen Erkenntnis gab, die einzige realistische Möglichkeit, eine erste Brücke zu schlagen. RIEDL schlug diese Brücke als Biologe natürlicherweise vom biologischen Ansatz aus. VOLLMER hat diese Situation in einem Abschnitt über „Ungelöste Probleme“ so kommentiert: „Was also fehlt, ist ein vollständiges System von Kategorien menschlicher Erfahrung, das durch die Biologie und Psychologie gestützt wäre. ... Ein ... Vorschlag wurde von Riedl gemacht, in dem er vier ‚ratiomorphe Hypothesen‘ oder ‚phylogenetische Erwartungen‘ aufzählt. Da sie noch unvollständig und zu allgemein sind, ist auch dieses System noch keine Lösung.“ (Vollmer 1988a, S. 111).

RIEDL hat seine EE in mehreren nach 1980 von ihm verfassten Arbeiten weiter ausgearbeitet und dabei mit vielen empirischen Befunden und einigen von ihm und seinen Mitarbeitern durchgeführten empirischen Untersuchungen gestützt, (vgl. Riedl 1992; 1994) und die dort angeführte Literatur. Wir referieren nun für uns wichtige Fortführungen aus „Mit dem Kopf durch die Wand" (Riedl 1994): Hier überträgt er die Begriffe Bürde, Kanalisation und (Über-)Determination aus der STE heuristisch in den System-Bereich der kognitiven und kulturellen Entwicklung der Menschheit – der auch die EE_2 enthält – und bezeichnet sie dort als Bürde, Constraint und (Prä-)Disposition (vgl. Riedl 1994, S. 22-36, insbes. S. 27). Das Tripel, das wir kurz als BCD-Schema bezeichnen, verwendet er hier u.a. zur Erklärung der vier in (Riedl 1980) formulierten Hypothesen (vgl. Riedl 1994, insbes. S. 81-83, S. 128-140). Bereits in der STE beschreibt RIEDL die Herausbildung und Wechselwirkung von Binnensystem und Außensystem unter Selektionsbedingungen (vgl. Riedl 1975). Seine Einsichten dazu hat er in (Riedl 1992) Emergenzschichten übergreifend ausformuliert, mithilfe vieler Abbildungen visualisiert und für die Erklärung der Begriffe „Wahrheit und Wahrscheinlichkeit" (Riedl 1992) bis in die Spitzen wissenschaftlichen Denkens (EE_2) herangezogen. Zwei Begriffe, Kohärenz und Korrespondenz, die dabei eine wichtige Rolle spielen, müssen wir – da sie für ein Verständnis von RIEDLs Sicht auf die Mathematik unverzichtbar sind – genauer referieren:

> Kohärenz ist das Ergebnis von Selektion in Richtung „zureichende Abstimmung und Widerspruchsfreiheit innerhalb des Systems. Das erfolgreiche Ergebnis nennt man Organisation. Der Ursachen-Zusammenhang dieser Selektion ist kohärent, ein Wechselbezug, und [ist] bestimmt durch die Bürde der funktionell miteinander verflochtenen Bauteile ... Die Maße für den Erfolg bleiben im System und können als funktionelle Ordnungsstrukturen beschrieben werden. Sie haften am System, werden wie ein Satz von Plänen weitergegeben und bleiben ihm, über die Entwicklung seiner Geschichte angehäuft, wie ein Schicksal erhalten.
>
> Dieses Kohärenzprinzip tritt in zwei Gruppen von Phänomenen auf, welche man nach ihrer Lage als ein ‚inneres', gegenüber einem ‚äußeren Binnensystem' unterscheiden kann. Das innere Binnensystem ist das der physisch und psychisch isoliert betrachteten Einzelkreatur. Das erfolgreiche Ergebnis nennen wir den Bauplan, ...; der Zusammenhang dieser Baupläne bildet die Natur des ‚Natürlichen Systems' der Organismen.
>
> Das äußere Binnensystem ist das der interindividuellen Funktion und Kommunikation. Es reicht vom wechselseitig richtigen Rezipieren der

gleichartigen Gameten (der Eier und Spermien) und Individuen bis zum individuellen Erkennen und über die Körper- und Lautsprachen bis zu den Verhaltensnormen und Sprachen des Menschen und deren Konsequenzen, also in die Abstimmung von Semantik und Syntax und weiter in deren formal gereinigte Formen, in die Gesetze der Logik und Mathematik.“ (Riedl 1994, S. 38-39)

> Korrespondenz hingegen ist das Ergebnis von Selektion in Richtung „zureichende Entsprechung gegenüber den relevanten Funktionsbedingungen, die das Außenmilieu vorschreibt, eine Funktionsentsprechung mit dem Milieu. Das erfolgreiche Ergebnis nennt man Anpassung. Der Ursachenzusammenhang dieser Selektion . . . ist nun korrespondent und verläuft im Prinzip einseitig, vom Milieu in Richtung auf das System, . . . Die Maße für den Erfolg wechseln mit den Außenbedingungen und können als Reaktions- und Handlungserfolg, als Kenntnis oder Erkenntnis über das Außensystem beschrieben werden. Sie haften nur im Ausmaß der unterlegten Kohärenzbedingungen am System, wechseln hingegen mit der eher zufälligen Begegnung mit neuen oder erweiterten Milieubedingungen von stochastischen Störungen bis zu großen Herausforderungen, sodaß die reinen Korrespondenzen aufgegeben, abgewandelt, verworfen oder neu entworfen werden müssen.“ (Riedl 1994, S. 39-40)

Wir referieren zur Kohärenz und Korrespondenz nun noch einige wichtige Folgerungen:

> „Entsprechend den beiden Bereichen innerer und äußerer Binnensysteme und den Formen ihrer Kohärenzen wird man nach Art der Phänomene auch die Korrespondenzformen in diesen unterscheiden. Nach unserem Sprachgebrauch verwenden wir die Begriffe Anpassung und Kenntniserwerb in einem die beiden Systeme übergreifenden Sinne, wünschen aber den Begriff des Erwerbs von Erkenntnis den bewußten Operationen des Menschen vorzubehalten. In allem geht es aber um Adaptierung und Verbesserung der Reaktionen und Vorausssichten bis hin zur erfolgbringenden Formulierung eines Naturgesetzes. Erkenntnistheoretisch kann man die erreichte Widerspruchsfreiheit in den Kohärenzen als wahr, die Prognoseerfolge aus den Korrespondenzen als richtig bezeichnen und philosophisch, . . ., von kohärenter oder logischer Wahrheit gegenüber korrespondenter oder empirischer Wahrheit sprechen. Später pflegt man auch

> von wahren und falschen Sätzen zu sprechen, so daß es eindeutiger wird, logische und empirische Wahrheit zu unterscheiden.
>
> ... Nur auf eine, und zwar entscheidende Differenz der Selektionsvorgänge in den inneren und äußeren Binnensystemen sei vorweg hingewiesen. Es wird sich zeigen, daß in den inneren Binnensystemen der Selektionsdruck, also der Antrieb zu vorteilhafter Veränderung, primär von den zu erreichenden Korrespondenzen mit dem Milieu kommt; in den äußeren Binnensystemen dagegen kommt er primär von den Kohärenzen, mit dem Nachdruck auf eine möglichst widerspruchsfreie Verständigung.
>
> Freilich holt die jeweils andere Selektionsbedingung in beiden Fällen nach, sofern im inneren Binnensystem die Möglichkeiten, die Korrespondenz mit dem Milieu zu verbessern, von den Kohärenzen im inneren Binnensystem bestimmt werden.“ (Riedl 1994, S. 40-41)

Mit diesen Überlegungen hat Riedl ausgehend von der STE über die EE_1 seinen Weg in den Bereich der EE_2 gebahnt.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Position, uns seiner Sicht auf die Mathematik zuzuwenden.

Beiträge zur Mathematik aus der Sicht der STE bzw. EE von Riedl

Riedls Sicht auf die Mathematik zu erklären, bedarf nach den obigen Vorbereitungen nicht mehr vieler Worte:

Riedl*s Beitrag zur Begriffsexplikation der Mathematik:* Ausgehend von der hypothetisch-realistischen Position, die für die evolutionär-erkenntnistheoretische Position typisch ist (s.o), rekapituliert Riedl im Schlusskapitel von „Die Ordnung des Lebendigen“, dass sämtliche gefundene Ordnungsmuster des Organischen unbezweifelbar Realitäten seien und auch die Koinzidenz der Denk- und Naturmuster jenseits des Zufalls liege. Weiter sprächen die Beobachtungen dafür, dass die Naturordnung die Denkordnung verursache, weil sie die ältere sei (vgl Riedl 1975, S. 331). Diese Einsicht, die sich aus der EE ergibt, so Riedl, sei bereits von Plotin ausgesprochen worden. Und konkret für die Denkordnung „Mathematik“ zitiert Riedl u.a. auch F. Dessauer[23]: „Und liegt es dann nicht nahe anzunehmen, daß zwischen Naturordnung und der Ordnung in der Mathematik, die ja Ausdruck unserer logischen Denkordnung ist, ein tatsächlicher Zusammenhang besteht? ... Wenn sich die Natur dem mathematischen Zugriff erschließt, dann muß auch ihr Seinsprinzip dem irgendwie entsprechen.“ (Riedl

[23] F. Dessauer (1958): Naturwissenschaftliches Erkennen. Frankfurt a.M.: Knecht.

1975, S. 331) Diese Standortbestimmung von Mathematik und Logik entspricht grundsätzlich auch der Auffassung von RIEDL. Wir möchten sie auf der Grundlage der obigen Vorarbeiten – und seinen vielen mit Mathematik, Logik und diesen nahestehenden Überlegungen, die wir hier jedoch nicht im Einzelnen anführen – in seinem Sinne präzisieren:

Bereits die phylogenetische Passung des Homo sapiens an seine mesokosmische Umwelt liefert ihm auch ein elementares Wissen (z.B. Quantisierungskonzept s. 2.4.8), das man heute mathematisch – bzw. logisch (z.B. Modus Ponens s. 2.4.8) – nennt. Anfangs war das gelernte und akkumulierte mathematische Wissen im Wesentlichen der Naturordnung (Kalender, Verteilung von Feldern und Gütern, Entfernungen, Stückzahlen, Maße kontinuierlicher Substanzen etc.) in kognitiven Prozessen (u.a. Abstraktion) abgewonnen. Es kam am Anfang der Mathematik vor allem auf die Korrespondenz des Individuums „Homo sapiens“ (innere Binnesysteme) mit dem Außensystem „Umwelt“ an, denn wie wir in den Vorbereitungen (s.o.) referierten, kommt der Antrieb zu vorteilhafter Veränderung – also der Selektionsdruck in den inneren Binnensystemen – primär von den zu erreichenden Korrespondenzen mit der Umwelt. (Das gilt schon für Organismen ohne Bewusstsein: Z.B. ist es für ein Tier wichtig zu „wissen“, ob es einem oder einer Gruppe Beutetiere folgen soll.) Mit zunehmender Komplexität des sozialen und kommunikativen Systems (also des äußeren Binnensystems) steigt der Selektionsdruck in Richtung einer möglichst widerspruchsfreien Verständigung, also das Bedürfnis nach Kohärenz. Wie in den Vorbereitungen referiert, ändert sich der Selektionsdruck in der Geschichte, mal mehr in Richtung Kohärenz, mal mehr zur Korrespondenz, wobei die entscheidenden Fortschritte letztlich doch immer durch eine erweiterte Korrespondenz mit dem Außensystem bestimmt sind, wie die Geschichte des naturwissenschaftlich-technischen Fortschritts in ihrer Wirkung auf soziale Systeme zeigt. Der menschheitsgeschichtliche Pfad brachte – in seiner Folge von Selektionen zeitweise in Richtung Kohärenz, zeitweise in Richtung Korrespondenz – eine Mathematik hervor, die heute als eine Strukturwissenschaft bezeichnet wird. Der Anspruch, dass die Mathematik widerspruchsfrei sein möge, entspricht einem Selektionsdruck des äußeren Binnensystems (der Mathematiker) nach Kohärenz (optimaler Verständigung in einem Zeichensystem). Der Anspruch, dass die Mathematik auf die „Welt“ entsprechend einem Selektionsdruck in Richtung Korrespondenz passe, hat zwei Gesichtspunkte: Der erste Gesichtspunkt bleibt innermathematisch und sucht nach Modellen für mathematische Strukturen im Sinne einer mathematischen Modelltheorie. Der zweite Gesichtspunkt zielt auf die Mathematisierbarkeit bzw. auf die mathematische Modellierbarkeit, m.a.W. auf die erfolgreiche Anwendbarkeit der Mathematik in unserer Umwelt, also auf empirische Korrespondenz. RIEDL legt uns mit mithilfe seiner EE somit eine naturgeschichtliche Erklärung nahe, die es nachzuvollziehen erlaubt, warum die heutige Mathematik den Charakter einer Strukturwissenschaft hat und warum die Anwendbarkeit der Mathematik nur natürlich (und kein Problem) ist. Diese Einsichten betrachten wir als Beitrag von RIEDL zur Begriffsexplikation der Mathematik.

RIEDL*s weitere Beiträge zur Mathematik aus evolutionär-erkenntnistheoretischer Sicht:* RIEDL hat mit seinem BCD-Schema die großen Verzweigungsstrukturen „von der Lebensentstehung bis zum Werden von Philosophie und Wissenschaft“[24] (Riedl 1994, S. 165 Abb. 37) evolutionär-erkenntnistheoretisch rekonstruiert, auch Logik und Mathematik erhalten dort ihren Platz (vgl. Riedl 1994). Viele Bemerkungen zur Mathematik, Logik und mit diesen eng verwandte Themen sind aus seinen Schriften nur schwer herauslösbar, außerdem liegt sein Interesse – ausgenommen die Wahrscheinlichkeit, hier führten er und seine Mitarbeiter auch eigene Untersuchungen durch – auf der Erklärung von Makrostrukturen der kulturellen Evolution (und damit der EE_2). Wir gehen deswegen nicht weiter ins Detail, sondern referieren lediglich ausgewählte Stellen zur Mathematik in seinen Arbeiten, nach Schlagworten geordnet.

(1) *Wahrscheinlichkeit:* Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitstheorie sind im Ansatz der STE zunächst mathematische Werkzeuge, denn mit ihrer Hilfe wird ein methodischer Rahmen für die Erklärung der Ordnung des Lebendigen geschaffen, der auch quantitative Aussagen ermöglicht (vgl. Riedl 1975, insbes. Kap. I B: S. 25-49).
Aber die Wahrscheinlichkeit selbst ist dadurch bestimmt, wie Organismen eine Gesetzmäßigkeit in einer vorgegebenen Ereignisfolge erkennen bzw. vermuten (vgl. Riedl 1975, S. 28-29, 68-69, 71-73). Der „Hypothese vom anscheinend Wahren“ (vgl. Riedl 1980, Kap. 2: S. 38-79), die den fundamentalen Input der EE_1 von RIEDL ausmacht, liegt gerade die biologisch-psychologische Wahrscheinlichkeitsschätzung aus der Verrechnung von koinzidierenden Ereignissen zu Grunde; RIEDL streift hier auch die Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.
Die erkennenspsychologische Frage haben RIEDL und Mitarbeiter aus

[24] Das Zitat ist im Original hervorgehoben.

Sicht der EE weiter untersucht (vgl. Riedl 1992, insbes. s. S. 142; Wagner/Ackermann 1987). Den Debatten um die Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (subjektiv, objektiv und Varianten) widmet er sich genauer in (vgl. Riedl 1992). Einen Abriss der Vorgeschichte und der Geschichte der Wahrscheinlichkeit gibt er in (Riedl 1992, S. 125-129).

(2) *(deduktive) Logik:* „Das Werden einer mathematischen Logik“ ist in (vgl. Riedl 1992, S. 110-114) skizziert. Die logische Wahrheit ist u.a. Thema in (vgl. Riedl 1992, z.B. S. 18-20). Zu Theorien der Wahrheit (vgl. Riedl 1992, S. 119-125; 1994, S. 189-209). Nach Vorbereitungen über Sprache wird der griechische Aussagesatz und die Identitätslogik abgehandelt in (vgl. Riedl 1994, S. 147-155).

(3) *Mathematik:* „Ist unsere Mathematik entdeckt oder erfunden?“ (vgl. Riedl 1992, S. 20-21). „Das Werden einer logischen Mathematik“ ist in (vgl. Riedl 1992, S. 108-110) skizziert. Hier bezieht sich Riedl u.a. auf „Erwachendes Denken“ (1980) von F. Klix (vgl. Klix 1993).
Für Bemerkungen zum Zahlbegriff (vgl. Riedl 1994, S. 143-146) und zum Unendlichen (vgl. Riedl 1994, S. 125, 145-146).

(4) *Geometrie im Anschauungsraum und Symmetrien:* Zu diesem Thema hat Riedl nur wenig gearbeitet: Zum Thema Körpersymmetrie von Organismen und Raumrepäsentationen (vgl. Riedl 1980, S. 116 Abb. 36; 1994, S. 76-80, 124). Für eine Bemerkung zur euklidischen Geometrie unseres Raumes (vgl. Riedl 1980, S. 156; 1994, S. 124).

Bezüge zur Mathematikdidaktik

Auf Vollmers Vorschlag, eine „kontrastierende Didaktik“ zu erarbeiten, wurde oben bereits hingewiesen. Seine evolutionär-erkenntnistheoretische Erklärung dafür, dass kognitive Fehlleistungen des Menschen systematisch außerhalb seiner kognitiven Nische auftreten, wäre auch ein Ansatzpunkt für eine Mathematikdidaktik.

Der Autor hat, von Vollmers Arbeiten inspiriert, das Problem der Konstruktion eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen – es steht exemplarisch für das Verlassen unserer kognitiven Nische – im Mathematikunterricht an Gymnasien (erstmals im Winter 1993/94) in Verbindung mit EE unterrichtet und sich dabei des Tesseracts (4-dimensionaler Würfel) bedient (vgl. Köck 1994).

Nach Kenntnis des Autors ist sonst bisher keine Anregung von der EE für die Mathematikdidaktik gegeben worden.

2.4.4 F. KLIX ein Pionier der Evolutionspsychologie – 1. Teil

Die Überlegungen dieses Abschnitts sind wegen ihres großen Umfangs in Unterabschnitte (2.4.4 bis 2.4.8) zerlegt und lagern sich bis auf 2.4.6 alle um den Protagonisten der Evolutionspsychologie F. KLIX. Auch wenn die meisten der in diesem Abschnitt angeführten von sehr vielen Forschern erarbeiteten Kenntnisse aus den verschiedensten Gebieten der Psychologie für sich interessant sind, so dienen sie hier dazu, die vielen von KLIX dargelegten oder von ihm nahegelegten evolutionspsychologischen Einsichten in die Mathematik möglichst selfcontent zu präsentieren und mit neueren Ergebnissen zu ergänzen.

Die vor-evolutionspsychologische Epoche von KLIX

KLIX begann seine Laufbahn als Psychologe in der ehemaligen DDR[25], in der Wissenschaft der historischen und dialektisch-materialischen Philosophie untergeordnet war[26]. Im 1. Beispiel unter 2.3.2 wurde bereits ausgeführt, dass das Erkenntnisproblem in dieser Philosophie nicht nur Gegenstand philosophischer Reflexionen ist, sondern auch aus einzelwissenschaftlichen Perspektiven multidisziplinär empirisch untersucht wird. KLIX geht dem Erkenntnisproblem als Psychologe im Rahmen eines kybernetischen und informationsverarbeitenden Forschungsansatzes nach, indem er von Beginn an die materiell-energetischen sowie informationellen Wechselwirkungen von Organismen und Umgebung ins Auge fasst, und arbeitet deswegen unvermeidlich multidisziplinär. Dass er auch an den Entwicklungen der Kybernetik und der Informationstheorie Teil hatte, zu denen auch Methoden aus der Mathematik der dynamischen Systeme zählen, belegen die Publikationen (Klix 1965a; 1965b; 1968; Klix/Sydow/Wysotzki 1974).

Mit dem (im Dezember 1970 fertiggestellten) Buch „Information und Verhalten“ (Klix 1976a), gibt KLIX eine „Einführung in die naturwissenschaftliche[n] Grundlagen der Allgemeinen Psychologie“ (S. 3) aus der Sicht der organismischen Informationsverarbeitung, orientiert an Konzeptionen der Kybernetik, die aber nicht expliziert werden (vgl. S. 21). Das Buch gibt eine Einführung in das „Wechselspiel von Information und Verhalten“ (S. 21). Es kennzeichnet die funktionellen „Grundleistungen der organismischen Informationsverarbeitung und

[25] Diplomarbeit 1953 an der Humboldt-Universität (vgl. Klix 1992, S. 504).

[26] Das Verhältnis von Philosophie und Psychologie in ihren Beiträgen zum Erkenntnisproblem beschreibt KLIX in (Klix 1976c, S. 9)

Verhaltensorientierung“ (S. 21) anhand von Beispielen und behandelt dann den Problemkomplex „höhere Formen des Erkenntnisgewinns“ (S. 21), der bald zum zentralen Gegenstand der – 1970 noch jungen – kognitiven Psychologie wurde und an dessen Erforschung Klix an vorderster Front noch lange beteiligt sein wird, in einer Weise, die sowohl den Forschungsstand der kognitiven Psychologie um 1970 als auch seine persönliche Sicht darauf erkennen lässt. Klix behält seine Sicht grundsätzlich bei und aktualisiert sie, indem er sie immer stärker auch unter phylogenetischen Gesichtspunkten reflektiert. Wir kommen darauf zurück.

Der Forschungsstand zu „höhere Formen des Erkenntnisgewinns“ (S. 21) sei nun in aller Kürze nach (Klix 1976a) referiert:

> Beim „Übergang zu höheren Formen der informationsabhängigen Verhaltensorganisation ... zeigt sich, daß die höheren Formen des Erkenntnisgewinns vermittelt durch zunehmend differenziertere Formen der Verhaltensabstimmung zwischen Organismus und Umgebung, ... vom Differenzierungs- und damit auch vom Verläßlichkeitsgrad der durch Lernen ausgebildeten Gedächtnisstrukturen getragen werden“. Motorische Verhaltensprogramme wie perzeptive Erkennungsvorgänge werden auch vom Gedächtnisbesitz gesteuert. Durch umgebungsverändernde Tätigkeit erfährt die innere Struktur des Gedächtnisses eine Verfeinerung. Die „Funktionsprinzipien von Lernprozessen zu Klassifizierungen von Situationen oder Situationseigenschaften“ sind „die *Grundlage* der Begriffsbildung des Menschen“. „Durch die Selektion invarianter (typischer, charakteristischer) Merkmale können Klassen von Objektmengen bei geringem Lernaufwand im Gedächtnis fixiert werden. Sie bilden die Grundlage für Strategien der Informationsaufnahme und der Informationsverarbeitung, durch die höhere, insbesondere zunehmend abstraktere Kategorien ausgebildet und in der Praxis überprüft werden können.“„Prozesse des Abstrahierens“ führen dazu, „daß zunehmend umfangreichere Wissensgebiete mit absolut kleiner werdendem Aufwand erlernt, kodiert und im Gedächtnis fixiert werden können. Hierarchische Ordnungen zunehmend abstrakter Klassifizierungs- und Erkennungsregeln bilden sich aus, die selbst wieder klassifiziert und – wenn häufig gebraucht – durch Worte benannt werden. Der hohe Gebrauchswert von Begriffen ist durch die Notwendigkeit des Austausches von Gedanken in der sozialen Kommunikation bestimmt. Worte bezeichnen Begriffe, und sie ermöglichen den Austausch von Gedanken, d.h. von Relationen zwischen Begriffen. Die Mechanismen des Abstrahierens ermöglichen es, daß dieselben Prozedu-

> ren der Lautbildung unterschiedlich tiefe und genaue Widerspiegelungen der Wirklichkeit enthalten können.
>
> Hochorganisierte Gedächtnisstrukuren bestehen aber nicht nur aus Begriffen. Eine zweite Klasse kognitiver Strukturen bildet sich *in der tätigen Veränderung von Umgebungszuständen: die Klasse der Operationen* mit einer wohldefinierten Binnenstruktur. Das Zusammenspiel dieser beiden Komponenten: der begrifflichen Strukturen über Umgebungseigenschaften auf der einen Seite und der Transformation dieser Strukturen (hervorgegangen aus den Wirkungen von Umgebungsveränderungen) auf der anderen Seite, bildet die Grundlage jener internen kognitiven Dynamik, die wir Denken nennen." Die „Dynamik, ihre Komponenten und einige Gesetzmäßigkeiten ihrer Wirkungseigenschaften" zeigen sich „am Beispiel des menschlichen Problemlöseverhaltens". „Das Zusammenspiel perzeptiver Komponenten mit klassifizierenden und heuristischen Prozeduren führt hin zu jenen leistungsfähigen Strategien der Informationsgewinnung und Informationsverarbeitung des Menschen, die in produktiven Intelligenzleistungen schöpferischen Denkens ihren Ausdruck finden."
> ((vgl.) S. 21-22)

Klix beschränkt sich vorerst „auf das Problemlösen als ein[en] Prototyp von Denkprozessen", weil „eine inhaltliche Bedingungsanalyse kognitiver Prozesse" (S. 22-23) noch nicht möglich ist (1970) und bekundet seine Absicht, „die Resultate dieser Forschungen zum hier entwickelten Ansatz (falls er sich dafür als ausbaufähig erweist) auszuarbeiten und zu gegebener Zeit vorzulegen" (S. 23).

Ebenfalls, weil die bisher „entwickelten Grundlagen für den sozialen Austausch und den Erwerb von Begriffen wie Denkoperationen durch die Sprache ... nicht ausreichend belegt" (S. 26) sind, bleibt eine Abhandlung von Sprache dem Buch vorerst vorenthalten.

Am Ende des Kapitels über „Problemlösungsprozesse und produktives Denken" und im Schlusskapitel entwickelt Klix dennoch Vorstellungen über Verbindungen von problemlösendem Denken und Sprache:

> Anhand von Problemlösungsprozessen lässt sich „zeigen, inwiefern heuristische Strategien geeignet sind, angesichts einer unübersehbaren Fülle von Informationsträgern in einer Problemstruktur optimale Entscheidungen für Zielerreichungen abzuleiten. Die Informationsreduktion bis zu den lokal entscheidungsrelevanten Daten bei beschränkter Gedächtnisspanne

– das ist die Funktion dieser höchstentwickelten Strategien der Informationsverarbeitung und Entscheidungsbildung. Ihre allgemeine Bedeutung für die Verhaltensorganisation ... erweist sich bei der Erkenntnis naturgesetzlicher oder ökonomischer Zusammenhänge und ihrer Beantwortung mit dem Ziel einer Beherrschung komplexer Umgebungszustände als von höchster Bedeutung. Letztlich handelt es sich hier um die Analyse von Zuständen mit potentiell unendlichem Informationsgehalt.

Es wäre jedoch irreführend, wollte man annehmen, daß die Strukturen des Informationsgewinns die einzigen Mittel sind, die Beherrschung unendlich vielgestaltiger Umgebungszustände zu ermöglichen. Vielmehr beruht ihre Effektivität, ihr Wirkungsgrad auf speziellen Organisationsformen des Gedächtnisses, die bislang nur wenig erforscht sind, nämlich auf der Vernetzung von Bedeutungen oder Bedeutungsträgern als Grundlage kognitiver Entscheidungsbildung. Es ist die *semantische* Steuerung der Verhaltensorganisation, die ... aufs engste mit der Wortbildung und der Sprache verbunden ist.“

Die „Bindung zwischen kognitiven Erkennungs- und Entscheidungsstrukturen und den Belegungen dieser Strukturen mit semantischen Wortmarken“ ist eine „Doppelvertretung begrifflicher Einheiten im Gedächtnis“. Sie „eröffnet eine gegenüber dem unmittelbaren (durch Handlung, Tätigkeit und Arbeit vermittelten) Erkenntnisgewinn parallele Strecke des Informationsgewinns. Sie wird durch die Sprachkommunikation eröffnet. Mit ihr entsteht eine vom ersten, dem primären Wege des Informationsgewinns nicht unabhängige Möglichkeit der Korrektur, aber auch des Neuaufbaus begrifflicher Struturen. Diese kognitive Funktion der Sprache dazustellen und auf der Grundlage der bisher vermittelten Einsichten zu begründen – diese Aufgabe vebleibt zu tun.“ ((vgl.) S. 743-744)

Auf den beiden letzten Seiten der Schlussbemerkungen beschreibt Klix, die kommunikative und die kognitive Funktion der Sprache, wie sie mit den Kenntnissen von 1970 verträglich sind.

Die „grundlegende Trennung zwischen Objektklassen und Transformationsklassen spiegelt sich auch in den verbalen semantischen Belegungen wider. Substantive und Verben sind zwei Grundkategorien des Sprachschatzes, die *vorwiegend* zur Bezeichnung dieser beiden begrifflichen Grundklassen eingeführt sind.

Die Analyse der Ersetzbarkeit von Worten, ihrer semantischen Verknüpfungsmöglichkeiten oder ihrer ... Verknüpfungsverbote bei der täglichen Sprachbenutzung belehrt nicht nur über die kognitive Abbildfunktion der Sprache, sondern auch über bestimmte Typen von Regeln, die die Verbindungsmöglichkeiten lexikalischer Grundeinheiten des Gedächtnisses beherrschen ...

Jedoch: Die möglichen Verbindungsregeln im Netz der semantischen Belegungen reichen nicht, um die über die Wahrnehmung aufgenommenen und im Gedächtnis fixierten Eigenschaften von Umgebungszuständen, ihre Abhängigkeiten und Wandlungen sprachlich *eindeutig* zu erfassen und auszudrücken. Zur Erfüllung dieser Funktion ist ein zweites Regelsystem ausgebildet, das Verknüpfungsvorschriften zwischen Klassen von Worten steuert: die Grammatik der Sprache. Wir verstehen darunter ein *sprachinternes* Regelsystem zur Anpassung semantisch-lexikalischer Aussagen an Eigenschaften der objektiven Realität wie an Eigenschaften von Denkstrukturen. Die in der Linguistik gewonnenen Einsichten über generative und transformative Grammatiken betreffen gerade diese Sprachfunktion. Was dabei neu zu durchdenken bleibt, das ist die Dialektik von Inhalt und Form im Regelsystem der Sprachverwendung.

Semantisches Netz und grammatische Erzeugungs- wie Transformationsregeln von Sätzen bilden die Basis der Ausdrucksfähigkeit einer natürlichen Sprache. Ihr zu- und übergeordnet ist ein Regelsystem zur Umsetzung semantisch und grammatisch korrekter Verknüpfungen in lautsprachlich faßbare Äußerungen ...

Man kann die Annahme belegen, daß die Stufen der Spracherkennung als Umkehrung der Prozeßstufen bei der Sprachbildung ablaufen: (1) Segmentierung der Lautfolge auf Grund gespeicherter Regeln der Phonemverknüpfung, (2) Ausfilterung der für die lexikalischen Einheiten typischen Merkmale, (3) Erkennung der Art des Wirklichkeitsbezuges aus der grammatischen Regelbenutzung des Sprechers und (4) Zuordnung der angeregten lexikalischen Einheiten zu einem semantischen Kern der im Gedächtnisnetz gespeicherten Aussagemöglichkeiten. Diese Stufen erscheinen als die zur Sprachbildung inverse Sequenz der Bedeutungserkennung in komplexen semantischen Netzen.

In diesen schwer überschaubaren Verflechtungen sprachlicher Elementarereignisse und den Regeln ihrer Verknüpfung liegen auch jene Mechanismen eingeschlossen, die die kognitiven Strukturbildungen korrigieren und teils auch neu formieren. Dies eben ist die uns interessierende Abzwei-

> gung im Kreisprozeß der Sprachkommunikation, die zu den begrifflichen Strukturen führt und an ihnen angreift. Genau diese Abzweigung ist es auch, die dem Menschen seine historische Dimension erschließt oder vermittelt ... Der Mensch gelangt zu einem historischen Bewußtsein allein dadurch, daß er über ein zweites System der Begriffsvermittlung, eben über das System der Sprache verfügt.
>
> Der systematische Aufbau sprachlich vermittelter Begriffsstrukturen wird mit zunehmender Höhe der sozialen Kommunikation und der arbeitsteiligen Kooperation sogar zu[m] mehr und mehr [D]ominierenden[27]. Die Sprache wird zu der die höheren Verhaltensentscheidungen tragenden Informationsquelle des Menschen. So zeigt sich, daß die Dialektik von Information und Verhalten bis in die höchsten Entwicklungsstufen des sozial geformten, geistigen Lebens, seiner sozialen Werte und Bewertungen hineinragt." (S. 744-745)

KLIX nimmt mit diesen Überlegungen intuitiv viele grundsätzliche Ergebnisse nachfolgender Forschung vorweg, an deren Beleg und weiteren Ergebnissen – vgl. z.B. für eine Zwischenbilanz: (Klix 1976b) und seine Beiträge (Klix 1976c; 1976d; 1976e; Klix/Kukla/Klein 1976f) darin – er als kognitiver Psychologe noch mit (van der Meer/Klix 2003) beteiligt ist.

Die evolutionspsychologische Epoche von KLIX

Umfassten die Arbeiten von KLIX bisher die Wechselwirkung von Organismus und Umgebung in kybernetischer und informationstheoretischer Sicht, so bezieht er bereits 1976 auch naturgeschichtliche, phylogenetische sowie ontogenetische Gesichtspunkte in seine Überlegungen mit ein (vgl. Klix 1976c, S. 10-11, 13; 1976d, S. 57-58, 77-79; 1976e, S. 161-162) und 1980, mit der ersten Auflage von „Erwachendes Denken" (vgl. Klix 1993), kann er als ein Pionier der Evolutionspsychologie[28] gelten.

Eine systematische Aufarbeitung der Phylogenese der Kognition im Allgemeinen (die Anzahl der Interneurone nimmt zu; hereditäre Verhaltensprogramme brechen auf und erhalten Flexibilität, durch die Fähigkeit zu lernen – ontogenetisch (!) auf phylogenetischer Basis – etc.) und der menschlichen Kognition

[27] „zur mehr und mehr dominierenden" des Originals durch „zu[m] mehr und mehr [D]ominierenden" ersetzt.

[28] KLIX wird von den üblicherweise in englischer Sprache publizierenden Evolutionspsychologen nur selten zitiert.

insbesondere legt er mit dem Buch „Die Natur des Verstandes" vor (vgl. Klix 1992). Ausgangspunkt ist für ihn die Metapher von der „hyperkomplexen Welt". Damit meint er, dass es keinen kürzeren Algorithmus zur vollständigen Beschreibung der Welt gibt als den „Algorithmus" ihrer Evolution selbst[29] und auf das Erkenntnisproblem bezogen bedeutet dies, dass Erkenntnis immer gelungene Informationsreduktion voraussetzt (vgl. Klix 1992, S. 15-16). Die „Informationsreduktion" hat Klix bereits als zentrale Leistung für erfolgreiches Problemlösen herausgestellt (vgl. Klix 1976a, S. 743). Für die genetische Erklärung des Verstandes ist das Problem komplementär: aus vergleichsweise wenigen Daten ist auf ein komplexes Ganzes zu schließen, es geht hier also um sachangemessene Informationserweiterung. Klix löst das Problem im Wesentlichen mithilfe der beiden folgenden Methoden (M1) und (M2, siehe unten):

(M1) Alle ihm wichtigen Befunde und Kenntnisse aus den verschiedensten Sach- und Fachgebieten (von der Geophysik, Klimatologie, Evolutionsbiologie, Entwicklungsbiologie, Neurophysiologie, Paläontologie, Archäologie, Entwicklungspsychologie, kognitiver Psychologie, Sozialwissenschaften, Geschichte (der Wissenschaften) etc.) verknüpft er systemisch (Koevolution von Organismen und Umwelt) denkend so, dass die Verknüpfungen erstens nicht im Widerspruch zu wichtigen anderen Kenntnissen stehen, zweitens prinzipiell einer empirischen Prüfung zugänglich sind und drittes ein möglichst kohärentes Bild liefern. Es scheint, er schlüpft in die Rolle eines Reporters, der die Evolution von Anfang an live begleitet hat.

Wie die Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie und andere, so kommt auch Klix zu dem Ergebnis, dass sich die Spezie Homo sapiens (sapiens) aus evolutionsbiologischer Sicht seit langem – Größenordnung $2 \cdot 10^5$ Jahre – nicht mehr verändert hat und seine kognitive (und soziale) Entwicklung seitdem ein Erzeugnis seines „alten Gehirns" ist. Wie jene kennzeichnet auch Klix z.B. die Arbeitsweisen der Sinnesorgane, die modalitätenspezifische Verarbeitung wahrnehmungsnaher Informationen im Gehirn, die grundlegenden Prozesseigenschaften sowie Strukturen des Lernens und einiger Gedächtnisfunktionen, zu denen er auch Strategien und kognitive Operationen des Problemlösens zählt, als stammesgeschichtliche Invarianten des Nervensystems (vgl. Klix 1992, Kap. 3-5). In

[29] Zum Begriff der algorithmischen Komplexität vgl. z.B. (Ebeling/Engel/Feistel 1990) sowie 3.2.2 (19) (I) und zum Thema Gehirn und Berechenbarkeit (Gehirn-Computer-Metapher) vgl. (Changeux/Connes 1992, VI., S. 120ff.).

(vgl. Klix 1998b) bezeichnet er sie sinnfällig als „evolutionsbiologische Spuren“, denn es handelt sich dabei um stabile Eigenschaften des alten Gehirns, die sich in ihren Aktivitäten bis heute fortsetzen.

Klix rezipiert wichtige Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie und stellt dabei fest, dass ihre Resultate nicht über die Erklärung von elementaren geistigen Leistungen des Menschen hinausgekommen sind (Klix 1992, S. 16-18, 140-143). Diese Einschätzung ist nachvollziehbar: Als Klix in der Zeit von 1987-1989 „Die Natur des Verstandes“ verfasste, lag ihm (Oeser 1988) vielleicht nicht vor und (Riedl 1994; Riedl/Delpos 1996) konnten ihm nicht vorliegen. Sie ist ebenfalls nachvollziehbar unter folgendem Gesichtspunkt: Die Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie waren keine Experimentalpsychologen und konnten deswegen kein sehr differenziertes Bild von der Arbeitsweise der kognitiven Architektur entwickeln.

Aber gerade seine Professionalität in kognitiver Psychologie prädestiniert Klix dazu, die kognitive Psychologie zum zentralen Werkzeug seiner evolutionären Untersuchungen zu machen. Wir kennzeichnen dies als die zweite Methode (M2) von Klix, die seinen evolutionspsychologischen Arbeiten zu Grunde liegt:

(M2) Klix beschreibt den Aufbau und die Korrektur (z.B. durch Um- und Neuorganisation) von (vor allem verhaltensrelevantem) Gedächtnisbesitz durch Lernen und durch die Wirkung von kognitiven Operationen auf Merkmalskonfigurationen und Relationen von begrifflichem Wissen (über Objekte und ihre Eigenschaften sowie Ereignisse), das in der fortgeschrittenen kulturellen Phylogenese des Menschen in der Regel symbolsprachlich benannt vorliegt.

Die Abschnitte 2.4.5 und 2.4.7 präzisieren die hier nur sehr kurz gefasste zweite Methode von Klix.

Es stellt sich nun die Frage, was denn – wenn sich der Mensch evolutionsbiologisch nicht mehr verändert hat – die immense Steigerung der kognitiven Leistungsfähigkeit des Menschen – bis in die genialen wissenschaftlichen oder künstlerischen Spitzen – hervorbrachte. Klix geht ihr in „Die Natur des Verstandes“ (vgl. Klix 1992) und sehr differenziert anhand von Beispielen in „Erwachendes Denken“ (vgl. Klix 1993, überarbeitete Fassung von 1980 und 1983) nach. Die Anlage dafür sieht er bereits in der Phase der Menschwerdung, doch ihre Wirkung wird erst später sichtbar (vgl. Klix 1993, S. 16-18): Es war die Lenkung der ursprünglich nur auf die materiell-energetische Umwelt zum Zwecke der Aufrechterhaltung der Homöostase des Organismus gerichteten Motivation auch auf das Soziale hin. Diese Umlenkung, so weist er nach, war auch entscheidend für die Entwicklung von Symbol und Sprache. Was er in (Klix 1976a) intuitiv vorwegnahm, erhält hier, in (Klix 1993), eine ausführliche evolutionspsychologische Erklärung: Die Sprache übernahm zuerst eine kommunikative und dann auch eine kognitive Funktion und insofern beide Funktionen in einer dafür motivgebenden sozialen Umwelt selektiv wirkten (u.a. weil Kooperation sich bewährt hat), entwickelten sie sich in ihrem Zusammenwirken zu einem „kognitiven Vehikel", ohne das die Erzeugung wissenschaftlicher, technischer und anderer Spitzenleistungen des Menschen nicht möglich wäre[30].

Ähnlich wie die Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie hat KLIX in seinen explizit evolutionspsychologisch intendierten Arbeiten (Klix 1989; 1992; 1993; 1995; 1997; 1998b; 1998c; 1998d; 1998e; 1999) nicht nur die Mathematik, sondern die Phylogenese der geistigen Leistungen des Menschen im Allgemeinen im Visier. Alle erkennen aber gerade in der Geschichte der Logik, der Mathematik und der Naturwissenschaften Paradebeispiele für die Steigerung menschlichen Denkens und befassen sich deswegen damit. Auf die Beiträge von KLIX dazu kommen wir unten (2.4.8) zurück.

In den Abschnitten 2.4.5 und 2.4.7 geben wir Informationen, die die Methode (M2) von KLIX präzisieren und auf deren Grundlage seine Analysen von Gegenständen aus der Mathematik, denen wir uns in zuwenden (2.4.8), erst verständlich werden. Weiter erscheint das evolutionspsychologische Forschungsprogramm von KLIX zur Erklärung der höheren kognitiven Leistungen des Menschen und der Fortschritt in der Kognitiven Psychologie auf der Grundlage dieser Informationen als ein Gewächs.

2.4.5 Einschub: Das Gedächtnis des Menschen – Abriss des Forschungsstands

2.4.5 In (Klix 1976a), in seiner Abhandlung zur Evolution der menschlichen Kognition (Klix 1992) und auch in seinen später in evolutionspsychologischer Motivation mitverfassten kognitionspsychologischen Arbeiten, wie z.B. (Klix

[30] Auch in der Ontogenese – die Sprachfähigkeit und einige Grundstrukturen für Sprache sind phylogenetisch bestimmt – übernimmt Sprache zunächst kommunikative und erst später auch kognitive Funktionen, vgl. 2.4.5.

1995; 1997; 1998b; 1998d; 1998e; van der Meer/Klix 2003) kommt dem menschlichen Gedächtnis besondere Bedeutung zu: Immer geht es um die Anwendung kognitiver Operationen zur Veränderung von Gedächtnisbesitz. Wir referieren nun nach (Markowitsch/Welzer 2005) einen Abriss des Forschungsstands zum menschlichen Gedächtnis, auf den wir Informationen zum Gedächtnis in den Arbeiten von Klix beziehen können. Die Entscheidung, das Gedächtnis nach (Markowitsch/Welzer 2005) abzuhandeln, hat seinen Grund darin, dass H.J. Markowitsch und H. Welzer ihre Darstellung ebenfalls in einen allgemeinen evolutionären (multidisziplinären) Rahmen stellen und auch die stammesgeschichtliche Entwicklung von Gehirn und Kognition streifen. Dabei stellen sie einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu den Gedächtnissen von Tieren, insbesondere von Primaten, heraus und grenzen den Homo sapiens auf diesem Wege von den rezenten Tieren ab (vgl. Kap. 3: S. 40-59). – Verweise auf (Markowitsch/Welzer 2005) werden in diesem Abschnitt nur mit Seitenzahlen, alle anderen Referenzen werden vollständig angegeben. – Die Autoren betonen, dass sich der heutige Mensch von dem vor etwa 200 000 Jahren aufgetreten Homo sapiens (vgl. S. 51) weder biologisch noch anatomisch unterscheidet, unser Gehirn vermutlich kaum mehr leistet als damals und alle Unterschiede seitdem ihre Ursache in der „co-evolutionären Beschleunigung durch die menschliche Kultur“ (S. 57) haben (vgl. S. 51, 54-55, 57-59).

Gedächtnis – es wird zum Überlebensvorteil der Art in ihrer Phylogenese erworben – steht im allgemeinsten Fall für ein lernfähiges neuronales Netzwerk (vgl. S. 73-74). Die sowohl Menschen als auch Tiere untersuchende psychologische Lernforschung hat eine Folge von in ihrer Komplexität aufsteigenden Lernformen erkannt, die heute mit dem Wissenserwerb des Menschen endet. Jeder Organismus, der eine Lernform einer bestimmten Komplexität zeigt, ist auch zu allen primitiveren Lernformen fähig (vgl. S. 77-80). Im Mittelpunkt der folgenden Darstellung stehen aber nicht die Lernformen, sondern die Gedächtnissysteme, die bestimmten Lernformen tendenziell zugeordnet sind.

Das von den Autoren angeführte Gedächtnismodell für den Menschen – nach E. Tulving und Markowitsch – enthält fünf Teilsysteme des Langzeitgedächtnisses (L1), (L2), (L3), (L4), (L5) und ein Arbeitsgedächtnis (AG) (vgl. S. 80-84, 137-214). Das Teilsystem (L5) heißt (episodisch-)autobiographisches Gedächtnis und kommt nur beim Menschen vor. Soweit es um das Gedächtnis des Menschen geht, stützen die Autoren ihre Argumentation durch neurobiologische und psychosoziale Befunde zur Ontogenese:

(L1) Das prozedurale Gedächtnis: Das unbewusste (anoetische) „prozedurale Gedächtnis“ ist auf den Erwerb und die Ausführung von Fertigkeiten ausgerichtet, die überwiegend unbewusst und automatisch ablaufen (vgl. S. 80-81). Es beginnt sich pränatal zusammen mit den frühsten Formen des Lernens ohne Beteiligung von Bewusstsein zu entwickeln: Sensitivierung und Habituation (Gewöhnung) zeigt der sich im Mutterleib entwickelnde menschliche Fötus ebenso wie wirbellose Tiere – z.B. Regenwürmer – (vgl. S. 131-136). Auch Lernen durch – klassisches und operantes – Konditionieren, das schon recht primitive Wirbeltiere zeigen, findet man bei Säuglingen bereits im zweiten Monat. Es geschieht vor allem in phylogenetisch alten, m.a.W. subkortikalen Strukturen (u.a. extrapyramidalmotorisches System – bestehend aus Gehirnnervenkernen vom verlängerten Rückenmark bis zu den Basalganglien – und Kleinhirn) (vgl. S. 134, 142) und für die Entwicklung kontrollierter Bewegungen sind darüber hinaus Differenzierungen des früh entwickelten motorischen Kortex (vgl. S. 134) und differenzierte sensorische Rückmeldungen über den Zustand des Organismus sowie seiner äußeren Umwelt nötig (vgl. S. 144-145, 134-135). Das von diesen Lernformen aufgebaute prozedurale Gedächtnis bleibt auch für den erwachsenen Menschen das grundlegende System für den Erwerb aller automatisierten Bewegungen oder Fertigkeiten.

(L2) Das Priming: Die unbewusste „Priming-Form des Gedächtnisses“ erkennt im Vergleich zu anderen Reizen die zuvor unbewusst wahrgenommenen Reize mit größerer Wahrscheinlichkeit wieder (vgl. S. 81-82). Wiederkehrende Reize, die den ursprünglich wahrgenommenen gleichen oder ähnlich sind, werden schneller oder besser wiedererkannt (vgl. S. 145-146).

Die Gedächtnissysteme (L1) und (L2) der frühen Lernformen – klassisches sowie operantes Konditionieren und Priming – werden oft unter dem Begriff „implizites Gedächtnis“ (vgl. S. 146; Karnath/Thier 2006, S. 440-441, 514-515; Oerter/Montada 2002, S. 512-513) zusammengefasst, weil es die Kenntnisse, Gewohnheiten und erlernten Reaktionen verarbeitet, die wir uns durch Erfahrung aneignen, die uns aber weitgehend unbewusst sind. Die am impliziten Gedächtnis beteiligten Gehirnstrukturen liegen außerhalb des limbischen Systems, der Region, die wesentlich für die Bildung bewusster Erinnerungen ist. Deswegen ist das implizite Gedächtnis relativ robust gegenüber Störungen.

Die nun zu besprechenden bewusstseinfähigen (noetischen) Gedächtnissysteme werden, dem impliziten Gedächtnis gegenübergestellt, häufig zusammen als „explizites Gedächtnis“ bzw. „deklaratives Gedächtnis“ (vgl. S. 161) bezeichnet.

(L3) Das perzeptuelle Gedächtnis: Das bewusstseinsfähige (noetische), komplexere und sich ontogenetisch später als die beiden unbewussten Gedächtnissysteme (s.o.) bildende „perzeptuelle Gedächtnis“ erkennt neuartige Objekte, Reizmuster oder Individuen auf Grund von Merkmalsvergleichen mit bekannten und identifiziert oder unterscheidet sie auf Grund charakteristischer Reizmerkmale (vgl. S. 82).
Bewusste Erinnerungen entstehen vor allem im Informationsaustausch zwischen Strukturen des limbischen Systems und des Neokortex (vgl. (AG) u. S. 147). Die Bedeutung des limbische System ist unverzichtbar für den Aufbau neuer Erinnerungen (vgl. S. 147): Die Amygdala (Mandelkern) bewertet – analysiert und verarbeitet – die affektive Seite neuer Reize (vgl. S. 147, 69), der Hippocampus integriert räumliche (mehr bei Tieren) und zeitliche (mehr beim Menschen) Eigenschaften afferenter Information und überträgt neue Erinnerungsinhalte in das Langzeitgedächtnis (vgl. S. 69, 147). Insofern bearbeitet der Hippocampus die Neuigkeitsaspekte afferenter Information (vgl. S. 69, 147). Menschen, bei denen Teile des limbischen Systems beider Hirnhälften beschädigt sind, können sich neue Dinge nur für sehr kurze Zeit merken (vgl. S. 147), sie leiden an einer anterograden Amnesie (vgl. Karnath/Thier 2006).
Für den beim Menschen dominanten Gesichtssinn wird deutlich, dass perzeptuelles Gedächtnis und Wahrnehmungsfähigkeiten sich abhängig voneinander entwickeln (vgl. S. 148): Der Säugling nimmt in den ersten Lebensmonaten seine Umwelt sehr verschwommen wahr (vgl. S. 148). Im Alter von vier Monaten sind seine Augen zwar optisch denen von Erwachsenen vergleichbar (vgl. S. 149), aber erst die vom vierten bis zum sechsten Monat (sensible Phase) dauernden Gehirnreifungsprozesse, ermöglichen die Wahrnehmung eines dreidimensionalen und farbigen Bildes (vgl. S. 149-150). Ab dem sechsten Lebensmonat sind die primären Sehfähigkeiten – Tiefenwahrnehmung, Farbensehen, Scharfsicht und zielgerichtete Augenbewegungen – soweit entwickelt, dass der Säugling seine Umgebung jetzt in etwa so wahrnimmt wie ein Erwachsener, der eigentlich eine Brille bräuchte, aber keine trägt (vgl. S. 148); graduell verbessert sich das visuelle System noch weiter bis ins sechste Lebensjahr (vgl. S. 150). In einer Koevolution mit dem Gesichtssinn erfährt das perzeptuelle Gedächtnis

in den ersten sechs Lebensmonaten eine beschleunigte Entwicklung, weil die Erfahrungswelt des Säuglings zunehmend von visuellen Eindrücken geprägt wird, je weiter der Gesichtssinn entwickelt ist (vgl. S. 150). Die bedeutendste Rolle für das Einspeichern, die mehr oder weniger dauerhafte Ablage, das Abrufen und Wiedererkennen von visuellen Eindrücken im perzeptuellen Gedächtnis hat das limbische System (vgl. S. 150-151), insbesondere der Hippocampus, der zwar in den ersten neun Lebensmonaten schnell reift, aber erst mit drei bis vier Jahren ausgereift ist (vgl. S. 151-152). Die starke Leistungsverbesserung des perzeptuellen Gedächtnisses ab dem sechsten Lebensmonat hat vermutlich vor allem in den Entwicklungsprozessen im Hippocampus ihren Grund (vgl. S. 151). Die Leistungsentwickung des perzeptuellen Gedächtnisses beginnt mit dem Wiedererkennen – einer passiven, nicht unbedingt bewussten Form des Erinnerns – (vgl. S. 152). Ein bewusstes Abrufen von Fakten oder vergangenen Ereignissen, also das, was gewöhnlich Erinnern oder explizites Gedächtnis genannt wird, entsteht frühestens ab dem späten Säuglingsalter und wird die gesamte Kindheit hindurch vervollkommnet (vgl. (AG) u. S. 152). Die bisher gegebene Skizze des perzeptuellen – ebenso des episodischen, siehe (L5) – Gedächtnisses bedarf der wichtigen Ergänzung, dass seine volle Funktion die gemeinsame Entwicklung von vielen mit einander in Verbindung stehenden Gehirnstrukturen voraussetzt, besonders wichtig sind die Verbindungen zwischen limbischen Strukturen (Hippocampus) und den kortikalen Wahrnehmungszentren (z.B. visueller Kortex, visueller Assoziationskortex) (vgl. S. 152).

(AG) Das Arbeitsgedächtnis: Im Alter von etwa acht oder neun Monaten beginnen Säuglinge, z.B. mentale Bilder von Gegenständen oder Personen zu erzeugen, kurzzeitig aufrechtzuhalten und abzurufen (vgl. S. 153-155), die in der kognitiven Entwicklungspsychologie vieldiskutierte „Objektpermanenz“ (Piaget) ist eine Folge dieser Entwicklung (vgl. S. 153, 155). Erstmalig zeigt sich damit eine Funktion, die dem so genannten Arbeitsgedächtnis (Arbeitsspeicher) zugeordnet ist. Im Arbeitsgedächtnis werden drei Komponenten zusammengefasst (vgl. Karnath/Thier 2006, S. 445-446), deren Leistungsfähigkeit sich erfahrungsabhängig noch bis weit in die Pubertät hinein entwickelt (vgl. Markowitsch/Welzer 2005, S. 155): eine phonologische Schleife, ein visuell-räumlicher Notizblock und eine zentrale Exekutive. Die von der phonologischen Schleife maximal

gleichzeitig speicherbare akustische und phonologische Information ist begrenzt; alles was nicht innerhalb von zwei Sekunden wiederholt artikuliert wird, geht verloren. Der visuell-räumliche Notizblock hält Objektmerkmale (z.B. Farbe und Form) und räumliche Informationen verfügbar. In der zentralen Exekutive werden Kontroll- und Steuerungsprozesse der Informationsverarbeitung zusammengefasst (sie setzt Verarbeitungsprioritäten, kann Routineprozesse unterbrechen, überwacht nichtroutinisierte Prozesse, vergleicht Handlungsergebnisse mit Handlungszielen, ist an der Aufmerksamkeitsteuerung beteiligt etc.).
Grundlegende Arbeitsgedächtnisfunktionen sind bereits bei einfachen Säugetieren zu finden (vgl. S. 154), aber nur beim Menschen kann das Arbeitsgedächtnis Funktionen ausbilden, die aktives Erinnern, Wissenserwerb und (wissenschaftliches) Problemlösen ermöglichen. Wenngleich der dorsolaterale präfrontale Kortex besondere Bedeutung für das Arbeitsgedächtnis hat, muss seine Entwicklung und Funktion im Zusammenhang mit vielen anderen kortikalen und subkortikalen Gehirnstrukturen gesehen werden; für einen ausführlichen Überblick siehe (Karnath/Thier 2006, Kap. 40.2, 41, 44, 45, 47). Erwähnt sei hier nur, dass neben den Strukturen des präfrontalen Kortex auch der linke, seitliche Anteil des Temporallappens an der Entwicklung des Arbeitsgedächtnisses beim Menschen zwischen dem achten und dem achtzehnten Lebensjahr bedeutsam ist (vgl. S. 163-164).

(L4) Das semantische Gedächtnis: Experimente mit Säuglingen zeigen, dass zwar allein auf Beobachtung beruhende und im Arbeitsspeicher gehaltene Informationen sehr flüchtig sind (Merkfähigkeit im Bereich von Sekunden), siehe (AG), aber prozedurale Handlungen und damit Ereignisabfolgen, die sie nur einmal beobachtet haben, sehr viel länger erinnert werden (bereits zwei Wochen im Alter von sechs Monaten, acht Wochen mit einem Jahr) (vgl. 159-161). Diese Ergebnisse zur Merkfähigkeit gelten als Bestätigung dafür, dass bereits Säuglinge ein explizites bzw. deklaratives Gedächtnis aufbauen. Offen ist aber, ob dem expliziten Gedächtnis dieser Stufe schon der Status des semantischen Gedächtnisses oder sogar schon der des episodischen Gedächtnisses, siehe (L5), zugesprochen werden darf: Das „semantische Gedächtnis“ bezeichnet die Gesamtheit des gespeicherten allgemeinen Wissens von Fakten oder Handlungsabfolgen, das ohne den Kontext erinnerbar ist, in dem es erworben wurde (vgl.

S. 83, 161). Zur effizienten Speicherung bildet das Gehirn z.B. Objekt-Kategorien (indem es Objekte auf Grund gemeinsamer Merkmale klassifiziert), Handlungs-Kategorien (über die Wiederholung von Handlungsabfolgen) oder Ereignis-Kategorien (über intermodal erlebte Situationen), wobei die genauen Bildungsvorgänge noch nicht geklärt werden konnten (vgl. S. 162). Auch scheinen Kinder bereits im ersten Lebensjahr ihre Muttersprache nach phonologisch-prosodischen Merkmalen zu kategorisieren (vgl. S. 162).

An der Enkodierung, der Speicherung und dem Abruf von Informationen des semantischen und des perzeptuellen Gedächtnisses sind im Wesentlichen die gleichen Gehirnstrukturen beteiligt. Da Kinder etwa ab dem achten Lebensmonat aktiv auf gespeicherte Informationen zuzugreifen beginnen – genau in dem Alter, wenn sich auch erstmals Arbeitsgedächtnisfunktionen zeigen –, ist die Beteiligung des präfrontalen Kortex am Abruf von Inhalten aus dem semantischen Gedächtnisses nicht überraschend (vgl. S. 162-163).

Den Vorgang der Enkodierung und Abspeicherung von Inhalten im semantischen Gedächtnis beschreiben Markowitsch und Welzer so (S. 164): „Vom [Arbeitsgedächtnis im] Stirnhirn aus werden die Informationen ... in das limbische System weitergeleitet, wo sie analysiert, mit bereits vorhandener gleichartiger Information verbunden und hinsichtlich ihrer sozialen und biologischen Bedeutsamkeit überprüft werden. Als behaltenswert eingestufte Informationen werden dann in Form überdauernder synaptischer Veränderungen in weitflächigen corticalen Netzwerken innerhalb der höheren sensorischen Cortexareale abgespeichert. Es ist möglich, daß der letzte Schritt – die langfristige Abspeicherung von Gedächtnisinhalten – während des ersten Lebensjahres in anderen Bereichen des Gehirns erfolgt als beim Erwachsenen [beim Erwachsenen in der linken Hemisphäre] ... Die so genannten polymodalen Assoziationsareale, in denen Informationen aus verschiedenen Sinnesmodalitäten integriert werden, sind erst relativ spät im Leben, etwa im 30. Lebensjahr, ausgereift ...“. Beim Erwachsenen geschieht der Abruf von Inhalten aus dem semantischen Gedächtnis hauptsächlich linkshemisphärisch in Strukturen des präfrontalen Kortex und der linken Temorallappenspitze, beim Kleinkind vielleicht in beiden Hemisphären oder nur rechtshemisphärisch (vgl. S. 163).

Mit dem Erwerb der Objektpermanenz ist eine wichtige Voraussetzung für das Wachsen des semantischen Gedächnisses gegeben, da Kinder sich nun Wissen über Objekte und deren Merkmalsklassen anzueignen beginnen (vgl. S. 165) und es expandiert regelrecht mit fortschreitendem Spracherwerb.

(L5) Das autobiographische Gedächtnis: Das voll leistungsfähige autobiographische – auch episodisch-autobiographische – Gedächtnis, in dem bewusst erlebte, meist emotional gefärbte, kontextgebundene autobiographische Episoden (Ereignisfolgen), aktiv, selbstbezogen, bewusst und in korrekter zeitlicher Ordnung erinnerbar gespeichert werden, entwickelt sich erst mit dem Erwerb einer (Symbol-)Sprache (vgl. S. 83-84, 185, 232, 238, 259). Dieses hierarchisch höchste, alle früher entstandenen (weiterhin präsenten anderen) Gedächtnissysteme überformende und sich nur beim Menschen ab dem vierten Lebensjahr (vgl. S. 231) auszubilden beginnende Gedächtnissystem ist eine Differenzierung des von Tulving vorgeschlagenen, seinem Besitzer „mentales Zeitreisen durch die subjektive Zeit – Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft" (S. 232) ermöglichenden „episodischen Gedächtnisses", dessen Essenz er „in der Verbindung (‚Konjunktion') dreier Konzepte – des Selbst, des autonoetischen Bewußtseins und der subjektiven Zeit" (S. 232) erkennt.
Die Inhalte des sich bereits früher entwickelnden episodischen Gedächtnisses sind vor allem weniger: komplex strukturiert, autobiographisch, auf das Selbst bezogen. Wohl wegen des fließenden Übergangs vom episodischen zum autobiographischen Gedächtnis (vgl. S. 238) sprechen Markowitsch und Welzer mit Tulving auch vom episodisch-autobiographischen Gedächtnis (vgl. S. 83). Oft werden aber in der psychologischen Literatur die Begriffe „episodisches Gedächtnis" und „autobiographisches Gedächtnis" nicht unterschieden, sondern synonym verwendet (vgl. Roebers/Schneider 2006, 329-330).
Die dem autobiographischen Gedächtnis wesentlich zu Grunde liegenden psychosozialen Konstrukte „Selbst", „Symbolsprache" und „Zeit" – wie sollte ohne sie vorausschauendes und in Schichten von Sinnebenen (selbst)-reflektiertes Denken möglich sein? – werden (überwiegend aus ontogenetischer Sicht) unten dargestellt. Sie sind die wesentlichen Vorausetzungen dafür, dass wir ein autobiographisch-kulturelles Gedächtnis entwickeln können und bestimmen den Kern unserer Persönlichkeit (vgl. S. 234).

> Mit dem Fortschreiten sprachlicher Fähigkeiten entstehen „die Voraussetzungen für mentale Zeitreisen ... Dadurch erweitert sich der mentale Raum des Individuums, und es wird möglich, auf einer Metaebene zu denken und zu sprechen [(Metakognition)]. Nicht unwesentlich für diese Denkakte sind auch mathematische Fertigkeiten, die ebenfalls eine Integration von Raum- und Zeitebenen erlauben.
> Das Jonglieren mit Information und das spielerische oder auch gezielte Nachdenken über Vorgänge, die bei mentalen, das eigene Ich oder eine fremde Person betreffenden Denkakten ablaufen, wird erst nach der ersten Lebensdekade vorgenommen. Zwar sind Kinder schon früh zu Rollenspielen in der Lage ..., [doch] reflektieren [sie] kaum, was ihr Selbst und was ihre Rolle ist. Noch sehr wenig untersucht ist die Frage, inwiefern Logik und das Auseinandersetzen mit mathematischen Schlußfolgerungen hier wichtige Hilfestellungen bieten. Der mentale Raum erweitert sich ja dadurch, daß man in Zahlenräumen zu denken lernt, Dimensionen (in unterschiedlichsten Manifestationen) erfassen kann und Zeit und Raum zu integrieren lernt. Die Verlagerung von der Raum- hin zur Zeitdimension ist sicher wohl phylogenetisch ... wie ontogenetisch ein entscheidender Meilenstein für den Aufbau eines autobiographischen Gedächtnisses ... Auf Hirnebene verlangt dies innerhalb des Neokortex die Aktivierung von Teilen des seitlichen Scheitellappens, einer Region, die unter anderem dadurch bekannt wurde, daß Einsteins Hirn hier Besonderheiten zeigte.
> Die Bedeutung der seitlichen Schläfenlappenregion für Raum-Zeit-Intergationen und für die Wahrnehmung und das Verstehen zeitlicher Prozesse, deren Erfassung für die Entwicklung intellektueller Funktionen zentral ist, zeigt sich vor allem im pathologischen Bereich" (S. 231-333).

Dass die Ausbildung- und Entwicklungszeiten eines jungen Menschen im historischen Vergleich immer länger wird (vgl. S. 215), bedeutet aus individuenzentrierter Sicht, dass es immer länger dauert, bis sein autobiographisches Gedächtnis ein Niveau erreicht hat, sodass er mit seiner komplexen sozialen Umwelt anschlussfähig geworden ist. In einem anderen, gattungsspezifischen Sinne ist das autobiographische Gedächtnis „kein weiteres Gedächtnissystem, sondern eine bio-psycho-soziale Instanz", die „zwischen

Individuum und Umwelt, zwischen Subjekt und Kultur“ vermittelt und dabei „subjektiv Kohärenz und Kontinuität sichert, obwohl die sozialen Umwelten und mit ihnen die auf das Individuum gerichteten Anforderungen fluktuieren.“ (S. 259-260). Diese Vermittlungsfunktion „erklärt auch, weshalb wir sowohl historisch verschiedene Niveaus der Autobiographisierung verzeichnen können als auch in interkultureller Perspektive unterschiedliche Altersstufen verzeichnen, in denen ontogenetisch die Autobiographisierung und mithin die Entstehung eines kontinuierlichen Selbst einsetzt.“ (S. 259) Die Entwicklung des autobiographischen Gedächtnisses kann somit nicht allein von einer auf das Individuum fokussierten Perspektive aus erfasst werden; dass Ontogenese und Soziogenese des Menschen als ein Prozess verstanden werden müssen, wurde bereits von N. Elias, L. Wygotsky, D. Stern und M. Tomasello berücksichtigt (vgl. S. 260-261).
Selbstkonzept (vgl. „Selbst“ und „Ich“ in 2.4.7): Mit dem zweiten Lebensmonat beginnend bauen Säuglinge u.a. auf der Basis von propriozeptiven Erfahrungen ein (nicht reflektiertes) Kernselbst auf; infolge dieses Prozesses wird es ihnen möglich, das Selbst und ein Objekt als voneinander getrennt zu empfinden (vgl. S. 168). Andererseits sind die Erfahrungen ihres Urinierens, Hungrigseins, Saugens etc. (abgesehen davon, dass sie auch Vorformen eines autonoetischen Gedächtnisses sind) prototemporale Sequenzen, die im achten bis neunten Lebensmonat (unter der Mitwirkung des sich bildenden Arbeitsgedächtnisses) bewusstseinsfähig werden und damit das Grundformat der deutlich später einsetzenden Fähigkeit zur Differenzierung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft sowie das Grundformat für Intentionalität (zielgerichtetes Verhalten) bilden (vgl. S. 181-182). Auf den bisherigen Entwicklungen aufbauend sind Kinder mit dem neunten Lebensmonat beginnend schrittweise in der Lage, ihre Aufmerksamkeit mit anderen Menschen abgestimmt auf etwas zu richten (vgl. S. 166, 179). Mit dieser Fähigkeit, die bei nichtmenschlichen Primaten nicht zu finden ist und die deswegen als ein Abgrenzungskriterium des Menschen vom Tier angenommen werden kann, beginnt sich das Kind als ein soziales Wesen – Intersubjektivität – zu erfahren (vgl. S. 167-168). Zusammen mit der Sozialisation von Gefühlen (vgl. S. 172) lernt das Kind langsam sein Handeln mit den Augen eines anderen zu sehen, womit ein bedeutender Baustein für ein Selbstkonzept (vgl. S. 179) gegeben ist. Als

weitere Meilensteine in der Bildung eines Selbstkonzept gelten (vgl. S. 184-185): Im Alter von 2,5 Jahren erkennen sich Kinder im Spiegel und mit 3 Jahren auch auf Fotos. Ebenfalls mit 3 Jahren verwenden sie Personalpronomen – dies spricht für das Vorliegen einer die Gegenwart übergreifenden Repräsentation eines Selbst (vgl. S. 221), verbunden mit einem Ich-Bezug (vgl. S. 223) – und die Tatsache, dass sie im Alter von 3 Jahren auch Rollenspiele zu spielen beginnen, weist auf das Werden eines kognitiven Selbstkonzepts hin.

> Markowitsch und Welzer sehen – mit Howe u.a. – im „kognitive[n] Selbst die entscheidende Bedingung für die Entstehung des autobiographischen Gedächtnisses . . . , da ab diesem Stadium für das Kind die Möglichkeit gegeben ist, seine Erfahrungen und Erlebnisse um einen einzigen Bezugspunkt zu zentrieren, nämlich um sein eigenes Selbst. Jede neue Erfahrung kann nun in der ‚Wissensstruktur' des Selbst organisiert werden . . . In diesem Alter haben Kinder . . . sehr lebendige episodische Erinnerungen, aber ihnen fehlt noch die Fähigkeit, diese temporal sicher zuzuordnen. . . . Damit hängt auch zusammen, daß Kinder keine sichere Zuordnung der Quellen einer Erinnerung vornehmen können – auch hier wird das Fehlen eines in der Zeit situierten Selbst deutlich." (S. 185, vgl. S. 214).

Das wachsende kognitive Selbst bildet ein in der Zeit situiertes Selbst ab dem 4. Lebensjahr aus: In diesem Alter beginnen Kinder, die Fähigkeit zur Übernahme der Perspektive einer anderen Person zu erwerben und damit auch Situationen alltagspsychologisch zu verstehen – Psychology of Mind – (vgl. S. 203): Sie beginnen zu erkennen, dass sie selbst Situationen aus einer bestimmten Perspektive sehen und damit können sie auch verstehen, dass Erinnerungen frühere Erfahrungen in bestimmter Weise repräsentieren (vgl. S. 205). Sie beginnen zu verstehen, dass Erinnerungen auf Erfahrungen oder Quellen beruhen (vgl. S. 205, 206). Ereignisse werden nun in ihrer komplexen zeitlichen und kausalen Ordnung für sie wahrnehmbar und können von ihnen erinnert werden (vgl. S. 205). Aus Langzeiterinnerungen können nun autobiographische Erinnerungen werden, wenn ihnen bewusst ist, dass sie etwas wissen (vgl. S. 207). Diese Entwicklung, mit der sie die volle Intersubjektivität (vgl. S. 203) erwerben, verläuft mit Wachstumprozessen des orbitofrontalen (oder ventralen

präfrontalen) Kortex und den mit diesem eng interagierenden dorsolateralen präfrontalen Kortex und temporopolaren Kortex parallel (vgl. S. 204). Markowitsch und Welzer referieren nun Ergebnisse von K. Nelson (vgl. S. 222): Am Ende des Vorschulalters wissen Kinder, dass sie eine von anderen Menschen verschiedene Lebensgeschichte haben und erzählen von ihrer Vergangenheit und Zukunft (narratives Selbstverstehen); diese individualgeschichtliche Sicht erweitert sich, meist mit dem beginnenden Schulalter, um die kulturelle Dimension (kulturelles Selbstverstehen).
Also ist jedes Selbstkonzept ein Produkt der Ontogenese eines Menschen und damit wesentlich bestimmt von einem psychosozialen Prozess: Ein Kernselbst des Säuglings erweitert sich zunächst in Interaktionen mit der Mutter und der unmittelbaren Umgebung, schließlich verändert sich das Selbst, gepägt vom Leben in einer kulturellen und geschichtlichen Welt, und bleibt doch das gleiche.
Zur Sprachentwicklung: Der vor ca. $2{\cdot}10^5$ Jahren erschienene Homo sapiens ist vermutlich der erste Primat mit einem zur differenzierten Lautbildung fähigen Kehlkopf-Sprechapparat (vgl. S. 55), und er nutzte diese biologische Voraussetzung dafür, seine kognitiven, technischen und sozialen Leistungen nicht nur präsymbolisch mithilfe von Lauten und Gebärden, sondern auch mithilfe einer symbolischen Sprache losgelöst von einer konkreten Handlungssituation und über Raum und Zeit hinweg durch Worte und sprachliche Zeichen zu kommunizieren, wodurch die symbolische Sprache die (kulturelle) Phylogenese des Menschen entscheidend beschleunigt hat (vgl. S. 186). Ontogenetisch beginnt die Sprachentwicklung im fötalen Stadium (vgl. S. 187), mit etwa einem Jahr (meist zwischen dem 8. und 21. Monat) geht die Babbelphase zu Ende und die Kinder sprechen erste Worte (vgl. S. 193). Der Bezeichnung durch Worte geht die Kategorisierung von Objekten (beginnend in der zweiten Hälfte des ersten Lebensjahres) voraus (vgl. S. 195). Mit achtzehn Monaten beginnt der Wortschatz der Kinder rasch zu wachsen (Vokabelspurt) und mit etwa zwei Jahren beginnen sie sprachliche Strukturen zu benutzen (vgl. S. 195). Hatte Sprache in den ersten zwei Lebensjahren zuerst nur, dann noch überwiegend eine emotiv-kommunikative Funktion, so beginnt sich mit dem Sprechen erster Worte auch die bezeichnende Funktion der Sprache zu entwickeln, die später zum symbolisch-kommunikativen Medium der kulturellen Evolution wird (vgl. S. 194, 196-197).

Obwohl mit dem linken Planum temporale (es schließt das Wernicke-Zentrum mit ein) eine pränatale – vermutlich sogar phylogenetische – (vgl. S. 119) linkshemisphärische Prädisposition vorliegt, wird Sprache während der beiden ersten Lebensjahre überwiegend rechtshemisphärisch verarbeitet; ein Erklärung dafür besteht darin, dass Sprache zu Anfang melodische, emotive und prosodische Aufgaben erfüllt, für die im Allgemeinen die rechte Hemisphäre zuständig ist (vgl. S. 43, 117, 119, 122, 196). Etwa im 20. Lebensmonat wandert das Sprachverständnis dann von der rechten in die linke Hemisphäre hinüber, dorthin, wo es auch bei den meisten Erwachsenen zu finden ist (vgl. S. 121). Im Alter von fünf bis sechs Jahren, wenn die wesentlichen Grundzüge der Sprache gelernt sind, ist die Lokalisation der Sprachfunktionen abgeschlossen (vgl. S. 119, 121) – die Sprachentwicklung geht selbstverständlich weiter. Findet ein Erstspracherwerb bis zum 6. oder 7. Lebensjahr (Zeitfenster) nicht statt, dann sind Leistungseinbußen unvermeidbar – Kaspar-Hauser-Phänomen – (vgl. S. 120-121).

Zur Zeitordnung: Während in mehreren Gebieten des Gehirns neuronale Prädispositionen für die Raumrepräsentation bestehen, z.B. (vgl. Karnath/Thier 2006, Teil III S. 153-238), ist dies für eine Repäsentation der Zeit nicht der Fall. Die prototemporalen Sequenzen, die im achten bis neunten Lebensmonat bewusstseinsfähig werden und eng mit der Entwicklung des noch elementaren Selbstkonzepts verknüft sind, wurden oben als das Grundformat der deutlich später einsetzenden Fähigkeit zur Differenzierung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft angeführt. Nachdem Kinder im Alter ab 2,5 Jahre in ihren Erinnerungen einen Ich-Bezug entwickelt haben, gewinnen sie im Alter von 3 Jahren ein Verständnis für Zeit im Sinne von zeitlichen Ordnungen (Temporalität) und bilden wenig später auch Kausalsätze (vgl. S. 197-198). Doch erst im Alter von etwa 4 Jahren gelingt es ihnen, „Ereignisse in ihrer komplexen zeitlichen und kausalen[31] Ordnung wahrzunehmen und zu erinnern“ (vgl. S. 205). Dagegen gelingt ihnen die zugehörige Erinnerung an den Ort eines zurückliegenden

[31] Klix führt in (vgl. Klix 1992 S. 286-287) aus: „Konsekutivität (als mögliche Folgebeziehung zwischen Ereignissen)[,] Konditionalität und, darin eingeschlossen, die Kausalität, betreffen klassifizierte Relationsbindungen zwischen Ereignissen bzw. zwischen Ereignisbegriffen.“ Im Unterschied zu Vorformen der Kausalitätserkennung, die über die Wahrnehmung vermittelt werden und angeboren sind, setzt Erkenntnis von Kausalität die Klassenbildung nicht nur von Ereignisfolgen, sondern über Klassen von Ereignisfolgen voraus.

> Ereignisses früh und leicht (vgl. S. 212-213). Zeit erscheint somit als ein psychosoziales Konstrukt, und es sei hier angemerkt, dass es sprachliche Form – oft, aber nicht nur – mithilfe von Raumbegriffen erhält: wir sprechen vom „Anfang und Ende der Zeit", von „Zwischenzeiten", „Zeitspannen", „Zeitpunkten", lyrisch heißt es „edge of time", ein Körper bewegt sich „in der Zeit" usw. Wie J. Piaget feststellte, denken Kinder am Ende des Vorschulalters oft, dass „Lebensalter an Größe zu messen wäre, weshalb Erwachsene nicht älter würden" (S. 222, Fussnote). Demgegenüber betont F. Klix, dass Zeit auch – implizit – in Handlungabfolgen kodiert ist (vgl. Klix 1992, S. 249-250).

Ontogenetisch – phylogenetisch war es vermutlich nicht anders – entwickeln sich die fünf Teilsysteme des Langzeitgedächtnisses nacheinander und bauen hierarchisch aufeinander auf (vgl. 83-84): Damit ist gemeint, dass später entstehende Teilsysteme die früher entstandenen überformen, wobei die früher entstandenen Teilsysteme und ihre Funktionen sich nicht auflösen, sondern bestehen bleiben. Die Einspeicherung von Information erfolgt seriell, d.h. in der Hierachie unten beginnend. Doch entlang der aufsteigenden Hierarchie der Teilsysteme kann Information in jeder Hierachieebene (d.h. parallel) unabhängig von den anderen abgespeichert und aufgerufen werden.

Die hier referierte Hierarchie der Gedächtnissysteme, mit dem autobiographischen Gedächtnis als dem nur beim Menschen vorkommenden höchsten Teilsystem des Gedächtnisses[32], kann als eine emergente Feinschichtung in der Emergenzebene des Psychischen, die ihrerseits durch eine auf dem Biotischen definierte emergente Funktion gegeben ist, aufgefasst werden. Überträgt man diese Sicht auf die Phylogenese, so erscheint das autobiographische Gedächtnis als die stammesgeschichtlich höchste Emergenzebene des Gedächtnisses in der Emergenzebene des Psychischen. Wir kommen darauf im 3. Kapitel zurück.

[32]In der psychologischen Literatur wurde das episodisch-autobiographische Gedächtnis dem semantischen Gedächtnis nebengeordnet; beide Gedächtnisteilsysteme zusammen bilden das deklarative Gedächtnis. Klix argumentiert in (vgl. Klix 1992; Klix/Spada 1998a, S. 8-9; Klix 1998c; van der Meer/Klix 2003) gegen die Trennung dieser Gedächtnisformen und für eine einheitliche Sicht. Tulving mit Markowitsch und Welzer bieten mit ihrer Sicht der hierarchischen Überformung des episodisch-autobiographischen Gedächtnisses über das semantische Gedächtnis eine neue Lösung für das Problem der Stellung beider Gedächtnisstrukturen zueinander an.

Mathematik ist ohne Gedächtnis nicht möglich!

Die evidente Einsicht, dass Mathematik ohne Gedächtnis nicht möglich ist, legt die Frage nahe, welche Strukturen unseres Gedächtnisses am Erwerb, der Erzeugung und der Kommunikation dessen, was wir mathematisches Wissens nennen, besonders involviert sind – daran beteiligt sind wohl alle.

Der Antwort auf diese Frage gehen wir in den Abschnitten 2.4.7 und 2.4.8 aus evolutionspsychologischer und in diesem Zusammenhang auch aus kognitionspsychologischer Sicht nach. Vorgreifend sei hier bemerkt, dass mathematisches Wissen ein psychosoziales mithilfe von Sprache formuliertes und kommuniziertes Konstrukt ist und mathematischer Wissenserwerb bzw. mathematisches Problemlösen ohne ein bewußtes Ich bzw. Selbst, in dem sich der Lernende bzw. Problemlöser als Lernender bzw. Problemlöser zusammen mit seiner Lerngeschichte, seinen Motiven, Strategien usw. spüren und reflektieren kann, nicht möglich ist. Organismen, die – wie der Homo sapiens – Mathematik betreiben, haben ein leistungsfähiges autobiographisches Gedächtnis ausgebildet. Wer aber in einem wissenschaftlichen Mathematikbuch etwas gestöbert hat, dem wird aufgefallen sein, dass das dort dargelegte mathematische Wissen (dazu gehören auch Operationen und Beweistechniken) im Vergleich zum Alltagswissen sehr abstrakt ist. Kennzeichnend für mathematisches Wissen ist deswegen unter anderem, dass es infolge elaborierender Prozesse vom autobiographischen Bezug gelöst und damit zu einem Wissen geworden ist, dessen deklarative Komponente Inhalt des semantischen Gedächtnisses ist. Das sich Lösen eines Wissens von seinem autobiographischen Bezug ist ein Vorgang, den bereits PIAGET als Überwindung des Egozentrismus (Dezentrierung) gekennzeichnet hat[33].

2.4.6 Die Beiträge zur Begriffsexplikation der Mathematik von K. DEVLIN bzw. N. KREBS

Die Sicht auf die Mathematik von K. DEVLIN

K. DEVLIN expliziert Mathematik als die Wissenschaft von den Mustern (vgl. Devlin 2001, S. 95ff.), vgl. dazu unsere Bemerkungen in 2.2.1 und 2.2.2, Diskussion 3. Der Zahlensinn, so argumentiert er, sei nur eine Wurzel der Mathematik. Ihre umfassende Wurzel in der Evolution des Menschen, aus der unter anderem auch die Sprache entstehen konnte, sei die Kognition des Menschen, die ihn insbesondere zum flexiblen, von festgelegten Programmen weitgehend befreiten

[33] Der Autor dankt R. OERTER für diesen Hinweis.

„offline Denken“ (vgl. S. 205) befähigt hat. Zwei Komponenten unserer Kognition – wir erlauben uns an dieser Stelle sehr frei zu referieren – erkennt er für das „offline Denken“ als besonders wichtig: erstens, dass wir verschieden hohe Abstraktionstufen konstruieren und (gleichzeitig) mit ihnen arbeiten können (vgl. S. 150ff.), zweitens, dass wir mit von uns konstruierten Symbolen nach von uns festgelegten Regeln operieren können (vgl. S. 152ff., 280ff.). Mathematisches Denken, so Devlin, bewegt sich im Ebenenbereich höchster Abstraktion (vgl. S. 150ff.). Über diese „Lokalisierung“, die man als seinen Beitrag zu einer Begriffsexplikation der Mathematik auffassen kann, geht er nicht hinaus. Er führt keine konkreten empirischen Befunde an, die seine Argumentation stützen, und behandelt die Genese der Mathematik für kein konkretes Beispiel.

Die Sicht auf die Mathematik von N. Krebs

N. Krebs greift die Begriffsexplikation von Devlin – Mathematik sei die Wissenschaft von den Mustern – auf und fundiert sie in (vgl. Krebs 2008) mithilfe evolutionspsychologischer und soziobiologischer Ansätze, die im Umfeld neuer amerikanischer und angelsächsischer Forschungen (G.G. Berntson, S.T. Boysen, R.W. Bryne, L. Cosmides, R. Dunbar, A.M. Leslie, D. Sperber (Frankreich), J. Tooby u.a.) entstanden sind:

Im Vergleich mit der massiven Modularitätshypothese (Cosmides und Tooby), dergemäß das menschliche Gehirn vollständig modular organisiert ist, vertritt Krebs eine schwache massive Modularitätshypothese für das Gehirn, welche die Möglichkeit einiger universeller Strukturen bzw. Funktionen offen lässt. Davon ausgehend, dass die grundlegenden (in unserer Terminologie: die im Mesokosmos adaptiven) Module des Gehirns, zu denen z.B. Module der Wahrnehmung und Motorik zählen, sehr alt seien (vgl. unsere Ausführungen dazu in 4.4.2), geht er der Frage nach, wie die höheren kognitiven Funktionen des Menschen entstanden sein könnten. Dabei teilt er im Wesentlichen den Forschungstand, dass die Antwort darauf in der Hominidenentwicklung zu suchen sei. Weiter nimmt er mit Sperber und L.A. Hirschfeld eine Entwicklung einer Hierarchie von konzeptualen Modulen an, in der höhere Module ihren Input von grundlegende(re)n Modulen erhalten, und unterscheidet den mesokosmisch adaptiven, geeigneten Inputbereich eines Moduls von dem, nachdem Umweltveränderungen eingetreten sind, nun ggf. nicht mehr adaptiven, tatsächlichen Inputbereich. Beide Inputbereiche zusammen werden kultureller Bereich eines Moduls genannt. Den Modulen wird die Eignung zur Repräsentation von Wahrnehmungen und darüber hinaus auch von Symbolen und fiktiven Sachverhalten zugestanden. Wir merken hier an, dass die Repräsentationsfunktion eines Moduls ein theoretischer Begriff der Psychologie ist, den KREBS intensiv verwendet, wenn er Repräsentationen von Repräsentationen (Metarepräsentationen) betrachtet.

Die Fähigkeit des Gehirns, mithilfe seiner Module in variablen ökologischen und sozialen Kontexten adaptives Verhalten erzeugen zu können, bezeichnet KREBS als Intelligenz, und aufgrund des Befunds, dass das Neokortexvolumen mit den sozialen Verbänden der Hominiden gewachsen ist (Social Brain Hypothesis – SBH), vertritt er mit DUNBAR u.a. die Auffassung, dass auch für die Intelligenzentwicklung der Hominiden vor allem der soziale und nicht der ökologische Kontext entscheidend gewesen sei (Soziale Intelligenz Hypothese – SIH). Wir merken hier an, dass auch KLIX die Steigerungen der kognitiven Leistungsfähigkeit des Menschen (vgl. 2.4.4 nach (M2), und 2.4.7 Wissenspsychologie u. Wissenswandel) und WUSSING die Genese der (wissenschaftlichen) Mathematik (vgl. 2.3.2) in Prozessen der sozialen Evolution verorten.

KREBS erklärt dann die Entstehung höherer kognitiver Fähigkeiten während der Hominidenentwicklung durch die Angabe ihrer Funktion in der sozialen Evolution: Es ist vorteilhaft für ein Individuum in einem Verband, wenn es anderen Individuen Absichten und Wünsche, also intentionales Verhalten zuschreiben und daraus Folgerungen für sein Verhalten gewinnen kann (Theory of Mind). Diese Fähigkeit setzt ein hinreichendes Selbstbewusstsein („Ich“) und damit auch Bewusstsein voraus. Probleme, für deren Lösung neuartige Verhaltensantworten zu konstruieren sind, müssen im Zentrum der Aufmerksamkeit und der potentiellen Handlungsbereitschaft stehen. Diese evolutionäre Funktion, die eng mit dem in seiner Größe beschränkten Arbeitsgedächtnis verknüpft ist, erleben wir als Bewusstsein. Die Fähigkeit, Symbole bilden und verarbeiten zu können, erlaubt kognitive Simulationen; sie waren zunächst eng mit den Vorgängen im sozialen Verband verknüpft gewesen. Weil Sprache (sie verwendet Symbole) sogar abwesende Individuen vergegenwärtigen kann, indem man über sie redet, ist die evolutionäre Funktion von Sprache für den Zusammenhalt von Großgruppen und damit für ihre Entwicklung sinnfällig. Intention und Sprache erlauben es, kognitive Repräsentationen, die noch immer eng mit den Vorgängen im sozialen Verband verknüpft sind, hierarchisch zu (höheren Metarepräsentationen) zu verknüpfen. Der heutige Homo sapiens bewältigt fünf Schichtungen recht fehlerfrei, mit der sechsten steigt die Fehlerhäufigkeit stark an, weil nun das

Arbeitsgedächtnis überlastet ist. Durch die Loslösung des Symbols vom ursprünglichen Kontext der sozialen Beziehungen entstanden in der weiteren Entwicklung zum heutigen Menschen Symbole, die sich auf fiktive Sachverhalte beziehen können (Fiktionsfähigkeit) und damit ihren ursprünglichen geeigneten Bereich überschreiten.

In der Hominidenentwicklung entstanden die höheren kognitiven Funktionen also für die Erzeugung und das Management von sozialen Beziehungsmustern. Aber während des jüngeren Verlaufs der Phylogenese des Homo sapiens lösten sich die kognitiven Funktionen von ihrem ursprünglich sozialen Kontext und gewannen ein Eigenleben als Muster von fiktiven Beziehungen bezogen auf fiktive Sachverhalte, formulierbar mithilfe von Sprache. Die Wissenschaft der von den höheren kognitiven Funktionen erzeugten fiktiven Beziehungsmuster expliziert Krebs als Mathematik. Die Anwendung fiktiver Beziehungsmuster auf Sachverhalte des ökologischen Bereichs führt beispielsweise zur mathematischen Beschreibung von Natur und Technik. Sie liefert damit aber auch einen Ansatzpunkt für eine ontologische Interpretation der Mathematik und eine naturalistische Erklärung dafür, warum sich die Mathematik für die Beschreibung der Welt eignet. Diese Gesichtspunkte und andere arbeitet Krebs in den letzten Abschnitten seiner Arbeit, die er im Rahmen der Philosophie der Mathematik verfasst hat, aus.
Diskussion: Die von Krebs vorgelegte naturalistische Sicht auf die Mathematik erfährt ihre Erklärung vor allem durch eine rationale Rekonstruktion der Genese höherer kognitver Funktionen im Laufe der Hominidenentwicklung bis zum Homo sapiens. Auch wenn wir uns – aus oben genannten Gründen – nicht dazu entschließen, die Mathematik als die Wissenschaft von beliebigen (Beziehungs-)Mustern zu explizieren, stehen wir doch mit ihm bei seinem Versuch, Mathematik naturalistisch erklären zu wollen.

(Krebs 2008) und die vorliegende Arbeit stehen in einem Feld von komplexen Bezügen, aus dem wir lediglich einige herausgreifen und kurz ansprechen, eine detaillierte Analyse würde die Gewichte der schon sehr theoriebeladenen vorliegenden Arbeit noch weiter ins Theoretische verschieben:

(1) Während Krebs die Hominidenentwicklung zum Homo sapiens für die Genese der Mathematik unter die Lupe nimmt, steht in unserem Unternehmen die naturgeschichtliche Sicht uneingeschränkt im Fokus. (Krebs 2008) präzisiert unsere naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik im Bereich der Hominidenentwicklung durch eine auf Befunde gestützte rationale Rekonstruktion der Genese höherer kognitiver Funktionen des Homo sapiens.

(2) Am Ende von 2.4.5 stellten wir aus ontogenetischer Perspektive fest, dass seine Abgelöstheit von autobiographischen Bezügen unter anderem für mathematisches Wissen kennzeichnend ist.
Mit den Einsichten von (Krebs 2008) ist eine phylogenetische Parallelentwicklung erkennbar: Die sich während der Hominidenentwicklung zunächst für die Verhaltensoptimierung in sozialen Kontexten herausbildenden kognitiven Fähigkeiten lösten sich von ihren sozialen Bezügen und wurden zum Quellbereich für das mathematische Wissen.
Die Ausarbeitung dieser Parallelität von Ontogenese und Phylogenese könnte weitere Einsichten zu Tage bringen.

(3) Die Evolution sozialer Kontexte war – so könnte man argumentieren, um die SBH bzw. SIH weiter zu stützen – für die Genese höherer kognitiver Funktionen und damit folglich der Mathematik während der Hominidenentwicklung deswegen entscheidender als die ökologische Evolution, weil die Hominiden in ökologischen Umwelten lebten, die sie – auch dann, wenn sie ein soziales Motiv dafür gehabt haben mögen – nicht verändern konnten. Deutlich erkennbar hat sich diese Situation seit den frühen Hochkulturen und extrem beschleunigt seit dem Ende des europäischen Mittelalters geändert: Der heutige Homo sapiens schafft sich mithilfe von Mathematik, Wissenschaft und Technik seine ökologische und soziale Umwelt, und die Gestaltung seiner ökologischen Umwelt, zieht Änderungen der sozialen Umwelt und viele neue in ontogenetischen Lernprozessen zu erwerbende höhere kognitive Funktionen (die hier salopp als Wissen bezeichnet seien) nach sich.

(4) Piaget, die Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie und Klix gewannen bereits manche Einsichten, die von der neueren angelsächsischen und amerikanischen Forschung – auf die Krebs zugreift – nicht zur Kenntnis genommen worden sind. Es wäre eine Aufgabe, beide Forschungsbewegungen historisch zu vergleichen, um Urbezüge und Ideen in ihren Quellen sichtbar zu machen. Zweifellos sind die neuen Einsichten in die Hominidenentwicklung überwiegend im Umfeld der neueren angelsächsischen und amerikanischen Forschung enstanden.

Wir wenden uns nach diesen Beiträgen von Devlin und Krebs nun wieder Klix zu.

2.4.7 F. Klix ein Pionier der Evolutionspsychologie – 2. Teil

Klix gibt sich in seinem evolutionären Erklärungsversuch für die Kognition des Menschen – wie bereits im 1. Teil erwähnt – nicht mit einer evolutionären Erklärung von Wahrnehmungsvorgängen, einfachen Lernvorgängen und einfachen kognitiven Leistungen zufrieden. Denn er möchte auch die wissenschaftlich-technischen Spitzenleistungen des Menschen aus evolutionspsychologischer Sicht nachvollziehbar machen. Dazu analysiert er – ausgehend von der Hypothese, dass der Homo sapiens (sapiens) sich seit ca. $2 \cdot 10^5$ Jahren aus biologischer Sicht nicht mehr verändert hat und seine kognitiven Leistungen das kumulierte Resultat sozialer und kognitiver Prozesse sind – die Evolution des menschlichen Wissens und Könnens insbesondere aus psychologischer Sicht. Neben der Einsicht in die zu Grunde liegenden motivationalen und emotionalen Käfte erweist sich die Struktur und die Dynamik des menschlichen Gedächtnisses als das wichtigste Konstrukt der Psychologie, mit dessen Hilfe die kognitiven Komponenten eines jeden und damit auch des wissenschaftlichen Erkennens erklärt werden können. Klix ist der Natur wesentlicher Komponenten des menschlichen Gedächtnisses in (Klix 1992) und Folgearbeiten, z.B. (vgl. Klix 1996; 1998b; 1998c), nachgegangen und verweist bei Erläuterungen und Beispielen immer wieder auch auf die Mathematik.

Aus der von Klix entwickelten Sicht auf die Evolution menschlicher Kenntnis beschränken wir uns in diesem Abschnitt fast nur auf kognitionspsychologische Aspekte. Wir rekapitulieren einige Strukturen des kognitionspsychologischen Forschungsstands zum Gedächtnis nach Klix und werden dabei Einsichten gewinnen, die uns zu neuen Gesichtspunkten für die Begriffsexplikation der Mathematik führen.

Die kognitiv-psychologische Sicht von Klix auf Komponenten des Gedächtnisses

Phylogenetisch erworben ist die – zunächst unbewusste – Fähigkeit des Gehirns zum Klassifizieren, d.h. Invarianten über Objektmengen bilden zu können. Sie ist die Grundlage der Begriffsbildung, einer zentralen Strukturbildung im

Gedächtnis (vgl. Klix 1996, S. 536).

Sofern sich die Invariantenbildung – zunächst – auf Klassen wahrnehmbarer Objekte (z.B. Hund, Haus, Blume) richtet, entstehen Objektbegriffe, deren Merkmalssätze im Gedächtnis durch Wortmarken fixiert werden können (vgl. Klix 1996, S. 537). Für die Verarbeitung von Objektbegriffen im Gehirn ist das Wernicke-Areal (Semantik) besonders wichtig (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 341).

Klassifikationen von Vorgängen in Raum und Zeit führen zu Ereignisbegriffen (z.B. kaufen, operieren, wandern). Im Zentrum eines Ereignisbegriffs steht ein so genannter semantischer Kern (z.B. kaufen), der ein Geschehen erfasst, das nur in bestimmten situativen Kontexten möglich ist, deswegen also mit einem Handlungsträger, Objekt, Ort etc. in Relation steht (vgl. Klix 1998c, S. 183; van der Meer/Klix 2003, S. 341). Man stelle sich einen Ereignisbegriff deswegen als eine Struktur im Gedächtnis vor. Bei der Verarbeitung von Ereignisbegriffen im Gehirn übernimmt das Broca-Areal (Sprechmotorik) eine bedeutende Rolle (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 342).

Nächst größere Strukturen im Gedächtnisbesitz, so die Ereignisfolgebegriffe, (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 342) entstehen in Klassifikationen von Ereignissen, die in der Zeit miteinander verbunden sind (z.B. Restaurantbesuch). Sie werden durch Ereignisbegriffe, die durch Konjunktionen verknüpft sind, ausgedrückt. Ereignisfolgen sind mental bevorzugt dem zeitlichen Ablauf der Ereignisse entsprechend repräsentiert; Experimente mit Schimpansen deuten darauf hin, dass dabei der präfrontale Kortex eine wichtige Rolle spielen könnte (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 342).

Werden die bedeutungshaltigen Beziehungen zwischen Begriffen, die so genannten semantischen Relationen, klassifiziert, dann entstehen so genannte Metabegriffe (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 344; Klix 1996, S. 540-541; Opwis 1998): Klassifikationen von merkmalsbestimmten Relationen führen zu Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Begriffen (z.B. Ober- und Unterbegriffe, wobei der Merkmalssatz des Oberbegriffs im Merkmalssatz des Unterbegriffs enthalten ist; Antonyme etc.), und Klassifikationen von ereignisbestimmten Relationen verlaufen über Veränderungen in den semantischen Relationen zwischen dem semantischen Kern und den Objektbegriffen, also über Situationsänderungen. Am Beispiel, dass ereignisbestimmte Relationen im Vergleich zu merkmalsbestimmten Relationen in Priming-Experimenten viel schneller verarbeitet werden, möge deutlich werden, dass die von kognitiven Psychologen unterschiedenen Klassifizierungen von Begrifflichkeiten im Gedächtnis nicht willkürlich sind (oder nicht nur nach sprachlichen Strukturen vorgenommen wurden). Weiter legt der angeführte Befund die Deutung nahe, dass im Gegensatz zu merkmalsbestimmten Relationen, die anforderungsabhängig durch strategiegeleitete Merkmalsvergleichsprozesse erzeugt werden, „ereignisbestimmte Relationen auf Geschehenstypebene permanent im semantischen Gedächtnis gespeichert sind und autonom aktiviert werden. Auf diese Weise wird ereignisbestimmtes Wissen schnell und ohne nennenswerte Beanspruchung kognitiver Ressourcen bereitgestellt. Das verweist auf die Relevanz derartiger Wissensstrukturen bei der erfolgreichen Bewältigung von Umweltanforderungen“ (van der Meer/Klix 2003, S. 345-347).

Von den vielen möglichen relationalen Klassifzierungen sei nun auf jene hingewiesen, welche sich zum einen auf die Handlungskompetenzen, zum anderen auf die Erfahrungen und Erlebnisse des Handlungsträgers in seinem Gedächtnis beziehen.

> „Die Benennungen dieser beiden Klassifizierungen sind mit den Worten ‚Selbst[34]‘ und ‚Ich‘ gegeben. Begriffe wie Selbstgemachtes … verweisen auf den Handlungsbezug, den das Klassifikat ‚Selbst‘ als Benennung für die Handlungsträgerschaft des Gedächtnisinhabers ausmacht. Und das ‚Ich‘? Dieser Begriff, so ist unsere belegbare Vermutung, bestimmt den relativ invarianten Merkmalssatz aller aus Handlungserfahrungen bezogenen Information über die eigene Identität. Dies macht die kognitive Seite des ‚Ich‘-Begriffs aus. Die Selbsterfahrungen im Handeln bilden die relativ invarianten Daten für die ‚Ich‘-Merkmale des Gedächtnisträgers, sie konstituieren das relativ stabile Bild seines ‚Selbst‘, das sein ‚Ich‘ bestimmt. Vor diesem Hintergrund lassen sich nun die reflexiven Begriffe in das Schema der (relationalen) Ereignisbegriffe einordnen. Zudem geht es hier um eine Metaebene der Begriffsbildung, die aufs engste mit der Motivationsbasis einer Persönlichkeit (und damit auch der emotional-affektiven Komponenten) verbunden ist …“. (Klix 1996, 542)

Alle bisher angesprochenen Klassifizierungen führen zu quasi-stationärem (zeitlich eher stabilem) Gedächtnisbesitz, den Begriffen. Demgegenüber ist die

[34]Im Original sind die hier in ‚…‘ gestellten Begriffe in Majuskeln gesetzt (vgl. Klix 1996, S. 537 Fußnote 4). Im Original nicht in Majuskeln stehen die Begriffe benennenden Worte, die z.B. durch ihre Phonemsequenz der Worterkennung zugeführt werden können (vgl. Klix 1998c, S. 182).

Gedächtnistätigkeit selbst etwas Dynamisches; im Augenblick ihrer Aktion ist sie unbewusst und ihre flüchtigen Ergebnisse erleben wir im Denken nur teilweise (vgl. Klix 1996, S. 544). KLIX nimmt nun – wie in der Psychologie üblich – an, „daß neben statischen begrifflichen Strukturen auch Operationen zu den Gedächtnisinhalten eines Menschen gehören, die, aufgerufen und aktiv geworden, diesen Wissensbesitz püfen oder verändern können. ... Es sind dies Prozeduren, die mit dem Datenmaterial begrifflichen Wissens sozusagen wirtschaften müssen.“ (Klix 1996, S. 547) Nur bewusst gewordene Operationen, sodass sie auch bewusst Klassifizierungen unterzogen werden können, gehören dem quasi-stationären Gedächtnisbesitz an. Operationen lassen sich formal durch die Anwendung eines Operators auf Gedächtnisinhalte beschreiben, mit dieser Sprachregelung wird verständlich, was gemeint ist, wenn z.B. von einem Vergleich oder einer Transformation von Gedächtnisinhalten beim kognitiven Problemlösen die Rede ist. „Unklar“, so stellt KLIX – neben der Schwierigkeit, die Operationen zu identifizieren – heraus, sind „die Anzahl der unterscheidbaren elementaren Operationen“ sowie „die Mächtigkeit ihrer Wirkungskreise in den Phänomengebieten der verschiedenartigen Denkvorgänge“ (Klix 1996, S. 547-548).

KLIX widmet sich dem Thema der kognitiven Operationen nicht nur in (vgl. Klix 1996; 1998c), sondern hat bereits in (vgl. Klix 1992, insbes. S. 262ff.) viele wichtige Operationen bestimmt und sie anhand von Beispielen aus der kulturellen Phylogenese analysiert. Die Operationen bilden sich zunächst in motivgebundenen Wahrnehmungen und im situationsverändernden Handeln, sie sind lernabhängig und wenden sich, nachdem sie sich nach Entscheidungen in Umweltsituationen bewährt haben, den verfügbaren Gedächtnisinhalten zu; wir geben hier nach KLIX eine Auswahl an (vgl. Klix 1996, S. 547ff. insbes. S. 547-548; 1998c, S. 195ff. insbes. S. 196):

- *Akzentuierung* bedeutet die Steuerung der Aufmerksamkeit auf bestimmte Merkmale eines Objekts in der Umgebung oder im Gedächtnis.

- *Inhibition* bedeutet das Ausblenden von mutmaßlich unwichtigen z.B. Merkmalen eines Objekts zum Zweck einer effizienten Suche oder beim Klassifizieren.

- *Vergleichsprozesse* sind an der Ähnlichkeitserkennung beteiligt, im Bereich des Sprachlichen z.B. beim Erkennen von Synonymen.

- Die *Verkettung* von Denkschritten ist ein Beispiel für eine kognitive Transformation. Sofern nur das Ergebnis – nicht die Zwischenschritte – der Kette greifbar ist, spricht KLIX von einer Prozedur (vgl. Klix 1992, S. 262).

- *Substitution* bedeutet die gleichwertige Ersetzung einer kognitiven Struktur durch eine andere, wobei u.a. Abkürzungen oder Verdichtungen möglich sind.

- Metaphern, Analogien oder die geometrische Darstellung von Zahlenverhältnissen sind Beispiele für *Abbildungen*.

- *Inversion* bedeutet die (kognitive) Umkehrbarkeit, das Rückgängigmachen einer Operation (Reversibilität nach PIAGET).

Grundsätzlich sind Akzentuierung, Inhibition, Vergleichsprozesse und auch Abbildungen keine für den Homo sapiens spezifischen Operationen – z.B. sind auch Schimpansen zur Analogiebildung fähig und Akzentuierung sowie Inhibition wird man bei höheren Wirbeltieren finden. In diesem Sinne sind diese Operationen elementar, doch sofern der Mensch sie in seinen Aktivitäten zu komplexen Prozeduren verbindet und sie auf komplexen, z.B. symbolsprachlichen, Gedächtnisbesitz bezieht – dafür sind z.T. lange Lern- und Übungsphasen nötig –, ist eine Rede von höheren kognitiven Leistungen gerechtfertigt. Dass komplexe Operationen aus elementaren aufgebaut werden, ist für technische Systeme evident (Robotik), aber für die Modellierung höherer Kognitionen des Menschen eine Arbeitsannahme.

Die Tatsache, dass jeder Mensch die phylogenetischen Voraussetzungen für ein Gedächtnis in sich trägt, das in seiner Ontogenese bis zum höchsten Teilsystem – dem autobiographischen Gedächtnis – heranreift, ist nicht hinreichend dafür, dass er besondere, z.B. mathematische, Leistungen vollbringt. Besondere kognitive Leistungen sind aber ohne ein so hoch entwickeltes Gedächtnis nicht möglich. Es gehört zusammen mit der Motivlage, der Begabung, dem Wissen, dem sozialen Umfeld, der materiellen Absicherung etc. zu den spezifischen Bedingungen eines Menschen, unter denen besondere kognitive Leistungen entstehen können.

Wissenspsychologie und Wissenswandel

Während „Lernen" sehr allgemein als Aufbau oder Korrektur von verhaltensrelevantem Gedächtnisbesitz verstanden wird (Klix 1996, S. 331), bezeichnet „Wissen" z.B. (vgl. Klix/Spada 1998a, S. 1-6; Treml 2000, S. 210-211) verfügbaren Gedächtnisbesitz: es ist reorganisierbar, erweiterbar, kommunizierbar; Handeln und Problemlösen setzen Wissen voraus. Die Gesamtheit des Wissens einer Person wird gelegentlich als „Wissenskörper" bezeichnet (vgl. Klix 1992, z.B. S. 231; van der Meer 1998). Die Erforschung der kognitiven Prozesse des Erwerbs und der Verarbeitung von Wissen ist Gegenstand der „Wissenspsychologie". Sie ist ein Forschungsgebiet der Kognitionspsychologie, aber auch Gegenstand der Kognitionswissenschaft und der Künstlichen Intelligenzforschung (vgl. Mandl/Spada 1988; Klix/Spada 1998a; Möbus/Schröder 1998). (In Abgrenzung zum Forschungsparadigma des (klassischen) Behaviourismus, in dem das Nervensystem als Black-Box betrachtet wurde und nur messbare Reaktionen auf Reize untersucht wurden, soll der Begriff „Kognition" in der Disziplinbezeichnung „Kognitionspsychologie" zum Ausdruck bringen, dass die Informationsverarbeitung im Nervensystem im Mittelpunkt des Interesses steht.)

Im Gegensatz zu Prozessen der Wahrnehmung und der Motorik, die im Nervensystem als bereichspezifisch – modular – organisiert erkannt worden sind, wurde „Wissen" als „Produkt der Anwendung von *bereichsunspezifischen* Lernmechanismen angesehen" (Waldmann 1996, S. 321), bis auf Grund kognitionspsychologischer und entwicklungspsychologischer Forschung das Vorliegen von allgemeinem bereichsspezifischem Vorwissen oder zumindest von bereichsspezifischen Lerndispositionen deutlich geworden ist (vgl. Waldmann 1996, S. 344); diese Einsichten werden heute neuropsychologisch untermauert (vgl. Karnath/Thier 2006).

Während Lernvorgänge im Informationsverarbeitungsparadigma sowohl subsymbolische (Konnektionismus) als auch symbolverarbeitende Formulierungen erhalten haben, dominiert unter den Modellen für den Erwerb und die Verarbeitung von Wissen das Symbolparadigma. Letzterem liegt die Annahme zu Grunde, dass eine psychologische Theorie, welche die Struktur und die Dynamik von Wissenskörpern zum Gegenstand hat, nur die Funktion des zu Grunde liegenden biologischen Substrats – in der Abstraktionsebene des mithilfe von Symbolen repräsentierten Wissens – erfassen muss, also unabhängig von der tatsächlichen biologischen Materialisierung des Wissens möglich ist (vgl. Möbus/Schröder 1998, S. 403-405).

Die Frage, wie es zu höheren kognitiven Leistungen beim Menschen gekommen ist, beantwortet Klix im Sysmbolverarbeitungsparadigma mit dem Wissensbegriff. Knapp fasst und klar gliedert er die Antwort in (vgl. Klix 1996, S. 560ff.):

Er weist darauf hin, dass Wissensbesitz phylogenetisch entstanden ist, zunächst die motorischen Programme sowie die Erkennungssysteme betraf und den Darwinschen Gesetzen folgte. Hier sind phylogenetische Prozesse gemeint, die die adaptive, genetische Veränderung des Artgedächtnisses, die direkte Anpassung an die Umweltgegebenheiten des Organismus bewirkten und stellt heraus, dass das Artgedächtnis die Basis für jedes individuelle Lernen ist (vgl. Klix 1996, S. 560-561).

Viel schneller als die evolutionsbiologische Genese und dennoch sehr langsam im Vergleich zu einem Menschenleben, wandelten sich „die sozial erarbeiteten und kollektiv verteilten Wissensbestände“ (Klix 1996, S. 561). Klix spricht hier von „sozial-gesellschaftlichen Veränderungen von Wissensbeständen“ (Klix 1996, S. 561), bringt als Beispiele dafür u.a. die langsame technologische Entwicklung in der Vorgeschichte und die Entwicklung der Zahlensysteme sowie der Schriftsprache in der Frühgeschichte (vgl. Klix 1996, S. 561-564) und weist für sie bekannte allgemeine Vorgänge der Wissensbildung nach (s.o.): Lösung der Objektbegriffe von Ereignissen, Übergang von einer bildlichen zu einer symbolischen Darstellung für erkennungsrelevante Merkmale der bezeichneten Objektmenge (Begriffsschrift), Einführung von Verkettungen zur Komposition von Begriffen, Zeichen für Oberbegriffsklassen, Vereinfachungen von Notationen, mentale Abbildungen, Inversionen etc.

Weil jedes Individuum in eine schon bestehende Menschheit hineingeboren wird, erwirbt es in seiner Ontogenese sein Wissen (z.B. eine Sprache, soziale Regeln, Mathematik) im Wesentlichen von dieser Population in sozialen Prozessen. Die ersten Schritte jeder individuellen Genese des Wissens wurden mit der Entwicklung des Gedächtnisses (vgl. 2.4.5) skizziert. Einige der den piagetschen Experimenten zu den „Sequenzen operationaler Stadien im Denken“ (Klix 1996, S. 565) zu Grunde liegenden kognitiven Anforderungen hat Klix mithilfe seines Ansatzes analysiert. Weil er auch hier wieder die bereits oben beschriebenen Operationen (Klassifzierungen, Akzentuierungen, Vergleichsprozesse, Verkettungen etc.) fand (vgl. Klix 1996, S. 565-570), formuliert er die Hypothese,

> „daß es allem Anscheine nach universelle kognitive Operatoren gibt, de-

ren spezifische Kombinatorik eine flexible Leistungsfähigkeit gegenüber geistigen Anforderungen ermöglicht. Wenn man nun fragt, wodurch die Steigerung geistiger Leistungen in der Ontogenese zustandekommt, so ist es danach das Wechselspiel zwischen elementaren, Handlungs- und klassifizierungsbezogenen Operationen mit den durch sie erworbenen, sich erweiternden und vertiefenden Wissensstrukturen. Jene veränderten Inhalte, auf die diese Operationen und ihre Kombinatorik angewandt werden, bestimmen den lernabhängigen Leistungszuwachs in der Ontogenese. Und die veränderten Inhalte entstehen danach durch weiträumigere Invariantenbildungen über den klassifizierten Objektmengen; also durch eine sich verändernde Begrifflichkeit im menschlichen Wissensbesitz. Sie ist die Basis für die Modifizierung altersabhängiger Denkvorgänge.“ (Klix 1996, S. 570).

Die speziellpsychologische und die differenziellpsychologische Sicht

Die Frage nach der Evolution des Wissens wurde bisher, sofern es um Gedächtnisprozesse ging, im kognitionspsychologischen Rahmen erörtert. Wird dieser durch wahrnehmungspsychologische, motivationale, affektive und aufmerksamkeitssteuernde Aspekte ergänzt, bewegen wir uns im Gegenstandsbereich der Allgemeinen Psychologie. Die entwicklungspsychologische Sicht auf die Evolution des Wissens gäbe gewiss viele Anregungen für eine vergleichende Untersuchung von Ontogenese und Phylogenese des Wissens. Weil aber die Mathematik – sie ist unser Thema! – weder von Kindern oder Greisen, sondern von jungen Erwachsenen und Menschen mittleren Lebensalters vorangebracht wird, sei hier weitgehend auf die entwicklungspsychologische Sicht verzichtet.

Bekanntlich wird die Mathematik von nur sehr wenigen Menschen – kaum ein Forschungsergebnis ist bahnbrechend – entscheidend vorangebracht, was dazu motivieren könnte, sich auf diese kleine Teilgruppe zu beschränken, m.a.W. eine speziellpsychologische Sicht einzunehmen. Z.B. referiert Klix eine speziellpsychologische Untersuchung, in der eine Gruppe mathematisch hochbegabter junger Menschen von einer studentischen Kontrollgruppe unterschieden werden konnte (vgl. Klix 1992, S. 438-446); auch eine Leistungsdifferenzierung nach dem Geschlecht wäre speziellpsychologischer Art.

Eine Untersuchung, in der z.B. die mathematische Leistungsfähigkeit einer Einzelperson mit der einer Gruppe verglichen wird, nimmt demgegenüber eine differenziellpsychologische Sicht ein.

Insoweit wir der Evolution des mathematischen Wissens in der Emergenzebene des Psychischen nachgehen, steht bei uns die um allgemeinpsychologische und gelegentlich um speziellpsychologische Aspekte ergänzte kognitionspsychologische Sicht im Mittelpunkt.

Experten und Novizen

Kognitive Spitzenleistungen erfordern lange Lernphasen und sind die Domäne erwachsener Menschen: Ausgehend von der selbstverständlichen Tatsache, dass die grundlegenden Strukturen und Funktionen des Gedächtnisses für alle erwachsenen Menschen gleich sind, geht Klix nun der speziell-psychologischen Frage – anhand von ausgewählter, repräsentativer Literatur – nach, in welcher Weise sich die Wissenssysteme, Wissenserwerbs- sowie Problemlösungsprozesse von Anfängern (Novizen) und Experten auf der Basis seiner Modellvorstellungen unterscheiden. Sein Ausgangspunkt ist wieder der, „daß begriffliches Wissen über Objekte und ihre Eigenschaften durch Konfigurationen von Merkmalen beschreibbar sind“ (Klix 1996, S. 571). Unterschiede, wie z.B. Motivstärke, Belastbarkeit oder Begabung, berücksichtigt er also nicht. Einige Unterschiede zwischen Anfängern und Experten, die Klix erkennt – hier kommen wieder einige der bereits oben angeführten grundlegenden Operationen vor –, führen wir nun an (vgl. Klix 1996, S. 571-573):

- Experten orientieren sich mehr an gebrauchs- oder verwendungsrelevanten Kriterien als Anfänger.
- Das stärker durch differenzierte Merkmale verfeinerte Wissen wird von Experten mehr von der Aufgabenstellung her akzentuiert, wobei oberflächliche, visuell gegebene Merkmale im Hintergrund bleiben.
- Experten klassifizieren variabler (das ist ein Phänomen der Akzentuierung bzw. der Inhibition).
- Experten sind in vieler Hinsicht flexibler bei der Problemrepräsentation.
- Experten und Anfänger zeigen bei schriftlicher Befragung vor allem ihr prozedurales Wissen, bei verbaler Reproduktion mehr deklaratives Wissen.
- Experten vergleichen besser und berücksichtigen stärker Kontextwirkungen.

- Experten planen besser als Anfänger (effizientere Verkettungen vom Ausgangspunkt zum Ziel).
- Experten verwenden Abbildungsprozesse beim Problemlösen effizienter als Anfänger.
- Experten vergegenwärtigen Problemsituationen selbstreflektiert, d.h. auf einer Metaebene.

KLIX schließt seine Überlegungen in (Klix 1996, S. 577) mit der

> „Vermutung, daß im ganzen wenige mentale Operationen, einwirkend auf die Strukturbildungen im Wissensbesitz, weiträumig und kompliziert aufgebaute Phänomene des Denkens zu gestalten und zu erzeugen erlauben und dabei auch neues Wissen generieren. … Realiter ist ein Prozeßgeschehen gegeben, in dem Strukturen und Operationen unauflöslich interagieren.“

Wie bereits angemerkt, stehen die evolutionspsychologischen Überlegungen zur Mathematik in den Arbeiten von KLIX in erster Linie als Beispiele für die Evolution geistiger Leistungen des Menschen im Allgemeinen. Deswegen überrascht es nicht, dass KLIX keine Begriffsexplikation der Mathematik formuliert hat. Aber im Rahmen der empirisch arbeitenden Kognitiven bzw. Allgemeinen Psychologie lassen sich neuartige Gesichtspunkte und Einsichten für eine auch evolutionäre Aspekte einbeziehende Begriffsexplikation der Mathematik gewinnen und wir glauben, dass KLIX dem zustimmen kann.

Mathematik und Gedächtnis

Das Gedächtnis und seine Leistungsfähigkeit ist das Resultat der Phylogenese. Ein individuelles Gedächtnis beruht auf phylogenetischen Anlagen und bildet sich ontogenetisch in psychosozialen Prozessen; das Zusammenwirken von psychischen und sozialen Prozessen wurde in 2.4.5 angesprochen: Die Entwicklungszeit des menschlichen Gedächtnisses – wir richten unsere Aufmerksamkeit auf den Homo sapiens, weil nur er wissenschaftliche Mathematik hervorbringt – wird im historischen Vergleich immer länger, denn es dauert immer länger, bis das Gedächtnis eines jungen Menschen ein Niveau erreicht hat, sodass er mit seiner komplexen sozialen Umwelt anschlussfähig geworden ist. Darüber hinaus sind sowohl in historischer als auch in interkultureller Perspektive verschiedene Niveaus der Autobiographisierung feststellbar. Das hierarchisch höchste Gedächtnisteilsystem, das autobiographische Gedächtnis, kommt nur beim Homo sapiens vor. Es setzt, wie in 2.4.5 skizziert, u.a. Symbolkompetenz, Sprachkompetenz und das Konstrukt „Ich“ voraus.

Wissenserwerb und Problemlösen, so wie wir diese Fähigkeiten beim Menschen kennen, fordern bei begrenzter Höhe und Steuerungsmöglichkeit der Aufmerksamkeit und bei begrenzter Kapazität des Arbeitsgedächtnisses das ganze Gedächtnis (alle Teilsysteme) mit seiner vollen Dynamik, z.B. (vgl. Anderson 1996). Einige Leistungsbereiche seiner Dynamik seien hier genannt: Das Lernen (Enkodieren und Erinnern mit seinen Gesetzmäßigkeiten), der Aufbau oder die Veränderungen von kognitiven Repräsentationen (dazu gehört auch die Fähigkeit von visuellen oder räumlichen zu symbolischen, insbes. sprachlichen Repräsentationsformaten zu wechseln), der Aufbau oder die Modifikation von Begriffsstrukturen, die Auswahl oder die Verknüpfung von kognitiven Operatoren, das Suchen im Problemraum (Heuristiken, Strategien), die emotionale Färbung von Wissen, die Motivbildung in Verbindung mit Lagebewertungen der Person etc. Klix hat viele von ihnen unter evolutionsspychologischen Gesichtspunkten analysiert (vgl. Klix 1992; 1996; 1998b; 1998c).

Mathematisches Wissen, soweit es bewusstseinsfähig und von autobiographischen Bezügen gelöst ist, gehört zum semantischen Teil des deklarativen Gedächtnisses (vgl. 2.4.5, vor 2.4.6). Trotzdem ist das autobiographische Teilsystem des menschlichen Gedächtnisses für die Arbeit mit mathematischem Wissen unverzichtbar, denn mathematischer Wissenserwerb, mathematisches Problemlösen und die soziale Kommunikation von mathematischem Wissen sind ohne die steuernde Instanz „Ich“ unmöglich. Offensichtlich charakterisieren die Struktur und die Dynamik unseres Gedächtnisses das mathematische Wissen nicht spezifisch. Weil aber unser Umgang mit mathematischem Wissen von der Struktur und der Dynamik unseres Gedächtnisses mit bestimmt wird, erwarten wir von der fortschreitenden psychologischen Forschung wichtige Einsichten in die Natur des mathematischen Wissens, die bei der Begriffsexplikation der Mathematik berücksichtigt werden sollten.

Umfassendere Einsichten in die Evolution des mathematischen Wissens gewinnen wir, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf den Wandel des mathematischen Wissens im Gedächtnis in Wechselwirkung mit dem Wissen über den Wandel der sozialen und unbelebten Umwelt richten. Mit dem Bezug auf die soziale und die unbelebte Umwelt ist offensichtlich, dass die psychologische Sicht auf die Evolution der Mathematik unvollständig ist.

Wir wenden uns zunächst der biotischen Emergenzebene zu, der wir nicht nur, aber auch neuropsychologische Befunde und Modellvorstellungen zurechnen. Die Neuropsychologie erforscht die die biotische mit der psychischen Emergenzebene verbindenden Wechselwirkungen. Danach nehmen wir die alle Emergenzebenen umgreifende naturgeschichtliche Position ein, kennzeichnen Wirkungen der unbelebten materiell-energetischen Welt in der Evolution des mathematischen Wissens und kommen dann noch einmal auf das mathematische Wissen in unserem Gedächtnis zurück.

2.4.8 Biotische Strukturen und Verhalten, ergänzt um unsere naturgeschichtlichen Einsichten für die Begriffsexplikation der Mathematik

Uns ist kein Autor vor Klix bekannt, der Forschungsergebnisse der Kognitiven bzw. der Allgemeinen Psychologie so umfassend wie er für phylogenetische Überlegungen herangezogen hat – siehe 2.4.4, (M2) – und so klar wie er die Verschränkung von Psychischem und Sozialem herausstellte. Klix hat, wie schon angemerkt, auch biologische, insbesondere auch evolutionsbiologische Theorien und Modellvorstellungen für die Erklärung phylogenetischer Befunde organismischen Verhaltens verwandt – siehe 2.4.4, (M1) –, aber hier steht er mit seinen Beiträgen nicht vor anderen.

Zu den Bauplaneigenschaften (vgl. Riedl 1975) in der biotischen Emergenzebene, die für die Erzeugung und die Transformation mathematischen Wissens unverzichtbar, aber nicht mathematikspezifisch sind, zählen die anatomischen Substrate der Motivbildung, der Aufmerksamkeitssteuerung oder der Funktionen, die wir oben bereits anführten und die das Gedächtnis konstituieren. Im Folgenden suchen wir in der biotischen Emergenzebene nach Bauplaneigenschaften, die für die Erzeugung mathematischen Wissens möglichst spezifisch sind. In diesem Zusammenhang referieren wir unter anderem neuropsychologische Befunde, die Klix noch nicht vorgelegen haben oder die er nicht zur Kenntnis genommen hat. Anschließend fassen wir unsere Einsichten hinsichtlich ihres Beitrags für eine Begriffsexplikation der Mathematik zusammen.

Dann beziehen wir die naturgeschichtliche Position, welche neben der psychischen, sozialen und biotischen Emergenzebene nun auch die Emergenzebene des Unbelebten (Materiell-Energetischen) explizit enthält. Aus der naturgeschichtlichen Perspektive wenden wir uns dem Problem einer Begriffsexplikation der Mathematik erneut zu, indem wir nun alle Emergenzebenen im Bezug zueinander berücksichtigen und dabei versuchen, das spezifisch Mathematische am mathematischen Wissen zu erfassen. Wir stoßen dabei auf die am Anfang dieses Kapitels bereits bearbeiteten Themen, aber mit Zugewinn.

Zuletzt führen wir – soweit sie uns bekannt sind – die evolutionspsychologisch von Klix analysierten Beispiele für mathematisches Wissen sowie ausgewählte psychologische Arbeiten zum mathematischen Wissen von einigen anderen Autoren an.

Der multidisziplinäre Diskussionsstand in puncto Begriffsexplikationen der Mathematik wird damit im Wesentlichen referiert sein, an erkennbaren Stellen werden wir mit unseren Überlegungen darüber hinausgegangen sein.

Bauplaneigenschaften und Mathematik

Blickt man auf die Wissensgebiete, die heute als mathematisches Wissen bezeichnete werden, und fragt nach den Bauplaneigenschaften, die an der Erzeugung dieses Wissen wesentlich beteiligt sind, dann ist die Tatsache, dass Menschen Warmblüter sind, eine Lungenatmung haben und nur deswegen ein großes Gehirn mit Sauerstoff versorgen können, gewiss entscheidend für die Möglichkeit von wissenschaftlicher Mathematik. Aber interessanter sind demgegenüber Bauplanstrukturen, die für die mathematische Tätigkeit des Homo sapiens spezifischer sind. – Wir fassen den Begriff „Bauplan“ viel weniger präzise als es in der Biologie (vgl. Riedl 1975) üblich ist und meinen damit im weitesten Sinne anatomische Strukturen und Funktionen, die zumindest teilweise genetisch prädestiniert anzunehmen sind. – Sowohl einige der für Mathematik weniger spezifischen als auch einige für sie spezifischere Bauplanstrukturen enstanden schon mit den frühen Wirbeltieren (vor ca. $500 \cdot 10^6$ Jahren) bzw. aus diesen auf dem Pfad entlang den Tetrapoden (vor ca. $360 \cdot 10^6$ Jahren), den alten Reptilien, den säugetierähnlichen Reptilien, den Säugetieren, den Primaten bis zum Homo sapiens der vor ca. $0,2 \cdot 10^6$ Jahren aufgetreten ist; einen Abriß der Stammesgeschichte geben wir in 3.3.2.

Der Homo sapiens hat sich aus biologischer Sicht seit seinem Auftreten kaum verändert. Seine Bauplanstrukturen – damit auch die anatomischen Strukturen seines Gehirns – sind somit alte, aber auch für seine Informationsverabeitung noch heute aktiv wirksame Invarianten. (Der Zeitfaktor für sich in der Population etablierende genetische Veränderungen liegt in der Größenordnung von 10^6 Jahre. Die meisten Mutationen sind letal.) Das Zusammenspiel der Funktionen dieser invarianten Bauplanstrukturen (biotische Emergenzebene) in der Emergenzebene der Informationsverarbeitung für die Verhaltenssteuerung (psychische Emergenzebene) aufzuklären, ist Gegenstand der Psychologie.

Mesokosmisches Raumkonzept und Geometrie

Aus mathematischer Sicht wäre es natürlich, zuerst nur nach Bauplaneigenschaften für das Erkennen von topologischen und dann von geometrischen Eigenschaften unseres Mesokosmos zu fragen. Weil die Befundlage zu spezifischen Bauplaneigenschaften des topologischen Erkennens völlig unklar ist, wenden wir uns der Geometrie zu.

Geometrie – sie sei hier zum mathematischen Wissen gezählt – gründet auf einem phylogenetisch erworbenen Raumkonzept für unsere mesokosmische Umwelt. Der Dimensionsbegriff sei hier der alltäglichen Erfahrung entsprechend so gemeint, dass z.B. jede Kiste, in die man ein Geschenk packen will, eine Länge, Breite und Höhe haben muss. Auch die Geometrie in einer Ebene oder die Geometrie einer Linie gehen ebenso wie alle denkbar anderen geometrischen Strukturen vom mesokosmischen Raumkonzept aus: So ist z.B. „A liegt links von B“ eine das Raumkonzept verwendende Aussage. Demgegenüber beziehen sich „bunt“, „schmutzig“ allein oder das „Sehen von Konturen“ überwiegend auf die visuelle Modalität und nicht auf das Raumkonzept (vgl. Knauff 2006, 2.3 u. 2.4 S. 202ff. bes. S. 216).

Unser mesokosmisches Raumkonzept ist eine Integrationsleistung des visuellen, auditorischen, haptischen, vestibulären und propriozeptiven Systems (vgl. Karnath/Thier 2006, Teil III: S. 151-236) und somit eine von Bauplanstrukturen privilegierte biopsychische Funktion, die sich in der Ontogenese weitgehend unabhängig von sozialem Lernen entwickelt.

Unbestritten unterstützt uns die visuelle Modalität doppelt beim räumlichen Problemlösen: Erstens, indem wir mit ihrer Hilfe das reale räumliche Problem repräsentieren und manipulieren. Zweitens, indem wir sie als Hilfssystem nutzen und das räumliche Problem zur Entlastung unseres Arbeitsspeichers z.B. zeichnen. Unabhängig vom Raumkonzept, an dessen Repräsentation das visuelle System mit beteiligt ist, ist die visuelle Modalität für das geometrische Problemlösen auch deswegen unverzichtbar, da sie z.B. neuronale Strukturen enthält, die privilegiert Konturen und Bewegungen erkennen (vgl. Karnath/Thier 2006, Teil I: S. 31-103).

Klix setzt sich in seinen Arbeiten mit den Systemen der Raumerkennung und dem visuellen System und ihren Funktionen auseinander, unter evolutionären biologischen und psychologischen Geschichtspunkten vor allem in (Klix 1992, Kap. 3, 4: S. 139-300). Die in seinen evolutionspsychologischen Arbeiten behandelten Beispiele zur Mathematik haben den Raum und die Geometrie nicht als zentrales Thema. Räumliche und ebene geometrische Probleme kommen zwar immer wieder vor, spielen aber Nebenrollen; der Fokus liegt auf anderem, nämlich:

- Auf der Evolution konstruktiver Denkvorgänge bei der Produktion genialer technischer Leistungen in (Klix 1992, Kap. 2: S. 87-136, S. 461-464)
- auf der Analyse von Intelligenz, Kreativität und Begabung von mathematisch Hochbegabten im Vergleich zu einer Normalpopulation in (Klix 1992, 7.6.1: S. 438-446)
- auf Beispielen für kognitiv effiziente Repräsentationen von Problemen: durch Verdichtung und Verkürzung (vgl. Klix 1992, S. 453), durch Analogieschluss (vgl. Klix 1992, S. 459-461; 1993, S. 377)
- auf dem Messen von Größen (Zuordnung einer Maßzahl zur Verhaltensorientierung) allgemein, das er exemplarisch an im Raum zeitlich wiederkehrenden Strukturen und Volumina erläutert (vgl. Klix 1993, 6.1.3: S. 291-293).

In ähnlicher Weise diskutiert er ausgewählte Einzelbeispiele aus der frühgeschichtlichen und griechisch-hellenistischen Geometrie in (Klix 1993).

Mesokosmisches Quantisierungskonzept – (An-)Zahlen

Psychologische Versuche zeigen (vgl. Dahaene 1999; Karnath/Thier 2006, Teil VII: S. 389-422; Siemann/Fersen/Delius 1998), dass viele Tiere und der Homo sapiens ein phylogenetisches Quantisierungskonzept unabhängig von Sprache besitzen. Für Tiere, insofern sie mit guten Gründen als sprachlos angesehen werden (vgl. van der Meer/Klix 2003, S. 333; Dörner 2006, S. 635), ist die Unabhängigkeit ihres Quantisierungskonzepts von der Sprache eine unmittelbare Folge dieser Gründe. Für den Homo sapiens stützen Versuche mit vorsprachlichen Kindern die Unabhängigkeit des Quantisierungskonzepts von der Sprache (vgl. Dahaene 1999, S. 54-78). Und für erwachsene Menschen, die über kein über „eins, zwei, (drei), viele“ hinausgehendes verbales Zahlenkonzept verfügen – so z.B. der Pirahã-Stamm in Südamerika (vgl. Nieder 2006, S. 392) oder der Warlpiri-Stamm in Australien (vgl. Dahaene 1999, S. 110) –, vermutet S. Dahaene, „dass diese Menschen von Zahlen größer als drei quantitative Vorstellungen haben, die jedoch nichtverbal [sind] und vielleicht Näherungen darstellen“ (Dahaene 1999, S. 111).

Angenommen werden zwei getrennte Systemkomponenten, die auch beim Menschen nichtsprachlich sind (Karnath/Thier 2006, Teil VII: S. 389-422):

1. Das Analog-Magnitude-System erfasst approximativ die Anzahl einer beliebig großen Menge. Die Güte der Approximation ist durch den numerischen Distanzeffekt und durch den numerischen Größeneffekt charakterisierbar: Die Tatsache, dass zwei Anzahlen um so besser unterschieden werden können, je größer ihre Differenz ist, wird als numerischer Distanzeffekt bezeichnet. Dass bei gleicher numerischer Distanz die Unterscheidbarkeit der vorgegebenen Anzahlen umso schlechter wird, je größer die Anzahlen sind, heißt numerischer Größeneffekt. Beim Menschen, so legen Befunde nahe, befindet sich das Analog-Magnitude-System bilateral in und um den horizontalen Anteil des intraparietalen Sulcus (HIPS) und steht in enger Verbindung mit räumlichen Eigenschaften eines mentalen Zahlenstrahls, dessen Orientierung kulturell (Dahaene 1999, S. 98-99) bestimmt ist.

2. Das Subitizing-System „kodiert kleine Anzahlen (bis etwa 4), indem es den individuellen Elementen einer Menge ‚Zeiger‘ oder ‚Symbole‘ zuweist. Derartige Zeiger [(angenommen werden bis zu vier)] werden mit Objektsegmentierungsprozessen in Zusammenhang gebracht, die parallel auf einer vorbewussten Verarbeitungsebene stattfinden.“ (Nieder 2006, S. 393)

Das Tripel-Code-Modell von S. Dahaene nimmt drei Arten von internen mentalen Repräsentationen für Zahlen an, die ineinander überführbar sind (Willmes 2006, S. 406-407). Es ist vermutlich Teil des anatomisch-funktionalen Modells der Zahlenverarbeitung von Dahaene und L. Cohen (Willmes 2006, S. 406-416).

- Ein auditiv-verbaler Code ohne numerische Bedeutung (Beispiel: Die bei einem Mikrofontest gesprochene Folge 1,2,3,4,1,2,1) wird im linken Gyrus angularis (GA) unterstützt.

„Der linksseitige Gyrus angularis (GA),..., ist stärker aktiviert, wenn in der Aufgabenstellung stärker sprachliche Verarbeitung zur Lösung erforderlich ist, insbesondere immer beim erforderlichen Abruf von Faktenwissen über Zahlen im sprachlichen Gedächtnis. Der GA ist bei exakten im Vergleich zu approximativen mentalen Kopfrechenaufgaben stärker aktiviert wie auch bei den Rechenoperationen (insbesondere Multiplikation), die einen direkten Zugriff auf gespeichertes verbal kodiertes Wissen erfordern.“ (Willmes 2006, S. 413)

- Ein visuell-arabischer Code ohne numerische Bedeutung (Beispiel: Eine gelesene Telefon-Nummer) wird in einem bilateralen Segment im superioren posterioren parietalen Lobus (PSPL) unterstützt.
  Diese im PSPL „gelegene Region [ist] bei numerischen Größenvergleichen, beim Ausführen von zwei vs. einer mentalen Operation mit Zahlen und bei der Auswahl von einer von zwei Lösungsalternativen für eine Addition stärker aktiviert. Es handelt sich dabei nicht um eine für Zahlenverarbeitung spezifische Region. Vielmehr ist sie in einer Vielzahl von Aufgabenstellungen aktiv, die eine räumliche Ausrichtung der Aufmerksamkeit erfordern. Die zuvor geschilderten Aufgaben mit Zahlen erfordern ebenfalls eine verdeckte mentale Ausrichtung und Selektion, die sich ... auf eine innere räumliche Repräsentation des Zahlenraums bezieht.“ (Willmes 2006, S. 413)

- Der analoge Größen Code (des oben besprochenen Analog-Magnitude-Systems), in dem die numerische Größe einer Zahl als Aktivierungsverteilung über einem (orientierten und logarithmisch skalierten) mentalen Zahlenstrahl repräsentiert und für approximative Überlegungen schnell aktiviert wird, wird bilateral in einem horizontalen Segment (und dessen Umgebung) des intraparietalen Sulcus (HIPS) unterstützt.
  Diese bilaterale Region „zeigt konsistent Aktivierungen bei ... Aufgabenstellungen, die den Zugriff auf eine nonverbale semantische Repräsentation numerischer Quantität mit räumlichen Eigenschaften (im Sinne eines mentalen Zahlenstrahls) erfordern“ (Willmes 2006, S. 413).

In dem – durch Befunde gestützten – funktionalanatomischen Modell von Dahaene und Cohen nehmen die Autoren weiter an, dass erstens an der Zahlenverarbeitung bilateral der dorsolaterale präfrontale Cortex (Arbeitsgedächtnis, Strategiewahl und Planung) beteiligt ist. Und zweitens nur linkseitige Strukturen der Basalganglien und des Thalamus an der verbalen Verarbeitung von Zahlen, insbesondere am deklarativen Gedächtnis für Rechenfakten teilhaben. Zwischen allen beteiligten Bereichen der linken Hemisphäre gibt es ipsilaterale Verbindungen, und nur die bilateralen Bereiche PSPL, HIPS und dorsolateraler präfrontaler Cortex sind über das Corpus callosum verbunden. (Vgl. Willmes 2006, S. 410; Dahaene 1999, S. 225.)

Mithilfe einer EEG-Aufzeichnung der Gehirnaktivität gelang es S. Dahaene (vgl. Dahaene 1999, S. 256-260), nacheinander ablaufende Verarbeitungsphasen für Zahlenvergleichsprozesse (größer/kleiner als eine feste Referenzzahl) plus Entscheidungsmitteilung durch Tastendruck zu identifizieren. Dies Experiment steht im Einklang mit seinen Modellvorstellungen zur Zahlenverarbeitung; es geht aber über diese hinaus, da hier auch eine motorische Leistung gefordert ist. Sofern der Versuchsteilnehmer denkt, er habe die falsche Taste gedrückt, zeigt sich im Bereich des anterioren Cingulum eine Aktivierung. Dieser Bereich hat im Allgemeinen mit der aufmerksamkeitsbasierten Kontrolle von Handlungen und der Hemmung unerwünschten Verhaltens zu tun, hier steht er im Dienst einer Fehlerkorrektur.

Klix analysiert unter evolutionspsychologischen Gesichtspunkten in (Klix 1993) die Geschichte der Zahlensysteme zusammen mit ihren ersten Anwendungen. Er beginnt seine Ausführungen mit (Klix 1993, S. 277): „Die Fähigkeit, eine unterschiedliche Anzahl von Dingen gleicher oder ähnlicher Art zu erkennen, ist eine angeborene Leistung des Nervensystems.“ Dann zitiert er zwar psychologische Ergebnisse, die dazu mit Tieren gewonnen worden sind, aber geht auf neuropsychologische Befunde und Modelle zur Zahlenverarbeitung weder hier noch in seinen späteren Arbeiten ein. Klix hat also nicht nach Bauplaneigenschaften gesucht, die der Zahlenverarbeitung zu Grunde liegen, sondern die kognitiven und sozialen Aspekte der Informationsverarbeitung in Verbindung mit den Lebensbedingungen der Menschen evolutionspsychologisch am Beispiel der Zahlensysteme untersucht.

Gibt es weitere „Bauplanstrukturen“, die spezifisch für Mathematik sind?

Seine Bipedie erlaubt dem Homo sapiens seine Greifhand frei im biokularen Gesichtsfeld zu bewegen. Diese Trinität – Bipädie, Greifhand und biokulares

Gesichtsfeld – der gewiss Bauplaneigenschaften zu Grunde liegen, nahm nicht nur Einfluss auf die kognitive und technische Entwicklung des Menschen, sondern auch auf die Entwicklung seiner Mathematik. Die zwei mal fünf Finger und zwei mal fünf Zehen usw. fanden als körpereigene Bauplanstrukturen Eingang in verschiedene Zahlensysteme (vgl. Dahaene 1999; Klix 1993).

Bereits oben wurde auf die Sprachentwicklung und ihre kommunikative sowie kognitive Funktion hingewiesen. Sprache ist aber mehr als nur natürliche Sprache: Sie ist auch die regelgeleitete Verkettung von für Begriffe oder Begriffsstrukturen stehenden Symbolen, d.h. von Zeichen, deren äußere Form weder mit ihrem Inhalt noch mit ihrer Bedeutung unmittelbar zu tun haben müssen (vgl. Klix 1992, S. 229-234). Auf einige neuropsychologische Befunde zur Sprache wurde oben bereits hingewiesen, für weitere Befunde vgl. z.B. (Karnath/Thier 2006, Teil VI: S. 331-388). Sprache ist zwar nicht spezifisch für Mathematik, da sie aber für das Denken und Problemlösen, insbesondere in Symbolen, unverzichtbar ist und abstrakte Mathematik mithilfe von Symbolen formuliert wird, haben wir die Sprache hier angeführt.

Charakteristisch für wissenschaftliche Mathematik ist das Suchen nach neuen Begriffsstrukturen und das Suchen nach Lösungen für Probleme. Den Suchprozessen liegen oft mesokosmisch adaptive, also bewährte evolutionäre Heuristiken zu Grunde. Suchprozesse liegen dem Problemlösen und der Konstruktion neuer Begriffsstrukturen zu Grunde. Die Konstruktion neuer Begriffsstrukturen wird im Rahmen induktiver Inferenzen (vgl. Fiedler/Plessner 2006; Gigerenzer/Gaissmaier 2006; Möbus/Schröder 1998; van der Meer 1998) studiert. Die Lösungen für Probleme lassen sich im Rahmen der Prädikatenlogik als Schlussketten repräsentieren, auch wenn eine solche Ausarbeitung in Strenge meist nicht vorgelegt wird[35]. Prädikatenlogische Schlüsse werden im Rahmen deduktiver (logischer) Inferenzen (vgl. Knauff 2006) untersucht.

Einen Überblick über die Neuroanatomie des logischen Denkens, aus dem wir einige Einsichten anführen, gibt A. Knauff in (vgl. Knauff 2006, Abschn. 3: S. 219-235):

- Nach Goel u.a. „basieren deduktive Schlüsse mit abstraktem, wissensneutralem Material auf Prozessen in einem bilateralen, fronto-parietalen Netzwerk, während konkrete wissens-bezogene Inferenzen auf Informati-

[35] In der heutigen Mathematik wird oft anstelle einer prädikatenlogischen Formulierung eine – gleichwertige – mengentheoretische Formulierung bevorzugt.

onsverarbeitungsprozessen in der linken Hirnhälfte, insbesondere in frontalen und temporalen Strukturen basieren.“ (vgl. Knauff 2006, S. 231)

- Die Repräsentation von anschaulichem thematischen Material deduktiver Inferenzaufgaben geschieht in verschiedenen neuronalen Systemen (vgl. Knauff 2006, S. 231-232): Visuelles thematisches Material wird im ventralen Projektionssystem, räumliches Material im dorsalen Projektionssystem repräsentiert (vgl. Karnath/Thier 2006, S. 57).

- Das logische Schlussfolgern selbst führt zu mehr Aktivität im dorsolateralen und medialen Präfrontalkortex (exekutive Prozesse), die Aufgabenaufrechterhaltung zu mehr Aktivität in bilateralen okzipitalen Arealen (vgl. Knauff 2006, S. 233).

- Mithilfe der funktionellen Kernspintomographie ließen sich in einem Experiment – zum relationalen Schließen – im zeitlichen Verlauf der Aktivierungen im Gehirn drei Phasen unterscheiden: das Verstehen und Enkodieren der Prämissen (verbunden mit visuellen Vorstellungen), dann die Weiterverarbeitung der Prämissen (an der nur noch abstrakt räumliche Funktionen im parietalen Cortex und vor allem exekutive Funktionen im frontalen und präfrontalen Cortex aktiv beteiligt sind) und zuletzt die Überprüfung[36] der zu verifizierenden Konklusion. Die Befunde gelten vermutlich nicht nur für relationale Inferenzen (vgl. Knauff 2006, S. 233-235).

Fazit

Die Frage nach mathematikspezifischen Bauplanstrukturen zielt darauf hin, die Bauplanstrukturen der biotischen Emergenzebene zu identifizieren, die mit dem mathematischen Wissen der psychozozialen Emergenzebene funktional verbunden sind.

Abgesehen von den stammesgeschichtlichen Grundlagen für die Bipedie, für den biokularen Gesichtssinn und die Greifhand (Tetrapodenskelett) haben wir im Wesentlichen das neuroanatomische Areal des Quantisierungskonzepts (HIPS), den PSPL, den GA, den dorsolateralen präfrontalen Cortex, die Areale

[36] Dahaene fand in dem bereits oben beschriebenen Elektro-Enzephalo-Graphie-Experiment zur Zahlenverarbeitung ein starkes Signal, dessen Ursprung er im anterioren Cinguli vermutet und das mit der Fehlerkontrolle und Fehlerkorrektur zusammenhängt (vgl. Dahaene 1999, S. 256-260, insbes. S. 260).

der Sprachverarbeitung (insbes. Broca-Areal u. Wernicke-Areal), die Areale des mesokosmischen Raumkonzepts und die bei deduktiven Inferenzen aktivierten Areale als mehr mathematikspezifische Bauplanstrukturen – im Vergleich etwa zum Aortabogen oder zum Aufbau des Ohres beim Homo sapiens – angeführt.

Im Rückblick erkennen wir erstens, dass wir über mathematikspezifische Bauplanstrukturen, soweit es sie gibt, noch nicht viel wissen (z.B. wissen wir nicht viel darüber, auf Grund welcher mesokosmischen Umwelteigenschaften in der Stammesgeschichte sie entstanden sind), zweitens, dass die meisten der angeführten Strukturen nur vage einigen heute mathematisch genannten Anforderungen zugeordnet werden können, drittens, dass unser vages Konstrukt „Bauplanstrukturen“ nur heuristischen Wert im Entdeckungszusammenhang haben könnte. Dieser eher vorsichtigen Beurteilung stellen wir gegenüber, dass unsere Ergebnisse weder im Widerspruch zu anderen Befunden stehen und man erste sinnvolle die stammesgeschichtlichen Quellgründe für die Möglichkeit von mathematischem Wissen aufdeckende Anstrengungen nicht voreilig gering schätzen sollte. Wir haben die Sache auf Grund heutiger Kenntnis ausgelotet und betonen, dass zukünftige empirische Befunde die Klärung voranbringen werden.

Einsichten zur Begriffsexplikation der Mathematik aus naturgeschichtlicher Sicht

Wir entwickeln unsere naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik, indem wir unsere bisherigen Überlegungen aus systematisch-dynamischer Sicht zusammenführen und dabei über sie hinausgehen. Nachdem wir – gemäß unserem Dafürhalten – die wichtigsten Quellgründe mathematischen Wissens ausgemacht haben, versuchen wir, das spezifisch Mathematische am mathematischen Wissen in diesem neuen Licht zu charakterisieren. Piaget, die Vertreter der Evolutionären Erkenntnistheorie, Krebs und Klix werden unsere Einsichten wenigstens grundsätzlich mit uns teilen, weil wir ihre Überlegungen weitgehend in ihrem Sinne weitergeführt haben. Auf unsere aus naturgeschichtlicher Sicht verfasste Begriffsexplikation der Mathematik bewegen wir uns nun in Annäherungen zu.

1. Annäherung: Was ist der evolutionäre Quellgrund für das heute mathematisch genannte Wissen, das sich in den Gedächtnissen angesammelt hat und auf externen Datenträgern (Keilschrifttafeln, Papier, Computerfestplatten etc.) zwischengespeichert wird? Manches dazu fanden wir bei Piaget, den Vertretern der Evolutionären Erkenntnistheorie, Krebs und Klix – s.o. und (vgl. Klix

1992; 1993; Piaget 1992; Riedl 1980; 1992; 1994; Vollmer 1988a; 1988b; 1990; 2003). In unserem naturgeschichtlichen Forschungsansatz, der im 3. Kapitels detailliert dargelegt wird und der die Emergenzebenen des unbelebten Materiellenergetischen, Biotischen, Psychischen und Sozialen integriert, ergibt sich das folgende, schon hier erkennbare Bild: Wären die Verteilungen von Materie und Energie sowie die Wechselwirkungen von Materie und Strahlung auf unserer Erde[37] völlig zufällig oder auch nur regellos, dann wären wir nicht entstanden. Denn die Evolution des Biotischen und alle darauf aufbauenden Emergenzen (z.B. des Psychischen und Sozialen, zu denen auch Kultur und Wissenschaft zählen) erfordern lokal den Aufbau von Ordnung (Bildung von Struktur und Funktion). Der Aufbau von Ordnung – so lässt sich mithilfe der Statistischen Mechanik zeigen – erfordert spezielle Systembedingungen. Einige heuristische Überlegungen zeigen nun, wie die Struktur eines Organismus von Umwelteigenschaften bestimmt wird.

Der Gesichtssinn ist eine anatomische Struktur und es ist evident, dass ein Gesichtssinn nicht in einer Umwelt entstehen kann, in der die raum-zeitliche Verteilung von elektromagnetischer Strahlung auf Grund von Absorbtion und Reflexion an Materie völlig regellos ist. Auge und visueller Kortex konnten nur dort entstehen, wo raum-zeitliche Verteilungsmuster – so z.B. begrenzende Ränder von Materieclustern, Randrichtungen, Ecken oder Bewegungen von Clustern – wiederholt regelmäßig koinzidierten. Wo diese Koinzidenzen zu einer Passung von Organismus und Umwelt führten, befindet sich – den Gesichtssinn betreffend – sein Mesokosmos, hier sind seine im Nervensystem aufgebauten und gespeicherten Verhaltensprogramme überlebensadäquat. In den Koinzidenzen der Reflexion und Absorbtion von elektromagnetischer Strahlung im Mesokosmos sehen wir auch den Quellgrund für die Fähigkeit, dass einerseits verbundene oder kontinuierlich verteilte Materie auch als verbunden oder als ein Kontinu-

[37]Weil der naturgeschichtliche Forschungsansatz auf den Kosmos und nicht nur auf die Erde anwendbar ist, ist die Frage nach der Evolution mathematischen Wissens in nicht terrestrischen Populationen nicht abwegig. Nach heutiger Kenntnis gibt es überall im Kosmos dieselben Atomsorten, die auch auf der Erde zu finden sind, nur in anderer Verteilung. Eine Antwort auf die Frage nach außerirdischem Leben und dessen Mathematik erfordert jedoch den Entwurf eines Modells mit prognostischer Kraft, deren Rechtfertigung uns unmöglich erscheint. Allein eine Antwort für die Erde zu geben, empfinden wir als schwierig genug, obwohl wir hier in einer besseren Position sind: Wir können auf eine biologische und auf eine kulturelle Evolution zurückblicken. Weiter wissen wir, was wir auf der Erde mit Mathematik meinen und stehen deswegen hier „nur“ vor dem Problem, die Evolution mathematischen Wissens zu erklären.

um und andererseits ein Ensemble getrennter Materiecluster auch als diskret wahrgenommen werden kann. Die stammesgeschichtlichen Systeme unseres Gesichtssinns können deswegen kontinuierliche von diskreten Verteilungen unterscheiden.

Weiter sehen wir im evolutionären Pfad von den diskreten und kontinuierlichen Materieverteilungen im Mesokosmos hin zu den phylogenetischen Konzepten der Kontur-, Form-, Richtungs-, Gestalt- und Bewegungserkennung den Quellgrund (neben der anschaulichen auch) für die (begriffliche Seite der) Topologie und Geometrie. (Es wäre aus dieser Sicht beispielsweise zu prüfen, inwieweit die Axiomatisierung der reellen Zahlen dadurch inspiriert ist, dass die reellen Zahlen als ein mathematisch formuliertes Modell für unser erlebtes Kontinuum in einer Raumrichtung fungieren.)

Weil es Überleben sichernd ist, wenn ein Organismus zwischen z.B. mehr oder weniger Feinden oder Beutetieren unterscheiden, also die Anzahl eines diskreten Ensembles (zumindest näherungsweise) bestimmen kann, ist es nur natürlich, den evolutionären Pfad von den diskreten Materieverteilungen im Mesokosmos zum phylogenetischen Quantisierungskonzept von Organismen für den Quellgrund der begrifflichen Seite von Arithmetik und Algebra zu halten.

Weiter glauben wir, dass die stammesgeschichtlich in mesokosmisch bewährten Schleifen (von Wahrnehmung, endogener Informationsverarbeitung, Aktivität der Erfolgsorgane und Umweltantwort) entstandenen prädisponierten sensomotorischen Aktivitätsmuster der Organismen (zunächst Aktivierung und Inhibition, vgl. 2.4.7) die Grundlage für die Möglichkeit der Herausbildung komplexer Operationen sind, die dann zu Prozeduren verkettet werden können. In stammesgeschichtlichen Zeitspannen führten die daran mitwirkenden und von der augenblicklichen Motivlage abhängigen exekutiven Funktionen des Organismus zu prädisponierten Heuristiken, Strategien und Inferenzen, wie sie beim Wissenserwerb und Problemlösen benötigt werden. In diesem evolutionären Pfad, der von der sensomotorischen Aktivität der Organismen im Mesokosmos zu prädisponierten Verhaltensweisen beim Wissenserwerb und Problemlösen führt, sehen wir den Quellgrund für die operative Seite (Verkettung, Verknüpfung, Transformation, Substitution, Informationsverdichtung, Abstraktion, Generalisierung etc.) der Mathematik.

Auch in ihrem Mesokosmos werden Organismen mit zufälligen – in dem Sinne, dass sie keine Regelmäßigkeiten (oder keine regelmäßigen Abweichungen von einem Regelmaß) erkennen können – Ereignissen konfrontiert, und es werden überlebensadäquate Verhaltensentscheidungen (Prädiktionen) von ihnen verlangt. Im Pfad von derartigen Unregelmäßigkeiten im Mesokosmos zu den stammesgeschichtlich erworbenen Heuristiken für den Umgang mit diesen Unregelmäßigkeiten (vgl. Gigerenzer/Gaissmaier 2006) sehen wir den Quellgrund für die Stochastik. Weil die kognitiven Anforderungen hoch sind für den überlebensadäquaten Umgang mit Verteilungen von (augenscheinlich) zufälligen Ereignissen, in denen der Zufall nicht mehr durch Mittelungen unauffällig ist, sollte es nicht überraschen, dass sich das mathematische Arbeitsgebiet „Stochastik" (s.u. (3)) im Vergleich zur Arithmetik oder Geometrie erst spät entwickelt hat.

Der Quellgrund für das mathematische Wissens ist aus unserer Sicht nun erörtert: Er ist das stammesgeschichtliche Erbe, das Organismen zur Verhaltensoptimierung in einem lokal teilweise regelmäßigen Umweltausschnitt – in ihrem Mesokosmos – erworben haben. Zusätzlich zu den Emergenzbereichen des unbelebten Materiell-Energetischen, des Biotischen und des Psychischen (bzw. des Psychosozialen der Kleingruppen) entstand (mit den wachsenden Verbänden, in denen der Vormensch und der Mensch lebte) der die Phänomene der Kommunikation, der Organisation und der Institutionalisierung umgreifende Emergenzbereich des Sozialen. Erst nachdem dieser soziale Bereich zusammen mit einer starken Dynamik vorlag, führten die Wechselwirkungen des sozialen Bereichs mit den anderen Emergenzbereichen zur Steigerung der geistigen Leistungen während der Menschwerdung und der kulturellen Evolution des Menschen. Unter anderem entstand dabei jenes von uns als mathematisch bezeichnete Wissen, das, mit den Griechen beginnend, den Status der Wissenschaft namens Mathematik erhalten hat. Mit dieser, alle Emergenzbereiche und ihre Wechselwirkungen umgreifenden naturgeschichtlichen Deutung stehen wir Klix (vgl. Klix 1992; 1993) und den Vertretern der Evolutionären Erkenntnistheorie – besonders Riedl (vgl. Riedl 1975; 1980; 1994) – näher als Krebs, der uns gegenüber (vgl. 2.4.6) die Ursachen für die Steigerungen der kognitiven Leistungen während der Hominidenentwicklung zum Homo sapiens stärker im sozialen Bereich positioniert.

Mit fortschreitender Ansammlung von mathematischem Wissen setzte eine Dynamik ein, die mathematisches Wissen verallgemeinerte, auf anderes mathematisches Wissen bezog, mathematisches Wissen den Bedürfnissen der Sozialgemeinschaft entsprechend systematisierte und dabei durch die Klärung seiner Grundbegriffe, der Festlegung von Argumentationsverfahren und Notationen, weitgehend verbindliche Standards (Normen) für die Arbeit mit mathematischem Wissen schuf. Dies erklärt einen Teil der „Eigendynamik“ des mathematischen Wissens, hinter der selbstverständlich immer Menschen stehen, die auch ihren persönlichen Lebenserfolg damit oder dabei im Blick haben.

Die nach dem Ende des europäischen Mittelalters entwickelte Mathematik galt immer mehr der Theoriebildung von zunächst unbelebten materiell-energetischen (Physik, Chemie), dann auch anderen Umweltbereichen. Und seit dem 19. Jahrhundert wurde mathematisches Wissen unverzichtbar für die Entwicklung moderner Technik (Maschinenbau, Telegraphie, Militärtechnik etc.). Mithilfe moderner, auf mathematischen Entwürfen beruhender und nach mathematischen Regeln funktionierender Technik gestalten wir immer neue Teilbereiche unserer unbelebten materiell-energetischen Umwelt und verändern auf diese Weise unsere soziale Umwelt.

2. Annäherung: Eine rekonstruierende Analyse der Geschichte der Mathematik aus ihren Quellgründen mithilfe unseres Forschungsansatzes ist ein Desiderat, das in der vorliegenden Arbeit nicht geleistet werden kann. Wir versuchen stattdessen nun, das spezifisch Mathematische am mathematischen Wissen in Gedächtnissen zumindest annähernd aus kognitionspsychologischer Sicht herauszuarbeiten:

Dazu gehen wir davon aus, dass die Wissenschaft Mathematik eine Aktivität von (dazu fähigen und) motivierten erwachsenen Menschen ist, jenes begriffliche und methodische Wissen zu erzeugen, zu transformieren, zu kommunizieren und zu tradieren. Auf der Grundlage von Bauplaneigenschaften und deren Funktionen, ontogenetisch in Wechselwirkungen mit der sozialen und materiell-energetischen Umwelt erzeugt, ist mathematisches Wissen ein psychosoziales Konstrukt. Deswegen sind die Begriffsstrukturen des mathematischen Wissens erstens von den Bauplanstrukturen des Homo sapiens, die sich auf psychische Funktionen, Strukturen wie den Makrostrukturen des Gedächtnisses und Ressourcengrenzen abbilden, zweitens vom vorliegenden Menschheitswissen mit seinen Strukturen und drittens von den – durch die soziale und materiell-energetische Umwelt beeinflussten – Bedürfnissen und Motiven von Individuum und der Population abhängig.

Wir differenzieren dies nun weiter aus, indem wir früher Angeführtes hier auf das mathematische Wissen beziehen: Ein „Selbst/Ich“ ist als die mit der Motivbasis des Menschen verbundene Steuer- und Kontrollinstanz unverzichtbar für die Arbeit (meist Wissenserwerb oder Problemlösen) mit mathematischem Wissen. Es nimmt bei der mathematischen Arbeit Lagebewertungen der Person im umfassenden Sinne vor, entscheidet und steuert den Arbeitsprozess. Beispielsweise löst es Motivkonflikte, wählt Begriffe oder Operationen aus, trifft Entscheidungen über die Verwendung begrenzter Ressourcen (der Aufmerksamkeit, des Arbeitsspeichers, der Kenntnis, der materiellen Absicherung etc.) oder wechselt von einer modalitätsspezifischen Repräsentation zu einer symbolisch-sprachlichen Repräsentation während des Problemlösens.

Letzteres sei nun etwas genauer betrachtet: Beispielsweise sind es immer wieder die vom Selbst/Ich der Mathematiker eingeleiteten Wechsel von einer (modalitätsspezifischen) visuellen oder räumlichen Repräsentation mathematischen Wissens in eine symbolisch-sprachliche Repräsentation und umgekehrt, von denen Wechselwirkungen von Geometrie und Algebra ausgehen und die damit zur beschleunigten Entwicklung beider Gebiete in der Geschichte der Mathematik beigetragen haben (vgl. Klix 1993, S. 364, 366). Die Wechsel der Repräsentationsformate machen hier deutlich, dass Funktionen der Bauplanstrukturen die Entwicklung mathematischen Wissens prägen. Mit wenig Zweifel mag man das phylogenetische Quantisierungskonzept (s.o.) als mathematikspezifisch bezeichnen, aber Arithmetik und Algebra gehen zweifellos weit darüber hinaus und erfordern neben vielen anderen kognitiven Funktionen wieder das symbolisch-sprachliche und das räumliche Repräsentationsvermögen (z.B. auch bei abstrakten Anordnungsproblemen). Weil aber z.B. visuelle oder räumliche Repräsentationen und symbolisch-sprachliche Repräsentationen zusammen mit den diese wechselweise ineinander überführenden Transformationen offenbar nicht nur in der Mathematik zu finden sind, versuchen wir das mathematische Wissen spezifischer zu charakterisieren.

3. Annäherung: Mathematisches Wissen, z.B. anhand der Literatur erworben oder in eigenen Überlegungen erzeugt, ist Teil des Gedächtnisses, genauer des deklarativen Teilsystems, soweit die mathematischen Begriffsstrukturen und Operatoren dieses Wissens bewusstseinsfähig sind. (Das bewusstseinsfähige, von autobiographischen Bezügen gelöste mathematische Wissen gehört zum semantischen Teilsystem des deklarativen Gedächtnisses, s.o.) Augenblicklich auf deklaratives Wissen wirkende Operationen sind nicht bewusstseinfähig und zählen zum prozeduralen Wissen – wie bereits in 2.4.5 bemerkt[38]. Wir versuchen nun

[38] In der kognitiven Psychologie, der Kognitionswissenschaft und Künstlichen Intelligenzforschung haben sich unter den Modellierungsvorschlägen für kognitive Prozesse des Wissenserwerbs und des Problemlösens im Symbolverarbeitungsparadigma auch Netzwerkstrukturen

Kriterien zu finden, mit denen wir das mathematische Wissen von anderem Wissen im deklarativen Gedächtnis unterscheiden können.

1. Kriterium (Abstraktheit): Als eine Eigenschaft mathematischen Wissens wird oft seine Abstraktheit angeführt. Nach Klix ist „die [kognitive Operation der] Inhibition von Begriffsmerkmalen einem Abstraktionsvorgang äquivalent" (Klix 1992, S. 264), die Inhibition von Begriffsmerkmalen in einem Merkmalssatz führt zu einem Oberbegriff (z.B. Baum) und ihr Pendant, die Aktivierung zusätzlicher Merkmale (Aktivation) gibt ein Beispiel (Konkretisierung), das unter den Oberbegriff fällt (z.B: Tanne) (vgl. Klix 1992, S. 264-265). Multiples Klassifizieren beruht auf der Aktivierung verschiedener Teilgruppen von Merkmalen. Betrachtet man jeweils nebengeordnete Begriffsstrukturen als in einer Ebene liegend, Unterbegriffe in Ebenen darunter, Oberbegriffe in Ebenen darüber, dann darf man sich die Wirkung von Inhibitionen bzw. Aktivationen als ein Aufsteigen bzw. Absteigen in dem hier dreidimensionalen Netz von Begriffsstrukturen vorstellen (vgl. Klix 1992, insbes. S. 320-326).

Wenn Abstraktionen durch Inhibitionsprozesse vermittelt werden und das in der wissenschaftlichen Mathematik bzw. auch in der konstruktiven Wissenschaftstheorie gebräuchliche Verständnis von Abstraktion durch Äquivalenzklassenbildung (vgl. Lorenzen 1987, insbes. S. 161-169) auf Inhibitionen beruht, dann sollten diese Inhibitionsprozesse im Denken empirisch nachgewiesen werden können. In ähnlicher Weise könnten auch der „Restriktion" bzw. dem „Vergissfunktor" Inhibitionsprozesse zu Grunde liegen.

Neben anderen kognitiven Operationen dienen auch Abstraktionen der optimalen Wissensstrukurierung im Gedächtnis eines Menschen oder im „kollektiven Gedächtnis" einer Gruppe von beispielweise Experten der Mathematik. „Optimal" wird man eine Wissenstruktur nennen, wenn sie den Bedürfnissen der damit arbeitenden Menschen voll genügt. Die Strukturierung der Mathematik, ausgehend von hoch abstrakten (aus einer langen Folge von Abstraktionen gewonnenen) Mutterstrukturen, wie sie Bourbaki vorgenommen hat (s. 2.2.2), ist ein Beispiel für eine Wissensoptimierung. Im Verlaufe der Geschichte

---

für die Modellierung von deklarativem Wissen bewährt. Das mathematische Wissen zusammen mit dem nicht mathematischen Wissen eines Menschen ließe sich als ein Netz von Begriffsstrukturen modellieren, in dem Merkmale, Unter- und Oberbegriffe, Beziehungen von Begriffen zueinander, Vergleiche und andere Operationen mit Begriffen durchgeführt werden könnten. Für einen Einblick die Modellierung kognitiver Prozesse z.B. (vgl. Mandl/Spada 1988; Seel 1991; Opwis 1992; Klix 1992 S. 226-393; 1996; 1998c; Sommerfeld 1994; Anderson 1996, S. 141-165; Möbus/Schröder 1998; Schmid 2006).

wurden die mathematischen Begriffsstrukturen immer abstrakter. Die Tendenz zur Abstraktion stammt zu einem Teil aus dem Bedürfnis, den zu einer Zeit vorliegenden mathematischen Wissenskörper zu optimieren, zum anderen führt die ebenfalls in der Geschichte der Mathematik wirksame generalisiernde Abstraktion über das vorliegende mathematische Wissen der Zeit hinaus. Unter dem Eindruck, dass im Laufe der Geschichte die Mathematik immer abstrakter geworden ist, darf nicht vergessen werden, dass mathematisches Lernen und Forschen nur beispiel- und kontextbezogen erfolgreich möglich ist; dabei hängt es im Einzelfall vom Vorwissen ab, was ein geeigneter Kontext ist.

Sofern mathematisches Wissen abstrakt – insbesondere von jedem (unmittelbaren) autobiographischen Bezug gelöst – ist, können wir nun schon einiges Wissen als nicht mathematisches Wissen ausweisen. Aber auch Begriffe wie „Gerechtigkeit“ oder „Welt“ sind sehr abstrakt, und deswegen ist Abstraktheit kein hinreichendes Kriterium für mathematisches Wissen.

2. Kriterium (Idealisiertheit): Die kognitive Operation der Idealisierung sei hier anhand eines Beispiels, des kognitive Ressourcen sparenden Übergangs von einer ungefähr runden Querschnittsfläche eines Baumstamms zu einer als ideal kreisrund – „die Ortslinie aller Punkte, die von einem Mittelpunkt alle die gleiche Entfernung haben“ – vorgestellten, beschrieben. Ist diese Modellierung im Anwendungsfall angemessen, dann ist sie kognitive Ressourcen sparend, weil mehr Informationen erforderlich sind, den Rand der realen Schnittfläche eines Baumstammes zu repräsentieren, als für seine näherungsweise Beschreibung durch einen (hochsymmetrischen) Kreis.

Aber auch die Idealisierung ist kein hinreichendes Kriterium für mathematisches Wissen, denn Begriffe wie „Mensch“ oder „Festkörper“ sind auch idealisierte Begriffe und werden nicht zum mathematischen Wissen gezählt.

3. Kriterium (Scharfheit): Wir können hier von einer Beobachtung von Riedl profitieren:

> „Läßt man vor seinem geistigen Auge alle Gegenstände Revue passieren, die man zu den Sträuchern oder aber zu den Bäumen zählen würde, so wird man etwas wie eine typische Mitte entdecken und allerlei Übergänge. Nicht so unsere sprachliche Möglichkeit des Ausdrucks. Wir sprechen zwar von einer typischen Baumform (worin allerdings Buche und Fichte einen gemeinsamen Platz finden sollen), aber die Ränder der Begriffe bezeichnet unsere Sprechweise keineswegs typologisch, sondern definitorisch . . .. Unsere Sprechweise ist also nicht dafür disponiert, die Gradienten der

> stets polymorphen Merkmale nach verschiedenen Rändern solcher Klassenbegriffe zu verfolgen. Sie ist eben daraufhin angelegt, definitorisch zu verfahren. ... Anstatt die Arten der Übergänge zu erfassen, legt uns das kulturelle Schicksal durch unsere Sprache nahe, im Kontinuum Grenzen zu definieren, und damit wird die Eigentümlichkeit unserer Logik nochmals verankert.“ (Riedl 1994, S. 141-143; vgl. auch Klix 1992, S. 283)

Und dies definitorische Verfahren, mit dem die Zuordnung von Objekten nach vorgegebenen Kriterien in Klassen geregelt wird, hängt z.B. für die botanische oder zoologische Systematik vom Forschungsstand und damit vom zeitlichen Wandel (einschließlich konkurrierender theoretischer Annahmen) ab. (Klassifizierungen nach ästhetischen Gesichtspunkten sind gewöhnlich Geschmackssache.) Demgegenüber gehört – von pathologischen Fällen und den Grenzen der formalsprachlichen Methode sei hier abgesehen – ein mathematisches Objekt entweder zu einer Klasse oder nicht, auch wenn dies oft schwer zu entscheiden ist. Der Grund dafür liegt im normativen Charakter des mathematischen Wissens, d.h. in der Tatsache, dass man von mathematischen Objekten von vornherein verlangt, dass sie scharf[39] und „wohl“ definiert sind. Da man aber nicht nur in der Mathematik, sondern auch in Theorien verschiedenster Wissenschaften und sogar im Alltag scharfe Klassen definiert – die formale Angehörigkeit zu einer Religionsgemeinschaft möge als Beispiel dienen –, ist auch Scharfheit kein hinreichendes Kriterium, um mathematisches Wissen auszuweisen.
4. Kriterium (Formalisiertheit): Auch der Versuch, mathematisches Wissen als axiomatisiertes und mithilfe von formalen Systemen repräsentiertes Wissen von anderem Wissen zu unterscheiden, gelingt nicht, denn Axiomatisierungen und Formalisierungen sind auch in anderen Wissensgebieten gebäuchlich. Außerdem haben formale Systeme – wie in 2.2.2 erwähnt – innere Grenzen. Ähnlich könnte man „alles, was sich mithilfe einer Mengenlehre formulieren könnte“ als mathematisches Wissen bezeichnen wollen. Dann gäbe es aber fast nur mathematisches Wissen, und es wäre als differenzierender Begriff wertlos. Versteht man mit Devlin und Krebs die Mathematik gar als die Wissenschaft von den Mustern (s. 2.4.6), dann – denn alles hat Muster – wird Mathematik zu einer auf Myriaden von Mustern ausgerichtete Sicht auf die Welt.

5. Auch weitere Kriterien – wie z.B. die (mithilfe von klugen Notationen für Teilstrukturen und ihre Verknüpfungen erzeugte) hohe Informationsdichte von Formeln – führen zu keiner Begriffsexplikation der Mathematik, die wirklich

[39] Auch Fuzzy-Mengen sind scharf definiert.

befriedigend wäre. Weiter finden wir hier, in der Analyse des im Gedächtnis repräsentierten mathematischen Wissens, alle Schwierigkeiten wieder, auf die wir am Anfang dieses Kapitels (ab 2.2) stießen, als wir das mathematische Wissen aus der Sicht verschiedener Wissenschaften erörterten, aber mit einem entscheidenden Unterschied:

Unser Blick auf die Genese des mathematischen Wissens unter systematisch-dynamischen Gesichtspunkten macht deutlich, dass jedes Wissen naturgeschichtlich erzeugt ist. Beispielhaft wurde für das mathematische Wissen der „Pfad“ skizziert, „entlang dem Materie Geist erzeugt“.

Leben kann in einer völlig regellosen unbelebten materiell-energetischen Umwelt nicht entstehen, und weil Mathematik von Organismen erzeugt wird, gibt es unter diesen Bedingungen auch keine Mathematik. Die biotischen Voraussetzungen für die Möglichkeit von Mathematik erkannten wir in den Passungen von Mesokosmos, organismischen Bauplanstrukturen und deren basalen Funktionen. Evolutionspsychologischen Einsichten entsprechend entwickelt sich das mathematische Wissen im Gedächtnis auf der Grundlage dieser invarianten, aber stets aktiven Bauplanstrukturen und ihren Funktionen in Prozessen der Kommunikationsgemeinschaft (psychischer und sozialer Emergenzbereich) und im Kontakt mit der unbelebten Umwelt. Mathematisches Wissen und sowohl die empirische als auch die apriorische Sicht auf die Mathematik erkennen wir nun als phylogenetisch erworbene Wissensstrukturen im Gedächtnis, sie können empirisch untersucht werden. Auch die weitreichenden Begriffe der heutigen Mathematik – z.B. Extensionalität, Definition, Axiomatisierung, formaler Beweisbegriff, Widerspruchsfreiheit, Wahrheit – sind erklärbare Konstruktionen einer Kommunikations- und Arbeitsgemeinschaft, die dazu dienen, einen optimierten Wissensköper von interessanten (z.B. bestimmt durch pragmatische und ökonomische Kriterien) Strukturen im Gedächntnis des Homo sapiens zu erzeugen. Mit diesen Ausführungen ist – unserer Meinung nach – die von den Arbeiten von Klix, den Vertretern der Evolutionären Erkenntnistheorie und auch Krebs nahegelegte Begriffsexplikation der Mathematik umrissen und von uns in ihrem Sinne weitergeführt.

Die umrissene Position ist im Ansatz nicht sehr verschieden von der von Poser beschriebenen Auffassung des Aristoteles, gemäß dieser mathematische Gegenstände das Ergebnis von Abstraktionen aus der raumzeitlichen Wirklichkeit sind (vgl. Poser 1994, S. 213). Auch die dialektisch-materialistische Position (nicht die historisch-materialistische) ist vermittelbar. Der Neurobiologe J.P.

Changeux steht in Diskussionen mit dem für eine apriorische, platonistische Sicht argumentierenden Mathematiker A. Connes (vgl. Changeux/Connes 1992) ebenfalls auf unserer Seite.

Evolutionspsychologische Erklärungen für mathematisches Wissen von Klix und psychologische Arbeiten zur Mathematik von anderen Autoren

Zur größeren Übersichtlichkeit in der Darstellung des Forschungsstands geben wir die von Klix ausgearbeiteten evolutionspsychologischen Beispiele zusammen mit ausgewählten psychologischen Beiträgen zum mathematischen Wissen von anderen Autoren thematisch geordnet an:

(1) Eine evolutionspsychologische Erklärung für die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Homo sapiens, beginnend mit Modellvorstellungen zum vorgeschichtlichen Zählen bis zum modernen dezimalen Stellenwertsystem, gibt Klix in (vgl. Klix 1993, Kap. 6, z.T. auch 7). Auf die Bedeutung von – auch hier auftretenden – Verdichtungen und Verkürzungen in der Kodierung und Verarbeitung von Information weist er in (vgl. Klix 1993, S. 363) hin. Er geht auch auf die Frühgeschichte der Kreiszahl π (vgl. Klix 1993, S. 306, 321) und auf die nach einer Legende vom Pythagoreer Hippasos von Metaponte (im 5. Jh. v. Chr.) entdeckte Einsicht ein, dass die als Längenmaß einer Diagonalen im Quadrat der Seitenlänge 1 auftretende Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational sein kann (vgl. Klix 1993, S. 364-366). In seinen späteren Arbeiten setzt er seine Überlegungen dazu weder fort noch rezipiert er die inzwischen vorliegenden neuen neuropsychologischen oder kognitionspsychologischen Ergebnisse zur mentalen Arithmetik (vgl. Dahaene 1999; Karnath/Thier 2006).

Auf das Quantisierungskonzept beziehen sich auch G. Lakoff und R.E. Núñez in ihrem Buch „Where Mathematics Comes From“ (Lakoff/R.E. Núñez 2000), in dem die Autoren zunächst neben Befunden aus der Neuropsychologie zur mathematischen Informationsverarbeitung und zur Kognition im Allgemeinen auch entsprechende neurobiologische und psychologische Befunde aus Experimenten mit Tieren anführen und sich dann, indem sie neuropsychologische und kognitionspsychologische Konzepte heuristisch verwenden, schließlich sehr weit in die abstrakte Mathematik des Menschen hineinbewegen. Sie sind der Auffassung, dass zwar der Zahlensinn vermutlich auf einer genetischen Prädisposition beruht, dass aber die Konzepte der Wissenschaft Mathematik über das neurologische Substrat des Zahlensinns hinaus ganz wesentlich in Gehirnstrukturen erzeugt und verarbeitet werden, denen „allgemeine kognitive Funktionen“ zukommen (vgl. S. 26, 29-30). Weil neuropsychologische Befunde zur Informationsverarbeitung nicht in ausreichender Anzahl und Aussagekraft vorliegen – denn man weiß heute zwar, wo manche mathematischen Leistungen im Gehirn erbracht werden, aber man weiß fast nichts über die neuronalen Mechanismen (vgl. S. 26) –, verlassen sie die neuropsychologische Ebene und argumentieren kognitiv-psychologisch (vgl. S. 26, 29-30). Den wesentlichen kognitiven Mechanismus, mit dem sie die Beispiele aus der Mathematik analysieren, führen sie auf der psychischen Ebene so ein:

> „For the most part, human beings conceptualize abstract concepts in concrete terms, using ideas and modes of reasoning grounded in the sensory-motor system. The mechanism by which the abstract is comprehended in terms of the concrete is called *conceptual metaphor*. Mathematical thought also makes use of conceptual metaphor, as when we conceptualize numbers as points on a line.“ (Lakoff/R.E. Núñez 2000, p. 5)

Ausgewählte Beispiele der Mathematik analysieren sie mit ihrem Ansatz systematisch, sie rekonstruieren diese also nicht entsprechend ihrer Geschichte, aber es ist ihnen klar

> „that much of the ‚abstraction‘ of higher mathematics is a consequence of the systematic layering of metaphor upon metaphor, often over the course of centuries.“ (Lakoff/R.E. Núñez 2000, p. 47).

Ihr Ansatz psychologisiert die Mathematik mithilfe der „conceptual metaphor“, weder die soziale Umwelt noch andere Umwelteigenschaften werden in ihren Wirkungen auf die Genese der Mathematik berücksichtigt. Im Unterschied zu Dehaene (vgl. Dahaene 1999) und auch Klix gehen ihre Überlegungen und Beispiele – zur Mengenlehre, zum Unendlichen, zu transfiniten Zahlen, zum Infinitesimalkonzept, zum Kontinuum, zur analytischen Geometrie, Nonstandard Analysis und Funktionentheorie und zur Philosophie der Mathematik – aber weit über die elementare Mathematik hinaus.

Stellvertretend für viele – nicht in evolutionspsychologischer Absicht durchgeführte – kognitionspsychologische Untersuchungen zum mathematischen Wissen, insbesondere zur elementaren Arithmetik, sei hier (vgl. Sloboda/Rogers 1987), darüber hinaus (vgl. Fischbein 1987) und am Rande (vgl. Pólya 1969; 1975; 1980; 1983) angeführt.

(2) Klix legt dar, wie die Griechen das menschliche Denken erstmalig in der Geschichte systematisch untersuchten und eine kognitive Metaebene[40] konstruierten, von der aus Denkprozesse, Regeln und Denkleistungen beobachtbar wurden (vgl. Klix 1993, S. 322, 339). In diesem Sinne sind sie auch die Begründer der Mathematik als Wissenschaft. Drei Ergebnisse dieses Reflexionsprozesses, die zwar für die Mathematik nicht spezifisch sind, aber für die Mathematik entscheidend wichtig geworden sind, stellt er besonders heraus (vgl. Klix, S. 322-323): I. die Trennung von Wahrnehmungswelt und Begriffswelt, II. die Prinzipien des deduktiven Schließens und III. den Gedanken der Beweisbarkeit von Zusammenhängen in formalen Strukturen. Die evolutionspsychologische Durchleuchtung dieser Ergebnisse ist zentrales Thema in (Klix 1993, Kap. 7).

Dass die Prinzipien des deduktiven Denkens ebenso wie das Beweisen in formalen Strukturen sehr spezielle – in wissenschaftssozialen Prozessen geschaffene und normierte – Elemente der kognitiven Dynamik von Gedächtnissen sind, arbeitet Klix in (vgl. Klix 1992, Abschnitt 4.4: S. 280-300) heraus. Den experimentalpsychologischen Befund, dass Menschen beim Modus ponens ($[(P \to Q)$ und $P] \to Q$) fast keine und beim Modus tollens ($[(P \to Q)$ und $\neg Q] \to \neg P$) viele Fehler machen, erklärt Klix aus evolutionspsychologischer Sicht (vgl. Klix 1992, 4.4.1: S. 280-284; Klix 1998b) so: Adaptives Schlussfolgern in mesokosmischen Umwelten ist in der Regel prädiktiv, denn ein Organismus geht von seinen Wahrnehmungen aus und versucht Gefahren zu antizipieren. Der Modus ponens ist prädiktiv, aber der Modus tollens erfordert „nachgerade widersinnig, von möglichen Alternativzuständen einer Umwelt ($\neg Q$) zur gegenwärtigen Wahrnehmungssituation auszugehen und zu prüfen, ob die Jetztsituation dann so vorhanden sein darf“ (Klix 1998b, S. 63). Neben dem hier angesprochenen deduktiven (logischen) Denken hat der Mensch viele weitere kognitive Schlusstypen (Inferenzen) hervorgebracht, von denen einige – z.B. Analogieschlüsse oder induktive Generalisierungen – in kreativen Prozessen auch bei der mathematischen Arbeit eine bedeutende Rolle spielen. Insofern es sich bei der kognitiven Dynamik um privilegierte – d.h. in mesokosmischen Umwelten phylogenetisch bewährte – Vorgehensweisen (z.B. Suchverfahren) handelt, spricht man üblicherweise von Heuristiken. Sie alle gründen auf der basalen Dynamik des Gedächtnisses. Die Anzahl kognitiver Inferenzen und Kriterien für ihre

[40] Klix merkt an, dass nicht die Sprache, sondern die Operationen an Begriffen die Metaebene hervorbringen (vgl. Klix 1993, S. 371) und die wesentliche Funktion der Sprache hier darin liegt, dass sie flüchtige Gedanken zu fixieren erlaubt (vgl. Klix 1993, S. 370).

Klassifikation sind umstritten. Für Informationen aus dem Forschungfeld kognitive Inferenzen und Heuristiken s. z.B. (vgl. Klix 1992, 1998b; van der Meer 1995, 1998; Möbus/Schröder 1998; Knauff 2006; Fiedler/Plessner 2006; Gigerenzer/Gaissmaier 2006) und weil Heuristiken und kognitive Inferenzen eine entscheidende Rolle beim mathematischen Problemlösen spielen, führen wir hier auch zum Problemlösen einige Referenzen an (vgl. Dörner 1976; Dörner 1995; Kluwe 1979; Anderson 1996, Kap. 8: S. 233-267).
(3) Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir den Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Mathematisierung zufälliger Prozesse mithilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Wahrscheinlichkeitstheorie begann sich in der Geschichte der Mathematik erst spät zu entwickeln; als ihr Anfang gilt oft der Briefwechsel (1654 n. Chr.) von P. Fermat und B. Pascal (vgl. Gnedenko 1991, S. 385-449, insbes. S. 395). Das Interesse an Zufallsprozessen und Schlussfolgerungen unter Unsicherheit überschritt bald die Grenzen der Mathematik und erfasste auch Philosophen (vgl. Stegmüller 1973), Entscheidungstheoretiker und Psychologen. In der Psychologie werden Wahrscheinlichkeitsurteile im Rahmen kognitiver Inferenzen (s.o. (2)) häufig unter den Schlagworten wie „statistische Inferenzen“ oder „induktiv-statistisches Schließen“ abgehandelt (vgl. Jungermann 1976; Gigerenzen/Murray 1987; Scholz 1987; Fiedler/Plessner 2006). Nur wenige Autoren analysieren Wahrscheinlichkeitsurteile aus evolutionsbiologischer (vgl. Riedl 1992) bzw. evolutionspsychologischer (vgl. Gigerenzer/Gaissmaier 2006) Sicht. Klix diskutiert Wahrscheinlichkeitsurteile in seinen evolutionspsychologisch intentierten Arbeiten nicht, und in der vorliegenden Arbeit werden wir auf Wahrscheinlichkeitsurteile nicht weiter eingehen.
(4) Darauf, dass Klix sich in (vgl. Klix 1992) mit den Systemen des Gesichtssinnes und der Raumwahrnehmung unter evolutionspsychologischem Gesichtspunkt befasst hat, wurde oben bereits hingewiesen. Wahrnehmungs- und kognitionspsychologische Resultate dazu liegen in kaum übersehbarer Anzahl vor, sodass dazu pauschal auf Lehrbücher und Monographien verwiesen sei. Die Funktionen dieser Systeme sind unverzichtbar für jede – alltägliche, konstruktive technische oder mathematische – Arbeit. Alle von Klix im evolutionspsychologischen Kontext analysierten geometrischen Beispiele – so scheint es – sind in (vgl. Klix 1993) enthalten, sie stehen dort aber nicht (nur) für die Geometrie, sondern vor allem für Beispiele kreativen Denkens. Die in (vgl. Klix 1993) angeführten Beispiele sind:

(I) Eine Felderaufteilung mit Flächenangaben (Babylonien) (vgl. S. 314).

(II) Eine Textaufgabe, in der eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mithilfe der beiden anderen Seiten berechnet werden soll (Altbabylonien) (vgl. S. 319). Hier handelt es sich um einen Problemtyp, der als solcher eine Typ-Lösung hat.

(III) Der Scheitelwinkelsatz (Thales von Milet) (vgl. S. 340) ist ein Beispiel für die Beweisbarkeit mathematischer Aussagen in einer Metaebene des Denkens.

(IV) Die Bestimmung der Entfernung eines unzugänglichen Punktes mithilfe von zwei kongruenten Dreiecken, die in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen (Griechen) (vgl. S. 341) gründet auf einer allgemeingültigen geometrischen Gesetzmäßigkeit (hier: Kongruenz) für einen bestimmten Typ.

(V) Die Bestimmung der Höhe einer Pyramide durch die Messung ihrer Schattenlänge (Thales von Milet nachgesagt) in dem Moment, wenn der Schatten eines senkrecht auf dem Boden stehenden Stabes gleich der Länge des Stabes ist (vgl. S. 342, 377), verwendet einen Analogieschluss.

(VI) Dass es irrationale Längenmaßzahlen geben muss (s.o. u. vgl. S. 364-366), wird unmittelbar einsichtig, nachdem am Beispiel eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 gezeigt worden ist, dass die Diagonale ($\sqrt{2}$) nicht rational ist; die Lösung des Problems beruht auf dem Wechseln von symbolischen (hier: arithmetischen) Problemrepräsentationen in anschauliche (hier: geometrische) und umgekehrt. Klix stellt die Wechselwirkungen von Geometrie und Algebra als Beispiel für die wirkungsvolle Anwendung kognitiver Abbildungen heraus (vgl. S. 364, 366).

(VII) Archimedes bestimmt den Fächeninhalt eines Parabelsgments, indem er die Fläche mithilfe eines fiktiven Hebels wiegt (vgl. S. 366-368).

Bezüge zur Mathematikdidaktik

Psychologische Befunde aus der Entwicklungspsychologie, Lernpsychologie, Kognitionspsychologie, Differenziellen Psychologie etc. werden seit Jahrzehnten von der Pädagogik, der Didaktik und der Didaktik der Mathematik insbesondere rezipiert und teilweise auch in eigenen Untersuchungen gewonnen. Die Literatur dazu ist so umfangreich, dass auf sie nur pauschal verwiesen sei. Explizit hingewiesen sei auf eine sich entwickelnde Neurodidaktik, die in den letzten Jahren bereits Schlagzeilen machte, von der aber in der Praxis des Mathematikunterrichts bis heute wenig angekommen ist. An der Universität Ulm wurde 2004 das „Transferzentrum für Neurowissenschaft und Lernen“ gegründet.

Klix betont zwar schon in seinen frühen Arbeiten (vorevolutionspsychologische Epoche) die Relevanz der psychologischen Grundlagenforschung für die Künstliche Intelligenzforschung (KI) und die Praxis (Rationalisierung von Entscheidungen, Erziehungswissenschaft, Didaktik und Schule), z.B. (vgl. Klix 1976b, S. 7-8; 1976c, S. 46), aber weist nach Kenntnis des Autors in keiner seiner evolutionspsychologischen Arbeiten auf die Pädagogik oder Didaktik hin.

Motiviert unter anderem von Arbeiten zur Evolutionären Erkenntnistheorie und zur Evolutionspsychologie entstand in den letzten Jahrzehnten die Forschungsrichtung „Evolutionäre Pädagogik (EP)“ (vgl. Treml 2004, 2000; Z. f. P. 48.-5. Sept./Okt. 2002; Z. f. E.-W. 9., B. 5/2006), die nach Kenntnis des Autors – abgesehen von seinen eigenen Vorstößen (Köck 2008) – die Mathematikdidaktik und den Mathematikunterricht bisher nicht erreicht hat. Eine „Evolutionäre Mathematikdidaktik“ ist bis heute ein Desiderat.

Mit den systematisch dynamischen Begriffsexplikationen der Mathematik ist der Forschungsstand für die vorliegende Arbeit nun hinreichend skizziert. Wir wenden uns im folgenden 3. Kapitel der Erarbeitung unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes zu.

Kapitel 3

Der naturgeschichtliche Forschungsansatz

3.1 Der naturgeschichtliche Forschungsansatz – 1. Teil

Begriffsexplikationen, denen Aufzählungen mathematischer Gebiete und Diskussionen um die Einordnung neuer diskriminierender Beispiele (s. 2.2.1), Grundlegungen der Mathematik (s. 2.2.2) bzw. historische Ansätze (s. 2.3) zu Grunde liegen, kennzeichnen mathematisches Wissen spezifischer als andere, und deswegen sprechen wir ihnen Priorität zu. Wollen wir jedoch die Genese des mathematischen Wissens aus den ihre Möglichkeit bedingenden Strukturen des Psychischen und Sozialen, des Biotischen und des unbelebten Materiell-Energetischen verstehen[1] und erklären, so ist dies ohne jene Beiträge, die wir aus dynamisch-systematischer Sicht gewonnen haben, unmöglich. Und für einen umfassenden Begriff von Mathematik können wir auf keine der im 2. Kapitel angeführten Explikationen verzichten.

Im 1. Kapitel stellten wir die Frage nach dem möglichen Nutzen einer naturgeschichtlichen Sichtweise auf die Mathematik für die Mathematikdidaktik (1. Frage). Im 2. Kapitel trugen wir Beiträge von verschiedenen Wissenschaf-

[1] Mit „Verstehen“ meinen wir hier das Erkennen sowie Aufbauen einer kognitiven Repräsentation von einem Sachverhalt und setzen die Position eines hypothetischen Realismus voraus.

Wir betonen hier mit Riedl, dass das Erkennen dem Erklären immer vorausgeht (vgl. Riedl 2003, S. 34, 38, 42).

ten zur Begriffsexplikation der Mathematik zusammen und kommentierten sie hinsichtlich ihres Einflusses auf die Mathematikdidaktik. Damit ist der Forschungsstand gekennzeichnet und der erste Schritt getan. Aber bevor wir den möglichen Nutzen einer naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik für die Mathematikdidaktik ausloten können, ist darzulegen, was „naturgeschichtliche Sicht“ überhaupt heißen soll. Diesen zweiten Schritt auf dem Weg zu einer Antwort auf die 1. Frage bereiten wir nun vor.

Wir erkannten im 2. Kapitel, dass außer der Mathematik selbst die Geschichtswissenschaft, die Philosophie, die Psychologie, die Biologie etc. – also sehr verschiedene Wissenschaften – interessante Beiträge zur Begriffsexplikation der Mathematik leisten, dass „Mathematik“ also ein multidisziplinär zu erklärendes Phänomen ist. Und in 2.4.8 stellten wir „Mathematik“ als ein Beispiel heraus, an dem wir erforschen können, wie „Materie Geist hervorbringt“. Gerade diese Formulierung zeigt uns den Weg, den wir in der vorliegenden Arbeit gehen werden: Erkläre, soweit dies möglich ist, wie unbelebte materiell-energetische, biotische, psychosoziale etc. Strukturen im Verlauf unserer Erdgeschichte entstanden und wie sie mathematisches Wissen prägen. Damit steht nicht eine Wissenschaft (eine Disziplin) im Mittelpunkt, die an einem Problem arbeitet, sondern ein Phänomen, zu dessen Erklärung viele Wissenschaften beitragen. Diese Blickrichtung kennzeichnet einen wichtigen Aspekt unserer naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik.

Naturgeschichte und Naturgeschichte des Wissens

Das Suffix „Geschichte“ im Terminus „Naturgeschichte[2]“ verweist im Folgenden nicht auf die der historischen Forschungsmethode verpflichtete Geschichtswissenschaft (vgl. 2.1), sondern meint die irreversible raum-zeitliche Trajektorie des dynamischen Systems „Kosmos“. Naturgeschichte? Das ist doch Physik, Chemie, bestenfalls Biologie, aber mit Mathematik hat sie doch nichts zu tun! Das ist die übliche Meinung. Demgegenüber schlagen wir hier eine wesentlich erweiterte Auffassung von „Naturgeschichte“ vor und wollen

(1) zur Naturgeschichte nicht nur die Evolution des Materiell-Energetischen im Kosmos und die biologische Evolution auf der Erde, sondern auch die Evolution von allem Psychischen, Sozialen und Kulturellen, einschließlich

[2]In der Fußnote 37, vgl. in 2.4.7, wiesen wir darauf hin, dass wir uns auf die Erklärung der Mathematik von irdischen Organismen und des Menschen im Besonderen beschränken wollen. Deswegen beschränken wir die Naturgeschichte im Wesentlichen auf unsere Erdgeschichte.

der wissenschaftlichen sowie künstlerischen Spitzenleistungen des Menschen zählen,

(2) annehmen, dass alles Biotische Emergenzphänomen des unbelebten Materiell-Energetischen, alles Psychische und Soziale – einer feineren Unterscheidung stünde nichts im Wege – Emergenzphänomen des Biotischen ist

und

(3) die „Emergenzen“ als Phänomene auffassen, die noch nicht zufriedenstellend verstanden worden sind.

Diese hypothetisch-realistischen[3] und pragmatisch-reduktionistischen[4] Arbeitsannahmen sind umfassend und in dem Sinne selbstbezüglich, dass der Mensch (mit seinem Wissen) versucht, die Naturgeschichte und damit auch sich selbst – einschließlich seines Wissens – zu erklären. Damit der Mensch in seinem Versuch, die Geschichte der Natur, deren Teil er ist, kognitiv zu repräsentieren (d.h. zu

[3] Vgl. 2.4.3, Fußnote 17.

[4] Reduktionismus steht für die „Bezeichnung des wissenschaftlichen und philosophischen Programms, für wissenschaftliche Entitäten, Begriffe, Gesetze oder Theorien Reduktionen durchzuführen“ (vgl. Mittelstraß 1995, s.v.: Reduktionismus); Holismus („das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile“) bezeichnet die Gegenposition (vgl. Mittelstraß 1995, s.v.: Reduktionismus; Stegmüller 1973, Bd. II, 2. Halbbd.). Im Zusammenhang mit evolutionären Erkenntnistheorien setzt sich z.B. B. Irrgang in (vgl. Irrgang 1993) mit dem Reduktionismus auseinander. Eine umfangreiche Literatur zu formalisierten Ansätzen zum Konzept wissenschaftlicher Theorien und der Theoriereduktion findet man im Bereich der Wissenschaftstheorie (vgl. Mittelstraß 1995; 1996; Stegmüller 1973, Bd. II, 2. Halbbd.): Die beiden dominanten Ansätze sind das an der deduktiv-nomologischen Erklärung orientierte formalsprachliche Standardmodell der Theoriereduktion im logischen Empirismus und der modelltheoretische Ansatz der strukturalistischen Theorieauffassung (Mittelstraß 1995, s.v.: Reduktion). G. Geiger untersucht das Problem emergenter Strukturen und das Problem der Theorienreduktion für eine Klasse von systemisch formulierten Evolutionstheorien (und damit für dynamische Systeme) und bezieht in der Reduktionismus-Holismus-Debatte für den Reduktionismus Stellung (vgl. Geiger 1990). Eine aus pragmatischen Gründen gewählte reduktionistische Position heißt „pragmatischer Reduktionismus“.

In der vorliegenden Arbeit, die aus wissenschaftstheoretischer Sicht methodisch heuristisch sein wird, wird pragmatisch-reduktionistisch gearbeitet, weil eine reduktionistische Methodik die Lösung disziplinenübergreifender Probleme unterstützt und es dafür keine bessere Alternative gibt. Der in dieser Arbeit vertretene Forschungsansatz, demgemäß alle Produkte der Erdgeschichte vom dynamischen Systems erzeugt sind, wird die reduktionistische Position (ihrer Vorteile wegen) von Anfang an enthalten.

verstehen, analysieren, rekonstruieren, erklären etc.), sich infolge dieser Selbstbezüglichkeit nicht in Widersprüche verfängt, sei eine getrennte Buchführung vorgeschlagen, die alle Befunde und Theorien, die Gegenstände der Untersuchung sind, von allen Befunden und Theorien, die Werkzeuge in dieser Untersuchung sind, strikt getrennt hält. Sie ist in allen Fällen möglich, in denen Werkzeug und Werkstück voneinander unterscheidbar sind und ein Werkzeug für die Bearbeitung eines Werkstücks geeignet ist. Damit kann unmissverständlich auch Wissen für eine naturgeschichtliche Rekonstruktion von Wissen verwendet werden. Finden wir dabei eine Folge früher entstandener stabiler Strukturen – des unbelebten Materiell-Energetischen, Biotischen, Psychischen oder Sozialen –, die Form oder Inhalt von Wissen ersichtlich geprägt hat oder prägt, so sei diese Folge als eine „evolutionäre Spur[5]“ zu unserem Wissen (salopp: unseres Wissens) bezeichnet.

Im Rückblick auf 2.4 erkennen wir, dass wir mit dieser Sicht auf die Wissensbildung nicht allein stehen: Piaget, Vollmer, Oeser, Riedl und Klix stehen im Wesentlichen mit uns, und wir können von ihren Beiträgen profitieren.

Naturgeschichte des mathematischen Wissens

Aus dieser naturgeschichtlichen Sicht gilt es nun, die Mathematik von Organismen auf der Erde und des Menschen im Besonderen genetisch zu erklären. „Das beste Modell für eine Katze ist eine Katze. Möglichst dieselbe Katze.“[6] Dieser Aussage von Wiener entsprechend gilt hier: Das beste Modell für unsere Geschichte der Mathematik ist unsere Geschichte der Mathematik. Und diese ist untrennbar mit unserer Erdgeschichte verwoben, nur durch ein besonderes Interesse von Menschen aus dieser hervorgehoben. Schon eine Begriffsexplikation, die alle in der Geschichtswissenschaft der Mathematik vorliegenden Daten synchron und diachron mit den bekannten erdgeschichtlichen Daten integrieren würde, erforderte viel mehr als wir leisten könnten. Tatächlich ist unsere Situation noch schwieriger: Wir stehen vor dem Zweifrontenproblem, dass wir einerseits von der Erdgeschichte nur wenige Daten haben und andererseits doch so viele, dass wir Komplexität reduzieren müssen, um uns wenigsten ein bescheidenes Modell von der Erdgeschichte zu schaffen, das gut genug ist, um die wesentlichen Strukturen von ausgewähltem mathematischem Wissen zumindest partiell und skizzenhaft genetisch zu erklären. Um die Erarbeitung eines solchen

[5]Die Bezeichnung ist von (vgl. Klix 1998a) inspiriert.
[6]N. Wiener zitiert nach (Möbus/Schröder 1998, S. 403).

Modells, das wir auch unseren Forschungsansatz nennen, geht es im Folgenden. Denn mit der naturgeschichtlichen Sicht allein ist wenig anzufangen, sie ist noch kein naturgeschichtlicher Forschungsansatz.

Glücklicherweise können wir hier auf Vorarbeiten zurückgreifen: Wie in 2.4.2 angeführt, findet PIAGET Quellgründe für (mathematisches) Wissen mithilfe seines biokybernetischen Ansatzes. Und RIEDL, siehe 2.4.3, entwickelt seine STE ausgehend von der Strukturbildung in Systemen fern vom thermodynamischen Gleichgewicht, mit deren Hilfe er in späteren Arbeiten (vgl. Riedl 1985) einen hierachischen Aufbau der Natur gewinnt, entsprechend dem kosmologischen Zeitpfeil nach sich überformenden Emergenzschichten geordnet (vgl. Riedl 1985, S. 68, Abb. 9)[7].

Wir übernehmen den modellhaft durch Emergenzschichten beschriebenen hierarchischen Aufbau der Natur von RIEDL in seinen wesentlichen Strukturen, werden ihn aber mit unseren Überlegungen – teilweise anders als RIEDL – begründen. Diesem – unserem – naturgeschichtlichen Forschungsansatz fügen wir dann methodische Überlegungen und schließlich eine übersichtliche Buchführung hinzu, mit deren Hilfe dann eine an der Naturgeschichte orientierte genetische Erklärung für mathematisches Wissen übersichtlich dargestellt werden kann.

Anmerkung: Im Sinne unserer oben beschriebenen strikten Unterscheidung von Werkzeug und Werkstück sei hier – um Missverständnisse zu vermeiden – darauf hingewiesen, dass der Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit das mathematische Wissen ist, dass aber forschungsmethodisch ebenfalls mathematisches Wissen verwendet wird. Dementsprechend muss das augenblicklich naturgeschichtlich zu erklärende mathematische Wissen von dem augenblicklich für die naturgeschichtliche Erklärung herangezogenen mathematischen Wissen unterschieden werden. In diesem 3. Kapitel wird mathematisches Wissen – insbesondere die Mathematik der dynamischen Systeme – fast nur methodisch verwendet. Erst im 4. Kapitel versuchen wir mathematisches Wissen naturgeschichtlich zu erklären und die Nützlichkeit dieses Vorgehens für die Didaktik der Mathematik (s. Kap. 4 u. 5) auszuloten.

Das dynamische System „Erde“ und Emergenzphänomene

Aus physikalischer Sicht ist die Erdgeschichte ein winziger Ausschnitt unserer Kosmogonie. Diese Kosmogonie steht in guter Übereinstimmung mit den Aus-

[7] RIEDL profitierte u.a. von L. v. BERTALANFFY und N. HARTMANN.

sagen eines Urknallmodells („theory of everything“)[8]. Die vier heute bekannten basalen Wechselwirkungen (die Gravitation, die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung) – sie lagen kurz nach dem Urknall in ihrer heutigen Form vor – bestimmen jeden Austausch von Energie, Masse, Impuls, Drehimpuls, Entropie etc. des Systems „Erde“ mit seiner Umwelt, d.h. mit seiner kosmischen Umgebung, die in erster Näherung als unser Sonnensystem angenommen werden darf. Dabei wird der Begriff „System“ nur benutzt, solange Grenzen zur Umwelt des Systems spezifizierbar sind (für die allgemeinere Sicht s. 3.2.2).

Das physikalische System „Erde“ und ebenso sein physikalisches Umweltsystem sind durch die Gesamtheit der Erhaltungsgrößen (Energie, Masse, Impuls, Drehimpuls, Entropie) seiner Träger (Teilchen) in Raum und Zeit sowie durch deren Austauschprozesse gegeben. Weil das System „Erde“ und das System „Umwelt der Erde“ miteinander wechselwirken und dabei (fast) keine Materie austauschen, nennt man das System „Erde“ ein „geschlossenes System“. Systeme, die mit ihrer Umwelt überhaupt nichts austauschen, heißen „abgeschlossen“ oder „isoliert“. Im Unterschied zu geschlossenen und isolierten Systemen bezeichnet man Systeme, die mit ihrer Umwelt auch Materie austauschen, als „offene Systeme“.

Jeder lebende Organismus in seiner Umwelt ist ein Beispiel für ein offenes biologisches System, denn der Organismus tauscht mit seiner Umwelt nicht nur Energie und Entropie, sondern auch Materie aus.

Für ein System in seiner Umwelt sind im allgemeinsten Fall Selbstwechselwirkungen im System, Selbstwechselwirkungen in der Umwelt und Wechselwirkungen zwischen System und Umwelt in unterschiedlicher Stärke anzunehmen; in diesem Fall spricht man auch von einer Koevolution von System und Umweltsystem. (Die Konzepte „System“, „Umwelt“, „Wechselwirkungen“ und „Koevolution“ werden in 3.2.3 mithilfe der Mathematik dynamischer Systeme gedeutet.)

Dass die soeben geschilderte physikalische Sicht für die Modellierung erdgeschichtlicher Phänomene sinnvoll ist, insofern sie z.B. in den Bereich der

[8]Einwänden gegen Theorien und Modelle lässt sich grundsätzlich entgegnen, dass es denkvorteilhaft ist, viele einzelne Befunde, Einsichten, Teiltheorien und Teilmodelle in ein kohärentes und konsistentes Modell in axiomatisierter Form so zu verdichten, dass Erklärungen sowie gegebenenfalls Prognosen möglich, die Kommunikationen über Tatsachen und Sachverhalte erleichtert und geplante Eingriffe des Menschen in die Entwicklung im Kleinen durchführbar werden.

Physik, der Chemie, der Geologie oder der Biologie fallen, das ist heute keine Frage mehr, da aus diesen Bereichen viele quantitative kognitive Modellierungen, zum Teil sogar als lauffähige Computerprogramme vorliegen, z.B. (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990; Nicolis/Prigogine 1987; Schulster 1994) und Referenzen darin. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch weitergehend die Auffassung vertreten, dass einerseits auch alle psychischen, sozialen und kulturellen Phänomene weder unabhängig von, noch im Widerspruch zu den Gesetzen der Physik entstanden sind (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990) und dass andererseits deren kognitive Modellierung in physikalischen Termini zumindest praktisch nicht durchführbar ist (zum Reduktionismusproblem, vgl. Fußnote 4).

Die grundsätzliche Schwierigkeit für jede quantitative kognitive Modellierung der Entwicklung psychischer, sozialer oder kultureller Phänomene zeigt sich bereits am Gegenstandsbereich der Chemie und besteht gleichermaßen für alle Wissenschaften. Sie besteht in der Tatsache, dass die interessanten einzelwissenschaftlichen Problemstellungen auf dynamische Systeme mit vielen Konstituenten führen, für die erstens nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den Systemkonstituenten bestehen und die zweitens sehr sensibel von Anfangs- und Randbedingungen abhängen. Die Konsequenzen einer solchen Dynamik zeigen sich in Phänomenen, die oft pauschal mit den Schagworten „Emergenzen“ oder „Fulgurationen“ abgehandelt werden (vgl. Irrgang 1993). Die nun folgende, sehr grobe kognitive Modellierung von Forschungsprozessen macht nachvollziehbar, warum sie Eingang in die Wissenschaften fanden, und der Abschnitt 3.2.2 über die Mathematik dynamischer Systeme ermöglicht dann, die als Emergenzen oder Fulgurationen bezeichneten Phänomene zumindest grundsätzlich aufzuklären. Quantitative kognitive Modellbildungen für evolvierende reale Systeme (Theorien) liegen aus verschiedenen Wissenschaftsbreichen vor.

Aus dem Bereich der Physik seien die klassischen Theorien der Gravitation, der Elektrodynamik, die quantisierten Theorien der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung genannt. Eine alle Wechselwirkungen umfassende quantisierte Theorie ist nicht bekannt, Entwürfe dazu gibt es viele (z.B Stringtheorien). Auf die Modellierung von Vielteilchensystemen ist die statistische Mechanik zugeschnitten, als deren makroskopische Theorie ergibt (mit Zusatzannahmen) sich die Thermodynamik. Während diese Theorien für Gleichgewichte (Fluktuationen um die Systemmittelwerte sind sehr klein) und für die Nähe von Gleichgewichten gut bekannt sind, führen die statistische Mechanik und die Thermodynamik weit weg vom Gleichgewicht des Systems auf große (mathematische) Schwierigkeiten (vgl. Nicolis/Prigogine 1987). Sowohl konzeptionell als auch mathematisch liegt allein für den Gegenstandsbereich der Physik keine köhärente Beschreibung vor.

Und doch bewähren sich physikalische Theorien und Modellbildungen sogar in Gegenstandsbereichen der Chemie (Theorie der chemischen Bildung, Reaktionskinetik), wenngleich dort für neuartig auftretende Kollektive (z.B. Moleküle) und deren Eigenschaften (z.B. alkalisch zu reagieren oder autozyklische Reaktionen eingehen zu können) nichtphysikalische Termini (z.B. Molekül, alkalisch oder autozyklische Reaktion) eingeführt werden, mit deren Hilfe dynamische Systeme dieser Kollektive adhoc untersucht werden können.

Die umgekehrte Situation illustriert das folgende Beispiel: In vielen Fällen arbeitet man mit Makromolekülen (etwa in der Biochemie) deren Zusammensetzung und deren Eigenschaften (etwa ihre Rolle in biochemischen Prozessen) man gar nicht kennt. Nun experimentiert man mit diesen Molekülen in geeigneten Umwelten (z.B. im Reagenzglas) und konstruiert sich aus allen bisherigen Kenntnissen eine Miniaturtheorie mit eigens dafür entwickelten Begriffen, die man weiter ausarbeitet und dann durch einen umfassenderen Theorieentwurf ersetzt. Selbstverständlich bestehen auch diese Moleküle aus Atomen und lassen sich im Prinzip physikalisch beschreiben. Deswegen sind thermodynamische, massenspektographische und andere physikalische Methoden auch in diesem Fall für die Lösung des chemischen Problems hilfreich, denn es ist vorteilhaft für weitere Untersuchungen zu wissen, aus welchen Atomsorten die Moleküle aufgebaut sind. Das Problem besteht aber darin, dass die Aufklärung vieler chemischer Eigenschaften (etwa die Rolle der Moleküle in biochemischen Prozessen) mithilfe einer physikalischen Modellbildung (zumindest auf absehbare Zeit im Forschungsprozess) praktisch gar nicht durchführbar ist. Es ist nun aus wissenschaftsgeschichtlicher Sicht ein natürliches Verhalten, für die neuartigen, physikalisch unverstandenen Eigenschaften erstens eine neue Bezeichnung „Emergenzen" und zweitens einen neuen Forschungsgegenstandsbereich „Chemie" einzuführen, obwohl physikalische Forschungsmethoden für die Bearbeitung eines Gegenstands der Chemie weiterhin nützlich sind.

Diese Überlegungen erhellen am Beispiel von Chemie und Physik sowohl das harte Konzept der Reduktion der kognitiven Modellierung eines wissenschaftlichen Gegenstandsbereichs auf einen anderen (zur Theorienreduktion siehe Fußnote 4) als auch das weichere Konzept der – nennen wir es – kognitiv modellierten Verbindung eines wissenschaftlichen Gegenstandsbereichs mit einem anderen durch das Aufzeigen einer relationalen Struktur. Und es sind gerade die „Emergenzphänome“, die einer Reduktion entgegenstehen und um die sich ein neues Wissenschaftsgebiet, wie z.B. die Biologie, biologische Psychologie, Ethologie, Psychologie, Soziologie, Philosophie, Mathematik, Literaturwissenschaft etc. entwickelt hat und entwickelt. In ähnlicher Weise, wie am Beispiel der Physik und Chemie erläutert, stellt sich die Frage nach einer Verbindung von Biologie und Chemie, von Biologie und Physik, von Biologie und Psychologie, von Biologie und Soziologie, von Psychologie und Soziologie etc. und im radikalen Fall von Physik und Mathematik oder Physik und Literaturwissenschaft. Mit zunehmender Strukturbildung infolge von Selbstorganisationsprozessen im dynamischen System „Erde“, beginnend mit Phänomenen, die Gegenstand der Physik sind, bis zu Phänomenen, die Gegenstand der Soziologie, Mathematik, Philosophie oder Literaturwissenschaft sind, steigt auch die Komplexität der neuentstandenen Kollektive (Emergenzphänome), die sich einer Reduktion völlig zu entziehen scheinen[9].

3.2 Methodische Überlegungen

3.2.1 Kognitive Modellierungen in Gestalt von formalisierten, quantifizierten bzw. heuristisch formulierten dynamischen Systemen

Kognitive Modellierungen in Gestalt von formalisierten und quantifizierten dynamischen Systemen (mathematische Modellierung, lauffähige Computerprogramme) sind überwiegend in naturwissenschaftlichen bzw. technischen Wis-

[9]Die Auffassung, dass sich wissenschaftliche Gegenstandsbereiche scheinbar nicht aufeinander reduzieren lassen, zeigt sich auch im „methodischen Dualismus“ (vgl. Irrgang 1993, S. 229). Damit ist die Aufspaltung in empirisch arbeitende (Außensicht, Beobachterperspektive) und in mithilfe von Sprache und Vorstellungen reflektierende (Innensicht, Teilnehmerperspektive) Wissenschaften gemeint.

Die Aufspaltung hat ihre Pointe aber letztlich im folgenden Reduktionsproblem: Im Kleinen ist es auf Grund des Gehirn-Geist-Problems fragwürdig, wie weit eine differenzierte Reduktion von Verhalten und Erleben auf materielle Phänomene möglich ist. Und im Großen wirft die Tatsache, dass das Produkt der Evolution „Mensch“ diese Evolution (einschließlich sich selbst) kognitiv modelliert, das Problem einer Selbstbezüglichkeit auf, derart, dass kognitive Modellierungen auf kognitive Modellierungen einschränkend zurückwirken und damit auch die Reduzierbarkeit kognitiver Modellierungen begrenzen können.

senschaften verbreitet[10].

Einen Schub der Theoretisierung erhielt die Biologie in der Zeit vor dem zweiten Weltkrieg dadurch, dass viele Nichtbiologen, wie z.B. Chemiker, Physiker, Mathematiker und Ingenieure an der Entwicklung dessen, was als Molekularbiologie bezeichnet wird, beteiligt waren und dabei physikalische Denkweisen und mathematische Methoden in die biologische Forschung einbrachten (vgl. Beese 1987, S. 202-204). Heute ist die mathematische Modellierung, bei der auch Modellierungen als dynamische Systeme eine große Rolle spielen, in der gesamten Biologie zwar weit verbreitet, z.B. (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990), aber die mathematischen Modelle sind lokal in dem Sinne, dass ihr Anwendungsbereich im Vergleich zu Theorien in der Physik nur klein ist. Das gilt auch für biologische Evolutionstheorien (vgl. 2.4.3).

Kognitive Modellbildungen, die auf einer statistischen Auswertung von Experimentaldesigns beruhen, sind Standard in der Psychologie und in der Soziologie (vgl. Lüer 1987; Erdfelder/Mausfeld/Meiser/Rudinger 1996). Modellierungen des Gedächtnisses oder allgemeiner der Informationsverarbeitung im Organismus sind in der Psychologie in Form von Computerprogrammen verbreitet, seit die technologischen Voraussetzungen dafür bestehen (vgl. 2.4.4 und 2.4.7). In der Psychologie (z.B. in der klinischen Psychologie, der systemischen Familientherapie) und in der Soziologie, wenn quantitative Untersuchungen schwieriger werden, nimmt der Anteil an qualitativen kognitiven Modellbildungen zu, die implizit oder explizit ihren Gegenstandsbereich als evolvierendes System modellieren.

Als Beispiele mit soziologischer Relevanz, denen eine heuristische Verwendung eines dynamischen Systems zu Grunde liegt, führen wir das 3-Stadien-Gesetz der Gesellschaft von A. Comte (vgl. Morel/u.a. 1995, S. 9) oder die Entwicklung der Gesellschaft nach K. Marx (vgl. Morel/u.a. 1995, S. 90-115) an. Die Übergänge der Stadien bei Comte und die proletarische Revolution bei Marx könnte man heuristisch als Bifurkationen oder Phasenübergänge des zugehörigen dynamischen Systems deuten, konkret auf der Grundlage von Daten berechenbar sind sie wohl nicht. Mithilfe der Systemtheorie von N. Luhmann (vgl. Willke 1991) lässt sich Gesellschaft als ein dynamisches System auffassen,

[10]Beispiele für nichtlineare dynamische Systeme findet man z.B. in (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990; Nicolis/Prigogine 1987; Schuster 1994), von denen hier nur die beiden in der Literatur vieldiskutierten physikalischen Beispiele für Emergenzen infolge von Bifurkation bzw. Versklavung, die Bénard-Konvektion bzw. der Laser, genannt seien (vgl. Nicolis/Prigogine 1987).

für quantitative Untersuchungen sind die Begrifflichkeiten dieser Systemtheorie aber wenig geeignet. Als Konvergenz gegen einen Attraktor eines kommunikativen Systems referieren W. Krohn und G. Küppers nach H.R. Maturana die Herausbildung eines Konsens im Diskurs (vgl. Krohn/Küppers 1989, S. 20, Fußnote 4). Dies ist eine suggestive Sprechweise und deswegen nützlich, doch Berechnungen eines Konsenses sind in vivo wohl kaum möglich. Sofern nun die Lösung eines Problems die Integration praktisch nicht aufeinander reduzierbarer Emergenzphänomene verlangt, sind nur Lösungen mithilfe von qualitativen Modellierungen möglich. In diesen Fällen ist auch nur eine qualitative Anwendung des Konzepts „dynamisches System" möglich, z.B. indem eine dem Problem angemessene Zuordnung zu Phänomenbereichen vorgenommen wird, die ihrerseits durch relationale Strukturen dynamisch verbunden sind.

Unsere bisherigen Überlegungen betrafen die Bedeutung des Konzeptes „dynamisches System" für eine kognitive Modellierung der Erdgeschichte bzw. ihrer Emergenzphänomene in (unbelebten materiell-energetischen, biotischen, psychischen bzw. sozialen) Teilbereichen. Im nun folgenden Abschnitt geht es um das Konzept „System" im Allgemeinen und um das mathematische Konzept „dynamisches System", mit dessen Hilfe sich erstens Emergenzen zumindest in einfachen Fällen und sonst durch eine suggestive, grundsätzlich empirisch entscheidbare Erklärungsbehauptung aufklären lassen und an dem sich zweitens die Terminologie der vorliegenden Arbeit orientieren wird.

3.2.2 Die Mathematik dynamischer Systeme

Der Begriff „System" (griech.: sýstēma) bezeichnet schon in der Antike sowohl eine in der Natur vorgefundene als auch vom Menschen geschaffene Zusammenordnung von Gegenständlichem oder Gedanklichem (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994, S. 329-330). In dieser Allgemeinheit ist heute z.B. von Regal-, Ton-, Planeten-, Tier-, Nerven-, Knochen-, Stoffwechsel-, Transport-, Öko-, Motor-, Kommunikation-, Informations-, Begriffs-, Logiksystemen die Rede, wie auch von Systemen der Philosophie, Systemen der Wissenschaften und Systemtheorien (vgl. Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1998, S. 824-869).

Die sogenannten Systemtheorien – für einen Überblick und weitere Referenzen (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994, S. 329ff.; Mittelstraß 1996, S. 190ff.; Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1998, S. 856-869) – entstanden auf der Grundlage von Abstraktionsprozessen, die auf Klassen von Systemen sachangemessen und interessengemäß durchgeführt wurden, um die Eigenschaften der betrachteten Klasse von Systemen in ihren Zusammenhängen kognitiv zu modellieren und ihre Beziehungen in Aussagen zu fassen.

In seiner abstraktesten mathematischen Fassung könnte ein System, wenig bedeutungsvoll, als eine Relation auf einer Menge von Elementen (oder Klasse von Objekten) definiert werden, und es sind gerade die speziell gewählte Menge und die auf der Menge speziell gewählte relationale Struktur, die den Begriff System nützlich machen und interessante Typen von Systemen liefern. Für einen Einblick in die mathematische und formallogische Forschung zur Systemtheorie sei auf die Literatur verwiesen (vgl. Pichler 1975; Mesaravić/Takahara 1989; Takahashi/Takahara 1995; Geiger 1990).

Weil für die vorliegende Arbeit eine kognitive Modellierung realer (z.B. physikalischer, chemischer, biotischer, psychischer, sozialer etc.) dynamischer Systeme auf der Erde in Raum und Zeit benötigt wird, sei die Aufmerksamkeit nun auf die Mathematik dynamischer Systeme gerichtet, mit deren Hilfe sich diese Systeme modellieren lassen.

Obwohl quantisierte Theorien der Physik in ihrer vorliegenden Form viele Rätsel aufgeben, sind sie vor allem für die Beschreibung hochenergetischer Prozesse nützlich. Eine Formulierung des mathematischen Gehaltes solcher Theorien ist die in Gestalt eines C^*-dynamischen Systems[11].

Physikalische Systeme, denen eine klassische (d.h. nicht quantisierte) Beschreibung angemessen ist, unterscheidet man mathematisch in deterministische und stochastische dynamische Systeme. Während für stochastische dynamische Systeme hier nur bemerkt sei, dass sie als stochastische Prozesse (vgl. Jetschke 1989) (auch mit verallgemeinerter Indexmenge (vgl. Rao 1981)) aufgefasst werden können, seien hier einige Definitionen, Phänomene und Ergebnisse für deterministische dynamische Systeme angeführt. Der vorliegende Abschnitt lehnt sich eng an die kompakte Überblicksdarstellung von E. Zeidler an (vgl. Zeidler 2003a; 2003b); angegeben werden im Folgenden nur Verweise auf andere

[11]Es ist definiert als ein Tripel (A, G, α), bestehend aus einer C^*-Algebra (Operatorenalgebra) A, einer lokalkompakten Gruppe G und einem stetigen Homomorphismus α von G in die Gruppe der Automorphismen von A, genauer (vgl. Pedersen 1979). Die observablen physikalischen Größen sind dabei Terme, die aus Elementen von A zu bilden sind. Die raumzeitliche Entwicklung eines solchen dynamischen Systems ist zwar durch eine Abhängigkeit der Größen von der Raum-Zeit gegeben, aber seine geometrische Beschreibung erfordert wiederum operatoralgebraische Methoden.

Literatur.

Ein „kontinuierliches dynamisches System“ ist definiert durch

(1) eine Menge Z, genannt „Zustandsraum“, und eine Familie $\{F_t\}$ von Abbildungen $F_t : Z \longrightarrow Z$, wobei der „Zeitparameter“ t
(a) alle reelen Zahlen durchläuft (Fluss)
oder
(b) alle nichtnegativen reellen Zahlen durchläuft (Semifluss)

(2) $F_0 = I$ (I =identische Abbildung)

(3) (a) $F_{t+s} = F_s F_t$ für alle reelen Zahlen s, t (Flussbedingung)
oder
(b) $F_{t+s} = F_s F_t$ für alle nichtnegativen reellen Zahlen s, t (Semiflussbedingung)

(4) Für einen vorgegebenen „Anfangszustand“ z_0 zur Zeit t_0 erhält man den „Zustand“ z_t zur Zeit t durch die Gleichung $z_t = F_t z_0$.

(5) Bemerkung: „Flüsse“ modellieren (zeit-)reversible und „Semiflüsse“ (zeit-) irreversible dynamische Systeme.

Die Zerlegung des Zeitkontinuums in Intervalle und deren Durchnumerierung führt zu einer diskreten Zustandsindizierung des dynamischen Systems, man definiert auf diese Weise ein „diskretes dynamisches System“.

Weiter definiert man für dynamische Systeme folgende Begriffe:

(6) Die Abbildung $t \longrightarrow z(t)$, die jedem definierten Zeitpunkt t den Zustand $z(t)$ zuordnet, heißt „Trajektorie“ des dynamischen Systems.

(7) Die Menge aller Bildpunkte $z(t)$ der Trajektorie heißt „Orbit“.

(8) Ein Zustand $z(0)$ ($= z_0$) heißt „stationär“ (oder „Gleichgewichtszustand“), falls $F_t z_0 = z_0$ für alle definierten t gilt.

(9) Eine Teilmenge M von Z heißt „invariant“, falls eine Trajektorie für alle Zeiten nach dem Zeitpunkt t_1 in M bleibt.

Ist die Menge Z eine hinreichend glatte Mannigfaltigkeit, dann lassen sich kontinuierliche dynamische Systeme in Form eines Differenzialgleichungssystems schreiben. Derartige Differenzialgleichungssysteme zeigen ein reichhaltiges

Lösungsverhalten, aus dem nun schlaglichtartig einige Phänomene und Ergebnisse angeführt werden:

(10) „Asymptotisch stabiles Verhalten" liegt vor, wenn alle Trajektorien, die in einer Umgebung eines stationären Punktes (Gleichgewichtslage) starten, für $t \longrightarrow +\infty$ in diesen Punkt laufen (d.h. das System kehrt nach kleinen Störungen wieder in die Gleichgewichtslage zurück).

(11) „Stabiles Verhalten" liegt vor, wenn die Trajektorien, die in einer hinreichend kleinen Umgebung des stationären Punktes starten, in dessen Nähe bleiben (d.h. kleine Störungen der Gleichgewichtslage des Systems bleiben für alle Zeiten klein).

(12) „Instabiles Verhalten" liegt vor, wenn alle Trajektorien, die außerhalb des stationären Punktes starten, sich von diesem immer weiter entfernen oder wenn sich von den Trajektorien, die außerhalb des stationären Punktes starten, einige sich in den stationären Punkt bewegen und andere sich von diesem immer weiter entfernen.

(13) „Grenzzyklen-Verhalten" liegt vor, wenn Trajektorien für $t \longrightarrow +\infty$ in einen geschlossenen Orbit hineinlaufen (Grenzzyklen modellieren periodische Vorgänge, die sehr stabil gegenüber Störungen sind).

(14) „Bifurkations-Verhalten" liegt vor, wenn das dynamische System (und damit das beschreibende Differenzialgleichungssystem) außer von Z noch von einem (oder mehreren) äußeren Parameter(n) derart abhängt, dass sich die Struktur seines Flusses für bestimmte Parameterwerte wesentlich ändert.
Die Änderung der Struktur des Flusses kann als Symmetrieänderung des Systems gedeutet werden. Infolge einer Bifurkation kann das Gleichgewicht des Systems instabil werden und dann ein neues Gleichgewicht annehmen usw. Welchen Lösungszweig das System am Bifurkationspunkt (Gabelungspunkt) einschlägt, kann in Anwendungssystemen von stochastischen Effekten („Variationen", z.B. Fluktuationen), Transporterscheinungen im System und mikroskopischen Bias abhängen, die für das System eine „Selektion" bewirken. Sequenzen von Lösungsaufspaltungen sind möglich.

(15) „Versklavungs-Verhalten" ist ein Phänomen nichtlinearer Differenzialgleichungen dynamischer Systeme mit (einem oder mehreren) Parametern.
Das Phänomen der Versklavung tritt auf, wenn Systeme mit vielen Freiheitsgraden und dementsprechend vielen Variablen (z.B. physikalische Vielteilchensysteme) an kritischen Punkten (z.B. Phasenübergangspunkten, Bifurkationspunkten) nur noch wenige Freiheitsgrade zeigen und deswegen durch wenige Variablen beschrieben werden können (vgl. Schuster 1994, S. 16; Jetschke 1989, S. 105-108).

(16) (Deterministisches) „chaotisches Verhalten" liegt vor, wenn in einem Punkt benachbarte Trajektorien des dynamischen Systems exponentiell schnell auseinander laufen (vgl. Jetschke 1989, insbes. S. 143). Für die Analyse der Divergenz von Trajektorien wird der Ljapunov-Exponent herangezogen.
Chaotisches Verhalten darf nicht mit stochastischer Zufälligkeit verwechselt werden, obwohl sich maßtheoretische und stochastische Methoden für die Untersuchung chaotischen Verhaltens als nützlich erwiesen haben.
Intensiv untersucht wurden z.B. das chaotische Verhalten des Lorenz-Modells – es ist ein kontinuierliches dynamisches System mit drei Variablen – (vgl. Jetschke 1989, S. 130-138; Schuster 1994, S. 229-233) und der logistischen Abbildung – es ist ein (zeit-)diskretes dynamisches System mit einer Variablen und einem zusätzlichen Parameter – (vgl. Jetschke 1989, S. 117-128; Schuster 1994; Ebeling/Freund/Schweitzer 1998, S. 143-154; Zeitler/Neidhardt 1993, S. 9-62).

(17) Eine invariante abgeschlossene Menge A des Zustandsraums Z heiße „Attraktor", wenn es eine offene Umgebung U von A gibt, sodass für jede Trajektorie, die in U startet, ihr Abstand zu A für große Zeiten schließlich gegen null strebt.
Beispiele für Attraktoren sind: asymptotisch stabile Gleichgewichtszustände (Gleichgewichtspunkte), stabile Grenzzyklen und chaotische (vgl. Jetschke 1989, S. 104, 143, 148-153) oder seltsame (vgl. Schuster 1994, S. 104) Attraktoren im Zustandsraum. Nicht jeder chaotische Attraktor ist ein „Fraktal" (vgl. Jetschke 1989, S. 151-152).

(18) Ein „Fraktal" ist eine nichtleere Teilmenge von Z, der man sinnvoll eine von einer natürlichen Zahl oder von Null verschiedene (positive) Dimension zuordnen kann.

Beispiel: Für die KOCH-Schneeflocken-Kurve hat man die fraktale Dimension $d_F = ln4/ln3 = 1,2618\ldots$ bestimmt (vgl. Zeitler/Neidhardt 1993, S. 156).
Charakteristisch für viele Fraktale ist die Ähnlichkeit ihrer Teilstrukturen. Für eine Einführung in die Dimensionstheorie (vgl. Zeitler/Neidhardt 1993), für eine systematische Darstellung der Dimensionstheorie als ein Teilgebiet der allgemenen Topologie (vgl. Nagata 1965; Engelking 1995).

(19) Zerlegt man den Zustandsraum Z eines dynamischen Systems vollständig in n disjunkte Zellen Z_i (Partition des Zustandsraums genannt), dann durchläuft die Trajektorie des dynamischen Systems der Reihe nach Zellen des Zustandsraums (vgl. Ebeling/Freund/Schweitzer 1998, S. 122-134). Eine Verfeinerung der Partition des Zustandsraums (man nimmt kleinere Zellen, womit sich n vergrößert) führt zu einer Folge, die die Dynamik des Systems genauer erfasst. Indem man jeder Zelle Z_i des Zustandsraums Z in eindeutiger Weise einen Buchstaben (ein Symbol) a_i eines Alphabets A zuordnet, erhält man aus der Folge von Zellen eine Zeichenfolge und kann die „Komplexität" des dynamischen Systems anhand der ihm zugeordneten Zeichenfolge untersuchen.
Zwei für Zeichenfolgen definierte Komplexitätsmaße seien genannt:
(I) Die „algorithmische Komplexität" (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990, S. 303-318) einer Zeichenfolge ist definiert als die minimale Länge eines Computerprogramms (Algorithmus) – gemessen in bit –, das die Zeichenfolge erzeugt.
Die algorithmische Komplexität von Folgen, deren Folgeglieder alle konstant sind, oder von Folgen, deren Folgeglieder periodisch wiederkehren, ist klein. Zufallsfolgen haben maximale algorithmische Komplexität. (Folgen gleicher Länge sind zu vergleichen.)
(II) P. GRASSBERGER hat das Komplexitätsmaß „effective measure complexity (EMC)" vorgeschlagen (vgl. Ebeling/Freund/Schweitzer 1998, S. 105-108). Es genügt der Forderung, dass weder periodische noch zufällige Zeichenfolgen, sondern Folgen, in denen es viel Struktur zu entdecken gibt, „komplex" heißen sollen. Mithilfe von EMC sind viele interessante Strukturen unterscheidbar. Für Varianten von EMC und Informationen zu anderen Komplexitätsmaßen (vgl. Ebeling/Freund/Schweitzer 1998).
1. Anmerkung: Nur dynamische Systeme mit nichtlinearen Termen in den Systemgleichungen können komplexe Strukturen oder Information erzeu-

gen. Nichtgleichgewichtsthermodynamische Systeme sind von dieser Art (vgl. Nicolis/Prigogine 1987; Ebeling/Engel/Feistel 1990).
2. Anmerkung: Es ist nicht zu erwarten ist, dass der „Reichtum“ einer interessanten Struktur mithilfe von nur einer charakteristischen Größe (z.B. einem Komplexitätsmaß) erfasst werden kann.

Für weitere Informationen zur Mathematik der dynamischen Systeme und ihren Anwendungen sei pauschal auf die umfangreiche Literatur verwiesen.

3.2.3 Die mathematische Theorie dynamischer Systeme für die Wissenschaften

Unserem naturgeschichtlichen Ansatz entsprechend fassen wir die gesamte Erdgeschichte (allgemeiner: die Geschichte des Kosmos) als ein komplexes dynamisches System auf, zu dem selbstverständlich auch der Mensch zusammen mit seinem Wissen und Können gehört. Trotz oder wegen der Tatsache, dass der Erkenntnisapparat des Menschen für eine überlebensadäquate Verhaltensorientierung in seiner mesokosmischen Umwelt in evolutionsbiologischen Prozessen entstanden ist, findet der Mensch auch außerhalb seines Mesokosmos Strukturen vor, die er in Durchläufen der Schleife von Wahrnehmung, Handlung, Motorik und Umwelt als mehr oder weniger ähnlich oder als verschieden erkennt. Wir deuten nun an, wie die in den verschiedenen Wissenschaften unverstanden als Emergenzen oder Fulgurationen bezeichneten Phänomene und andere heuristisch formulierte Begriffe, die in den Systemtheorien der Wissenschaften vorkommen – z.B. (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994; Willke 1991) – Eigenschaften mathematischer dynamischer Systeme zugeordnet und auf diese Weise besser verstanden (m.a.W.: kognitiv effizienter repräsentiert) werden können. Dabei wird nicht behauptet, dass man wirklich in der Lage wäre, die heuristisch formulierten Systemtheorien der Wissenschaften auch nur halbwegs zufriedenstellend mithilfe der Mathematik der dynamischen Systeme zu formulieren.

1. „System“ und „Umwelt“, können räumlich real oder auch nur gedanklich getrennt sein. In mathematischen Modellierungen sind Wechselwirkungen von System und Umwelt (z.B. in thermodynamischen Modellierungen für naturwissenschaftliche Sachverhalte) stets durch das die Variablenkombinationen des Systems und die Variablenkombinationen der Umwelt gemeinsam modellierende Gleichungssystem (und eventuell auch in den

Randbedingungen) miteinander verknüpft. In einer solchen integrierten Modellierung evolviert die Entität „System und Umwelt“ so, dass in vielen Fällen von einer Koevolution von System und Umwelt die Rede sein sollte, während in Fällen, in denen sich System und Umwelt auflösen (Instabilität), nur noch eine Entität ohne System- und Umweltkomponente vorliegt.

2. Rückgekoppelte Prozesse, wie sie technischen Regelsystemen oder Systemen der organismischen Homöostase zu Grunde liegen, sind in dem das reale System mathematisch modellierenden Gleichungssystem enthalten. Die „Kybernetik“ (griech.: kybernētikē téchnē: Steuermannskunst) (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994, S. 182), als die Wissenschaft von den rückgekoppelten dynamischen Systemen ordnet sich entsprechend dieser Sichtweise der Wissenschaft von den dynamischen Systemen im Allgemeinen unter.

3. Die „Wechselwirkungen“ zwischen Systemkonstituenten bzw. ihren Aggregationen (in der STE auch „Interdependenzen“ genannt (vgl. Riedl 1975)) in einem dynamischen System entsprechen den mathematischen Verknüpfungen zwischen den Variablen für die Systemkonstituenten (in den das System modellierenden mathematischen Gleichungen). Nichtlineare Wechselwirkungsterme zeichnen die interessanten Systeme aus (nämlich solche, die komplexe Strukturen hervorbringen können).

4. „Nebengeordnete bzw. in hierarchischer Beziehung stehende Subsysteme eines dynamischen Systems“ lassen sich durch geeignete Wahl oder durch Zusammenfassung von Systemparametern oder Variablen in den Systemgleichungen ausweisen und deren Zeitentwicklung analysieren.
Werden beispielsweise – sehr fragwürdig – zwei Subsysteme A und B als in hierachischer Beziehung stehend bezeichnet, wenn B stark die Entwicklung von A, jedoch A kaum die Entwicklung von B bestimmen kann, und zwei Subssysteme A und B nebengeordnet genannt, wenn zwischen ihnen (fast) keine direkte Wechselwirkung besteht, dann lassen sich diese definierenden Bedingungen durch Relationen von Systemvariablen und Systemparametern ausdrücken.

5. Die Eigenschaft der Nichtinvarianz der Gleichungen eines dynamischen Systems unter Zeitumkehr, m.a.W. der Fall, dass eine Trajektorie des Systems nicht rückwärts in der Zeit durchlaufen werden kann, wird als

Zeitsymmetriebrechung, „Geschichtlichkeit“, „Historizität“ (oder „Tradierung“ bei RIEDL (vgl. Riedl 1975)), in der Thermodynamik als „Irreversibilität“ interpretiert.
Dynamische Systeme mit nichtlinearen Verknüpfungen zwischen den Variablen in den Systemgleichungen (nichtlineare Wechselwirkungen, nichtlineare Dynamik) sind im Allgemeinen nicht invariant unter Zeitumkehr.

6. Die im Abschnitt zur Mathematik dynamischer Systeme erläuterten Phänome Bifurkation (s.o. Item (14)) und Versklavung (s.o. Item (15)) sind Beispiele für sogenannte Emergenz- oder Fulgurationsphänome.
Physikalische Beispiele, die in diesem Zusammenhang ausführlich diskutiert wurden, sind das BÉNARD-Konvektionsphänomen sowie der Laser, z.B. (vgl. Nicolis/Prigogine 1987). In die Diskussion, was ein Vielkonstituentensystem, z.B. das BÉNARD-System, am Bifurkationspunkt dazu veranlasst, einen rechtsdrehenden Konvektionsstrom und keinen linksdrehenden hervorzubringen, wurde auch die Terminologie „Selektion“ getragen (vgl. Nicolis/Prigogine 1987), die hier natürlich von evolutionsbiologischen Zusammenhängen (der Variation und Selektion) abstrahiert zu verstehen ist. Die Ausbildung von rechtsdrehenden, anstatt linksdrehenden Konvektionsströmen ist gleichzeitig ein Beispiel für das Emergenzphänomen (hier einer räumlichen) „Symmetriebrechung“. Darüber hinaus geben NICOLIS und PRIGOGINE ein auf dem BÉNARD-System beruhendes Modell für ein informationserzeugendes System an (vgl. Nicolis/Prigogine 1987).

7. Das Aufreten eines „chaotischen Systemzustandes“ wird ebenfalls als Emergenzphänomen bezeichnet. Wie im Abschnitt zur Mathematik dynamischer Systeme erwähnt (s.o. Item (16)), ist „Chaos“ ein mathematisch präzise definierter Begriff.

8. Während „Prozess“ für die echte oder fiktive Zeitentwicklung eines dynamischen Systems steht und gelegentlich als die Gesamtheit der Pfade (Trajektorien) des dynamischen Systems (z.B. für stochastische Prozesse) interpretiert wird, bezeichnet „Organisation“ „das Verknüpfungsmuster der im System ablaufenden Prozesse. Sie kann durch eine Art Fließschema dargestellt werden.“ (vgl. Seiffert/Radnitzky 1994, s.v.: System, S. 333)

3.2.4 Der systemische Ansatz für die geplante Untersuchung und terminologische Vereinbarungen

Der Grund dafür – trotz der schon vielfach herausgestellten Unzulänglichkeiten – die Erdgeschichte dennoch als ein dynamisches System aufzufassen und diese Perspektive in den Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit zu stellen, besteht in dem folgenden methodischen Vorteil: Die Mathematik der dynamischen Systeme stellt zusammen mit quantitativen Resultaten aus ihren Anwendungen ein Hintergrundwissen und eine Terminologie und damit ein bereichsübergreifendes Werkzeug zur Verfügung, mit dessen Hilfe ein Erwartungshorizont erscheint, auf dem erdgeschichtliche Probleme strukturiert und qualitativ untersucht werden können.

Die Erfahrung, dass viele im Ansatz einfach aussehende dynamische Systeme ein sehr unübersichtliches Lösungsverhalten zeigen, wirft sogleich die Frage nach der Sinnhaftigkeit einer heuristischen Bearbeitung der viel schwierigeren erdgeschichtlichen Probleme auf. Auf diese Frage gibt es nur die eine Antwort: Das Risiko, Fehler bei heuristischen Argumentationen zu machen, kann nicht ausgeschlossen, aber verringert werden, indem möglichst viele Befunde, Theorien und Modellvorstellungen herangezogen werden, die die Argumentation stützen. Unter den Gesichtspunkten, dass die vorliegende Untersuchung nicht auf Prognoseversuche, sondern nur auf Erklärungen hinzielt und eine quantitative Bearbeitung der Probleme überhaupt nicht in Reichweite ist, ist ein heuristisches Vorgehen das einzig mögliche, insofern man auf die mit der vorliegenden Arbeit beabsichtigte Untersuchung nicht ganz verzichten will.

Für die weitere Arbeit treffen wir die folgenden terminologischen Vereinbarungen:

(1) Wir verwenden die Bezeichnung Trajektorie eines dynamischen Systems auch für dessen Orbit.

(2) Ein Beobachter kann nur Zustände eines Systems (und diese meist nur unvollständig) beobachten und die Zeitentwicklung eines Systems nur durch einen Vergleich von Zuständen zu mindestens zwei verschiedenen Zeiten erkennen. Beobachtet und vergleicht er mindestens zwei verschiedene Zustände eines Systems, so sei dafür kurz gesagt, dass er „Systemverhalten“ beobachte.

(3) Der Terminus „Wechselwirkung“ wird im allgemeinsten Sinne verwendet. Der Terminus „Interaktion“ ist den Wechselwirkungen vom Typ aufeinander bezogener Verhaltensänderungen zwischen Organismen vorbehalten.

(4) Weil die Begriffe „Struktur“ und „Funktion“ in nahezu jedem wissenschaftlichen Kontext (in Systemtheorien gehören sie zum Standardvokabular) vorkommen, jedoch in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet werden, findet man für sie in vielen Arbeiten auch eine Begriffsexplikation, so z.B. auch in (Piaget 1992).
Für die vorliegende Arbeit vereinbaren wir: Von einer „Struktur“ sei überwiegend dann die Rede, wenn Merkmale eines Zustandes oder mehrerer Zustände mit ihren Beziehungen zueinander im Zentrum des Interesses stehen. Im Gegensatz dazu sei überwiegend von einer „Funktion“ die Rede, wenn das Interesse auf den (möglichen) Abhängigkeiten (in der Realität: Wirkungen) liegt, die von Merkmalen eines Zustands mit ihren Beziehungen zueinander auf etwas anderes ausgehen.

Wir beziehen nun Position gegenüber Theorien – wie z.B. der Allgemeine Evolutionstheorie LUHMANNscher Prägung –, welche die evolutionäre Dynamik eines Systems mikrodynamisch mithilfe eines abstrakten Konzepts der „Variation und Selektion“ beschreiben: Selbstverständlich lassen sich die abstrakten Begriffe Variation und Selektion auf Atome, Moleküle, Organismen, Kulturen, Gedanken etc. adhoc anwenden und damit interessante Ergebnisse erzielen. Noch interessanter sind aber derartige Variations-Selektions-Konzepte erst dann, wenn in Anwendungen klar ist, was die materialen Objekte, was die materialen Ursachen und Mechanismen für die Variation sowie für die Selektion sind und wie die Emergenzschichten vom Atom bis zur Kultur (Systemebenen) material dabei zusammenhängen. In den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit wird das abstrakte Variations-Selektion-Konzept dewegen nicht adhoc auf beliebige (z.B. chemische, psychische oder wissenschaftssoziale) Strukturen angewandt, sondern es wird versucht, die materiale Basis, die Bedingung für die Möglichkeit der Herausbildung von neuen Strukturen – hier von Strukturen des mathematischen Wissens – ist, ein Stück weit herauszuarbeiten.

Vorweggenommen sei schon hier eine Einsicht, die bald immer klarer werden wird: Es wird uns nicht gelingen, die Dynamik für die raum-zeitliche Entwicklung unserer dynamischen Systeme zu identifizieren. Stattdessen werden wir nach Folgen von Systeminvarianten suchen, die die Dynamik unserer Systeme zwar nicht festlegen, aber doch soweit einschränken, dass wir mit ihrer Hilfe die Genese einiger Strukturen unseres mathematischen Wissens werden erklären können. Der Heuristik dieses Vorgehens wenden wir uns nun zu.

3.2.5 Forschungsheuristik

1. Erkennen und Erklären

Erkennen geht jedem Erklären voraus: Die Tatsache, dass das Erkennen jedem Erklären vorausgeht, hat bereits J.B. Lamarck erkannt (vgl. Riedl 2003, S. 31-42, insbes. S. 34 u. 42). Riedl gibt dafür auch eine Begründung (vgl. Riedl 1980; 1985; 2003): Jedes Erkennen basiert auf phylogenetisch erworbenen und ontogenetisch entwickelten Strukturen des ratiomorphen Appararts. Zum Beispiel bilden die Gesetze der Gestaltpsychologie (phylogenetisch voreingestellte selektive Wahrnehmungen) unseres ratiomorphen Apparats Strukturen unserer mesokosmischen Umwelt in Strukturen des Erkannten ab, denn in unserer mesokosmischen Umwelt musste sich unser ratiomorpher Apparat bewähren, sonst hätte der Mensch bis heute nicht überlebt. Durch fortwährende Akkumulation von Erfahrungen (ontogenetisch erworbene, d.h. gelernte Verhaltensstrukturen), die im Gedächtnis gespeichert werden in Abhängigkeit von ihrer emotionalen Färbung und der Häufigkeit der Situationen, in denen die Erfahrungen gemacht wurden, entwickeln sich Wissensstrukturen, aber auch selektive Erwartungshaltungen und dementsprechend selektive Wahrnehmungen eines den ratiomorphen Apparat „überformenden“ rationalen Apparats. Das Erkennen sowie Aufbauen einer kognitiven Repräsentation von einem Sachverhalt nannten wir „Verstehen“ (vgl. Fussnote 1) und setzten dafür die hypothetische-realistische Position voraus. In Schritten weiterer kognitiver Verarbeitungen, die auch entscheidend von gesellschaftlichen Anforderungen bestimmt sind, ist eine Läuterung des Erkannten in Richtung auf eine Erklärung hin möglich. Aber jeder Versuch, das Erkennen in der Wissenschaft durch das Erklären zu ersetzen, wird scheitern, weil das Erkennen dem Erklären notwendig vorausgeht.

Erklärungen in empirischen Wissenschaften: Erklärungen, wie sie von empirisch arbeitenden und besonders von Natur- und Ingenieurwissenschaftlern gegeben werden, sind kognitive Repräsentationen für Sachverhalte, die sich dadurch auszeichnen, dass sie Anleitungen für die empirische Reproduktion des Sachverhaltes durch eine hinreichend gute Präparation eines Teilsystems in der Evolution des Gesamtsystems enthalten. In dem soeben explizierten Sinne leistet somit eine Erklärung mehr als ein bloßes Verstehen, das keinen unmittelbaren Nutzen-, Anwendungs- und damit auch Aufwand-Spar-Aspekt enthält. Mit letzterem ist gemeint, dass mit der Möglichkeit der Reproduktion eines Sachverhaltes die Ressourcen für seine Neuerfindung eingespart werden können. Weil die bei einer kostengünstigen Reproduktion eingesparten Ressourcen an anderer Stelle eingesetzt werden können, dürfen Erklärungen zu den sozialen Ursachen für die Beschleunigung der kulturellen Evolution gezählt werden. Empirische Reproduzierbarkeit lässt sich sozialgefärbt auffächern in empirische Nachprüfbarkeit, Übertragbarkeit auf ähnliche Situationen und technische Anwendbarkeit des Sachverhalts bis zur Massenproduktion im großindustriellen Maßstab. Es drängt sich die Vermutung auf, dass gerade die modernen Erklärungen in den empirischen Wissenschaften, die zu den Voraussetzungen für unsere hochtechnisierte Gesellschaft zählen, seit der europäischen Neuzeit deswegen hervorgebracht wurden, weil sie Werte, Motive und Interessen vieler Menschen kognitiv positiv rückkoppeln. Insofern man die Konstruktion von Massenproduktionsprozessen als die Präparierung eines thermodynamischen Systems in einem Fließgleichgewichtszustand (metastabiler, stationärer Zustand) weit weg vom thermodynamischen Gleichgewicht auffasst, spiegeln diese Erklärungen kognitiv die technische Massenproduktion wider[12].

Heuristik des Erkennens: Wir fassen die Erde als ein sich in Raum und Zeit entwickelndes dynamisches System auf, wollen invariante und sich wandelnde Strukturen erkennen, beschreiben und, wenn es geht, erklären. Die hohe Komplexität des Systems erzwingt ein heuristisches Vorgehen. Die mathematische Theorie dynamischer Systeme, einzelwissenschaftliche Theorien (statistische Mechanik und Thermodynamik, synthetische Evolutionstheorie, STE, psychologische Modelle des Lernen und des Gedächtnisses, soziologische Theorien etc.) und harte wissenschaftstheoretische Konzepte (Theoriereduktionen, Erklärungen etc.) stehen im Hintergrund. Das Erkennen von Regelmäßigkeiten und Zusammenhängen, qualitative und heuristische Argumentationen, die auf eine Erklärung hinzielen, stehen im Vordergrund. Die folgende Liste enthält auch in der Wissenschaft vielfach bewährte Vorgehensweisen zur Reduktion von Komplexität auf dem Wege des Erkennens. Sie betreffen die Heuristik, und wenn

[12] Auch Bildungsinstitutionen kann man als präparierte thermodynamische Systeme in einem Fließgleichgewichtszustand weit weg vom thermodynamischen Gleichgewicht auffassen.

sie aus dem Bereich formaler Analysen stammen, werden sie hier nur qualitativ verwendet.

(1) Zerlege das System des Interesses in Teilsysteme und beurteile die Kopplungen, Rückkopplungen zwischen den Teilen sowie Selbstwechselwirkungen in den Teilen. Untersuche, wie sich Wirkungen in der einen Emergenzebene auf eine andere Emergenzebene auswirken.

(2) Suche nach Merkmalen und Eigenschaften von Systemkomponenten.

(3) Bestimme die unabhängigen, abhängigen, dominanten, kritischen, invarianten Variablen des Systems, unterscheide Input-, Output-, Steuer-, Prozessvariable und Parameter (z.B. Ordnungsparameter).
Beispiel: Gedächtnis, Gedächtnisstrukturen, Wissensstrukturen, Werte, Einstellungen, Motive sind Invarianten unterschiedlicher Stärke im emergenten System des Psychischen.

(4) Welche Variablen verhalten sich stabil unter gewissen Störungen? Welche Variablen bestimmen Übergangsphänomene wie z.B. Bifurkationen oder Versklavungen? Sind Arbeitsannahmen gerechtfertigt, denen gemäß das Verhalten einer Variablen vernachlässigbar klein gegenüber einer anderen ist?

(5) Inwieweit wird Systemverhalten durch die Entwicklung von Mittelwerten und Abweichungen davon charaktisiert?

(6) Führe Überlegungen zum Ressourcenmanagement des Systems durch. Welche Ressourcen sind wertvoll (z.B. weil sie begrenzt sind)? Gilt z.B. ein Optimalprinzip für ein Ressourcenmanagement?

(7) Wäge ab, welche einzelwissenschaftlichen Befunde, Theorien und Modellvorstellungen für die Untersuchung des Systems unter der gegebenen Fragestellung wichtig sind.

(8) Nutze Analogien, (partielle) Isomorphien oder Homologien, um Zusammenhänge zu entdecken und Hypothesen zu formulieren (Entdeckungszusammenhang).

Heuristik des Erklärens: Das Spektrum der in der Wissenschaftstheorie explizierten Erklärungsbegriffe ist in (vgl. Stegmüller 1974, Bd. 1) ausführlich zusammengestellt und kommentiert. Weil wir einen naturgeschichtlichen – also an den empirischen Wissenschaften orientierten und systemtheoretisch formulierten – Forschungsansatz gewählt haben, sollten wir uns an deduktiv-nomologische, induktiv-statistische, funktionale und (historisch-)genetische Erklärungen oder wenigstens an deren abgeschwächte Versionen einer partiellen oder unvollständigen Erklärung oder Erklärungsskizze halten. Wir werden dies auch mittelbar tun, verzichten aber darauf, unseren Erklärungsbegriff im Gefüge der wissenschaftstheoretischen Erklärungsbegriffe präzise zu disponieren.

Weil auch der Weg vom Erkennen zum Erklären ausschließlich über Heuristiken führt, ergänzen wir die Liste der Heuristik des Erkennens zunächst um Items, die das von uns Erkannte einer Erklärung näher bringen.

(9) Nutze Analogien, (partielle) Isomorphien oder Homologien, um Erkanntes zu erklären (Begründungszusammenhang).
Beispiel: E. Haeckels Einsicht, dass die Ontogenie die Phylogenie im Zeitraffer rekapituliert (Erkennen), könnte durch den Hinweis auf ein in der Ontogenie ablaufendes regulatorgenetisches Programm einer möglichen Erklärung zugeführt werden.

(10) Verwende Resultate und Methoden 1. der Wissenschaftstheorie, 2. der Einzelwissenschaften und 3. der Strukturwissenschaften (z.B. der Logik, Systemtheorie, Mathematik) auf der methodischen Ebene.
Führe nicht nur Befunde, Theorien und Modellvorstellungen an, die Überlegungen stützen, sondern auch solche, die ihnen widersprechen oder sie problematisieren.

(11) Beachte, dass Abstraktionen zwar schnell zu Allaussagen führen, dass aber jede Abstraktion einen Informationsverlust bewirkt.

(12) Da richtige Hypothesen zu früh verworfen und falsche wiederholt bestätigt werden können, sei hier die Strategie gewählt: Trotz einiger widersprechender Ergebnisse sei mit einer Hypothese oder fragwürdigen Arbeitsannahme weitergearbeitet, solange keine bessere verfügbar ist. Sie sei allerdings als solche gekennzeichnet.

(13) Wenn Ergebnisse zwar nicht widersprüchlich sind, aber nicht ins Bild passen, werden sie als solche gekennzeichnet, jedoch nicht verworfen.

(14) Versuche alle gewonnenen Kenntnisse untereinander möglichst vielfältig zu vernetzen.

(15) Überprüfe, ob die aus Resultaten (z.B. Befunden, Einsichten, Modellvorstellungen, Theorien), eventuell zusammen mit zusätzlichen Arbeitsannahmen gewonnenen Schlussfolgerungen, richtig (logisch und sachlich) und im Kontext sinnvoll sind.

(16) Bewerte Schlussfolgerungen auf ihre Stabilität und ihre Bias unter Änderungen der Prämissen (z.B. unter einer Änderung eines Parameterwertes) hin.

(17) Die meisten Schlüsse werden weder hinreichend noch notwendig sein.

(18) Stütze eine Überlegung gegebenfalls auf heuristisch formulierte „gesetzesartige" Aussagen, denen hohe Plausibilität zukommt, um sie einer Erklärung näherzubringen.

(19) Alle Argumentationen und Erklärungen werden aus der Beobachterperspektive gegeben. Argumente aus einer intentionalen Perspektive sind hilfreich, werden aber für die vorliegende Untersuchung in nicht intentionale Beobachteraussagen umformuliert.

(20) Insoweit die vorliegende Untersuchung funktionale Argumente verwendet, werden teleologische Argumente in teleonome Argumente übersetzt.

(21) Argumentiere gegebenenfalls mit dem schwachen anthropischen Prinzip (vgl. Vollmer 2003, S. 136-137), wenn Erklärungen außer Reichweite sind.

Wir explizieren nun den Erklärungsbegriff, der uns im Folgenden begleiten wird: Weil wir die Dynamik für die raumzeitliche Entwicklung der meisten Teilsysteme des dynamischen Systems Erde nicht identifizieren können, versuchen wir zeitgeordnete Folgen von Systeminvarianten zu finden, die die Dynamik unserer Systeme zwar nicht erfassen, aber doch soweit begrenzen, dass wir mit ihrer Hilfe die Genese von unbelebten materiell-energetischen, biotischen, psychischen und sozialen Strukturen nachzeichnen können, die Bedingungen für die Möglichkeit von Wissen sind und das Leben des Menschen bis in die Spitzen der Mathematik hinein prägen. Unser Vorgehen ist mit dem in 2.4.3 referieren BCD-Schema von Riedl verwandt: Mithilfe unserer Liste der Erkennens- und Erklärungsheuristik identifizierte Merkmale und Strukturen der Naturgeschichte sequenzieren wir in der Zeit und beurteilen ihre raumzeitliche Stabilität (Bürde) sowie die übriggebliebenen Freiheitsgrade, um damit nachweisen zu können, welche später entstandenen Strukturen aus früher entstandenen Strukturen hervorgegangen sind (Kanalisierung, Disposition). Im 4. Kapitel werden wir diesen „historisch-genetischen“ Erklärungsbegriff anwenden und sehen, wie weit wir damit kommen. Unser Erklärungsbegriff genügt auf Grund der Komplexität unserer Thematik den wissenschaftstheoretischen Standards für einen präzisen naturwissenschaftlichen Erklärungsbegriff nicht. Deswegen halten wir es für angemessener, nicht von einem Erklärungsbegriff, sondern von einer Erklärungsheuristik zu sprechen.

Einige sehr stabile invariante Strukturen (Emergenzen) und ihre Wechselwirkungen zählen zum wissenschaftlichen Standardwissen. Wir werden sie in 3.3 als solches ausweisen und in Form eines Multi-Layer-Modellschemas (kurz: ML-MS) zusammenfassen. Das ML-MS kann uns sowohl als Gerüst als auch zur Buchführung dienen: Probleme der Erdgeschichte werden wir im ML-MS erörtern und „neu entdeckte“ Invarianten und Wechselwirkung ins MS-MS eintragen.

Wir müssen es der zukünftigen, vor allem der empirischen Forschung überlassen, möglichst viele Fragen im Detail in Angriff zu nehmen und Befunde präzise – über unsere Erklärungsheuristik hinausgehend – zu erklären. Dafür sind selbstverständlich fachdisziplinäre Resultate sowie auflösungsstarke Methoden, Theorien und Modelle (z.B. der Psychologie, s. 2.4.4, 2.4.7 u. 2.4.8) nötig. Nichts spräche dagegen, auch dabei unser ML-MS zu verwenden.

2. Mathematikspezifische methodische Überlegungen

Bevor wir die 1. Frage nach sinnvollen didaktischen Konsequenzen aus der naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik beantworten können (ab Kap. 4), müssen drei Vorarbeiten hinreichend gut erledigt sein: 1. Wir müssen jene systemischen Effekte in der Erdgeschichte erkannt haben, die Bedingungen für die Möglichkeit dessen sind, was wir als Mathematik bezeichnen. 2. Es gilt zu versuchen, die Mathematikgeschichte in ihren großen Strukturen naturgeschichtlich zu rekonstruieren und den „Typus Mathematik “ anhand seiner Merkmale, einschließlich seines Wandels in der Zeit, herauszuarbeiten und in einer Begriffsexplikation der Mathematik festzuhalten. 3. Soweit es möglich ist, sind paradigmatische Bereiche mathematischen Wissens möglichst detailliert naturgeschichtlich zu rekonstruieren.

Weil von der Theorie der dissipativen dynamischen Systeme bekannt ist – und dies bestätigt die Alltagserfahrung –, dass in vielen unübersichtlichen Systemen oft nur wenige Variable das Verhalten des Systems bestimmen, während die anderen Variablen invariant oder einflusslos bleiben, sind wir zuversichtlich, dass wir ausgewählte Beispiele aus der Mathematik sogar – in unserem Sinne, s.o. – erklären können. Hier sei jedoch deutlich gesagt, dass über die in 2.4 angeführten Ansätze und Ergebnisse hinaus eine naturgeschichtliche Rekonstruktion und Begriffsexplikation des mathematischen Wissens ein sehr schwieriges ungelöstes Problem ist, das wir in dieser Arbeit im Allgemeinen nicht weiter, als es in 2.4 geschehen ist, verfolgen werden. Trotzdem glauben wir, dass wir die Nützlichkeit der naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik für die Mathematikdidaktik am Beispiel der Konstruktion eines Raumes mit mehr als 3 Dimensionen (s. Kap. 4) überzeugend zeigen können; wir werden dabei wesentlich die folgende 3. Arbeitsannahme verwenden.

Spezifische Annahmen für die Untersuchung der Mathematik

1. Arbeitsannahme: Nur vergleichsweise wenige Menschen der Gesamtpopulation bringen die Mathematik voran, und trotzdem nehmen wir hier an, dass sich Experten der Mathematik von anderen Menschen nicht in Eigenschaften ihres ratiomorphen Apparats, sondern nur in ihrem mathematischen Wissen und Können sowie in ihrem wissenschaftlichen Umfeld unterscheiden.
Kommentar: Aus evolutionspsychologischer Sicht sind alle Menschen gleich, und weil wir uns hier nicht für eine differenziert- oder differenziellpsychologische Unterscheidung interessieren, ist die formulierte Arbeitsannahme zweckmäßig. Gewiss gibt es Ausprägungen von Merkmalen eines individuellen Organismus, wie Intelligenz, „Größe“ des Arbeitsspeichers, Konzentrationsvermögen, Interesse an Strukturen, autistische Veranlagung etc., die zum Teil genetischen Ursprungs sind (vgl. Birbaumer/Schmidt 1996, S. 24-28) und die Menschen mit hoher Begabung und Interesse für Mathematik ausweisen (vgl. dazu auch 2.4.7).
2. Arbeitsannahme: Neue und bedeutende Mathematik wird überwiegend von jungen Erwachsenen bis zu Erwachsenen von mittlerem Lebensalter geschaffen.
Kommentar: Weder Wunderkinder noch Greise bringen die Mathematik entscheidend voran und neben einer Begabung für Mathematik bedarf es einer langen Lernphase in einer möglichst anregenden Umgebung, um bedeutende mathematische Leistungen erbringen zu können (vgl. Dieudonné 1985, S. 2-3) und vgl. auch 2.4.7.
3. Arbeitsannahme: Eine naturgeschichtlich reflektierte Rekonstruktion mathematischer Begriffsstrukturen im Labor (z.B. Unterrichtsraum) liefert fruchtbare

Einsichten in die Naturgeschichte dieser Strukturen.
Kommentar: Obwohl die Individuen, Überlegungen und wissenschaftssozialen Prozesse, die zur Entstehung einer mathematischen Begriffsstruktur in der Mathematikgeschichte führten, von den Rekonstruktionsprozessen dieser Begriffsstruktur im Labor verschieden sind, sind doch Menschen von früher wie von heute mit der gleichen biologischen Ausstattung an den gleichen Mesokosmos adaptiert und haben – insgesamt gesehen – nur wenig verschiedene Wissensbasen. Heutige Lernende unterscheiden sich deswegen aus naturgeschichtlicher Sicht fast nicht von den Menschen, die eine mathematische Begriffsstruktur erstmals erfanden. Sie unterscheiden sich lediglich in den „höheren" Emergenzebenen, nämlich darin, dass die einen die Schöpfer, die anderen die Lernenden sind und die heute Lernenden später geboren wurden. Diese Arbeitsannahme verbindet so sinnfällig – und das ist für uns wichtig – die Geschichte der Mathematik mit der Mathematikdidaktik und erhält in der folgenden Formulierung eine Pointe: Weil wir nicht in der Zeit zurückreisen können und uns auch immer nur ein lückenhaftes Datenmaterial vorliegt, übertragen wir – versuchsweise – die Regel von Haeckel, dergemäß die Ontogenie die Wiederholung der Phylogenie im Zeitraffer ist, auf die mathematische Wissenbildung. Insbesondere diese Arbeitsannahme werden wir im 4. Kapitel bei der naturgeschichtlichen Rekonstruktion eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen wesentlich verwenden und auch sehen, wie weit wir damit kommen.

Eine Heuristik für den Umgang mit den Daten aus der Geschichte der Mathematik:

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik zeigt, dass mathematische Begriffe, Methoden und Gebiete durch Abstraktion, Generalisierung, Transformation, Integration und Tradierung einem Wandel in der Zeit unterliegen. Dabei gehen alte Gebiete meist als Spezialfälle oder Teilgebiete in einem neuen umfassenderen Gebiet auf, und Bezeichnungen alter Gebiete werden nicht mehr verwandt oder werden für das neue umfassendere Gebiet übernommen. Deswegen darf eine Begriffsstruktur der Gegenwartsmathematik – z.B. das Maß einer Menge – nur auf eine entsprechende Begriffsstruktur der Vergangenheit – z.B. die Größe einer Fläche – bezogen werden, nachdem der Begriffswandel in Abhängigkeit von der Zeit und vom Ort nachgezeichnet wurde. Und auch auf einer großen raumzeitlichen Skala muss so vorgegangen werden, wenn ergründet werden soll, was von der heutigen Mathematik bereits in der Mathematik des 19. Jahrhunderts, was von der Mathematik des 19. Jahrhunderts in der Mathematik des 18. Jahrhunderts, ... und was von der heutigen Mathematik schon beim Homo sapiens vor 40000 Jahren oder noch früher beim Homo erectus wiederzufinden ist.

Unsere methodischen Überlegungen sind nun abgeschlossen und wir stehen vor der Aufgabe, mithilfe der oben formulierten Heuristiken das dynamische System Erde zu analysieren und zumindest seine wesentlichsten invarianten Strukturen (Emergenzen) mit ihren Wechselwirkungen herausarbeiten und zu schematisieren.

3.3 Der naturgeschichtliche Forschungsansatz – 2. Teil

Wir setzen unseren naturgeschichtlichen Forschungsansatz (s. 3.1) nun fort, indem wir unbelebte materiell-energetische – kurz: unbelebte – (s. 3.3.1), lebendige materiell-energetische – kurz: biotische – (s. 3.3.2), psychische (s. 3.3.3) und soziale (s. 3.3.4) emergente Strukturen der Erdgeschichte identifizieren, klassifizieren, in ein raum-zeitlich geordnetes Multi-Layer-Modellschema (kurz: ML-MS) zusammenfassen und darin verknüpfen (s. 3.3.5). Und da eine emergente Phänomenklasse in der Regel nicht nur von einer wissenschaftlichen Disziplin untersucht wird, gewinnen wir in natürlicher Weise eine multidisziplinäre kognitive Repräsentation unserer Erdgeschichte, deren Ausarbeitung über den gegenwärtigen Kenntnisstand hinaus zu den Aufgaben zukünftiger – vor allem empirischer Forschung – zählt.

Wir sprechen von unbelebten, biotischen, psychischen bzw. sozialen Systemen, wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf die unbelebten, biotischen, psychischen bzw. sozialen Emergenzphänomene richten. Demgegenüber ist von physikalischen, biologischen, psychologischen bzw. soziologischen Systemen die Rede, wenn die Aufmerksamkeit auf die Wissenschaften gerichtet ist, die sich mit den unbelebten, biotischen, psychischen bzw. sozialen Sachverhalten befassen. Nachdem wir mit dieser sprachlichen Unterscheidung problematisierend auf den Unterschied von Realität und ihrer Repräsentation hingewiesen haben, erlauben wir uns, die Genauigkeit zurückzunehmen, und gelegentlich austauschbar von biologischen bzw. biotischen Systemen zu sprechen.

Auf die Tatsache, dass vor allem noch sehr viel empirische in Verbindung mit quantitativ theoretischer Forschung nötig ist, bis uns eine zuverlässige und Emergenzebenen umfassende kognitive Repräsentation von der Erdgeschichte vorliegt, sei hier besonders hingewiesen. Deswegen wagen wir es zwar, invariante Strukturen, die wir für wichtig erkannt haben, auszuweisen und das Wirkungsgefüge ihrer Aktivitäten mithilfe von Funktionen zu beschreiben, sehen uns aber nicht in der Lage, die Zeitentwicklung (Dynamik) auch nur ansatzweise operationalisieren zu können. Wir kommen darauf, vor allem in 3.3.5, noch zu sprechen.

3.3.1 Unsere Erde als unbelebtes materiell-energetisches System

Um die Genese unseres mathematischen Wissens mithilfe unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes erklären zu können, reicht es zwar überwiegend, sich allein auf die Erdgeschichte zu beschränken. Doch für die Begründung der für die vorliegende Arbeit wichtigen Tatsache, dass der uns umgebende Ortsraum – kurz: Raum – 3-dimensional ist, müssen wir schwerere Geschütze auffahren.

Der Raum ist 3*-dimensional*

Die 3-Dimensionalität des Raumes ist für uns nicht nur eine Alltagserfahrung. Sie geht unumgänglich in jede physikalische Messtechnik ein und besteht nicht nur auf der Erde, sondern, nach allem was wir wissen, auch im Kosmos. Raum und Zeit sind in der Relativitätstheorie zwar zusammengefasst zur Raum-Zeit, deren Metrik und Krümmung durch die Massenverteilung bestimmt sind, aber auch hier wird die 3-Dimensionalität des Raumes von Anfang an hineingesteckt. Es gibt einige wissenschaftliche Begründungen für die 3-Dimensionalität des Raumes (vgl. Janich 1989, Teil I, Kap. 3). Sie beruhen auf einer Anwendung des sogenannten schwachen anthropischen Prinzips (vgl. Vollmer 2003, S. 136), demgemäß aus dem Nichtbestehen einer für unser Dasein wichtigen Eigenschaft in einer empirisch gestützten Theorie auf die Unmöglichkeit unserer Existenz (z.B. als Folge der Instabilität unseres Kosmos oder Sonnensystems) geschlossen wird. Eine physikalische Erklärung für die 3-Dimensionalität des Raumes derart, dass sie aus einer empirisch gestützten physikalischen Theorie folgt, ist nicht bekannt, doch wurden solche Theorien bereits vorgschlagen: Zur Beschreibung unseres Kosmos unmittelbar nach seiner Entstehung (Urknallhypothese) sind im Rahmen vereinheitlichender Theorienentwürfe auch Stringtheorien vorgeschlagen worden, in deren Ansätzen die Dimensionszahl des (Orts-)Raumes zunächst offen bleibt und erst nachträglich durch physikalisch motivierte mathematische Konsistenzbedingungen (Zentralerweiterungen von Lie-Algebren) festgelegt wird. Die vereinheitlichenden Theorien wurden zwar auf der Grundlage von einigen empirisch nachgewiesenen kosmologischen und elementarteilchentheoretischen Eckdaten konstruiert, doch eine empirische Evidenz gibt es bis heute für sie nicht. Ihnen entsprechend war der Kosmos unmittelbar nach dem Urknall sehr klein, extrem heiß und aus den ursprünglich mehr als drei Dimensionen kondensierten infolge seiner Expansion die drei Raum-Dimensionen aus, die wir heute im Alltag erleben. Dieser Prozess endete bereits nach so kurzer Zeit, dass der Raum fast genau so lange 3-dimensional ist, wie der Kosmos alt ist. Später – in einer Kühle, die noch heißer war als die Temperatur einer brennenden Wasserstoffbombe – entstanden die Elementarteilchen, aus denen auch die Materie unserer Alltagswelt aufgebaut ist. In allen zugänglichen Zuständen der Natur – selbst in hochenergiephysikalischen Experimenten, die auf kleinstem Raum bei extrem hohen Temperaturen ablaufen, die aber im Vergleich zu den Temperaturen unmittelbar nach dem Urknall noch extrem kalt sind, – ist der Raum 3-dimensional. Da eine biologisch-kulturelle Evolution gemäßigte Temperaturen erfordert, befinden wir uns gewiss fern von jenen Zuständen, die unmittelbar nach dem Urknall herrschten, und erfahren den Raum, in dem wir leben, als 3-dimensional. Aus physikalischer Sicht, so halten wir hier fest, ist unser Raum seit etwa $13,6 \cdot 10^9$ Jahren konstant 3-dimensional – d.h. alle seit dieser Zeit im dynamischen System Kosmos weiterhin bestehenden materiell-energetischen Wechselwirkungen lassen die Dimensionszahl des Raumes unverändert – und deswegen eine extrem stabile Invariante, die als Bedingung für die Möglichkeit und Inspiration von mathematischem Wissen (insbes. Geometrie) nicht hoch genug bewertet werden kann. Nach diesem kosmologischen Exkurs (pauschal sei auf die umfangreiche Literatur und für den genauer interessierten Leser auf die Datenbank arXiv.org verwiesen) wenden wir uns unserer Erdgeschichte zu.

Unsere Erde als physikalisches und chemisches System

Das Sonnensystem, zu dem unsere Erde gehört, entstand vor gut $4,6 \cdot 10^9$ Jahren. Spätestens mit der Kondensation des Protoplaneten Erde zum Planeten setzte die chemische Evolution auf der Erde ein. Vor $4,5 \cdot 10^9$ Jahren war die

Kondensation spätestens abgeschlossen und seitdem haben sich die Atomsorten, aus denen die Erde besteht, in ihren prozentualen Anteilen kaum verändert. Die ältesten bekannten Gesteine der Erdkruste sind etwa $3,8 \cdot 10^9$ Jahre alt. Detailierte Informationen über die physikalische und chemische Evolution der Erde findet man z.B. in (Möhn 1984, Siewing 1982, Ebeling/Engel/Feistel 1990).

Die Erde wird hier als ein sich nach den Gesetzen der Physik und der Chemie in Raum und Zeit entwickelndes *unbelebtes materiell-energetisches dynamisches System* aufgefasst, zu dessen Beschreibung neben Physik und Chemie auch die Geophysik, Geologie, Mineralogie u.a. beitragen. Während z.B. das Wetter auf der Erde kurzzeitig starke Schwankungen zeigt, waren und sind Atmosphäre, Meere und Kontinente in ihrer physikalischen und chemischen Zusammensetzung sowohl im Kleinen wie auch im Großen nur sehr langsam in der Zeit veränderliche Größen. Bezogen auf die Lebenszeit menschlicher Individuen dürfen deswegen die meisten geophysikalischen Gegebenheiten, so z.B. die Lage von Flüssen, Gebirgen, Bodenschätzen und weiteren Ressourcen als raumzeitlich robuste Invarianten des Systems Erde betrachtet werden.

In 3.1 wurde erläutert, in welchem Sinne es nützlich ist, neben einer physikalischen Beschreibung auch eine chemische Beschreibung einzuführen und dementsprechend auch von chemischen Systemen zu sprechen. Hier bleibt noch nachzutragen, dass der Übergang von der physikalischen Systembeschreibung zur chemischen Systembeschreibung in der Sprache der mathematisch dynamischen Systeme – vgl. 3.2.2 und 3.2.3 – grundsätzlich eine Reduktion von Systemfreiheitsgraden bedeutet. Der Übergang von Atomen zu stabilen Atomverbänden (z.B. Molekülen) reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade des ursprünglichen Systems durch die Bildung von Kollektiven (Molekülen), die einen komplexeren Aufbau haben als die Atome. Und alle neuartigen Wechselwirkungen, die die Kollektive zeigen, gehen aus den ursprünglichen, also physikalischen Wechselwirkungen hervor. Um die aufgezeigten Zusammenhänge kognitiv möglichst einfach zu repräsentieren, werden nun die chemischen Systeme als Subsysteme des physikalischen Systems ausgezeichnet und wegen der höheren Komplexität der chemischen Kollektive gegenüber den physikalischen graphisch so dargestellt, dass eine chemische Systemebene über der physikalischen Systemebene erscheint, siehe Abbildung 3.1. Auf dieser Darstellung beruht das in diesem Kapitel zu entwickelnde ML-MS. Später, siehe Abbildung 3.2, werden wir die physikalische und die chemische Systemebene zusammen durch die unbelebte materiell-energetische bzw. physikalische Systemebene repräsentieren.

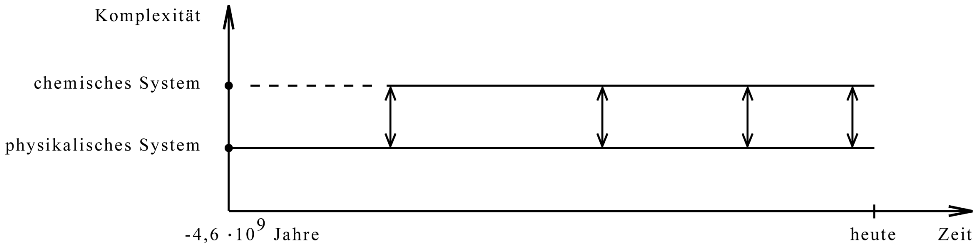


Abbildung 3.1: Kognitive Repäsentation chemischer Systeme und physikalischer Systeme. In jeder Systemebene bestehen Selbstwechselwirkungen (nicht eingezeichnet) und zwischen den beiden Systemebenen bestehen Wechselwirkungen (eingezeichnet). Die weiter rechts beginnende obere durchgezogene Linie zeigt an, dass chemische Systeme später als physikalische Systeme aufgetreten sind.

3.3.2 Biotische Systeme

Unter den materiell-energetischen Systemen der Erde erkennen wir solche, die sich durch DNS-Replikation reproduzieren. Wir bezeichnen sie als „lebende Systeme“ oder *biotische Systeme*, sie sind Forschungsgegenstände der Biologie. Jedes lebende (also biotische) System kann auch als ein physikalisches oder chemisches System angesehen werden, während die Umkehrung nicht gilt, weil nicht jedes physikalische oder chemische System das Emergenzphänomen der DNS-Replikation zeigt. Richten wir unser Interesse an einem lebenden System nicht auf dessen physikalische Eigenschaften, sondern nur auf dessen biotische Emergenzphänomene – die aus physikalischer Sicht nur Kollektiveigenschaften eines physikalischen Systems sind –, dann empfiehlt es sich, um dies Vorgehen kognitiv einfacher zu repräsentieren, das biotische System als Subsystem des zu Grunde liegenden physikalischen Systems auszuzeichnen und es wegen der höheren Komplexität seiner biotischen Kollektive gegenüber den physikalischen graphisch so darzustellen, dass eine biotische Systemebene über der physikalischen Systemebene erscheint, siehe Abbildung 3.2.

Wann die biotische Evolution in der chemischen Evolution auf der Erde einsetzte, ist nur vage bekannt: Man nimmt an, dass dies vor etwa $4 \cdot 10^9$ Jahren der Fall war (vgl. Möhn 1984, S. 22, 63). Die biologische Phylogenese, also der Entwicklungspfad vom Beginn des Lebens auf der Erde bis zu den ausgestorbenen bzw. heute lebenden Spezies ist in ihren Verzweigungen teilweise umstritten; einerseits stellen neue Befunde Verzweigungen im Stammbaum in Frage, andererseits hängen die Verzweigungen auch von theoretischen Annahmen ab, aus denen sich die Verzweigungen ergeben (vgl. Burda/Hilken/Zrzavý

2008; Lecointre/Le Guyader 2006). Wir haben in 2.4.3 (im Zusammenhang mit der STE von Riedl) schon darauf hingewiesen, dass die Rekonstruktion von biologischen Stammbäumen mithilfe höherer Taxa bis heute große Schwierigkeiten macht und insbesondere die synthetische Evolutionstheorie dafür keine Lösungen anbietet. Trotz dieser Schwierigkeiten geben wir nun einen Abriss der Entwicklung von den ersten Lebewesen auf der Erde zum Homo sapiens, damit erstens der Pfad der Naturgeschichte bis zum Menschen der Gegenwart und zweitens unser naturgeschichtlicher Forschungsansatz möglichst nachvollziehbar werden. Drittens wird uns der Abriss in 4.4.2 für unsere Überlegungen zur Phylogenese unseres Gehörs und unseres Gesichtssinnes eine Orientierung sein.

> Als erste Lebewesen werden die *Protobionten* diskutiert. Als solche werden Hyperzyklen in morphologischen Einheiten (Mikrosphären) bezeichnet. Dabei handelt es sich um hypothetische Formen, da entsprechende Fossilien nicht bekannt sind (vgl. Möhn, 1984, S. 22, 63, 70). Die ersten *Prokaryonten* (Einzeller ohne Zellkern) traten vor $3,8 \cdot 10^9$ spätestens vor $3,5 \cdot 10^9$ Jahren auf (vgl. S. 22). Erst nachdem vor etwa $1,8 \cdot 10^9$ oder vor $1,7 \cdot 10^9$ Jahren eine oxidierende Sauerstoffatmosphäre entstanden war, konnten sich *Eukaryonten* (Einzeller mit Zellkern) bilden, deren frühste Vertreter nicht älter als etwa $1,7 \cdot 10^9$ Jahre sein sollen. Mitose und Meiose sind entscheidende Neuerwerbungen der eukaryontischen Zelle (vgl. S. 68). Auch entwickelte sich bei den Eukaryonten erst Sexualtiät (Prokaryonten haben keine Sexulalität), sie hat an der explosiven Vermehrung eukaryontischer Zellen Anteil (vgl. S. 61). Von den heute bekannten *Metazoen* (eukaryontische Vielzeller) sind die ältesten etwa $0,7 \cdot 10^9$ Jahre (vgl. S. 68), die ältesten mit einem Skelett etwa $0,6 \cdot 10^9$ Jahre alt (vgl. S. 30). Doch erwartet man Funde von Metazoen mit einem Alter von bis zu $0,9 \cdot 10^9$ Jahre (vgl. S. 70). Auch die Nervenzelle entstand vor etwa $0,7 \cdot 10^9$ Jahren (vgl. Joseph 1994, p. 67). Vor etwa $0,5 \cdot 10^9$ Jahren gab es im maritimen Milieu bereits viele Tierstämme der Wirbellosen (vgl. Möhn 1984, S. 30). Ebenfalls vor etwa $0,5 \cdot 10^9$ Jahren traten erste *Vertebraten* (Wirbeltiere) (vgl. S. 72) im maritimen Milieu auf. Vor etwa $360 \cdot 10^6$ Jahren – kurz: 360 MJ – (im Übergangsbereich des Erdzeitalters Devon zum Karbon) war die Entwicklung der *Tetrapoden* (der vierfüßigen Teilgruppe aller Vertebraten) so weit fortgeschritten, dass sie vom Leben in wässrigem Milieu zum Leben auf dem Land übergehen konnten (vgl.

Kämpfe/Kittel/Klapperstück 1993, S. 322-324). Entlang einer Linie über *Reptilien*, insbesondere *Synapsiden*, und *Therapsiden* (säugetierähnliche Reptilien, vgl. Kap. 4 Fußnote 4) traten in der oberen Trias (231-214 MJ) die ersten *Mammalia* (Säugetiere), im mittleren Jura (188-164 MJ) die ersten *placentalen* (lebendgebärenden) *Säugetiere* auf, deren insektivore Formen (*Insektivore* sind Insektenfresser) bis in die Kreidezeit (144-66 MJ) zurückverfolgt werden können (vgl. S. 326). Am oberen Ende der Kreidezeit traten die ersten *Primaten* auf. Aus den *abricolen Insektivoren* des Paläozäns (65-56 MJ) entwickelten sich die *Prosimiae* (Halbaffen) und zum Ende des Eozäns (vor ca. 35 MJ) die *Simiae* ((echten) Affen, auch *Anthropoiden* genannt) (vgl. Klix 1993, S. 36). Während der hier skizzierte Teil der biologischen Evolution der Erde in Richtung auf den Menschen hin weitgehend unbestritten ist, sind die folgenden Aufspaltungen weniger sicher (vgl. Weniger/Irle 1998, S. 115-117). Im Oligozän (vor ca. 35-23,5 MJ) spalteten sich die Simiae. Die dabei entstandene Linie der *Catarrhini* (Altwelt- oder Schmalnasenaffen) teilte sich ebenfalls noch im Oligozän wobei die Linie der *Hominoidea* (Menschenähnliche) entstand, zu denen auch die rezenten Spezies Gibbon, Siamang, Schimpanse (Pan), Orang-Utan, Gorilla und Homo (Mensch) gehören (vgl. Kreisel-Korz 1998, S. 141 u. S. 17; Weniger/Irle 1998, S. 116-117). Von den Hominoidea spaltete vor ca. 20 MJ eine erste Linie zu den *Hylobatidae* (Gibbonartigen) und vor ca. 15 MJ eine zweite Linie in Richtung des *asiatischen Menschenaffen* (Orang-Utan) ab, worüber auch weitgehend Konsens besteht. Die Teilgruppe der Hominoidea, bestehend aus Gorilla, Orang-Utan und Pan, werden als *Pongidae* (Menschenaffen) bezeichnet. Die nach diesen Abspaltungen übriggebliebene dritte Linie führt auf eine Gruppe, die die rezenten *afrikanischen Menschenaffen* (Pan, Gorilla) und den rezenten *Homo* (Mensch) enthält (vgl. Weniger/Irle 1998, S. 117). Die enge phylogenetische Verwandtschaft von rezentem Menschen und rezenten Menschenaffen bestätigt eine DNA-Übereinstimmung von 98,4% dieser Gruppen (vgl. Ewert 1998, S. 39). Die möglichen Vorfahren des Homo, aus der Zeit, nachdem sich sowohl Pan als auch Gorilla abgespalten haben, werden als *Hominidae* (Menschenartige) bezeichnet. Das charakteristische apomorphe (neue gemeinsame) Merkmal der Hominidae ist eine sie zur Bipädie (aufrechter Gang) befähigende anatomische Ausstattung. Die Hominidae werden in die zwei Gruppen *Australopithecinae*

> (Südmenschenaffen) und *Homo* (Menschen) eingeteilt. Gesicherte Funde von Australopithecinae liegen für die Zeit von ca. 4,5-1,0 MJ vor. Frühste gesicherte Funde aus der Gruppe Homo sind ca. 2,3 MJ alt. Neben anderen Merkmalen sind die Vertreter der Gruppe Homo durch den Gebrauch, die Lagerung sowie die Herstellung von Werkzeugen charakterisiert. Als frühster Vertreter der Gruppe Homo gilt der *Homo habilis* (geschickter Mensch); fossile Funde belegen sein Dasein in der Zeit von 2,3-1,6 MJ v.Chr (vgl. Weniger/Irle 1998, S. 123). Das postcraniale Skelett (unterhalb des Schädels) des später als vor 2-0,3 MJ lebenden *Homo erectus* (aufgerichteter Mensch) gleicht bereits dem Skelett des vor ca. 0,2 MJ vermutlich aus Afrika stammenden *Homo sapiens* (einsichtiger Mensch). Mit dem Homo sapiens liegt aus biologischer Sicht bereits der heute lebende (rezente) Mensch vor; er darf nicht mit dem *Homo neanderthalensis* verwechselt werden, der zeitweise gleichzeitig mit ihm gelebt hat. Repräsentanten für den Homo sapiens seit der vor ca. 0,04 MJ einsetzenden beschleunigten kulturellen Evolution sind der inzwischen ausgestorbene *Cro-Magnon Mensch* und der bis *heute lebende moderne Mensch*.

Die Tatsache, dass die ersten biotischen Emergenzphänomene erdgeschichtlich erst vor etwa $4 \cdot 10^9$ Jahren auftraten, nachdem die Erde schon ein Alter von etwa $1 \cdot 10^9$ Jahre hatte, ist in der Abbildung 3.2 berücksichtigt. Analog zur Situation in der Abbildung 3.1 sind die biologischen Systeme der Erde über dem physikalischen System Erde eingezeichnet. Im physikalischen System sowie in jedem biologischen System gibt es erstens Selbstwechselwirkungen und zweitens bestehen zwischen jedem biologischen und dem physikalischen System Wechselwirkungen in beide Richtungen. Es liegt nun nahe, auch die Gesamtheit der biologischen Systeme, die in der biotischen Evolution entstanden sind, nach weiteren Emergenzphänomenen zu klassifizieren und für diese – nach wachsender Komplexität geordnet – weitere Systemebenen einzuführen. Dieser Gedanke wird in den folgenden Abschnitten (psychisches, soziales, kulturelles System) weitergeführt.

Dass das bisher entwickelte ML-MS für die Analyse von Systemen nützlich ist, wird anhand des folgenden Beispiels erläutert; es hat die Zusammenhänge von unbelebter materiell-energetischer und biotischer Systemebene zum Gegenstand:

> Bekanntlich steigt mit zunehmender Tauchtiefe der Stickstoffgehalt im Blut eines Tauchers. Früher, als diese Zusammenhänge nicht bekannt

waren, wusste man lediglich aus Erfahrung, dass Taucher (biologisches System), wenn sie aus großen Tiefen schnell aufsteigen (physikalisches System), gesundheitliche Probleme bekommen, eventuell sogar sterben. In dieser Formulierung scheint es so, als gäbe es eine direkte Wechselwirkung zwischen dem physikalischen System (z.B. Meer, interessante unabhängige Variable: Tauchtiefe) und dem biologischen System (Taucher, interessante abhängige Variable: Stickstoffgehalt im Blut des Tauchers).

Mithilfe des ML-MS wird aber deutlich, dass dies nicht der Fall ist, sondern, dass es sich – genau betrachtet – dabei um eine auf biotische Emergenzphänomene verkürzte Formulierung einer physikalischen Wechselwirkung des physikalischen Systems „Taucher" mit dem physikalischen System „Meer" handelt: Man betrachte dazu die Atmung, den Blutkreislauf etc. des Tauchers mit ihren Wirkungen auf seinen gesamten Organismus als ein physikalisches System, das im wesentlichen aus Atomverbänden besteht, die der Gravitation und der elektromagnetischen Wechselwirkung unterworfenen sind, ohne dabei zu verlangen, dass eine vollständige Systembeschreibung auch nur ansatzweise möglich ist. Damit ist erreicht, dass man den Taucher und das Meer auf die gleiche, nämlich auf die physikalische Beschreibungsebene zurückgeführt hat. Nun studiert man funktional den Stickstoffgehalt im Blut des physikalischen Systems „Taucher" in Abhängigkeit von der Tauchtiefe (er steigt mit dem hydrostatischen Druck) im physikalischen System „Meer" unter der Annahme, dass die anderen physikalischen Größen näherungsweise unberücksichtigt bleiben dürfen. Der Stickstoffgehalt ist aber, auf das lebende Makrosystem „Taucher" bezogen, ein biologisch interessanter Index, denn beim zu raschen Auftauchen wird der im Blut des Tauchers gelöste Stickstoff zu schnell wieder abgegeben, was infolge von Stickstoffbläschen im Blut eine Luftembolie auslösen und das Ableben des Tauchers zur Folge haben kann.

Es sei im Anschluss an dieses Beispiel noch einmal betont, dass sowohl die Auszeichnung des biologischen und des physikalischen Systems als auch die Auszeichnung der Wechselwirkungen zwischen beiden ein (seinen Interessen und der Sache angemessener) Akt eines Beobachters ist.

Aus der Sicht unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes ist die DNS-Replikation eine weitreichende und stabile Invariante der Naturgeschichte, die deswegen sogar zur Definition der Emergenzklasse der biotischen Systeme verwendet wird. Die biotischen Systeme werden durch weitere invariante Merkmale, Strukturen, Funktionen, Prozesse, Eigenschaften und theoretische Begriffe klassifiziert. Wir führen nun jene Begriffe an, die sich auf die Invarianten beziehen, mit deren Hilfe wir das die biotische Emergenzklasse strukturierende Teilgerüst unseres ML-MS (siehe Abbildung 3.2) konstruieren werden. Das ML-MS dient uns zur kognitiven Repräsentation für invariante Strukturen der Naturgeschichte.

1. Für die kognitive Repräsentation der zeitlichen Entwicklung biotischer Systeme haben sich die Begriffe Phylogenese (Stammesgeschichte von Organismen) und Ontogenese (Indvidualgeschichte eines Organismus) bewährt. Dabei bezeichnet die *Phylogenese*[13] einer Spezie (Art) in Anlehnung an Maturana und Varela (vgl. Maturana/Varela 1987, S. 116) eine Abfolge von durch reproduktive Beziehungen (z.B. Meiosen) verwandten Organismen und die *Ontogenese*[14] (vgl. Maturana/Varela 1987, S. 84) den Verlauf des strukturellen Wandels eines Organismus in seiner Umwelt. Dieser strukturelle Wandel umfasst die Zeit von der Entstehung des Organismus (im Reproduktionsprozess, Bildung der Zygote) bis zum Verlust seiner Organisation (im Tod). Der Begriff *Spezie*[15] bezeichnet eine fortpflanzungsfähige Population von Organismen. Da auch sich nicht reproduzierende Organismen in einer Population (gleichgültig, ob sie reproduktionsfähig sind oder nicht) bis zu ihrem Tode mit ihrer Population (sie ist Teil ihrer äußeren Umwelt) wechselwirken, ist es sinnvoll, jede Ontogenese als ein sehr kleines Teilstück der Phylogenese der Population auch dann aufzufassen, wenn der Organismus keine Nachkommen gezeugt hat. Beispielsweise wirken sich nicht reproduzierende Organismen (z.B. Arbeitsbienen), dadurch dass sie an sozialen Prozessen (siehe unten) der Population (z.B. Brutpflege) teilnehmen, indirekt an der Phylogenese der Population mit.

Wir vereinbaren nun noch einige Sprechweisen für die Verwendung von Begriffen, deren Schattierungen wir hier nicht nachgehen: Kontinuität für die Phylogenese einer Art besteht, solange hinreichend viele Organismen der Art an die Umwelt *adaptiert* (angepasst) sind. Ein Organismus einer Spezie heiße *adaptiert*[16], wenn ein Beobachter feststellt, dass der Organismus seine Organisation in der Umwelt aufrechterhalten kann. Die Wandlungsfähigkeit des Organismus in seiner Umwelt bezeichnen wir als *Plastizität*, ihr begrenztes Spektrum gelegentlich als *Reaktionsnorm*, den gemeinsamen Wandel von Organismus und Umwelt als *Koevolution* (vgl. 3.2.3, 1.). Das fortwährende Zusammenwirken

[13] Für andere Begriffsexplikationen von Phylogenese (vgl. Wägele 2001).
[14] Für andere Begriffsexplikationen von Ontogenese (vgl. Wägele 2001).
[15] Für andere Explikationen (vgl. Weniger/Irle 1998; Wägele 2001).
[16] Für eine differenziertere Diskussion des Begriffs „Adaption“ (vgl. Treml 2004, S. 85-90).

von Genexpression, der organisch-physiologischen Selbstorganisation der inneren Umwelt und der Wirkungen der äußeren Umwelt in allen Emergenzebenen des Organismus nennen wir *Epigenese*, das zu einem Zeitpunkt vorliegenden Ergebnis der Epigenese den aktuellen *Phänotyp* des Organismus.

2. Zur Erklärung von Aspekten der biotischen Evolution wurden mehrere Evolutionstheorien vorgeschlagen, die mit unterschiedlichen und auch kokurrierendem Ansprüchen vertreten werden. Obwohl die gegenwärtige Forschung von der synthetischen Evolutionstheorie dominiert wird, orientieren wir uns für die vorliegende Arbeit an der von RIEDL konzipierten STE (s. 2.2.1), weil sie erstens über die Annahmen der synthetischen Evolutionstheorie (s. 2.2.1) hinaus auch die selbstorganisierenden Prozesse im Organismus (d.h. seine innere Umwelt) und nicht nur seine äußere Umwelt für die Selektion (d.h. Rückwirkungen auf das Genom) berücksichtigt und zweitens den Strukturaufbau von Phänotypen (z.B. die Epigenese von Merkmalen) mithilfe der Begriffe Bürde, Kanalisation und Überdetermination – vgl. BCD-Schema – erklärt.

Es zählt nämlich zu den Stärken der STE, dass sie nicht nur die Konzepte Homologie und Typus für die Biologie untermauert, sondern auch für die bereits im 19. Jahrhundert während embryologischer Studien entdeckten – allerdings nur stabile Tendenzen verdichtenden – Regeln von BEAR[17] und HAECKEL[18] (vgl. Weniger/Irle 1998, S. 105) Erklärungsansätze anbietet und damit einem Vergleich von organischer Ontogenese (Entwicklungsbiologie) und organischer Phylogenese neue Perspektiven gibt. Die oben skizzierte Stammesgeschichte des Menschen ist ein Ergebnis der phylogenetisch-systematischen Forschung. In dieser Forschungsrichtung sind homologe Sequenzen von anatomischen Strukturen

[17] Das erste Gesetz von BEAR – die Bezeichnung „Gesetz“ ist in der Literatur verbreitet – besagt: „die allgemeinen[,] qua ursprünglichen Merkmale erscheinen im Verlauf der Embryonalentwicklung früher als die speziellen (abgeleiteten) Merkmale“ (Weniger/Irle 1998, S. 113).

[18] HAECKEL formulierte bereits 1866 seine Regel von der „Parallelität“ von Phylogenese und Ontogenese: „Die Ontogenie ist die kurze und schnelle Rekapitulation der Phylogenie, bedingt durch die physiologischen Funktionen der Vererbung und der Anpassung. Das organische Individuum wiederholt während des raschen und kurzen Laufs seiner individuellen Entwicklung die wichtigsten von denjenigen Formveränderungen, welche seine Voreltern während des langsamen und langen Laufes ihrer paläontologischen Entwicklung nach den Gesetzen der Vererbung und Anpassung durchlaufen haben“. (zitiert nach: Siewing 1982, S. 274))

Der Grund für die tendenzielle Richtigkeit der Regel von HAECKEL könnte darin bestehen, dass Gene während der organischen Ontogenese in der Reihenfolge aktiviert werden, in der sie phylogenetisch erworben worden sind.

(und ihre Funktionen) leitgebend. Ihre für uns zentrale Einsicht lautet:

- Vor ca. 0,2 MJ erschien der moderne Mensch (Homo sapiens), und er hat sich bis heute aus biologischer Sicht nicht verändert (vgl. 2.4.5, vor (L1)). Die Struktur seines Skeletts, die Struktur seiner Vitalfunktionen, die (anatomischen) Strukturen und basalen Funktionen seines Nervensystems usw. sind phylogenetisch erworben und reifen ontogenetisch. Die Genesen dieser Produkte lassen sich mithilfe der STE prinzipiell rekonstruieren. Diese Strukturen und Funktionen (Produkte) sind aktive Invarianten: Sie erhalten erstens die Organisation des inneren Milieus des menschlichen Organismus und ermöglichen zweitens die überlebensadäquate Steuerung des Menschen im äußeren mesokosmischen Milieu.

Eine formalisierte kognitive Repräsentation für biotische Systeme, beispielsweise als ein mathematisches dynamisches System oder implementiert als ein lauffähiges Computermodell, ist im Allgemeinen nur in grober Näherung oder in sehr kleinen Bereichen möglich, obwohl es hier seit einiger Zeit Anstrengungen und Erfolge gibt (vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990)[19]. Die Dynamik auch dieser Systeme steckt wieder in der Struktur der Systemgleichungen, ihre Lösungen hängen sensibel von den Rand- und Anfangsbedingungen des Systems ab und zeigen das Spektrum der in 3.2.2 und 3.2.3 erläuterten Eigenschaften. Daran erinnern wir an dieser Stelle, weil z.B. homologe Strukturen (Invarianten) im evolvierenden biotischen System, die wir in einer heuristischen Beschreibung zu den Bürden zählen, in der mathematischen Formulierung der Versklavung von Freiheitsgraden entsprechen könnte. Und wird eine Lösung der Systemgleichungen als eine gesetzesartige Aussage (Allsatz) zusammen mit Spezifikationen für einen konkreten Fall formuliert, dann hat man ihn anspruchsvoll erklärt, siehe 3.2.5.

In den folgenden Abschnitten steht der Mensch im Zentrum des Interesses, wenngleich oft noch von Organismen die Rede sein wird, und manche Aussagen, die für den Menschen formuliert sind, gelten offensichtlich auch für eine große Klasse von Organismen.

[19]Der Begriff des dynamischen Systems in der Mathematik wurde in 3.2.2 anhand eines deterministischen dynamischen Systems erläutert, ist aber nicht auf diese beschränkt. Für die Modellierung von evolutiven Prozessen sind auch stochastische Ansätze fruchtbar, die zur Formalisierung der Begriffe Variation und Selektion dienen können.

3.3.3 Psychische Systeme

In den meisten Fällen des täglichen Lebens interessieren sich Menschen mehr für die sichtbaren und zumindest teilweise mitteilbaren, auf den Organismus insgesamt bezogenen Lebensäußerungen (wie z.B.: er schwitzt, errötet, ist aufmerksam, motiviert, fühlt, nimmt wahr, bewegt sich, spricht, erinnert sich, denkt, etc.) als für die zur biotischen Systemebene zählenden anatomischen Strukturen oder physiologischen Prozesse. Diese emergenten, von der biotischen Systemebene eines Organismus hervorgebrachten, aber in dieser nicht zufriedenstellend erklärbaren Lebensäußerungen nennen wir *psychisches Systemverhalten* und bezeichnen ihre wechselwirkende Gesamtheit als das *psychische System* des Organismus, sofern sie unter wesentlicher Beteiligung eines zentralen Nervensystems erzeugt werden. Weil alle psychischen Systeme von biotischen Systemen erzeugt werden, aber die ersten psychischen Systeme erdgeschichtlich später als die ersten biotischen Systeme aufgetreten sind, repräsentieren wir die psychischen Systeme in der Abbildung 3.2 in einer Ebene über den biotischen Systemen, die gegenüber der Ebene der biotischen Systeme erst weiter rechts beginnt.

Die Beziehungen zwischen dem biotischen und dem psychischen System eines Organismus werden intensiv von vielen Wissenschaften (z.B. Biologische Psychologie, Neurologie (Medizin), Neuropsychologie) erforscht, deren Gegenstände, Blickwinkel und Methoden sich überschneiden (vgl. Birbaumer/Schmidt 1996; Karnath/Thier 2006). Im Zentrum des Interesses stehen die funktionalen und kausalen Zusammenhänge zwischen den biotisch wechselwirkenden Strukturen (vor allem des peripheren und zentralen Nervensystems, aber auch des enodkrinen Systems etc.) und den wechselwirkenden Strukturen der psychischen Systemebene. Die Fortschritte in diesem Bereich hängen u.a. entscheidend von der Entwicklung der EEG/MEG-Technik und der Entwicklung bildgebenden Verfahren ab.

Wir wenden uns nun dem psychischen Systemverhalten unter phylogenetischen sowie ontogenetischen Gesichtspunkten zu und nennen einige wichtige Invarianten:

- Die biotischen Voraussetzungen für psychische Emergenzphänomene wurden phylogenetisch erworben und sind für jeden Organismus genetisch prädisponiert.

- Psychisches Systemverhalten eines Organismus entwickelt sich auf der Basis seiner phylogenetischen Dispositionen ontogenetisch in Wechselwirkungen mit seiner inneren und äußeren Umwelt. Die äußere Umwelt umfasst sowohl die materiell-energetische Umwelt, die psychischen Systeme der anderen Organismen als auch die soziale Umwelt (siehe unten) des Organismus.

- Psychisches Systemverhalten, das von phylogenetisch alten Strukturen des Nervensystems erzeugt wird, entsteht (nach der Regel von HAECKEL) auch ontogenetisch früh und ist tendenziell nur wenig plastisch, d.h. durch Lernen kaum veränderbar.
  Psychisches Systemverhalten, das von phylogenetisch jungen Strukturen des Nervensystems erzeugt wird, entsteht (nach BEAR bzw. HAECKEL) auch ontogenetisch spät und ist tendenziell plastisch, d.h. durch Lernen eher veränderbar.
  Aus diesen Tendenzen lassen sich allerdings nur sehr grobe – also keine detailierten – Schichtungen von psychischen Strukturen angeben, die durch Lernen nicht veränderbar und deswegen invariant sind.

- Während homologe Strukturen in der biotischen Phylogenese von Organismen vergleichsweise leicht zu finden und in der biotischen Ontogenese wiederzuentdecken sind, ist es sehr viel schwieriger, aus diesen und der auch vergleichweise leicht zu erforschenden psychischen Ontogenese von Rezenten brauchbare Hypothesen über homologe Strukturen einer psychischen Phylogenese zu formulieren. Dass die psychische Phylogenese nicht fossilisiert vorliegt, scheint der wichtigste Grund dafür zu sein. Die Homologie des Verhalten (für uns ist es ein spezielles psychisches Systemverhalten) diskutiert GREENE in (Greene 1994).
  Aus dynamisch systemischer Sicht sind homologe Strukturen regelmäßig wiederkehrende Invarianten eines Emergenzbereichs der Erdgeschichte – z.B. des Biotischen, Psychischen oder Sozialen (s.u.) in der Phylogenese oder Ontogenese – und gehören deswegen zu unserem Thema.

- RIEDL hat das BCD-Konzept seiner STE auf psychische und soziale (s.u.) Systeme ausgedehnt (vgl. 2.4.3 und Riedl 1980, 1994).

3.3.4 Soziale Systeme

Bereits in 2.4.5 stellten wir fest, dass jedes autobiographische Gedächtnis nicht allein Konstrukt seines Besitzers, sondern auch dessen Population und deswegen ein psychosoziales Konstrukt ist. Allgemeiner: Das psychische System eines Organismus wird zwar allein von diesem Organismus getragen, aber nicht allein von diesem Organismus, sondern unter der Mitwirkung seiner Population erzeugt. Diesem Gesichtspunkt wenden wir uns nun zu.

Kommunikative und soziale Systeme

Organismen einer Population, die während ihrer gesamten Ontogenese unter wesentlicher Beteiligung ihres komplexen, sie zu Lernen befähigenden Nervensystems so miteinander wechselwirken, dass ein Beobachter den Eindruck gewinnt, sie würden ihr Verhalten rekursiv aufeinander beziehen und dabei Informationen austauschen, nennen wir *soziale oder kommunizierende Organismen*[20]. Sie bilden ein *soziales System* und zeigen *soziales Systemverhalten.* Die Wechselwirkungen zwischen sozialen Organismen nennen wir *Interaktionen.* Technische Informationen austauschende Systeme und soziale Systeme erhalten die zusammenfassende Bezeichnung *kommunikative Systeme.*

In den meisten interessanten Fällen gehören die kommunizierenden Organismen zur gleichen Spezie, aber es gibt bzw. es gab auch Fälle artübergreifender Kommunikation, so z.B. zwischen Fuchs und Gans (Räuber-Beute-System), zwischen Mensch und Hund oder zwischen Homo sapiens und Homo neanderthalensis[21].

Kultur, Tradition und Wissenschaft

Wenn soziale Organismen aus ihren Interaktionen lernen und wenigstens eine Teilpopulation das Gelernte systematisch weitergibt, dann – so sagen wir – er-

---

[20]Die Begriffsexplikationen sind angeregt von (Maturana/Varela 1987, Kap. 8, insbes. S. 196-197, 209-210).

Organismen in Insektenpopulationen wechselwirken weniger durch gelernte Verhaltensstrukturen als durch genetisch angelegten Austausch von chemischen Stoffen (Tropholaxis). Diese Populationen (vgl. Maturana/Varela 1987, S. 200-204) liegen außerhalb unseres Interesses, und wir befassen uns mit ihnen nicht.

[21]Ob Homo sapiens und Homo neanderthalensis, die eine Zeit lang in Kontakt miteinander lebten, verschiedene Spezies sind, wird kontrovers diskutiert. Möglicherweise ist der kulturelle Aufschwung der Gattung Homo vor etwa 40000 Jahren auch darauf zurückzuführen, dass sich zu dieser Zeit Homo neanderthalensis und Homo sapiens begegneten und als etwa gleichwertige Populationen um die Vorherrschaft in gleichen ökologischen Nischen rangen. Dabei steigerten beide Populationen ihre sozialen, technischen und intellektuellen Fähigkeiten, bis der Homo neanderthalensis vor ca. 27000 Jahren, vom Homo sapiens verdängt, ausstarb (vgl. Weniger/Irle 1998, S. 132-133; Schulz 2000).

zeugen sie ein *kulturelles System*. Die so erzeugten emergenten Systemzustände nennen wir *kulturelles Systemverhalten* und die Trajektorie des kulturellen Systems eine *Tradition*[22](vgl. Maturana/Varela 1987, S. 211-218; Treml 2004, S. 176). Im kulturellen System können wir weitere Subsysteme identifizieren. Das kulturelle System des Menschen enthält beispielsweise das *System der Wissenschaften*, dessen Trajektorie wir als *wissenschaftliche Tradition* bezeichnen (vgl. Maturana/Varela 1987, S. 261).

Psychosoziales System – Sozialpsychologie und Soziologie

Das psychische System eines Organismus wird zwar allein von diesem Organismus getragen, aber nur das elementarste psychische Systemverhalten ist eine Emergenz, die allein von diesem Organismus erzeugt wird. Alle komplexen psychischen Verhaltensstrukturen entstehen demgegenüber auf Grund von Lernen im sozialen System der Population, dem der Organismus angehört. Es wäre deswegen korrekter, anstelle von psychischem Systemverhalten von *psychosozialem Systemverhalten* und anstelle von einem psychischen System von einem *psychosozialen System* zu sprechen. Und doch ist es nützlich, rekursive Wechselwirkungen von psychosozialen Systemen danach zu unterscheiden, ob unser Interesse mehr auf die psychosozialen Systeme einzelner Organismen oder mehr auf die von allen Organismen zusammen hervorgebrachten Kommunikatins- und Ordnungsstrukturen der Population zielt. Stehen stärker die psychosozialen Systeme einzelner Organismen im Mittelpunkt (z.B. Interaktionen in Kleingruppen, Beziehungsforschung), dann gehört eine dementsprechende Untersuchung eher zur Wissenschaftstradition der Sozialpsychologie[23], zielt unser Interesse aber mehr auf die sozialen Organisationsstrukturen der Population insgesamt (z.B. staatliche Institutionen, Großgruppen, Recht, Dienstwege), dann gehört eine entsprechende Untersuchung eher zur Wissenschaftstradition der Soziologie.

Es sei noch einmal betont, dass jedes soziale Systemverhalten von den psychischen Systemen der einzelnen Organismen der Population erzeugt und getragen wird. Folglich gründet das soziale System auf allen psychischen Systemen der Population und umgekehrt hat das psychische System eines jeden Organismus

[22]Der hier für soziale Systeme eingeführte Traditionsbegriff darf nicht mit der „Tradierung“ von Riedl (s.o. 2.4.3) verwechselt werden.

[23]Zur Sozialpsychologie und ihren Beziehungen zur Soziologie siehe (Fischer/Wiswede 1997, S. 5-13). Zur Geschichte der Sozialpsychologie siehe (Kap. 2, S. 14-27). Zu den Stichworten Sozialpsychologie bzw. Soziologie siehe (Asanger/Wenninger 1983, s.v.).

am sozialen System der Population einen Anteil[24].

Weil jedes psychische System am Anfang seiner Entwicklung von sozialen Lernprozessen unbeeinflusst ist und soziale Systeme – nach unserer Begriffsbestimmung – erst in wechselwirkenden psychischen Systemen auf der Grundlage von Lernen entstehen, deuten wir ein soziales System als ein Emergenzphänomen psychischer Systeme. Deswegen ordnen wir die sozialen Systeme in der Abbildung 3.2 in einer Ebene über der Emergenzebene des Psychischen an. Die Emergenzebene des Sozialen beginnt etwas rechts über der Ebene des Psychischen, weil die ersten sozialen Systeme erdgeschichtlich etwas später als die ersten psychischen Systeme aufgetreten sind. Weitere Emergenzebenen – z.B. des Kulturellen, Wissenschaftlichen – ließen sich der Abbildung 3.2 hinzufügen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir hier darauf.

Kulturelle Evolution und Evolutionäre Pädagogik

Die Entwicklung kultureller Systeme nennen wir *kulturelle Evolution*. Sie ist ein erdgeschichtlich erst sehr spät erscheinendes Emergenzphänomen in sozialen Systemen.

Seit seinem Auftreten vor ca. 0,2 MJ Jahren hat sich der Homo sapiens – somit auch die Anatomie seines Gehirn – aus biologischer Sicht nicht mehr verändert (vgl. 2.4.5, vor (L1)). Die Anfänge einer kulturellen Evolution gehen weit vor das Erscheinen des Homo sapiens zurück – z.B. der Homo erectus produzierte systematisch Werkzeuge, nutzte das Feuer, wohnte und jagte in sozialen Verbänden. Die Entwicklung war sehr langsam, bis sich vor ca. 40000 J die kulturelle Evolution des Homo sapiens plötzlich beschleunigte. Auf eine Diskussion der umstrittenen Erklärungen dafür verzichten wir, aber halten hier fest, dass erstens „sich die Entwicklung des Vorderhirns bei den heutigen Primaten am besten anhand der Größe der sozialen Gruppe vorhersagen lässt, in der ein Individuum lebt“ (Smith/Szathmáry 1996, S. 284) und dass zweitens die

[24]Im Theorieansatz von Luhmann konstituiert die Gesamtheit aller kommunikativen Interaktionen das soziale System, während alle psychischen Systeme zur Umwelt des sozialen Systems gehören. Entsprechend dieser Systemexplikation gehört z.B. das im Gedächtnis eines Menschen gespeicherte soziale Wissen und Können nicht zum sozialen System, was befremdlich erscheint. Das Psychische in der Theorie der sozialen Systeme von Luhmann untersucht Konopka (vgl. Konopka 1996).

Für die vorliegende Untersuchung wird – im Gegensatz zu Luhmann – die Trennung von psychischem und sozialem System zwar weniger scharf, aber dafür stärker an der Arbeitsteilung von (Sozial-)Psychologie und Soziologie orientiert vorgenommen.

vermutlich recht schnell vom Homo sapiens erfundene (moderne Laut-)*Sprache* die Beschleunigung der kulturellen Evolution ermöglichte und deswegen auf die viel älteren anatomischen und kognitiven Voraussetzungen für die Sprache und die Sprachfertigkeiten des Einzelnen ein hoher Selektionsdruck von Seiten der sozialen Umwelt wirkte (vgl. Smith/Szathmáry 1996, S. 284, 285-318; Krebs 2004, S. 70-73). Wichtig für uns ist hier, dass emergente biotische und psychische Strukturen Bedingungen für die Möglichkeit von Sprache sind und dass umgekehrt vom kulturellen Evolutionsprodukt „Sprache" ein Selektionsdruck auf die biotische und die psychische Emergenzebene zurückwirkt und so die Überlebensfähigkeit der Organismen in ihrer Population beeinflusst.

Ähnlich wie wir in 3.3.2 Phylogenesen und Ontogenesen in der biotischen Evolution unterschieden haben, unterscheiden wir nun Phylogenesen und Ontogenesen in der kulturellen Evolution: Alle von einem Organismus mithilfe von Lernen in seiner unbelebten und sozialen Umwelt erzeugten Strukturen zusammen mit der von diesen Strukturen ausgehenden Gestaltung seiner Umwelt nennen wir seine *kulturelle Ontogenese*, und deren Tradierung in der Population bezeichnen wir als *kulturelle Phylogenese*. Angemerkt sei hier der Befund, dass ontogenetisches Lernen bis einschließlich der präoperationalen Stufe – in der Terminologie von Piaget – (vgl. Stotz 1996, S. 117f.) und das konkret logische Denken kulturübergreifend gleich verlaufen. Kulturraumspezifische Unterschiede werden erst danach signifikant.

Die Begriffe kulturelle Ontogenese und kulturelle Phylogenese legen Vergleiche und Analogiebildungen nahe:

1. Vergleichen wir Vorgänge der Speicherung, Verarbeitung und Kommunikation von kultureller Information mit den entsprechenden biologischen Vorgängen im Genom, dann stellen wir Unterschiede fest:

In der kulturellen Phylogenese – sie wird von den Nervensystemen aller Organismen der Population getragen – kann (kulturelle) Information schnell aufgenommen, verarbeitet und kommuniziert werden. Sie ist für Simulationen verfügbar, ist leicht veränderbar, kann leicht verloren gehen und kann technischen Systemen (Keilschrifttafeln, Magnetbändern, Computern) übertragen werden. In der biologischen Phylogenese – sie wird vom Genpool der Population getragen – wird (genetische) Information sehr zuverlässig von Generation zu Generation nur in sexuellen Reproduktionsprozessen (Meiose) weitergegeben. Sie ist nicht leicht veränderbar, die Zeiteinheit für eine Änderung im Genom liegt bei ungefähr 10^6 J. Die meisten Mutationen wirken letal.

Ein Vergleich von kultureller und biotischer Ontogenese zeigt, dass zwar jeder kulturellen Ontogenese – so wie der kulturellen Entwicklung der Population – der Mechanismus des psychoziozialen Lernens, aber der biologischen Ontogenese nicht der – für die biologische Phylogenese typische – Mechanismus der sexuellen Reproduktion zu Grunde liegt.

2. Man könnte versuchen, in Analogie zur synthetischen Evolutionstheorie für die biologische Evolution eine synthetische Evolutionstheorie für die kulturelle Evolution derart zu entwerfen, dass altes Wissen und alte Technik (in Analogie zu Mutationen und Rekombinationen) variiert neues Wissen und neue Technik hervorbringen und der Selektion durch die Umwelt ausgesetzt werden, in der sie sich bewähren müssen, um zu überleben.

(a) Die abstrakte Grundgröße, auf die irgendeine Variation in der kulturellen Evolution wirkt, wird von manchen Autoren als *Mem* bezeichnet (vgl. Treml 2000; 2004).

> Treml betrachtet Gene, Phäne und Meme als Selektionseinheit für die Evolution. „Die Evolution selektiert – positiv durch Überleben oder negativ durch Sterben – auf drei verschiedenen Ebenen der Systembildung; überleben können Gene, Phäne oder Meme. [Als] ‚Gene' bezeichnen wir die Abschnitte des DNA-Moleküls mit ablesbaren Informationen für die Herstellung spezifischer Moleküle .... ‚Phäne' – ist eine andere Bezeichnung für individuelle Lebewesen – einschließlich ihrer unterschiedlichen Systemfunktionen (zu denen beim Menschen auch seine geistigen Fähigkeiten gehören). ‚Meme' – das ist ... die Bezeichnung für alle Kulturgüter, die im Verlaufe einer langen Kulturgeschichte angehäuft, gespeichert und in Form von Kommunikation reaktiviert werden können. Meme können z.B. als Bücher, als Meinungen, als Wissen, aber auch als Bauwerke, Kunstwerke oder Partituren beobachtet und kommuniziert werden." (Treml 2000, S. 12-13).
>
> Weiter nennt er Meme in einer Arbeitsdefinition „ontologisch eigenständige evolutionäre Selektionseinheiten" einer neben den Genen und Phänen dritten Emergenzebene der Evolution (vgl. Treml 2004, S. 181) und spricht ihnen in Grenzen eine Eigendynamik zu, aber betont, dass es letztlich doch die fundamentalen Systemebenen sind, welche die Meme und ihre Dynamik erzeugt haben und erzeugen (vgl. Treml 2004, S. 178-179).

In unserem naturgeschichtlichen Ansatz sprechen wir von Strukturen des kulturellen Systems und ihrer Stabilität. Meme gehören zu diesen Strukturen, wir werden sie aber nicht so bezeichnen, weil der Terminus „Mem“ mit einem Bedeutungsfeld verbunden, das im Rahmen unseres Ansatzes zu Missverständnissen führen könnte.

Wenn soziale Organismen aus ihren Interaktionen lernen und das Gelernte tradieren, dann – so sagten wir oben – erzeugen sie ein kulturelles System. Ob der Mem-Begriff verwendet wird oder nicht: Charakteristisch für die Evolution eines kulturellen Systems sind der Austausch und die Tradierung von Information in der Population, und es ist nur natürlich, die damit verbundenen pädagogischen Fragen aus evolutionstheoretischer Sicht in einer Evolutionären Pädagogik (vgl. Treml 2000; 2004; Z. f. E.-W. 9., B. 5 2006; Z. f. P. 48.-5. Sept./Okt. 2002) zu untersuchen. Den evolutionspädagogischen Nutzen unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes werden wir im 5. Kapitel dieser Arbeit ausloten (s.o. 2. Frage).

(b) Um Entwicklungsstrukturen der kulturellen Evolution zu entdecken, kann es hilfreich sein, das zur Analyse der biologischen Phylogenese verwandte Homologiekonzept und andere Konzepte z.B. auf die Entwicklungsgeschichte kultureller Produkte zu übertragen. Beispielsweise lassen sich Stammbäume der Technik (z.B. von Gebrauchsgegenständen) erstellen und damit die Veränderungen von Merkmalen in Zeit und Raum systematisieren; dazu (vgl. Brandis 2005; Liedtke 1996; Riedl 1987). Die so gefundenen gewiss interessanten Entwicklungsstrukturen entstammen aber nur ihrer eigenen Systemebene und sind deswegen sehr wahrscheinlich nur Oberflächenstrukturen, die mit tieferen Systemebenen (z.B. mit der biotischen) nur sehr unzureichend durch Analogien verbunden sind (z.B. wird die kulturelle Entwicklung von Sitzgegenständen von der Anatomie des Menschen – biotische Ebene – und den Kenntnissen der medizinischen Ergonomie bestimmt). Wir werden deswegen nicht einfach nur in der kulturellen Systemebene homologisieren, sondern behalten die Wechselwirkungen der verschiedenen Systemebenen, siehe Abbildung 3.2, im Auge.

3.3.5 Das Multi-Layer-Modellschema (ML-MS) des dynamischen Systems „Erde“

Das Modellschema

Zur besseren Übersicht fassen wir unsere Überlegungen zum dynamischen System Erde nun in Gestalt eines *Multi-Layer-Modellschemas (ML-MS)* zusammen, siehe Abbildung 3.2 und Abbildung 3.3. Von einem Schema – nicht von einem

Modell – ist hier die Rede, weil das ML-MS nur einen Rahmen für eine kognitive Repräsentation des dynamischen Systems Erde darstellt, der erst zusammen mit zusätzlichen Informationen über einen konkreten Untersuchungsgegenstand die Qualität eines Modells erhalten könnte.

Erdgeschichte und Phylogenese

In Abbildung 3.2 bedeutet M die unbelebte materiell-energetische Welt und P eine Population[25]. Der untere, mit römischen Zahlen versehene Index numeriert die Zeit in der Erdgeschichte. In der Abbildung läuft der Index exemplarisch von I bis $VIII$, späteren Zeiten sind größere Zahlen zugeordnet.

$4,6 \cdot 10^9$ Jahre vor unserer Zeitrechnung gab es nur unbelebte (materiell-energetische) Strukturen z.B. Atome und anorganischen Moleküle M_I, die sich infolge von Wechselwirkungen $\Phi_{I,II}$ in die unbelebten (materiell-energetischen) Strukturen M_{II} wandelten.

$3,6 \cdot 10^9$ Jahre vor unserer Zeitrechnung brachte die unbelebte Welt M_{II} infolge der Wechselwirkungen $\Phi_{II,III}$ erste Populationen P biotischer (belebter materiell-energetischer) Systeme hervor. Die dem Biotischen zu Grunde liegenden unbelebten Strukturen P^0_{III}, sie seien im Folgenden durch den oberen Index 0 gekennzeichnet, wechselwirken mit ihrer Umwelt M_{III}. Die Wechselwirkungen sind durch die Produktschreibweise $P^0_{III} \times M_{III}$ gekennzeichnet, $\times$ symbolisiert also die Wechselwirkungen. Eine Charakterisierung des Lebendigen P wird jedoch nicht allein durch die Auszeichnung der P zu Grunde liegenden unbelebten Strukturen P^0_{III} in befriedigender Weise gegeben. Das Interessante an P sind nämlich gerade die das Biotische charakterisierenden Emergenzstrukturen. Weil ihnen im Vergleich mit den unbelebten Strukturen der Atome und Moleküle P^0_{III} eine höhere Komplexität zukommt, erhalten sie, von den unbelebten unterschieden, die Bezeichnung P^1_{III} und stehen in der Abbildung 3.2 über den Strukturen P^0_{III}. Die die Emergenzphänomene des Biotischen hervorbringenden Wirkungen sind in der Abbildung 3.2 mit $F^{0,1}_{III}$ (von P^0_{III} nach P^1_{III}) und die Wirkungen der biotischen Emergenzstrukturen P^1_{III} auf P^0_{III} sind mit $F^{1,0}_{III}$ bezeichnet.

M, P^0 und P^1 wandeln sich in der Zeit: Zur Zeit V entstehen die ersten Populationen, die über biotische Emergenzphänomene hinaus auch psychische

[25]Es ist hier allgemein von einer Population und nicht von einer Spezie die Rede, da in phylogenetischen Zeiten eine Spezie in mehrere Spezies aufspalten kann. Außerdem kann der Begriff Population auch auf Organismen gemäß ihren Merkmalen höherer Taxa (z.B. auf der Ebene der Gattung oder der Ordnung) bezogen werden.

Emergenzphänomene zeigen, also psychische Systeme, die wir mit P_V^2 bezeichnen. Und: Zur Zeit VII entstehen die ersten Populationen, die über psychische Emergenzphänomene hinaus auch soziale Emergenzphänomene zeigen, also soziale Systeme in unserem Sinne (s.o.), die wir mit P_{VII}^3 bezeichnen. Die Eintragungen in die Abbildung 3.2 für psychische und soziale Systeme sind denen der biotischen Systeme entsprechend zu verstehen.

Die Tatsache, dass die ersten biotischen Systeme später als die unbelebten und die ersten psychischen Systeme später als die ersten biotischen Systeme usw. entstanden sind, wird also in der Abbildung dadurch berücksichtigt, dass die jeweils komplexeren Emergenzniveaus in der Vertikalen erst weiter rechts beginnen als die weniger komplexen Systeme.

Weitere Emergenzniveaus – z.B. die Differenzierung der unbelebten Welt in Atomares und Molekulares und die Differenzierung von Sozialem in Kulturelles, Wissenschaftliches oder anderes – lassen sich in das Modell-Schema einfügen. Die Horizontale in der Abbildung 3.2 ist zwar nur als Zeitachse in den Indizes ausgewiesen, sei aber als raum-zeitliche Achse verstanden (einer Differenzierung steht nichts im Wege): Die Erde entwickelt sich in Raum und Zeit.

Das soeben eingeführte ML-MS kann als Denkwerkzeug für verschiedenste Überlegungen zur Evolution der Erde herangezogen werden, zum Beispiel für die Analyse der Phylogenese auf jedem Komplexitätsniveau. Es eignet sich aber auch zur Analyse der Ontogenesen von Organismen. Die Verkettungen aller Ontogenesen ergeben wieder die Phylogenese der Population. Betrachten wir in Abbildung 3.2 ein die Lebensspanne eines Organismus umfassendes Zeitintervall unter einer „Lupe“, dann erhalten wir die Abbildung 3.3.

Ontogenese

Ein beliebiger Organismus der Population – auch Individuum genannt – sei hier mit I und seine unbelebte Umwelt mit m bezeichnet, das Produkt $\times$ in $I \times m$ steht für Wechselwirkungen von Organismus und Umwelt. Die (hier sechs) römischen Zahlen im unteren Index bezeichnen Zeiten während der Ontogenese des Organismus, beginnend mit der Bildung der Zygote zur Zeit I und endend mit dem Tod des Organismus nach VI. Diese Zusammenhänge und die folgenden sind (der Abbildung 3.2 entsprechend) in Abbildung 3.3 dargestellt. Längs der Horizontalen ist nur die Zeit notiert, aber auch hier die Entwicklung in Raum und Zeit gemeint. Dem Strukturwandel Φ entspricht hier φ. Auf der Vertikalen sind die Komplexitätsniveaus angegeben. Die Wirkungen zwischen den

Komplexitätsniveaus bezeichnen wir hier mit f.

Jede unbelebte Struktur eines Individuums ist ein Stück unbelebte Welt, aber der Umweltbegriff kann aus individuenzentrierter Sicht zu Missverständnissen führen, worauf wir nun hinweisen: Aus der Sicht eines bestimmten Invididuums, einer individuenzentrierten Sicht, zählen die unbelebten Strukturen der anderen Individuen zu dessen unbelebter Umwelt. Beim Wechsel zur individuenzentrierten Sicht eines anderen Individuums bleibt diese Zerlegung aber nicht invariant. Zwei verschiedene Individuen haben also zwei verschiedene unbelebte Umwelten, die sich gerade um die beiden unbelebten Strukturen der beiden Individuen unterscheiden. Diese Ungereimtheit käme in einer populationszentrierten Sicht nicht vor: Hier gibt es nur die der Population zu Grunde liegende unbelebte Struktur und ihre unbelebte Umwelt. Wir kommen auf die Ungereimtheit noch einmal in 3.4 zurück und behandeln dort auch den Fall zweier miteinander kommunizierenden Individuen, also Individuen, die nicht nur mit ihrer unbelebten Umwelt wechselwirken.

In dem in den Abbildungen 3.2 und 3.3 dargestellten ML-MS sind bereits einige fundamental für uns wichtige invariante Strukturen des dynamischen Systems Erde kompakt implementiert und stehen zur Entlastung unseres Gedächtnisses beim Argumentieren zur Verfügung. Vom ML-MS ausgehend, werden wir in 3.4 das Biogenetisch-Stationäre-Modellschema (BS-MS) und in 3.5 seine Vereinfachung: das 3-Faktoren-Modellschema (3F-MS) herleiten. Sie sind für Untersuchungen nützlich, die einen höheren Auflösungsgrad erfordern. Das ML-MS enthält Platzhalter für Dynamik und Invarianten. Wir widmen diesem Begriffspaar zuerst etwas Aufmerksamkeit.

Dynamik und Invarianten

Bevor wir uns dem schwierigen Begriff der Dynamik annähern, stellen wir einige für uns wichtige Invarianten – in aller Kürze – zusammen.

Invarianten

Einige der folgend angeführten Invarianten sind bereits als Strukturen im ML-MS implementiert, weitere lassen sich zu seiner Präzisierung einfügen. In der Liste sind räumliche und in der Zeit invariante (oder z.B. periodisch wiederkehrende) Strukturen nicht getrennt aufgeführt.

- Invariante Strukturen der unbelebten materiell-energetischen Erde:

- der kosmische Raum ist 3-dimensional
- die Stärke der Gravitation an der Erdoberfäche ($g \approx 9,8\frac{m}{s^2}$)
- das auf die Erde treffende elektromagnetische Spektrum der Sonne
- die vokommenden Atomsorten und viele chemische Verbindungen

- Invariante Strukturen des Biotischen:
  - die nahezu universelle Informationsweitergabe durch Genomreplikation (invarianter molekulargenetischer Prozess)
  - unterscheidbare Organismen, Populationen von Organismen und höhere Taxa (Spezies, Gattungen, Klassen, ...)
  - phylogenetisch gleiche bzw. verschiedene Strukturen und Entwicklungsverläufe (Homologien, Analogien, Konvergenzen), z.B. des Tetrapodenskeletts, der Sinnesorgane, des Nervensystems bei allen Wirbeltieren, der Lage einer anatomischen Struktur (z.B. Thalamus) im Organismus und Wechselwirkungen dieser Struktur mit seiner Umgebung (Neurotransmitter erregen oder hemmen elektrische Ströme in afferenten bzw. efferenten Fasern)
  - invariante Strukturentfaltungen in biotischen Ontogenesen

- Invariante Strukturen des Psychischen:
  - Strukturen bzw. Muster des Antriebs, der Lagebewertung, der Wahrnehmung, der Orientierung in der Umwelt, der Motorik, des Verhaltens (z.B. Angriff, Flucht), des Lernens und des Gedächtnisses

- Invariante Strukturen des Sozialen:
  - Kommunikation i.A. zwischen Organismen, Sprache beim Menschen, Wissen und seine Tradierung beim Menschen

Bei allen Invarianten handelt es sich immer um aktive Invarianten, „aktiv“ in dem Sinne, dass jede Invariante (solange sie als solche besteht) einschränkend auf die Strukturentwicklung in der Koevolution von System und Umwelt wirkt. Die folgenden Beispiele zeigen, dass dabei auch Strukturen einer höheren Emergenzebene neue Invarianten einer niedrigeren Emergenzebene hervorbringen können.

1. Schon ca. $0,8 \cdot 10^9$ Jahre nach der Entstehung der Erde – d.h. vor etwa $3,8 \cdot 10^9$ Jahren – gab es bereits auf Photosynthese beruhende maritime biologische Lebensformen (biotische Emergenzebene), welche Sauerstoff

als Stoffwechselprodukte (unbelebte materiell-energetische Emergenzebene) freisetzten. Der dabei freigesetzte Sauerstoff oxidierte zunächst alle möglichen Stoffe der Erde (so entstanden z.B. gebänderte Eisensteine und kontinentale Rotsandsteine). Der weiter freigesetzte Sauerstoff führte vor ca. $0,5 \cdot 10^9$ Jahren zu dem bis heute bestehenden Sauerstoffgehalt von $21Vol.\%$ in der Atmosphäre (vgl. Siewing 1982, S. 90-92).
2. Die unbelebte Umwelt hat immer auf den Homo sapiens eingewirkt. Seit Jahrtausenden aber verändert auch der Homo sapiens gezielt seine Umwelt und die Folgen seines Tuns wirken auf alle Emergenzebenen zurück.

Dynamik

Von einer formalisierten Beschreibung (s. 3.2.2 und 3.2.3) für ein dynamisches System erwartet man, dass Variable und ein Zeitentwicklungsoperator identifiziert und so verknüpft sind, dass sich das formalisierte System so verhält wie das empirische. Unsere in 3.3 gewonnenen Einsichten stützen die bereits in 3.2.5 getroffene Einschätzung, dass – abgesehen von mathematischen Formulierungen für Teilsysteme der Erde (z.B. vgl. Ebeling/Engel/Feistel 1990; Nicolis/Prigogine 1987) – eine brauchbare Formalisierung der dem ML-MS zu Grunde liegenden Sachverhalte heute unerreichbar ist. Deswegen beschränken wir uns (vgl. 3.2.5) darauf, erstens nach Folgen von Systeminvarianten zu suchen, zweitens die Stabilität dieser Invarianten im Vergleich zum Strukturwandel des Gesamtsystems abzuschätzen und drittens die von den bestehenden Invarianten ausgehenden Einschränkungen und Wirkungen für die Systementwicklung auszuloten. Auf diese Weise versuchen wir, uns dem raumzeitlichen Wandel – also der Dynamik – des Systems anzunähern. Doch die Unterscheidung und Gegenüberstellung von „‚Dynamik' im Sinne von Wandel" und „‚Statik' im Sinne von (Fließ-)Gleichgewicht, Stabilität, Invarianz, Konstanz" dürfen uns nicht vergessen lassen, dass diese Invarianten etc. selbst zur Dynamik gehören. Es folgen einige Bemerkungen zur Dynamik des Systems „Erde":

(1) Die raum-zeitliche Entwicklung der Systemebene des unbelebten Materiell-Energetischen ist Gegenstand der Physik (und der Chemie). Sie und die ihr zu Grunde liegende Dynamik werden mithilfe von Gesetzen der Physik beschrieben; Entropie-, Energie- und Impulsbilanzen spielen hier eine bedeutende Rolle.

(2) Die Dynamik der biotischen Systemebene sieht man heute in den molekulargenetischen Wechselwirkungen. Umfassender wird sie von der synthetischen Evolutionstheorie oder von RIEDLs STE beschrieben (2.4.3): RIEDL lokalisiert die Dynamik des Biotischen nicht nur in den molekulargenetischen Prozessen, sondern auch in den selbstorganisierenden Prozessen eines jeden Organismus und in den Prozessen dessen Koevolution mit der Umwelt – also in allem, was die Ontogenese eines jeden Organismus bestimmt. Die Dynamik des Unbelebten wirkt hier weiter, aber insoweit es nur um das Biotische geht, wird auf die Dynamik des Unbelebten meist nicht mehr verwiesen. Das Vehikel für die biotische Phylogenese einer Spezie sind die Ontogenesen ihrer Individuen.

(3) In einem Organismus unterscheidet und untersucht man Teilstrukturen – z.B. Zellen; Lymphsystem; autonomes, peripheres und zentrales Nervensystem; Haut; Augen; Verdauungssystem; Knochensystem – und ihre Dynamik. Die Dynamik dieser Strukturen zeigt sich in den damit verknüpften Prozessen und Funktionen (Strukturen der Außenwirkung oder Innenwirkung des betrachteten Systems).

(4) KLIX legt anhand von phylogenetischen Überlegungen dar (vgl. Klix 1993, insbes. S. 145), wie durch die Integration von alten und neuen Gehirnstrukturen die über die Regelung der Homöostase des inneren Milieus hinausgehenden heute beobachtbaren psychischen Verhaltensstrukturen entstanden sein könnten, die beim Menschen in besonderer Weise durch soziale Motive gekennzeichnet sind und als psychisches Potenzial für die Steigerung seiner kognitiven und kulturellen Leistungen angenommen werden dürfen.

> „Der eigentlich bewegende, Verhalten und Handlung stimulierende Auslöser ... [beim Menschen] ist die Registrierung einer Zustands*änderung*. Es ist – vom Erleben her beschrieben – eine Art hedonalgisches Differential, das als Auslöser Motivation stimuliert; es ist die Registrierung einer *Verschiebung* im Lust-Unlust-Erleben.
>
> Nach diesem differentiellen Wirkungsprinzip ist es auch nicht die Gewinnung eines neutralen Zustandes oder das Beibehalten eines Zustandes von Lustgefühl schlechthin, auf das hin die Verhaltensregulation ausgelegt ist; es ist vielmehr die Tendenz zur Verschiebung der Lagebewertung *in Richtung* zum positiven Pol, *zur Erhöhung* des

Selbstgefühls hin. Aktivität und Handlung finden darin nicht ihr Ziel, aber ihre Erfüllung, die eben nur durch Zielerreichung oder genauer: durch die Erkennung des Fortschreitens zum Ziel hin zu gewinnen ist. Die Wurzel dieses Erlebens ist sowohl mit tiefsten Vitalfunktionen als auch mit höchsten kognitiven Leistungen verbunden: Es wirkt sich aus auf die Steigerung des Selbstwert-Erlebens und des Ich-Gefühls auf der einen Seite und reicht bis zur Veränderung von Blutdruck, Herzschlag und Hormonspiegel auf der anderen. In der gleichermaßen sozialen wie vitalen Einbettung ist das hedonalgische Differential von spezifischer Motivationskraft. Alle verfügbaren Mittel, physische wie kognitive, können von diesem Funktionsprinzip her aktiviert werden, um durch die Rückmeldung ihrer Wirkungen relative Entspannung und Lösung von Erregung, Unruhe oder affektiver Belastung zu gewinnen.

Die Funktion des hedonalgischen Differentials ändert sich in der Evolutionsgeschichte der höheren Säuger kaum. ... Was sich ändert sind die Anlässe, die es aktivieren, die Situationseigenschaften, die seine Funktion auslösen oder in Gang halten. Sie überschreiten aber bereits bei höheren Tieren, insbesondere aber beim Menschen die Grenzen der rein innerorganismischen Veranlassung: Soziale, mentale und kulturelle Faktoren erhalten zunehmendes Gewicht. “ (Klix 1993, S. 144)

Die Befundlage in der neueren Biologischen Psychologie stützt die von Klix entfaltete Sicht, dergemäß in den Strukturen und Prozessen der Emotions- und Motivbildung eine Quelle für die spezifisch psychische Dynamik beim Menschen gesehen werden darf (vgl. Birbaumer/Schmidt 1996, Kap. 25, 26).

(5) Die soziale Systemebene des Menschen setzt die Systemebene des Psychischen voraus bzw. ist mit ihr im Bereich des Psychosozialen verwoben (siehe oben). Erkennen wir in den Aktivitäten von z.B. Institutionen und öffentlichen oder rechtlichen Personen die Quelle der sozialen Dynamik, so zeigt das folgende Beispiel, dass diese spezifische Dynamik des Sozialen an die Dynamik des Restsystems koppelt: Die Entscheidung eines Diktators einen Krieg zu führen, erfasst alle anderen Emergenzebenen – auch die der unbelebten materiell-energetischen Umwelt – und wirkt davon wieder in die soziale Ebene zurück: Der Diktators muss damit rechnen, dass sich im Falle einer Niederlage sein Machtgefüge auflöst und er gestürzt werden könnte. Dies bedeutet im ML-MS, dass die Wechselwirkungen im Allgemeinen Fall alle Ebenen in den Abbildungen 3.2 und 3.3 von oben nach unten und von unten nach oben erfassen.

Für kleine Zeitspannen, während derer nicht nur die biotische Phylogenese, sondern auch die biotische Ontogenese des Menschen in guter Näherung als zeitinvariant betrachtet werden dürfen, legen wir die Naturgeschichte erneut unter die „Lupe“ und differenzieren unser ML-MS weiter aus, sodass beispielsweise auch miteinander kommunizierende Individuen kognitiv repräsentiert werden können. Das sich aus diesen Differenzierungen ergebende Schema eignet sich unter anderem für die Beschreibung didaktischer und pädagogischer Prozesse aus naturgeschichtlicher Sicht.

3.4 Der naturgeschichtliche Forschungsansatz – 3. Teil: Das Biogenetisch-Stationäre Modellschema (BS-MS)

Wir betrachten nun eine Population von ontogenetisch reifen Menschen, die miteinander und mit ihrer Umwelt wechselwirken. Die biotische Phylogenese und alle sonst langsamen Veränderungen von Individuen, Population oder Umwelt dürfen wir in diesem Fall im ML-MS als stationäre naturgeschichtliche Systemstrukturen (d.h. aktive Invarianten für die Systementwicklung) annehmen. Das dieser Situation entsprechende ML-MS arbeiten wir nun aus und bezeichnen es als das *Biogenetisch-Stationäre-Modellschema (BS-MS)*, seine wesentlichen Strukturen enthält Abbildung 4.4. Im BS-MS sind lediglich Selbstwechselwirkungen der Umwelt, Selbstwechselwirkungen eines jeden Individuums, Wechselwirkungen zwischen den Individuen und Wechselwirkungen der Individuen mit der Umwelt kognitiv repräsentiert, von denen ausgehend schnelle und deutliche Strukturveränderungen zu erwarten sind.

1. Gegeben sei nun eine *Population P von n Individuen (Menschen) $I_1, I_2, \ldots, I_n$ in ihrer Umwelt M*.

Jedes Individuum erhält nun, aufgefasst als ein Subsystem der unbelebten materiell-energetischen Welt, die Bezeichnung I_i^0, als biotisches System die Bezeichnung I_i^1, als psychisches System die Bezeichnung I_i^2 als sein Anteil am sozialen System der Population die Bezeichnung I_i^3, $(i = 1, ..., n)$, siehe Abbildung 4.4.

Wir nennen den Bereich der Welt außerhalb der – durch $I_1, I_2, \ldots, I_n$ gegebenen – Population P die Umwelt der Population M und den Bereich außerhalb eines Individuums I_* seine Umwelt M_*. Wendet man diese Sprechweise auf mehrere Individuen an, so unterscheiden sich zwar deren Umwelten sowohl untereinander als auch von der Umwelt der Population, aber solange der Zusammenhang unmissverständlich ist, verzichten wir auf diese Unterscheidungen und reden, um unsere Sprechweise einfach zu halten, nur noch von M (vgl. 3.3.5).

Auch die Umwelt M eines Individuums bzw. einer Population kann nun, passend für eine Fragestellung – wie oben für die Individuen durchgeführt – nach Hierarchieebenen differenziert werden. Dementsprechend bezeichnet M^0 die Umwelt auf der unbelebten, M^1 auf der biotischen, M^2 auf der psychischen, M^3 auf sozialen Hierrachieebene. Diese hierarchiespezifische Differenzierung der Umwelt wird im Folgenden jedoch nicht explizit durchgeführt und auch in Abbildung 4.4 ist M nur als unbelebte Umwelt notiert. Wir beachten, dass in einer fest ins Auge gefassten (z.B. der unbelebten) Hierarchiebene Individuum und Umwelt als nebengeordnete Subsysteme erscheinen.

Für jedes Individuum fassen wir im Folgenden die unbelebte (pars pro toto gelegentlich physikalische genannt), die biotische, die psychische und die soziale Systemebene ins Auge. Weitere Hierarchieebenen könnten ebenso eingeführt werden wie weitere Subsysteme.

2. Sowohl in M, als auch in $I_i^0, I_i^1, I_i^2, I_i^3$ bestehen Selbstwechselwirkungen, auf die (etwa durch einen zusätzlichen Index an den Symbolen) nicht gesondert hingewiesen wird.

Für jedes Individuum I_i wechselwirken seine unmittelbar benachbarten Systeme $I_i^0, I_i^1, I_i^2, I_i^3$ primär miteinander; diese „primären Wechselwirkungen“ seien funktional beschrieben durch $f_i^{0,1}, f_i^{1,2}, f_i^{2,3}$ und $f_i^{3,2}, f_i^{2,1}, f_i^{1,0}$.

$$I_i^0 \xrightarrow{f_i^{0,1}} I_i^1 \xrightarrow{f_i^{1,2}} I_i^2 \xrightarrow{f_i^{2,3}} I_i^3$$

Alle anderen (nicht primären) Wechselwirkungen, sie seien als „sekundäre Wechselwirkungen“ bezeichnet, lassen sich nun als Verkettungen von primären Wechselwirkungen schreiben.

Der obige Pfad entspricht folglich einer sekundären Wechselwirkung zwischen I_i^0 und I_i^3

$$I_i^0 \xrightarrow{f_i^{0,1} \circ f_i^{1,2} \circ f_i^{2,3}} I_i^3,$$

wobei die Verkettung $\circ$ der Funktionale von links nach rechts definiert ist.

Für jede primäre Wechselwirkung, z.B. $f_i^{0,1}$, sei die Wechselwirkung in umgekehrter Richtung durch die Vertauschung der oberen Systemkennziffern, im Beispiel: $f_i^{1,0}$, notiert.

$$I_i^0 \stackrel{f_i^{0,1}}{\longrightarrow} I_i^1 \stackrel{f_i^{1,0}}{\longrightarrow} I_i^0$$

Dies Beispiel repräsentiert einen elementaren Loop-Pfad von Wechselwirkungen, der in I_i^0 beginnt und endet.

3. In natürlicher Erweiterung der Konzeption werden Wechselwirkungen eines Individuums mit seiner Umwelt M beschrieben. Die primären Wechselwirkungen des Individuums I_i mit seiner Umwelt M lauten $I_i^0 \stackrel{f_i^{0,M}}{\longrightarrow} M$ bzw. $M \stackrel{f_i^{M,0}}{\longrightarrow} I_i^0$.

4. Zur Vereinfachung der Schreibweise, bieten sich Abkürzungen an, wie sie z.T. auch in Abbildung 4.4 verwendet sind. So ist z.B. für $I_i^0 \stackrel{f_i^{0,1}}{\longrightarrow} I_i^1 \stackrel{f_i^{1,2}}{\longrightarrow} I_i^2 \stackrel{f_i^{2,3}}{\longrightarrow} I_i^3$ die Abkürzung $I_i^0 \stackrel{f_i^{0,3}}{\longrightarrow} I_i^3$, mit $f_i^{0,1} \circ f_i^{1,2} \circ f_i^{2,3} \stackrel{\text{def}}{=} f_i^{0,3}$ sehr suggestiv; in der Abkürzung des verketteten Funktionals erscheint im oberen Index links das Kenndatum des Ausgangssystems und im oberen Index rechts das Kenndatum des Zielsystems.

Im Allgemeinen ist mit einer solchen Abkürzung ein Informationsverlust verbunden, weil anhand der Abkürzung der vollständige Pfad der Wechselwirkungen nicht mehr erkennbar ist. Für den Loop-Pfad von oben, $I_i^0 \xrightarrow{f_i^{0,1} \circ f_i^{1,0}} I_i^0$ verführt der Informationsverlust, wenn für die Verkettung der Funktionale die Abkürzung $f_i^{0,1} \circ f_i^{1,0} \stackrel{\text{def}}{=} f_i^{0,0}$ geschrieben wird, sogar dazu $f_i^{0,0}$ als Selbstwechselwirkung in I_i^0 zu interpretieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Zwei Möglichkeiten gibt es, um derartige Fehldeutungen zu vermeiden:
1. Möglichkeit: Vermeide Scheibweisen, wie z.B. $f_i^{0,0}$, wenn Fehldeutungen möglich sind.
2. Möglichkeit: Kennzeichne an allen Größen – I_i^j, M, $f_i^{j,k}$, $f_i^{k,j}$ – die Zeitabhängigkeit t explizit: $I_i^j(t,r)$, $M(t,r)$, $f_i^{j,k}(t,r)$, $f_i^{k,j}(t,r)$. Mit r haben wir außerdem auf die bisher auch unterdrückte Abhängigkeit der Größen von der Position r im Raum ($r = (x_1, x_2, x_3)$) hingewiesen.

5. Zusammenfassend sei nun jedes Individuum der Population I_i in der Umwelt M definiert als ein 4-Tupel $I_i \stackrel{\text{def}}{=} (I_i^j, M, f_i^{j,k}, f_i^{k,j}, \circ)$ mit $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, 2, 3, M$ und $k = 0, 1, 2, 3, M$, wobei nur Verkettungen $\circ$ zu einem zusammenhängenden Pfad zulässig sind und auf die Missverständnisse bei Verwendung von Abkürzungen hingewiesen sei.

6. Nur über Wechselwirkungen mit der Umwelt ist eine Wechselwirkung zwischen verschiedenen Individuen möglich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nun Wechselwirkungen zwischen I_i und I_j für $i \neq j$. Wie aus Abbildung 4.4 abzulesen ist, läuft z.B. die Wechselwirkung von I_i^3 nach I_j^3 entlang des Pfades

$$I_i^3 \stackrel{f_i^{3,2}}{\longrightarrow} I_i^2 \stackrel{f_i^{2,1}}{\longrightarrow} I_i^1 \stackrel{f_i^{1,0}}{\longrightarrow} I_i^0 \stackrel{f_i^{0,M}}{\longrightarrow} M \stackrel{f_j^{M,0}}{\longrightarrow} I_j^0 \stackrel{f_j^{0,1}}{\longrightarrow} I_j^1 \stackrel{f_j^{1,2}}{\longrightarrow} I_j^2 \stackrel{f_j^{2,3}}{\longrightarrow} I_j^3.$$

Eine direkte Wechselwirkung $f_{i,j}^3$ von I_i^3 nach I_j^3 ist also nicht möglich; $f_{i,j}^3$ beschreibt lediglich eine Abkürzung des obigen langen Pfades von I_i^3 nach I_j^3.

$$I_i^3 \stackrel{f_{i,j}^3}{\longrightarrow} I_j^3$$

Auch hier gilt wieder, dass nur Schreibweisen, die den vollständigen Wechselwirkungspfad erkennen lassen, nicht zu Informationsverlusten führen und im Falle von Loop-Pfaden nicht fälschlicher Weise Selbstwechselwirkungen suggerieren. Man beachte auch, dass es beliebig viele (längere als der in Abbildung 4.4 angegebene) Pfade von I_i^3 nach I_j^3 gibt, die etwa über zusätzliche (nicht in Abbildung 4.4 enthaltene) Individuen führen.

7. Für die Notation der Funktionale (in beide Richtungen (!)), die Verkettung von Funktionalen und Abkürzungen für Pfade, übertragen wir die Vereinbarungen von oben sinngemäß auf die die Individuen unterscheidenden (unteren) Indizes.

Für den (nicht in der Abbildung 4.4 eingezeichneten) Fall einer Wechselwirkung, z.B. von I_i^3 nach I_j^2, notieren wir zur Kennzeichnung des abgekürzten Funktionals für einen zulässigen Pfad sowohl die beiden oberen, als auch die beiden unteren Indizes $I_i^3 \stackrel{f_{i,j}^{3,2}}{\longrightarrow} I_j^2$. Dabei definierten wir:

$$f_i^{3,2} \circ f_i^{2,1} \circ f_i^{1,0} \circ f_i^{0,M} \circ f_j^{M,0} \circ f_j^{0,1} \circ f_j^{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} f_{i,j}^{3,2}.$$

Mit dem BS-MS haben wir das ML-MS naturgeschichtlich für einen raumzeitlich kleinen Bereich differenziert, mit dessen Hilfe unter anderem auch pädagogische oder didaktische Situationen beschrieben werden können. Individuen stehen dann ggf. für Schüler oder Lehrer, die Umwelt für den Lernort. In dieser kognitiven Repäsentation machen die primären Wechselwirkungen, durch primäre Funktionale beschrieben, zu Pfaden der Kommunikation oder Handlungsfolgen verkettet, die Beteiligung von naturgeschichtlichen Emergenzebenen und ihre Dynamik und Invarianten sichtbar, die in anderen Ansätzen latent bleiben.

3.5 Der naturgeschichtliche Forschungsansatz – 4. Teil: Das 3-Faktoren-Modellschema (3F-MS)

In 3.3, insbes. 3.3.5, haben wir das dynamische System „Erde" kognitiv mithilfe des ML-MSs repräsentiert. Im Mittelpunkt des ML-MS steht zunächst – erster Schritt – die Phylogenese des Lebendigen (Abbildung 3.2) mit ihrer großen Zeitskala. Im zweiten Schritt konnte das ML-MS dann für Zeitskalen der Längen von Ontogenesen (Abbildung 3.3) ausgearbeitet werden. Im dritten Schritt haben wir es auf die Situation einer Population von ontogenetisch reifen Menschen in ihrer Umwelt weiter spezialisiert (BS-MS, Abbildung 3.4). Im nun folgenden vierten Schritt vereinfachen wir das BS-MS, indem wir Emergenzebenen geeignet zu Faktoren zusammenfassen.

Der soziale Faktor

Die Unterscheidung von psychischer und sozialer Emergenzebene haben wir in 3.4.4 begründet. Auch wenn es Gründe dafür gibt, die psychische und die soziale Systemebene – anstelle der biotischen und der psychischen Systemebene – zusammenzufassen, so sei der hier bezogene Standpunkt beibehalten und der sozialen Systemebene eine Eigenständigkeit zugewiesen. Ein Grund dafür ist einerseits die individuenzentrierte Sichtweise, dass Psyche und Organismus eine Einheit bilden, und andererseits unsere in 3.4.4 getroffene Festlegung, dass das Soziale mehr jene Kommunikationen zwischen Individuen zum Gegenstand hat, die sich auf die Organisationsstrukturen der Population beziehen. Bezogen auf die Vereinfachung unseres BS-MSs nennen wir die soziale Systemebene nun den *sozialen (kurz: 3.) Faktor.*

Der biotisch-psychische Faktor

Dem Forschungsansatz der biologischen Psychologie entsprechend fassen wir die biotische Systemebene und psychische Systemebene sowie jene Wechselwirkungen zwischen diesen anzeigende Funktionale zur biotisch-psychischen Systemebene, kurz: zur biopsychischen Systemebene (s. Abbildung 3.5), zusammen. Bezogen auf die Vereinfachung unseres BS-MSs sprechen wir hier vom *biotisch-psychischen (kurz: biopsychischen oder 2.) Faktor*. Fragen der Erzeugung psychischen Systemverhaltens infolge von Aktivitäten neuronaler Strukturen bleiben damit in der biopsychischen Systemebene lokalisiert.

Der unbelebte materiell-energetische Faktor

Die unbelebte Systemebene der Umwelt fassen wir mit der unbelebten Systemebene eines (jeden) Organismus zur unbelebten Welt (s. Abbildung 3.5) zusammen. Bezogen auf die Vereinfachung unseres BS-MSs sprechen wir hier vom *unbelebten materiell-energetischen (kurz: 1.) Faktor*. Es sei betont, dass diese Zusammenfassung wenig hilfreich ist, wenn in der unbelebten Emergenzebene Wechselwirkungen zwischen einem Individuum und seiner Umwelt ins Auge gefasst sind (z.B. einem Patienten wird ein Medikament injiziert). In diesem Fall fasst man der Sache angemessener die unbelebten Strukturen der Umwelt zu einem Faktor 1a und die unbelebten Systemebenen des Individuums (physikalische Emergenzen, chemische Emergenzen) zum Faktor 1b zusammen. Wir gehen darauf nicht weiter ein, weil uns z.B. biochemische Prozesse im Folgenden wenig interessieren und ähnliche Fälle für eine naturgeschichtliche Erklärung von Wissen weniger wichtig sind.

Das 3-Faktoren-Modellschema

Das Ensemble bestehend aus den 3 Faktoren zusammen mit ihren Wechselwirkungen nennen wir das *3-Faktoren-Modellschema (kurz: 3F-MS)*. Es ist eine Vereinfachung des BS-MS und besonders dann nützlich, wenn grob ausgelotet werden soll, wie unbelebte, biotisch-psychische und soziale Strukturen in ihren Wechselwirkungen kulturelle Leistungen tradiert, akkumliert, transformiert oder hervorgebracht haben. Das Suffix „Schema“ wurde – wie schon im ML-MS und im BS-MS – gewählt, um deutlich zu machen, dass es sich hier lediglich um ein Rahmenmodell handelt, mit dessen Hilfe erst konkrete Aussagen über die Genese kultureller Produkte möglich sind, nachdem zusätzliche, im Rahmenmodell nicht enthaltende Informationen gegeben sind, die das Schema präzisieren.

Vom BS-MS zum 3F-MS – weitere Erläuterungen

Wir stellen den Zusammenhang zwischen dem BS-MS und dem 3F-MS nun anhand der wechselwirkenden Funktionale im BS-MS her, dazu vergleiche Abbildung 3.4 mit Abbildung 3.5.

- Vorbemerkung: In der Abbildung 3.4 wurden Funktionale, die Selbstwechselwirkungen in einer Emergenzebene eines Individuums beschreiben, der Übersichtlichkeit halber nicht notiert. In der Abbildung 3.5 notieren wir diese Funktionale aus demselben Grunde nicht.
- Funktionale, die Selbstwechselwirkungen im 3. Faktor (soziale Systemebene) beschreiben, tragen im oberen Index nur die Zahl 3.
- Funktionale, die Selbstwechselwirkungen im 2. Faktor (biopsychische Systemebene) beschreiben, tragen im oberen Index die Zahlen 1,2 oder 2,1.
- Funktionale, die Selbstwechselwirkungen im 1. Faktor (unbelebte Systemebene) beschreiben, tragen im oberen Index nur 0,M bzw. M,0.
- Funktionale, die Wechselwirkungen zwischen dem 3. Faktor und dem 2. Faktor beschreiben, tragen im oberen Index die Zahlen 2,3 bzw. 3,2.
- Funktionale, die Wechselwirkungen zwischen dem 2. Faktor und dem 1. Faktor beschreiben, tragen im oberen Index die Zahlen 0,1 bzw. 1,0.
- Funktionale, die Wechselwirkungen zwischen dem 3. Faktor und dem 1. Faktor beschreiben, können – entsprechend den Erläuterungen in 3.4 – als Pfadabkürzungen verketteter Funktionale eingeführt werden; sie sind in der Abbildung 3.5 jedoch nicht notiert.

Unser naturgeschichtlicher Forschungsansatz ist nun dargelegt. Die Abschnitte 3.4 und 3.5 zeigen beispielhaft, wie unser Ansatz konkreteren Fragestellungen entsprechend angepasst werden kann. Im folgenden 4. Kapitel werden wir den naturgeschichtlichen Forschungsansatz anwenden und sehen, wie weit wir mit ihm kommen.

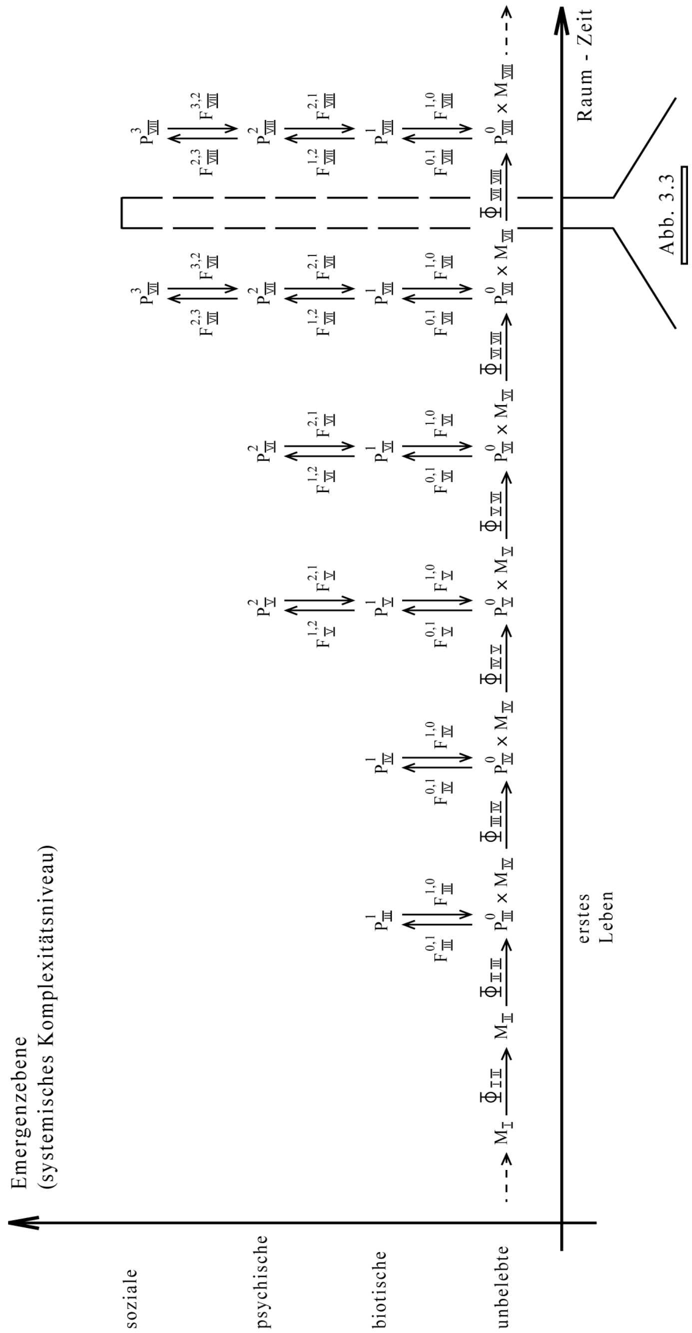


Abbildung 3.2: Das Multi-Layer-Modellschema (ML-MS) zur Beschreibung von Phylogenesen. Es bezeichnet: $P \times M$ die mit ihrer Umwelt M wechselwirkende $\times$ Population P, F die Emergenzebenen verbindenden Funktionale, Φ den Strukturwandel in der Zeit. Untere Einzelindizes zeigen Zeiten, untere Doppelindizes Zeitübergänge an. Obere Einzelindizes zeigen Emergenzebenen, obere Doppelindizes Wechselwirkungen von zwei Emergenzebenen an; Selbstwechselwirkungen in den Emergenzebenen sind nicht angeführt. Ein ontogenetischer Zeitausschnitt führt zur Abbildung 3.3. Weitere Erläuterungen im Text.

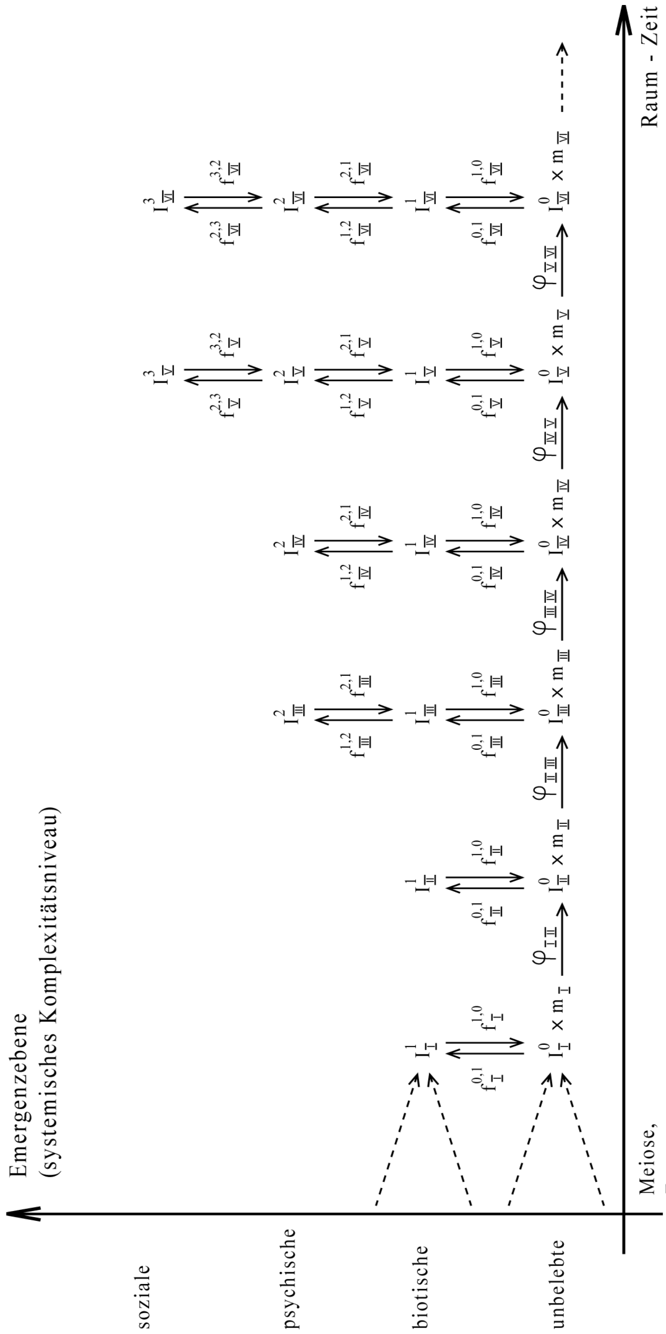


Abbildung 3.3: Das Multi-Layer-Modellschema (ML-MS) zur Beschreibung von Ontogenesen. Die gestrichtelten Pfeile links deuten die Reproduktion an. Es bezeichnet: $I \times m$ ein mit seiner Umwelt m wechselwirkendes $\times$ Individuum I, f die Emergenzebenen verbindenden Funktionale, φ den Strukturwandel in der Zeit. Untere Einzelindizes zeigen Zeiten, untere Doppelindizes Zeitübergänge an. Obere Einzelindizes zeigen Emergenzebenen, obere Doppelindizes Wechselwirkungen von zwei Emergenzebenen an; Selbstwechselwirkungen in den Emergenzebenen sind nicht angeführt. Weitere Erläuterungen im Text.

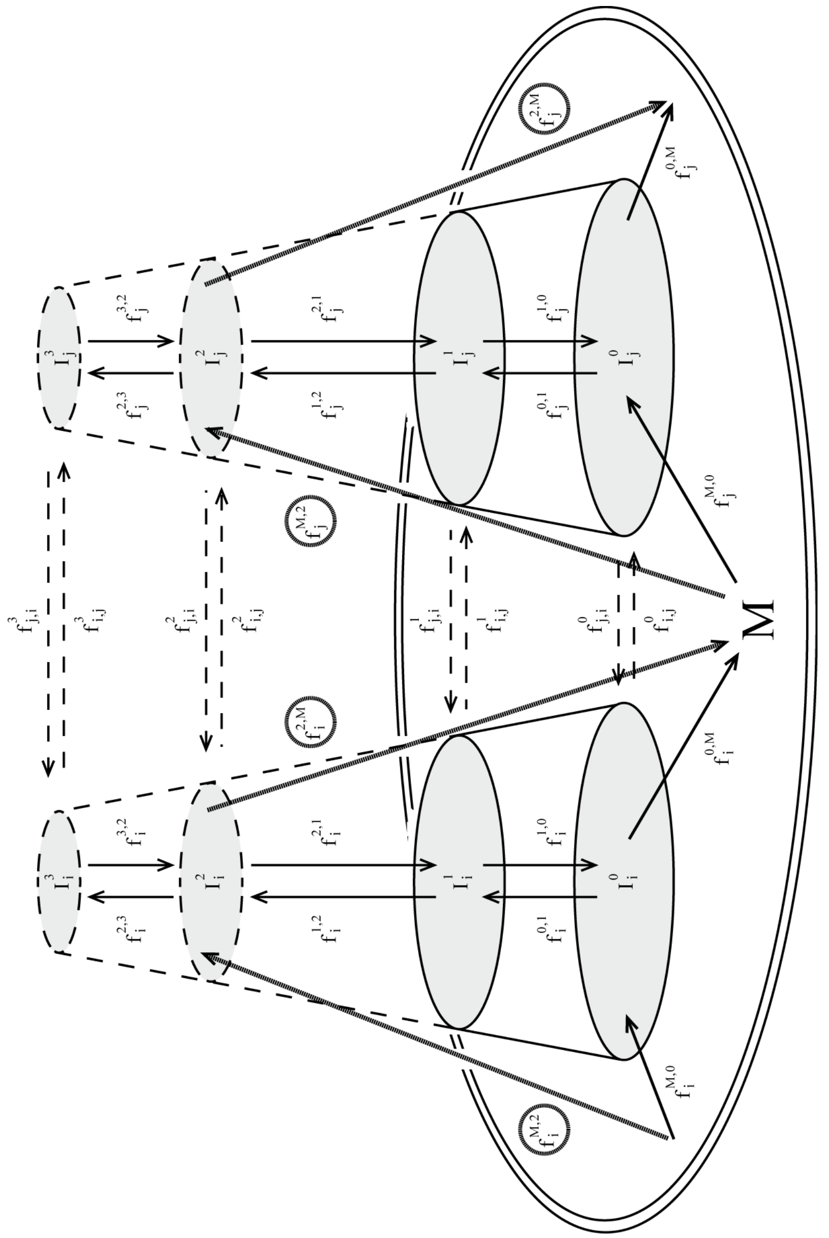


Abbildung 3.4: Das Biogenetisch-Stationäre-Modellschema (BS-MS), ein Schichtenmodell zur Beschreibung von Wechselwirkungen von Individuen, Selbstwechselwirkungen in einem Individuum und zur Beschreibung von Wechselwirkungen von Individuen mit ihrer Umwelt. Es bezeichnet: I_i, I_j zwei Individuen in der Umwelt M, f verschiedene Emergenzebenen verbindende Funktionale und ausgewählte Wechselwirkungen in gleichen Emergenzebenen. Untere Einzelindizes bezeichnen Individuen, untere Doppelindizes Wechselwirkungen von Individuen. Obere Einzelindizes zeigen Emergenzebenen, oberen Doppelindizes Wechselwirkungen von zwei Emergenzebene oder Wechselwirkungen eines Individuums mit der Umwelt an. Zeitabhängigkeiten sind nicht angeführt. Weitere Erläuterungen im Text.

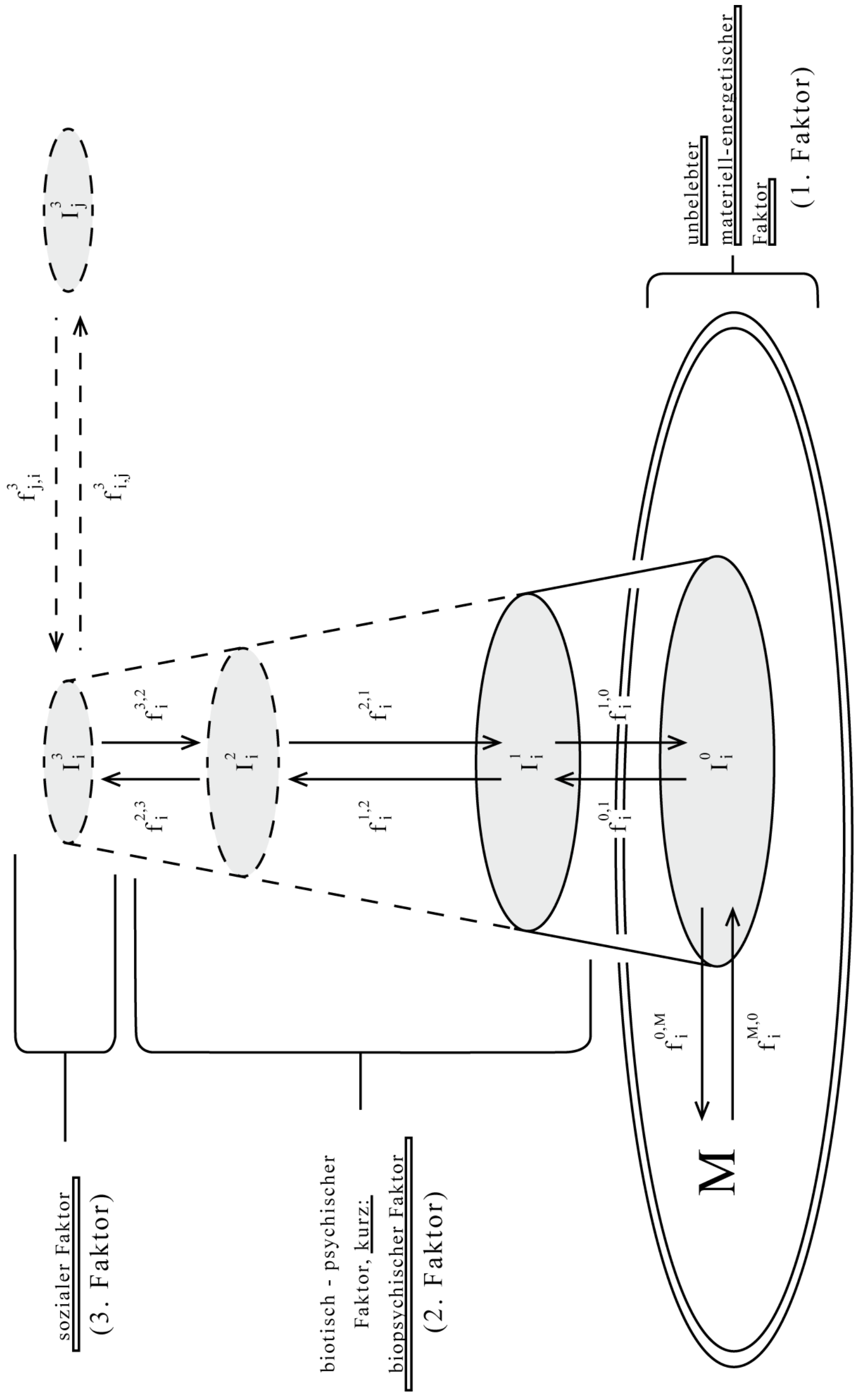


Abbildung 3.5: Das 3-Faktoren-Modellschema (3F-MS). Für manche Argumentationen leistet eine Vergröberung der Abbildung 3.4 genug: Neben anderen denkbaren Vergröberungen sind hier die biotische und die psychische Emergenzebene zum biopsychischen (2.) Faktor, die unbelebte Emergenzebene des Individuums mit der unbelebten Umwelt zum unbelebten (1.) Faktor zusammengefasst. Weitere Erläuterungen im Text.

Kapitel 4

Beispiel für eine naturgeschichtlich reflektierte Mathematik: Die Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels

4.1 Die Auswahl eines geeigneten Beispiels

Was wir von einem Beispiel verlangen

Für das Lösen mesokosmischer Probleme sind wir privilegiert. Demgegenüber haben Menschen große Schwierigkeiten, abstrakte Mathematik zu lernen. Sie erfordert Instruktion, lange Lernphasen, und nur wenige Menschen bringen sie wirklich voran. Es scheint kennzeichnend für abstrakte Mathematik zu sein, dass sie immer involviert ist, wenn wir unseren Mesokosmos – unsere kognitive ökologische Nische (2.4.3) – im Wechselspiel von Naturerforschung und Technikentwicklung in Richtung des Mikro- oder des Makrokosmos überschreiten. Deswegen suchen wir nach einem Beispiel,

(1) das zu einem überschaubaren Bereich des mathematischen Wissens gehört, dessen Mathematikgeschichte bereits gut ausgearbeitet vorliegt, für das ein Abriss selfcontained darstellbar ist, das in wesentlichen Gesichtspunkten für den Bereich des mathematischen Wissens und für das mathematische Wissen insgesamt charakteristisch ist,

(2) für das wir möglichst viele einzelwissenschaftliche Anhaltspunkte haben, mit deren Hilfe wir sowohl seine Evolution naturgeschichtlich reflektieren oder sogar erklären können als auch den Weg aufzeigen können, auf dem es uns möglich ist, unseren Mesokosmos zu verlassen,

(3) mit dem wir die Tragfähigkeit unseres Ansatzes testen können,

(4) anhand dessen es uns auszuloten möglich ist, inwieweit die Mathematikdidaktik von einer naturgeschichtlichen Sicht auf die Mathematik profitieren könnte (1. Frage) und Leistungsbereiche der Evolutionären Pädagogik sichbar werden (2. Frage).

Beispiele aus dem Anfangsunterricht (Entwicklungspsychologie von Kindern) scheiden aus

Es ist naheliegend, die Anfänge der Mathematik, die an mehreren Orten der Erde zumindest teilweise unabhängig voneinander entstanden, die uns von den frühgeschichtlichen Hochkulturen überliefert sind und deren Inhalte den Anfangsunterricht in den Schulen bis heute bestimmen, nach einem geeigneten Beispiel zu durchsuchen. Das Zählen oder Ordnen von realen oder vorgestellten Gegenständen und Sachverhalten, das Konstruieren in der Ebene oder im Raum (Wohnungsbau, Werkzeugherstellung, Musterbildung), das Erkennen von einfachen Symmetrien, aber auch vor-metrische (näher – weiter, größer – kleiner, Bezugspunkte, Richtungen, Drehungen) als auch vor-topologische (offen, geschlossen, innen, außen, Loch, Rand, Vor-Dimensionsbegriff, Orientierung) Eigenschaften sind sicher älter, sie verlieren sich im Dunkeln der Vorgeschichte. Aber Beispiele aus diesem Bereich sind für unser Vorhaben wenig geeignet: Erstens, weil es langwierige und kleinschrittige Prozesse sind, in denen die Überschreitung der Grenze des Mesokosmos unscharf bleibt; stellvertretend für andere Beispiele aus den Anfängen der Mathematik sei nur die Herausbildung des Zahlbegriffs bis zum modernen Stellenwertsystem für reelle Zahlen angeführt (vgl. Klix 1993; Wußing 1979). Zweitens: Weil anfängliche Sachverhalte der Mathematik fast nur Kindern der ersten Schuljahre vermittelt werden, müssten wir den Aufbau ihres mathematischen Wissens in Wechselwirkung mit ihren Reifeprozessen untersuchen. Wir sehen uns hier jedoch außer Stande, über eine naturgeschichtliche Reflexion der Evolution eines ausgewählten Stücks mathematischen Menschheitswissens hinaus, an dem die Überschreitung des Mesokosmos deutlich wird, auch Fragestellungen der Reifung entwicklungspsychologisch zu bearbeiten.

Bevor wir weiter nach einem Beispiel aus der Evolution der Mathematik suchen, das den Übergang vom Mesokosmos zum Exokosmos geeignet abbildet, erinnern wir an unsere 2. Arbeitsannahme (3.2.5, 2.), dass weder Kinder noch Greise, sondern vor allem junge Erwachsene bis Erwachsene des mittleren Lebensalters die Mathematik vorangebracht haben. Hier anknüpfend fragen wir, wann denn die Reifung eines jungen Menschen soweit abgeschlossen ist, dass er aus kognitionspsychologischer Sicht als ein junger Erwachsener betrachtet werden darf. Eine erste untere Grenze legt der bereits in 3.3.4 angeführte Befund nahe, dass das ontogenetische Lernen bis einschließlich der präoperationalen Stufe – in der Terminologie von PIAGET – und das konkret logische Denken kulturübergreifend gleich verlaufen. Weil kulturraumspezifische Unterschiede erst später signifikant werden, nehmen wir an, dass Reifeprozesse bis einschließlich der präoperationalen Stufe noch nicht abgeschlossen sind. Die entwicklungspsychologischen Befunde, dass das räumliche Vorstellungsvermögen und die Fähigkeit, abstrakt denken zu können, nicht vor einem Lebensalter von ca. 15 Jahren entwickelt sind, stehen im Einklang mit der Feststellung von DIEUDONNÉ, dass sich die mathematische Begabung eines Menschen selten vor dem 15. oder 16. Lebensjahr zeigt und wichtige Ergebnisse erst nach weiteren Jahren intensiver Arbeit möglich sind. Diese Einsichten sind Grundlage unserer folgenden Arbeitsannahme:

> Die Menschen, von denen in diesem Kapitel die Rede ist, sind mindestens 15 Jahre alt, sodass sie aus kognitionspsychologischer Sicht als ontogenetisch reif betrachtet werden dürfen.

Schon hier sei festgehalten, dass die Altersgrenze in der Arbeitsannahme didaktische oder evolutionspädagogische Anwendungen unserer Thematik unterhalb der Jahrgangstufe 10 des deutschen Schulsystems ausschließt.

Wir wenden uns nun wieder der Suche nach einem Beispiel zu, das alle unsere oben formulierten Anforderungen erfüllt, insbesondere nach wenigen Vorbereitungen zu untersuchen erlaubt, wie man mit einem großen, trennscharf interpretierbaren Schritt von der mesokosmischen in die abstrakte Mathematik kommt.

Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels

Inspiriert von VOLLMERs Arbeiten (vgl. 2.4.3) hat der Autor im Winter 1993/94 das Problem der Konstruktion eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen im Mathematikunterricht der Oberstufe eines Gymnasiums erstmals in Verbindung mit Evolutionärer Erkenntnistheorie unterrichtet, und wir argumentieren nun dafür, warum die Konstruktion eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen hier ein geeignetes Beispiel ist. Vorgreifend teilen wir hier bereits mit, dass höherdimensionale Räume nicht nur viele Anwendungen innerhalb der modernen Mathematik, sondern auch in den empirisch arbeitenden Wissenschaften haben; während unserer naturgeschichtlichen Reflexion, s. 4.4.6, kommen wir darauf ausführlicher zu sprechen.

Die Konstruktion eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen zählt zum Anfang der Entwicklung höherdimensionaler Geometrien. Diese Entwicklung ist von denen anderer mathematischer Gebiete leicht abgrenzbar und liegt mathematikgeschichtswissenschaftlich bereits gut ausgearbeitet vor (vgl. Rosenfeld 1988). Der Aspekt der Überschreitung unseres mesokosmischen Vorstellungsraumes in einen abstrakten Raum ist trennscharf in einem großen Schritt für junge Menschen ab 15 Jahre zugänglich, interessant, deswegen für den Unterricht geeignet und fordert zur didaktischen Auseinandersetzung. Für ihn liegen – und das ist für uns besonders wichtig – Anhaltspunkte in den Wissenschaften vor, die uns seine naturgeschichtliche Reflexion ermöglichen, obwohl andererseits die Befundlage für eine befriedigende naturgeschichtliche Aufarbeitung weder der Entwicklung höherdimensionaler Geometrien noch nur der eines höherdimensionalen Raums ausreichend ist. Aber – und nun formulieren wir das Programm des vorliegenden Kapitels – für einen der einfachsten Fälle, nämlich

> für den 4-dimensionalen Würfel, den auch Vollmer in seinen Arbeiten mehrfach abhandelt (vgl. 2.4.3), werden wir den Übergang von unserem mesokosmischen Anschauungs- und Vorstellungsraum zum abstrakten Raum anhand von Konstruktionen – die auch in der Mathematikdidaktik bekannt sind – in 4.4 selbst durchführen; danach geben wir die nun „auf der Hand liegende“ Verallgemeinerung zum n-dimensionalen Würfel an. Wir werden dabei die Erfahrungen einbeziehen, die der Autor mit jungen – 16 bis 19 Jahre alten – Erwachsenen im gymnasialen Mathematikunterricht gewonnen hat, die Konstruktionen naturgeschichtlich reflektieren und die dabei erzielten Einsichten heranziehen, um damit auch die Entstehungsgeschichte höherdimensionaler Geometrien naturgeschichtlich zu beleuchten. Mithilfe des ML-MSs versuchen wir zu erkennen und mithilfe unserer Erklärungsheuristik wäre zu erhärten, wie uns unbelebte materiell-energetische, biotische, psychische und so-

ziale Bürden (Invarianten) geleitet haben. Die Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels ist – wie vielleicht schon jetzt überzeugend dargelegt ist – ein mathematisches Paradebeispiel dafür, wie der Homo sapiens mithilfe seiner kognitiven Fähigkeiten seinen Mesokosmos überschritten hat.

Wir gehen nun der Frage nach, was wir von einer naturgeschichtlich reflektierten Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels über die Entstehungsgeschichte höherdimensionaler Geometrien lernen können.

4.2 Mathematikgeschichte versus Untersuchung im Labor – naturgeschichtliche Gemeinsamkeiten und Unterschiede

Unsere Erwartung, aus der naturgeschichtlich reflektierten Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels auch etwas über die Entstehungsgeschichte der höherdimensionalen Geometrien lernen zu können, ist gar nicht so abwegig, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheint, weil Räume mit mehr als drei Dimensionen in der Mathematik erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts etabliert waren und heutige Lernende sich aus naturgeschichtlicher Sicht fast nicht von den Menschen unterscheiden, die im 19. Jahrhundert diese Räume erfanden: denn beide sind mit der gleichen biologischen Ausstattung an den gleichen Mesokosmos adaptiert und haben wenig verschiedene Wissensbasen. Sie unterscheiden sich lediglich in den „höheren“ Emergenzebenen, nämlich darin, dass die einen Schöpfer, die anderen Lernende sind und die heute Lernenden etwa 200 Jahre später geboren wurden.

In dieser Argumentation erkennen wir die Begründung für unsere 3. Arbeitsannahme wieder: eine naturgeschichtlich reflektierte Rekonstruktion mathematischer Begriffstrukturen im Labor (z.B. in Klausur oder im Unterrichtsraum) liefert fruchtbare Einsichten in die Naturgeschichte dieser Strukturen (3.2.5, 2.). Wir erinnern daran, dass wir dort die Regel von Haeckel – die Ontogenie wiederholt die Phylogenie im Zeitraffer – auf die mathematische Wissensbildung übertragen haben. Angewandt auf unsere Beispielsituation lautet die Übertragung so: Unsere Einsichten in eine von einem kognitiv reifen Menschen naturgeschichtlich reflektiert durchgeführte Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels – auch reife Menschen konstruieren in ihrer Ontogenese (!) – erlauben es zumindest insoweit auch, den kulturellen phylogenetischen Entstehungsprozess höherdimensionaler Räume bzw. Geometrien richtig abzubilden, wie wir den Fokus auf gemeinsame Invarianten beider (definitiv verschiedener) Prozesse richten. Der Vergleich des Werdens mathematischer Räume jenseits unseres Anschauungsraumes mit einem Erwerb des Wissens von diesen Räumen in einer geeigneten Lernumgebung mithilfe des naturgeschichtlichen Forschungsansatzes gibt also beispielhaft Einsichten in die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede von kultureller Phylogenese und kultureller Ontogenese. Die daraus entspringenden mathematididaktischen und evolutionspädagogischen Anknüpfungspunkte legen wir bereits im vorliegenden Kapitel an, werden sie aber erst im 5. Kapitel ausführlich entfalten. Der Frage nach der Anwendbarkeit der Regel von HAECKEL – sie möge im Hinterkopf bleiben – gehen wir auch dort nicht explizit nach.

Weil in der Ausarbeitung unseres Beispiels auch Erfahrungen und Einsichten einfließen sollen, die der Autor im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe gewonnen hat, skizziert er hier die entscheidenden Rahmenbedingungen, unter denen er gearbeitet hat:

(I) Im Winter des Jahres 1993/94 hat der Autor einen Grundkurs zum Thema Lineare Algebra und Analytische Geometrie unterrichtet und einige Kursinhalte aus evolutionär erkenntnistheoretischer Sicht gedeutet. Der Kurs hatte das Analysispensum hinter sich, der Binominalsatz ($\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = (a+b)^n$) war nicht bekannt. Die Kursteilnehmer haben intuitiv den Begriff eines 4-dimensionalen Raumes durch 4 paarweise aufeinander senkrecht stehende reelle Koordinatenachsen expliziert. Jeder Punkt dieses Raumes wird dann durch ein 4-Tupel reeller Zahlen repräsentiert. Die Verallgemeinerung zum n-dimensionalen Raum (n eine natürliche Zahl oder null) wurde durchgeführt. Unter Anleitung haben sie im Unterrichtsgespräch den 4-dimensionalen Würfel nach der 1. Konstruktion (siehe 4.4) durchgeführt und zum n-dimensionalen Würfel verallgemeinert. Die 2. Konstruktion (siehe 4.4) haben sie eingesehen, diese Konstruktion wurde aber nicht formalisiert. Die Lerngruppe hat dann Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme kennengelernt, die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme klassifiziert und für den Fall von 3 Variablen die Lösungsmengen in unserem 3-dimensionalen Anschauungsraum geometrisch als Schnitte von Ebenen interpretiert. Schließlich wurde die geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme auf einige einfache Fälle in n Variablen

übertragen, sodass die Kursteilnehmer eine Lösung eines linearen Gleichungssystem z.B. als eine 2-dimensionale Ebene im 5-dimensionalen kartesischen Koordinatenraum identifizieren konnten.
Der Autor hat die Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels gewählt, um der Lerngruppe

- mithilfe der Evolutionären Erkenntnistheorie eine aposteriorische Sicht auf die Mathematik vorzustellen (das war im Mathematikunterricht damals sehr unüblich)
- zu zeigen, dass es einen 4-dimensionalen Würfel in der realen Welt nicht gibt, und sie präzise darlegen muss, was ein 4-dimensionaler Würfel sein soll
- klar zu machen, dass ein 4-dimensionaler Würfel nicht anschaulich ist, sondern nur Projektionen von ihm anschaulich sind
- allgemein klar zu machen, dass sie mithilfe von Sprache und Denken ihren Mesokosmos (ihre kognitive Nische) überschreiten kann und dies der Weg ist, auf dem der Homo sapiens abstrakte Mathematik und mit ihrer Hilfe moderne Technologien geschaffen hat.

Anzumerken ist, dass die meisten Kursteilnehmer die mithilfe der Evolutionären Erkenntnistheorie eingeführte aposteriorische Sicht auf die Mathematik interessant fanden und alle Kursteilnehmer hoch motiviert an der Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels teilnahmen.

(II) Im Frühjahr des Jahres 2008 hat der Autor einen Leistungskurs zum Thema Lineare Algebra und Analytische Geometrie unterrichtet. Der Kurs hatte das Analysispensum und auch das Kursthema Lineare Algebra bereits abgeschlossen. Der Binominalsatz war der Lerngruppe bekannt. Zur Einführung in die analytische Geometrie entfaltete der Autor die aposteriorische Sicht auf die Mathematik mithilfe von Überlegungen wie sie ab 2.4 in der vorliegenden Arbeit entwickelt werden. Dann hat er mit der Lerngruppe das Programm von (I) in modifizierter Fassung abgearbeitet. Darüber hinaus: Ein Kursteilnehmer regte an, auch die 2. Konstruktion zu formalisieren und trug die korrekte Formalisierung während der nächsten Kurssitzung vor. Die Lerngruppe entdeckte Würfelterme, die sie mit dem Binominalsatz zusammenfassen konnte. Sie stellte viele weiterführende Fragen. Mit einigen Kursteilnehmern gab es mehrfach Nachsitzungen, in denen sie nachfragten, weiterführende Fragen stellten oder eigene „Forschungsfragen“ und Rechnungen zum Thema mit dem Autor diskutierten. Die meisten Kursteilnehmer fanden die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik interessant, und alle Kursteilnehmer nahmen hochmotiviert an den Konstruktionen des n-dimensionalen Würfels teil.

Wir konzentrierten uns bisher nur auf die kognitiven Gesichtspunkte der Naturgeschichte des mathematischen Wissens und können dies zumindest mit Blick auf den motivationalen Aspekt damit rechtfertigen, dass zu jeder Zeit die Erfinder einer neuen mathematischen Struktur – in unserem Beispiel: der höherdimensionalen Geometrien –, obwohl sie auch Motivhierarchien und Motivkonflikte in sich tragen, dafür hochmotiviert sind, was für Lernende dieser mathematischen Strukturen im Allgemeinen nur eingeschränkt vorausgesetzt werden kann. Die Instanzen fundamentaler Dynamik, unter denen der Motivation eine sehr hohe Priorität zukommt, sind in allen Populationen präsent, auch in denen, die keine Mathematik hervorgebracht haben. Deswegen sind diese Instanzen unverzichtbare aktive Invarianten und die Motivation ist mithin eine solche. Aber Motivation zählt nicht zu den sensiblen Variablen, die höhere kognitive Leistungen und die Mathematik im engeren Sinne hervorbringen. Weil wir an einer naturgeschichtlichen Reflexion mathematischer Leistungen interessiert sind und weder nichterbrachte Leistungen mit fehlender Motivation erklären noch Menschen hier zu mathematischen Leistungen motivieren wollen, richten wir unsere Aufmerksamkeit bei allen Untersuchungen dieses Kapitels im Wesentlichen auf die geglückten kognitiven Leistungen und auf jene missglückten Versuche von Menschen, für die wir glauben, ihnen Motivation dafür unterstellen zu dürfen. Dementsprechend halten wir als weitere Arbeitsannahme für das vorliegende Kapitel fest:

Die naturgeschichtliche Reflexion der kognitiven Aspekte des oben ausgewiesenen Beispiels stehen im Mittelpunkt unseres Interesses.

4.3 Vierdimensionaler Würfel und Geschichte der Mathematik

Wie oben festgestellt, können wir eine naturgeschichtliche Aufarbeitung des Werdens höherdimensionaler Geometrien hier nicht leisten. Wir geben hier stattdessen einen geschichtlichen Abriss, damit wir wenigstens die Stellung unseres

Beispiels (die Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels) in der Geschichte der höherdimensionalen Geometrien bestimmen und die naturgeschichtliche Reflexion unserer Konstruktion auf die Geschichte der höherdimensionalen Geometrien beziehen können.

4.3.1 Historische Informationen: Das Werden mathematischer Räume jenseits unseres Anschauungsraumes

Weil sich der vorgeschichtliche Homo sapiens aus biologischer Sicht nicht vom heutigen Menschen unterscheidet (s. 3.3.2), nehmen wir an, dass sein Raumbegriff nicht von unserem mesokosmischen Raumbegriff verschieden ist; der physikalische Raum (s. 3.3.1) hat sich ohnehin nicht verändert. Insofern mögliches Tun im Zugriff auf Gedächtnisinhalte in diesem mesokosmischen Raum kognitiv simuliert wird, war und ist dieser sensomotorisch vermittelte Anschauungsraum auch im Wesentlichen der Vorstellungsraum.

Mit dem Auftreten der Schrift in einer Kultur beginnt per definitionem ihre geschichtliche Zeit, und hier beginnen wir mit unserem historischen Abriss:
1. Die mathematischen Leistungen der frühgeschichtlichen Kulturen (vgl. Scriba/Schreiber 2001, Kap. 1) umfassen, soweit sie sich auf den Raum beziehen: Längenbestimmungen, Flächenbestimmungen, Volumenbestimmungen, Konstruktionen zusammen mit den dabei vorkommenden Operationen in kontinuierlichen oder diskreten Größen. Viele Probleme reduzieren sich auf ebene Flächen im Raum. Die Verbindung von Raum, Form (Linien, Vieleck, Kreis, Pyramide, Kugel) und Zahl in alltagspraktischen Zusammenhängen war zentral, die Problemlösungsmethode rezeptartig rechnerisch, ansatzweise algebraisch.
2. Darin, dass die Griechen um 600 v. Chr. erstmals in der Geschichte begannen, das von anderen Kulturen überlieferte mathematische Wissen zu systematisieren und auf seine Grundlagen hin zu befragen, erkennt man den Beginn der wissenschaftlichen Mathematik (vgl. Scriba/Schreiber 2001, S. 26-37); sie gelten aber auch als die Erfinder unseres wissenschaftlichen Denkens überhaupt.

Die ersten Theorien des Raumes erscheinen in der vorsokratischen Philosophie im Zusammenhang mit kosmologischen Fragen, z.B. nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit des Raumes und nach der begrenzten oder unbegrenzten Teilbarkeit von Größen, auf deren Hintergrund dann PLATON (427-348 v. Chr.) und ARISTOTELES (384-322 v. Chr.) ihre philosophischen Raumtheorien entwickelten (vgl. Mittelstraß/Mainzer 1995a): Der Begriff des Raumes bei PLATON ist zwischen dem Reich der reinen Ideen und der Welt der sinnlich erfahrbaren Dinge vermittelnd und wird selbst mathematisch ausgearbeitet. ARISTOTELES entwickelt im Rahmen seiner Elemententheorie keine Raumtheorie im engeren Sinne, sondern eine Theorie der Lagebeziehungen der Örter von Körpern. Den Unendlichkeitsbegriff präzisiert er zum potentiell Unendlichen (induktive Fortsetzung einer für endliche Größen problemlos definierten Konstruktionsregel), erläutert das unendlich Große lediglich am Zahlbegriff und „führt eine Erörterung des unendlich Kleinen als Ergebnis wiederholter Teilungen von Strecken schließlich zu einer räumlichen Kontinuumstheorie ..., auf die sich auch die Aristotelische Örtertheorie des R[aumes] bezieht“.

3. Ähnlich ARISTOTELES liegt dem viel später von G.W. LEIBNIZ (1646-1716) entwickelten Begriff des relationalen Raumes eine Theorie der Örter zu Grunde, deren mathematische Ausarbeitung über die Idee einer „Analysis situs“ (LEIBNIZ), erste Ergebnisse von DESCARTES (1596-1650) und EULER (1707-1783), dann im Rahmen der Mengenlehre am Anfang 20. Jahrhunderts zum allgemeinsten in der gegenwärtigen Mathematik definierten Raumbegriff, dem topologischen Raum, führt (vgl. Mittelstraß/Mainzer 1995a; Mittelstraß 1996, s.v.: Topologie). Ein topologischer Raum bezeichnet eine Menge, auf der eine als „Topologie“ bezeichnete mathematische Struktur definiert ist. „Topologie“ ist aber zugleich auch die moderne, von J.B. LISTING (1808-1882) stammende Bezeichnung (1847) für das mathematische Arbeitsgebiet, in dem topologische Räume studiert werden.

Fragen nach Eigenschaften des räumlichen Kontinuums wurden seit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit Fragen der Axiomatisierung der reellen Zahlen (betrachtet als eine Menge, auf der geeignete Strukturen zu definieren sind) enggeführt und haben erst im 20. Jahrhundert einen zufriedenstellenden Abschluss erhalten. Mit Bezug auf die vielfältigen Anwendungen in den Wissenschaften darf in der Axiomatisierung der reellen Zahlen ein mathematisches Modell für das Kontinuum des physikalischen Raumes in einer Dimension gesehen werden.

Die Topologie erwies sich als die geeignete Disziplin für die Präzisierung nicht nur unseres intuitiven Dimensionsbegriffs, sondern auch abstrakter Dimensionsbegriffe – wie z.B. der algebraischen, topolologischen, fraktalen Dimension, der Dimension von HAUSDORFF (1868-1942) und BESIKOVITSCH oder der Überdeckungsdimension – (vgl. Zeitler/Neidhardt 1993; Nagata 1965; Engelking

1995). Die wenigsten Dimensionsbegriffe sind für beliebige topologische Räume, sondern fast alle für speziellere Situationen definiert.

Ein topologischer Raum heißt metrisierbar oder metrischer Raum, wenn seine Topologie von einer Metrik (Abstandsfunktion) erzeugt wird (vgl. Mittelstraß/Mainzer 1995a): Weil metrische Räume (im Gegensatz zu allgemeineren topologischen Räumen) Abstandsmessungen zulassen, können sie als die abstraktesten Räume angesehen werden, in denen Geometrie – im Sinne von Raumvermessung – möglich ist. Der metrische Raum wurde in seiner abstrakten Fassung 1906 von Fréchet (1878-1973) eingeführt. Fragen z.B. der Art, inwieweit die Dimension eines metrischen Raumes bereits durch die Definition einer konkreten Metrik festgelegt ist, sind Gegenstand der Dimensionstheorie (z.B. vgl. Nagata 1965); die Dimension eines metrischen Raumes kann auch unendlich sein.

Zur Klärung des intuitiven Dimensionsbegriffs und zur Begründung der Dreizahl hat Aristoteles wenig beigetragen, obwohl er das Problem der Dreidimensionalität erkannt und in der Einleitung zu seiner Schrift „Über den Himmel" – soweit bekannt, als erster – die Dreizahl der Erstreckungen von Körpern thematisiert hat (vgl. Janich 1989, S. 22).

> „Die Schrift ‚Über den Himmel' beginnt mit dem Hinweis, daß die Naturwissenschaft mit Körpern und Größen sowie deren Veränderungen und den Prinzipien dieser Veränderungen befaßt ist. Dann bezieht sich Aristoteles ... auf seine in der ‚Physik' entwickelte Kontinuumstheorie und wiederholt daraus, daß das Kontinuierliche definiert ist als ‚teilbar in immer wieder Teilbares'. Er fährt fort, daß die einfach teilbare Größe die Linie, die zweifach teilbare Größe die Fläche und die dreifach teilbare Größe der Körper ‚soma' sei. Hier folgt sein erstes ‚Argument' für die Auszeichnung der Dreizahl, und zwar durch Bezug auf die Lehrmeinung der Pythagoräer, wonach die ganze Welt durch die Dreizahl bestimmt sei, da alles Anfang, Mitte und Ende habe. ...
>
> Sein zweites Argument dagegen mutet recht modern an: Aristoteles betrachtet die Alltagssprache und stellt fest, daß wir für die Zusammenfassung zweier Gegenstände ein eigenes Wort haben (im Deutschen ‚beide', im Griechischen ‚amphi'), während wir dafür nicht gewohnt sind ‚alle zwei' zu sagen. Bei drei Gegenständen jedoch sagen wir ‚alle drei', so daß drei eine Allheit oder Vollkommenheit darstelle. (Die triviale Tatsache, daß wir genausogut ‚alle vier' sagen, bleibt unberücksichtigt.)
>
> Nachdem auf diese Weise die Dreizahl ausgezeichnet erscheint, wird

der Körper die einzig *vollkommene Größe* genannt, weil er es zur Vollkommenheit dieser Dreizahl in Form dreier Erstreckungen gebracht habe.“ (Janich 1989, S. 22-23)

„Im Rahmen seiner ‚Physik‘, deren Gegenstand die natürlichen Dinge sind, ..., sind physische *Körper* als Ausgangsmaterial für Teilungsprozesse primär. Flächen und Linien dagegen erscheinen an solchen Körpern; sie existieren nicht unabhängig davon. Eine Fläche wird durch einen Schnitt nur geteilt, wenn der Körper geteilt wird, der diese Fläche trägt. Es gibt also nach Aristoteles einen Zusammenhang zwischen der Teilung eines physischen Dings, etwa durch Zerschneiden, und der Teilung von idealen Gegenständen wie Flächen und Linien: nur durch Teilung von Körpern können in erster Abhängigkeit auch Flächen, in zweiter Abhängigkeit auch Linien geteilt werden.

Diese Einsicht wird jedoch in keinem Aristotelischen Text dazu verwendet, eine definitionstheoretische Position für die Grundlegung der Geometrie zu rechtfertigen. ... Eine operative Erzeugung räumlicher Formen an physischen Körpern und der definitorische Aufbau einer Geometrie sind für Aristoteles zwei völlig verschiedene Gebiete; eine operative Lösung des Dimensionsproblems ist deshalb für ihn offensichtlich undenkbar.

Zusammengefaßt ergeben die Schriften von Aristoteles kein überzeugendes Bild vom Problem der Dreidimensionalität: ... Aristoteles wiederholt ... lediglich, was zu seiner Zeit bereits Üblichkeit unter Geometern war, nämlich daß man entweder auf *drei Erzeugende für Körper* (Punkt, Linie, Fläche), oder auf *drei zu teilende oder zu begrenzende Gegenstände* (Körper, Fläche, Linie) kommt, wenn man Geometrie treibt. Unklar bleibt bei der Rede sowohl über das Begrenzen als auch das Teilen, inwieweit hier von realen Körpern oder mathematisch idealen Gegenständen [, die nach Aristoteles durch Abstraktion aus der Anschauung physischer Gegenstände entstehen (vgl. Poser 1994, S. 213)] die Rede ist. Es finden sich ledigliche einige definitionstheoretische Überlegungen, zu denen jedoch kritisch anzumerken ist, daß der Vorschlag, in aufsteigender Reihenfolge definitorisch vom Punkt über die Linie zur Fläche vorzugehen, von Aristoteles nur postuliert, aber nicht ausgeführt wird“ (Janich 1989, S. 27-28).

4. Die Bedeutung von EUKLID (365?-300? v. Chr.), der in Alexandria gelehrt hat (Dieudonné 1985, S. 891), liegt vor allem darin, dass er das vorliegende mathematische Wissen mithilfe von Definitionen, Axiomen und Beweisen weitgehend systematisierte; weil seine „Elemente“ der älteste größere überlieferte Text der griechischen Mathematik ist, ist er eine historische Referenz ersten Ranges.

Die griechische Geometrie war zunächst Planimetrie (Geometrie in der Zeichenebene), andernfalls hätte man eine Priorität des Raumes erwarten dürfen. P. Janich sieht einen Grund dafür in der Tatsache, dass die Wörter „Punkt“ und „Linie“, mit denen Euklid in den „Elementen“ den Aufbau der Planimetrie beginnt, ihren Ursprung in der Praxis des Zeichnens haben (vgl. Janich 1989, S. 128-129). Die Stereometrie (Geometrie des Anschauungsraumes) entwickelt Euklid erst auf seine Planimetrie bezugnehmend in den Büchern XI bis XIII seiner „Elemente“ (vgl. Janich 1989, S. 28-30). Euklid verfasste darüber hinaus noch eine Kegelschnittslehre – etwa dem Inhalt der Bücher 1 bis 4 des Apollonios von Perga (260?-190? v. Chr.) entsprechend –, eine Arbeit über geometrische Örter im Raum und eine Arbeit über sphärische Geometrie für die Astronomie, die jedoch alle verloren gegangen sind (vgl. Scriba/Schreiber 2001, S. 61-62).

Euklid hat – dem Vorschlag von Aristoteles entsprechend – die Geometrie in den „Elementen“ definitorisch in aufsteigender Reihenfolge aufgebaut: er handelt zuerst den Punkt, dann die Linie, dann die Fläche ab, bevor damit die höherdimensionalen Gegenstände konstruiert werden (vgl. Janich 1989, S. 28). „Was sich aus der Geometrie Euklids jedoch überhaupt nicht ‚begründen‘ oder sonstwie irgendwie entnehmen lässt, ist ein Begriff der Dimension oder eine Begründung für die Dreizahl. Das griechische Wort für Dimension ist ‚Diastasis‘. Dies ist kein geometrischer Terminus bei Euklid. Und es gibt keine Überlegung oder gar einen Beweis, daß sich höchstens drei Ebenen paarweise rechtwinklig schneiden können, oder daß höchstens drei Geraden paarweise aufeinander senkrecht stehen können.“ (Janich 1989, S. 30)

5. Die mit Eudoxos von Knidos beginnende nachpythagoreische griechische Mathematik[1] war so sehr von der Geometrie dominiert, dass vorrangig geometri-

[1] Platon setzte die Bemühungen der Sophisten um eine Systematisierung des höheren Unterrichts fort und bezeichnete – im Sinne von mathematischen Wissenschaften – Arithmetik, Geometrie und Astronomie als „die drei Mathemata“ (vgl. Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1971, s.v.: Artes liberales/artes mechanicae, S. 532; 1980, s.v.: Mathema, S. 926). Weil der Begriff „Mathema“ damals auch in anderem Zusammenhang verwendet wurde, war er für mathematisches Wissen nicht spezifisch (vgl. Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1980, s.v.: Mathema, S. 926; Mittelstraß 1984, s.v.: Mathema, S. 799). Die drei um Musik und Gramma-

sche Beweise oder Lösungen Anerkennung fanden (vgl. Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1980, s.v.: Mathematik, S. 927-928). Algebraische Probleme wurden deswegen in geometrische übersetzt, und dann suchte man nach konstruktiven Lösungen für Zirkel und Lineal. Nach H.G. ZEUTHEN wird diese griechische Mode und Methode heute als „geometrische Algebra“ bezeichnet (vgl. Scriba/Schreiber 2001, S. 50). Bis heute dokumentieren Bezeichnungen wie z.B. Quadratzahl und Quadrat, Kubikzahl und Kubus die Tradition dieser geometrischen Algebra (vgl. Rosenfeld 1988, S. 152).

6. Die Engführung von Geometrie im Anschauungsraum, insbesondere von Planimetrie und Algebra (wie EUKLID), hat deswegen eine Entwicklung der Algebra hin zu Termen mit höheren Potenzen verzögert (vgl. Rosenfeld 1988, p. 153ff.): Eine vierte Potenz tritt zuerst bei HERON (1. Jht. n. Chr.) in rein algebraischem Zusammenhang auf, DIOPHANTOS (um 250 n. Chr.) arbeitete gewiss mit der fünften und sechsten Potenz, eine arabische Übersetzung seiner Arithmetik (um 900 n. Chr.) enthält auch die achte und neunte Potenz. Nachfolgende Mathematiker des ehemals hellenistischen Raumes und auch Indiens bildeten höhere Potenzen, indem sie quadratische und kubische Potenzen miteinander kombinierten. Dabei verwandten sie weiterhin die auf die geometrische Algebra der Griechen zurückgehende Terminologie, hatten aber keine geometrische Interpretation im Auge. Ausnahmen dieses Mainstreams sind vielleicht AL-FARABI (ca. 870-950 n. Chr.) und AL-BUZJANI (940-998 n. Chr.), die in geometrischer Terminologie eine algebraische Rechnung durchführen, der sie eine Bemerkung anfügen, die ihr Resultat im Zusammenhang mit einem mehrdimensionalen Würfel und dessen Diagonalen zu interpretieren erlaubt. Darüber hinaus betrachtete AL-SIJZI erstmalig eine vierdimensionale Späre und gibt eine geometrische Interpretation für $(a + b)^3$ mithilfe von Parallelepipeden.

7. Die deutschen Cossisten (etwa 1450-1560 n. Chr.) entwickelten die hypergeometrische Notation – ähnlich wie die byzantinischen und italienischen Mathematiker – für Potenzen im Rahmen ihrer Coss weiter und nutzen diese, wie bereits andere Mathematiker zuvor, auch für Variable (vgl. Rosenfeld 1988, p. 155-159); aus „cosa“ italienisch für „Sache“, entstand das deutsche Wort „coss“ mit der Bedeutung „Algebra“.

---

tik ergänzten Mathemata nennt PLATON „enkyklikos paideia“, übliche Bildung (vgl. Ritter/Gründer/Eisler/Bien 1971, s.v.: Artes liberales/artes mechanicae, S. 532). Für die Gesamtheit der Wissenschaften Grammatik, Rhetorik, Philosophie (insbes. Dialektik), Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronmie tritt im griechischen Raum erstmals bei JOHANNES TZETZES (1110-1180) die Bezeichnung „enkyklika mathemata“ auf (vgl. S. 532).

Dies inspirierte den Cossisten Michael Stifel (um 1487-1567) zur mehrdimensionalen Verallgemeinerung eines Würfels (Kubus) durch eine sukzessive Anwendung der folgenden Konstruktion (vgl. Rosenfeld 1988, p. 160-161), die mit unserer 2. Konstruktion in 4.4 übereinstimmt: Eine Strecke entsteht durch die Bewegung eines Punktes, ein Quadrat entsteht durch die Bewegung einer Strecke senkrecht zu dieser bis zur gleichen Länge, ein Würfel entsteht durch die Bewegung eines Quadrats senkrecht zu diesem bis zur Länge seiner Kante. Weil nach damals üblicher Auffassung Geometrie auf den Anschauungsraum bezogen war, gibt Stifel der Fortsetzung seiner Konstruktion – bewege einen Würfel jeweils senkrecht zu seinen Kanten um die Länge einer Kante – nur einen arithmetischen Sinn. Er betont die möglichen Anwendungen seiner Ideen in der Algebra und gibt ihnen in seiner Interpretation des binomischen Satzes ($(a+b)^n$) Nachdruck.

Erst am Ende des 16. Jahrhunderts formuliert Manuel de Gois die Idee eines Raumes mit mehr als drei Dimensionen (vgl. Rosenfeld 1988, p. 161).

8. Von der geometrischen Algebra der Griechen ausgehend ist neben dem in 5., 6. und 7. skizzierten „algebraischen Pfad" noch ein zweiter in Richtung einer mehrdimensionalen Geometrie erkennbar. Er beginnt mit Nicole Oresme (um 1323-1382) und dann mit Fermat (1601-1665) (vgl. Rosenfeld 1988, p. 161-162): Beiden kam die Idee, eine Kurve in der Ebene als Graphen einer (Funktions-)Gleichung mit zwei Variablen, eine Fläche im Raum als Graphen einer (Funktions-)Gleichung mit drei Variablen und dementsprechend (Funktions-)Gleichungen mit mehr als drei Variablen als Gegenstände einer höherdimensionalen Geometrie aufzufassen. Dieser Weg zusammen mit erstens der inspirierenden geometrischen Algebra von Vieta (vgl. Rosenfeld 1988, p. 163-169), zweitens den heute üblichen Bezeichnungen „Abszisse" und „Ordinate", die auf eine lateinische Übersetzung entsprechender Bezeichnungen von Appolonios zurückgehen (vgl. Rosenfeld 1988, p. 168), und drittens der Verwendung schiefwinkliger, rechtwinkliger und polarer Koordinaten sowie deren Transformationen ineinander, wie sie vor Vieta (1540-1603) schon von Thābit ibn Qurra (vgl. Rosenfeld 1988, p. 167-168) verwandt wurden, führte sowohl Fermat als auch Descartes schließlich zur analytischen Geometrie (vgl. Rosenfeld 1988, p. 163).

Angemerkt sei hier, dass bereits Appolonios systematisch schiefwinklige und rechtwinklige, Archimedes (287?-212 v. Chr.) polare Koordinaten (vgl. Rosenfeld 1988, p. 167) und bereits Eratosthenes von Kyrene (276?-194?)

– Direktor in der Bibliothek von Alexandria am Westrand des Nildeltas (vgl. Scriba/Schreiber 2001, S. 65-66) – ein rechtwinkliges Koordinatensystem, gebildet aus Meridianen und Parallelkreisen, zur Kartierung von Teilen der seinerzeit bekannten und bewohnten Erdoberfläche verwandte (vgl. Scriba/Schreiber 2001, S. 83).

DESCARTES (1596-1650) betrachtet die analytische Geometrie als ein Anwendungsbeispiel für seine visonäre „mathesis universalis“, die Universalwissenschaft von Ordnung und Maß in Form einer symbolischen Algebra (vgl. Rosenfeld 1988, p. 169-171). Deutete man „Algebra“ vor DESCARTES als „geometrische Algebra“ (siehe 5.), so transformiert DESCARTES Geometrie in Algebra (algebraisierte Geometrie). Die bis heute übliche Koordinatengeometrie ist Algebra mit (z.B. reellen) Koordinaten, und ein Koordinatenwert ist ein Vielfaches der Einheitslänge einer Koordinatenachse des zu Grunde gelegten Koordinatensystems. Weil Geometrie für DESCARTES auf den Anschauungsraum begrenzt war, lag es ihm fern, mit seiner algebraischen Koordinatenmethode eine höherdimensionale Geometrie zu konstruieren.

9. LEIBNIZ (1646-1716) verfolgte das von DESCARTES angeregte Vorhaben einer universellen Mathematisierung der Wissenschaft mit anderen Ansätzen (vgl. Rosenfeld 1988, p. 171-173). Weil er der Differenzial- und Intergalrechnung universellen Stellenwert zuerkannte, versuchte er nicht, Mathematik auf Algebra zu reduzieren. Wichtig für die Geschichte der Geometrie sind seine Ideen zur „Analysis situs“ (siehe 3.), die zum heute allgemeinsten Begriff eines Raumes überhaupt, dem „topologischen Raum“, geführt haben.

Im Zusammenhang mit dem Raum und seinen Dimensionen steht LEIBNIZ für die Auffassung, dass man zuerst einen Körper, dann eine Fäche und dann eine Linie definieren müsse (siehe 3.) und „begründete die Dreidimensionalität des (euklidischen) Punktraumes durch die Höchstzahl von Geraden, die sich in einem Punkt schneiden und senkrecht aufeinander stehen“ (Mainzer 1980); mit Bezug auf physikalische Messungen kam bereits GALILEI (1564-1642) zu einer gleichlautenden Begründung für die Dreidimensionalität des Raumes (vgl. Janich 1989, S. 32-37). In „Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra“ formuliert LEIBNIZ die Idee eines höherdimensionalen Raumes und gibt als ein Beispiel für ein fünfdimensionales Objekt „the impulse of a falling heavy mass“ an (Rosenfeld 1988, p. 173).

10. Ein starker Einfluss auf die Entwicklung mehrdimensionaler Geometrien ging mit Sicherheit von der mithilfe generalisierter Koordinaten formulierten analytischen Mechanik (1788) von Lagrange (1736-1813) aus ($L(t, q_1(t), \ldots,$ $q_n(t), \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t))$, L Lagrangefunktion, $q_i(t)$ verallgemeinerte Koordinaten), obwohl Lagrange betont, dass seine Methoden nicht geometrisch, sondern rein algebraisch zu verstehen seien (vgl. Rosenfeld 1988, p. 180).

Die Theorie der Integrale über – in heutiger Terminologie würde man sagen: – n-dimensionale Bereiche war nach der ersten Hälfte des 19. Jahrhundert im wesentlichen entwickelt, zwei Beiträge seien angeführt (vgl. Rosenfeld 1988, p. 247-249): M.V. Ostrogradskiĭ publizierte 1835 eine Formel, die eine Integration über einen n-dimensionalen Bereich auf die Integration über dessen $(n-1)$-dimensionale Oberfläche zurückführt. C.G.J. Jacobi publizierte 1834 u.a. das $(n-1)$-fache Integral über alle positiven reellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, was wir heute als ein Segment (von 2^n Stück) der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel interpretieren. Beide Autoren verwandten jedoch keine geometrische Terminologie.

A.F. Möbius (1790-1868) führte 1827 einen vierdimensionalen Raum ein, um zwei spiegelverkehrte Objekte des dreidimenionalen Raums mithilfe einer Halbdrehung in einem vierdimensionalen Raum stetig ineinander überführen zu können; Möbius betont, dass ein solcher Raum nicht vorstellbar und eine solche Transformation deswegen nur theoretisch möglich ist (vgl. Rosenfeld 1988, p. 180).

11. Einen wichtigen Einfluss auf die Entwicklung der Geometrie und damit auch der höherdimensionalen Geometrie nimmt die Vektorrechung, die aus der Geometrie selbst, aus der Mechanik und den komplexen Zahlen hervorging (vgl. Rosenfeld 1988, p. 174-179):

In seinem Buch von 1802 betrachtet L. Carnot (1753-1823) unter anderem orientierte Strecken („segments“) mit Anfangspunkt A und Endpunkt B, also geometrisch repräsentierte Vektoren. In ähnlicher Weise konstruiert G. Bellavitis (1803-1880) einen geometrischen Kalkül orientierter Strecken („segments“) (1835). Er nennt orientierte Strecken äquipollent, wenn sie gleich lang sind und in die gleiche Richtung zeigen. Eine Klasse äquipollenter Strecken entspricht dem, was wir heute einen freien Vektor nennen. Weitere Impulse erhielt die Vektorrechung aus der projektiven Geometrie (K.G.C. v. Staudt 1798-1867). Auf den Beitrag von H. Grassmann (1809-1877) kommen wir unten zu sprechen.

In der Mechanik hat die Vektorrechung ihren Ursprung im Zusammenhang mit mechanischen Problemen – Parallelogrammkonstruktionen für Geschwindigkeiten und Kräfte – in der Schule von ARISTOTELES und nimmt ihren Weg über ARCHIMEDES, PTOLEMAIOS (100-170 n. Chr.), die Araber, S. STEVIN (1548-1620), J. WALLIS (1616-1703) und A.J.C.B. DE SAINT VENANT, der 1845 eine Vektorrechung publizierte.

Nach Vorarbeiten von CARDANO (1501-1576) – er führte komplexe Zahlen ein –, R. BOMBELLI (um 1526-1573), D'ALEMBERT (1717-1783) und EULER (1707-1783) interpretierte C. WESSEL (1745-1818) komplexe Zahlen als Vektoren mit Rechenregeln in der Ebene (1799) und übertrug die Ideen auf Vektoren im Raum. Die Arbeit von WESSEL wurde aber erst nach 1897 bekannt. Nach weiteren Arbeiten über komplexe Zahlen von J.R. ARGAND (1768-1822), CAUCHY (1789-1867) und GAUSS (1777-1855) verallgemeinerten HAMILTON (1805-1865) und andere englische Algebraiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts komplexe Zahlen auf drei- und vierdimensionale Räume. Der dabei konstruierte Quaternionen-Kalkül enthält eine Vektoralgebra im dreidimensionalen Raum.

12. Der Ausdruck „n-dimensionale Geometrie“ erscheint erstmals 1843 im Titel einer Publikation von A. CAYLEY, die Arbeit selbst ist rein algebraisch verfasst. Sehr wahrscheinlich hat er sich von HAMILTON, der Quaternionen als Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum interpretierte, zu diesem Ausdruck inspirieren lassen, (vgl. Rosenfeld 1988, p. 249-251). CAYLEY verstand n-dimensisonale Geometrie nur als bequeme Sprechweise und einen Vektor des n-dimensionalen Raumes als ein System $(x_1, \cdots, x_n)$ von n reellen oder komplexen Zahlen (vgl. Dieudonné 1985, S. 97-98).

13. Systeme linearer Gleichungen werden seit den Babyloniern durch sukzessive Elimination der Unbekannten gelöst, allerdings wurden deren Lösbarkeitsbedingungen bis ca. 1750 nicht systematisch untersucht (vgl. Dieudonné 1985, S. 57). LEIBNIZ scheint eine allgemeine Lösungsmethode angestrebt zu haben, fand die Determinante, gab 1693 Beispiele von Gleichungssystemen mit allgemeinen Koeffizienten und benutzte die Indexschreibweise, aber seine Ideen wurden vergessen (vgl. Wußing 1979, S. 254). 1750 gab G. CRAMER die Lösungsformel für ein System bestehend aus n Gleichungen mit n Unbekannten als Quotient von zwei Termen an, die nach CAUCHY als Determinanten bezeichnet werden, aber erst ab 1770 definierte man Determinanten n-ter Ordnung durch Induktion nach n (vgl. Dieudonné 1985, S. 59), und erst gegen 1880 war die allgemeine Theorie der linearen Gleichungssysteme über den reellen bzw. komplexen Zahlen vollendet (vgl. Dieudonné 1985, S. 95).

14. Weiter verlief die Entwicklung zur n-dimensionalen Geometrie nun so:

Im Jahre 1844 brachte H.G. GRASSMANN (1809-1877) – teilweise inspiriert von LEIBNIZ und der Philosophie J.F. HERBARTS – die „Die lineale Ausdehnungslehre“ heraus, die überarbeitet und erweitert unter verändertem Titel 1862 neu erschien. In diesen Arbeiten konstruierte er u.a. für n Dimensionen die heute als GRASSMANN-Algebra bezeichnete algebraische Struktur, beschrieb die Begriffe: Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Basis, (algebraische) Dimension dim, fand den grundlegenden Dimensions-Ausdruck $dimV + dimW = dim(V + W) + dim(V \cap W)$ für die Teilvektorräume V, W und rang um den allgemeinen Begriff des Vektorraumes (vgl. Dieudonné 1985, S. 98). Noch in seiner Veröffentlichung von 1844, die bereits ein bedeutender Beitrag zur n-dimensionalen Geometrie ist, bemerkte er für alle Dimensionszahlen größer als drei: „geometry goes no further but abstract science knows no bounds“ (zit. nach Rosenfeld 1988, p. 252).

Im Jahre 1851 stellte L. SCHLÄFLI (1814-1895) eine umfangreiche Monographie („Theorie der vielfachen Kontinuität“) über n-dimensionale euklidische Geometrie fertig und legte sie der Akademie der Wissenschaften zu Wien vor; vollständig erschienen ist sie erst 1901 in Basel, aber seine wichtigsten Ergebnisse wurden schon 1855 (Paris) und 1858-1860 (London) publiziert (vgl. Rosenfeld 1988, p. 253-256): SCHLÄFLI interpretiert in dieser Arbeit Systeme bestehend aus m linearen Gleichungen in n Variablen und ihre Lösungsmengen nur quasi geometrisch, weil er die Bezeichnung „Geometrie“ auf den Raum der Dimension drei beschränkt; er gibt u.a. Ausdrücke für Abstände, Winkel und Volumina von linearen Objekten im n-dimensionalen euklidischen Raum an und verallgemeinert für Polyeder, die zur Sphäre homöomorph sind, den EULERschen-Polyedersatz auf n Dimensionen.

In seinem 1854 gehaltenen Vortrag „Über Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ schuf B. RIEMANN (1826-1866) den Begriff der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, der nicht nur alle bisherigen Entwürfe in Richtung einer n-dimensionalen Geometrie als Spezialfälle enthält, sondern diese Entwürfe auch in das Licht eines erweiterten n-dimensionalen Geometriebegriff stellt (vgl. Becker 1964, S. 185-193). Seine Einsicht, dass der empirische Raum von allen denkbaren dreidimensionalen Räumen unterschieden werden müsse, legen bereits die zwischen ca. 1826-1840 erschienenen Arbeiten von BOLYAI und LOBAČEVSKIJ zur nichteuklidischen Geometrie nahe. Außerdem hatte GAUSS, dessen Schüler RIEMANN gewesen ist, die Richtigkeit nichteuklidischer Geometrien schon viel früher, vielleicht bereits 1792, wahrscheinlich um 1815/16 eingesehen, aber nicht publiziert, weil er nicht öffentlich in Gegensatz zur damals vorherrschenden Philosophie von KANT (siehe 16.) geraten wollte (vgl. Wußing 1979, S. 265-268; Becker 1964, S. 178). Mit der Loslösung des Geometriebegriffs vom empirischen Raum bzw. vom physikalischen Raumbegriff stand RIEMANN der allein dem Denken vorbehaltenen Verallgemeinerung des Geometriebegriffs auf beliebige n Dimensionen nichts mehr im Wege.

15. Die moderne geometrische Terminologie erscheint zuerst 1871 in einer Arbeit von E. BETTI über n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und wurde 1872 von C. JORDAN in einem Aufsatz über n-dimensionale euklidische Räume übernommen (Rosenfeld 1988, p. 257-258): In dieser Arbeit interpretiert JORDAN Systeme linearer Gleichungen in endlich vielen Variablen geometrisch; er diskutiert u.a. „k“-Ebenen, Abstände und Winkel.

Gegen Ende des 19. Jahrhundert waren n-dimensionale Räume für ganzzahlige positive Werte von n so geläufig, dass man anhand von Funktionenräumen auch unendlichdimensionale Räume (ab 1896) zu definieren und zu untersuchen begann (Rosenfeld 1988, p. 273-279). Der allgemeine Dimensionsbegriff wurde erst im Rahmen topologischer Untersuchungen Anfang des 20. Jahrhunderts (PIONCARE, HAUSDORFF, BROUWER, LEBESQUE) präzisiert (vgl. Courant/Robbins 2001, S. 190-191). Bemerkenswerter Weise bewirkte erst das Studium unendlichdimensionaler Räume, dass sich der besonders von GRASSMANN herausgearbeitete Begriff des (endlich) n-dimensionalen Vektorraumes durchsetzte (vgl. Dieudonné 1985, S. 98).

Nach Vorarbeiten von PASCH 1882, PEANO 1888 und 1889, PIERI 1899 und HILBERT 1899 gab H. WEYL (1885-1955) 1918 eine bis heute übliche Axiomatisierung der euklidischen Geometrie des n-dimensionalen euklidischen Raumes an (vgl. Rosenfeld 1988, p. 262-264).

16. Den Anschauungsraum, Handlungsraum und Vorstellungsraum erleben wir 3-dimensional, und deswegen ist es nicht erstaunlich, dass die Geometrie zunächst auf die Dimensionen bis zu drei beschränkt war und man alle Vorstöße in Richtung „höherdimensionale Geometrie“ algebraisch interpretierte, bis der mathematische Raumbegriff vom Begriff des natürlichen Raumes abgelöst wurde. Nachdem sich die Unterscheidung des mathematischen Raumes vom natürlichen Raum durchgesetzt hatte, versuchte man die Dreidimensionalität des uns umgebenden Raumes auch von sinnesphysiologischen, wahrnehmungspsychologischen bzw. evolutionsbiologischen Ansätzen ausgehend zu begründen. Wir referieren kurz Begründungen für die Dreidimensionalität des uns umgebenden Raumes durch Bezug auf (a) Eigenschaften der Außenwelt und (b) Strukturen und Eigenschaften von erkennenden Subjekten:

(a) I. KANT (1724-1804) versuchte 1746 in seiner frühen Schrift „Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte" zum ersten Mal in der Wissenschaftsgeschichte, die Dimensionszahl drei unseres Raumes empirisch zu begründen. Der Argumentation von KANT liegt die folgende Idee zu Grunde: Betrachtet man die Abhängigkeit der Kraft F vom Abstand zweier Massen r in der verallgemeinerten radialsymmetrischen Form $F \sim r^{-(n-1)}$ ($\sim$= proportional), worin n die unbekannte zu bestimmende Dimension des Raumes bedeutet, dann folgt: Die von einem Körper in einem n-dimensionalen Raum ausgehenden Kräfte durchsetzen eine den Körper umschließende $(n-1)$-dimensionale Kugeloberfläche nur dann so, dass das empirisch bestätigte Gesetz $F \sim r^{-2}$ gilt, falls $n-1=2$, also $n=3$. Andere Wissenschaftler, u.a. P. EHRENFEST (1913, 1920) und H. WEYL, beschritten im Grunde ähnliche Pfade. Die Tatsache, dass unser Alltagsraum 3-dimensional ist und die Dreidimensionalität unseres Raumes Grundlage jeder Messtechnik ist (es gibt z.B. keine 4- oder 10-dimensionalen Labortische) ist heute wenig umstritten, aber eine befriedigende Begründung und insbesondere eine befriedigende Erklärung für die Dreidimensionalität des Raumes gilt noch heute als Desiderat (s. 3.3.1 und vgl. Janich 1989, S. 71-83; Vollmer 2003, S. 226-248).

In seiner „Kritik der reinen Vernunft" (1. Aufl. 1781) betrachtet KANT den Raum nicht mehr als einen empirisch zu untersuchenden Gegenstand, sondern als apriorische, reine Anschauungsform, jeder äußeren Erfahrung vorausgehend und Geometrie als eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch apriori bestimmt (vgl. Becker 1964, S. 177; Wußing 1979, S. 265-266). Darauf, dass GAUSS als erster klar erkannt hatte, dass die euklidische Geometrie nicht vollständig apriori begründet werden kann (weil auch nicht euklidische Geometrien – in denen das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrien nicht gilt – richtig sind), wurde oben hingewiesen (s. 14.).

(b) Seit dem Aufkommen der Physiologie und Wahrnehmungspsychologie im 19. Jahrhundert unterscheidet man – mit POINCARÉ (vgl. Janich 1989, S. 98-109, 122-123) – das mathematische Kontinuum von dem Kontinuum, das uns in unserer Wahrnehmung auf Grund von Sinnesreizen gegeben wird. Das wahrnehmungspsychologische Kontinuum wird bis heute für jede sensorische Modalität (Sehraum, Tastraum und Hörraum) getrennt untersucht (vgl. Karnath/Thier 2006; Birbaumer/Schmidt 1996). Ein frühes, für jede Modalität gefundenes Forschungsergebnis ist das Gesetz von Weber und Fechner (vgl. Asanger/Wenninger 1983, s.v.: Psychophysik). Die Fragen, wie diese Räume zum Erlebnis eines Raum integriert werden, welche Eigenschaften dieser integrierte Raum hat und wie passend er den physikalischen Alltagsraum repräsentiert, sind Gegenstand der neuro- und wahrnehmungspsychologischen Forschung (vgl. Karnath/Thier 2006).

Der naive, durch schlichte Wahrnehmung vermittelte Raumbegriff muss sich im mesokosmischen Raum der Umwelt bewähren („Begriff" ist hier psychologisch gemeint: Für einen Menschen ist der Begriff eines Schraubendrehers seine Kenntnis davon, was man damit macht). Nur wissenschaftsgeschichtliche Prozesse – d.h. wiederholt rückgekoppelte Schleifendurchläufe von methodisch geläuterter Wahrnehmung, Kognition, Handlungspraxis und Umweltantwort – führen zu abstrakteren, mathematisch formulierten Raumkonzepten und gegebenfalls zu einer über den Mesokosmos hinausgehenden Passung. Unsere Bewegungssteuerung und damit zusammenhängende Fragen nach unseren dafür wirksamen körpereigenen Koordinatensystemen sowie deren Passungen an den dreidimensionalen physikalischen Raum sind bis heute Gegenstand der Forschung (vgl. Karnath/Thier 2006, S. 151-236) und zugleich Ausgangspunkt für die Konstruktion abstrakter Raumbegriffe („Begriff" ist hier wieder psychologisch gemeint), die ausgehend vom naiven Raumbegriff in wissenschaftssprachlichen Prozessen, denen auch Normierungen zu Grunde liegen, herausgebildet wurden. Festzustellen ist hier, dass für die meisten physiologischen, psychologischen und biologischen Untersuchungen der 3-dimensionale euklidische Raum als Modell für den uns umgebenden physikalischen Raum und als Referenzgröße für diese Forschungen vorausgesetzt wird. Was rechtfertigt dies Vorgehen? In der wiederholt rückgekoppelten Schleife von Wahrnehmung, Kognition, Handlungspraxis und Umweltantwort erhalten wir fortwährend Rückmendungen über stabilisierte Regelmäßigkeiten und die Richtigkeit oder Falschheit unserer darauf bezogenen Hypothesen, die wir über die Welt formulieren. Die Ergebnisse aus der großen Anzahl der Schleifendurchläufe, auf die wir heute zurückblicken können, lassen uns annehmen, dass wir unser wissenschaftliches Wissen über die Welt stets erweitern, vertiefen und verbessern können und es selbst dort nicht ganz unbrauchbar ist, wo wir uns bereits weit über die Grenze unseres Mesokosmos hinausbewegt haben. Weil uns die Schleifen stets auf drei Raumdimensionen geführt haben, betrachten wir die Dimensionszahl drei als eine extrem stabile Invariante unseres Raumes, die fast genauso alt ist wie unser Kosmos (s. 3.3.1)[2].

4.3.2 Vierdimensionaler Würfel im Labor und Mathematikgeschichte

Bevor wir den 4-dimensionalen Würfel konstruieren, bestimmen wir mithilfe des im letzten Abschnitt gegebenen historischen Abrisses seinen Ort in der Geschichte der höherdimensionalen Geometrien und kommentieren dabei den historischen Abriss ein wenig.

1. Ausgangspunkt für unsere Konstruktion wird ein recht naiver Raumbegriff sein, in dem intuitive Vorurteile zusammen mit mathematischen Kenntnissen in einer Weise gemischt sind, wie sie in der Regel bei Schülern der gymnasialen Oberstufe anzutreffen sind und dem in etwa Folgendes zu Grunde liegt: Der Raum ist sowohl der Raum, in dem wir uns bewegen und handeln, er ist aber auch der Raum unserer Wahrnehmungen. Weil es im Raum maximal 3 paarweise aufeinander senkrecht stehende Geraden gibt, die sich alle in genau einem Punkt schneiden, nennen wir den Raum 3-dimensional. Jede dieser Geraden denke man sich mit dem Kontinuum der reellen Zahlen belegt. Die Menge der reellen Zahlen mit ihren natürlichen Verknüpfungen in heutiger Notation ist eine Erfindung der letzten Jahrhunderte. Einfache Rechentechniken für reelle Zahlen und intuitive Vorstellungen vom Zahlenkontinuum (topologische Eigenschaften) werden vorausgesetzt. Jeder Punkt im Raum lässt sich eineindeutig durch ein 3-Tupel reeller Zahlen beschreiben. Insgesamt erhalten wir auf diese Weise ein kartesisches Koordinatensystem zur analytisch-geometrischen Beschreibung des Raumes. Der Raum wird als dreidimensionaler euklidischer Raum verstanden, so wie es auch bis zur Erfindung der nicht euklidischen Geometrien der Fall war. Physikalischer Raum, Wahrnehmungsraum und euklidischer Raum bleiben zunächst (anders s.u. in 3.), wie in der Geschichte der Mathematik, ununterschieden.

2. Anders als die von den Griechen geschaffene geometrische Algebra, die die Erfindung höherdimensionaler Geometrien tendenziell behindert hat, machte

[2] Aus der Geschichte des Nachdenkens über den Raum referiert Janich u.a. Beiträge von Poincaré, J. von Uexküll, K. Lorenz und Vollmer. Diese Autoren gründen ihre Überlegungen auf physiologische, wahrnehmungspsychologische, evolutionsbiologische Befunde bzw. Ansätze oder auf die Evolutionäre Erkenntnistheorie (vgl. Janich 1989, S. 98-124).

die von Fermat und Descartes erfundene analytische (algebraisierte) Geometrie den Weg zu höherdimensionalen Geometrien tendenziell frei. Auch die umständliche und zunächst nur für spezielle Situationen aus der geometrischen Algebra entwickelte Notation für Potenzen hat die Entwicklung höherdimensionaler Geometrien tendeziell verzögert. Entscheidend für das späte (erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhundert) Auftreten der höherdimensionalen Geometrien war jedoch die Tatsache, dass man den Begriff „Geometrie“ immer nur auf den physikalischen Raum bezog, der mit dem Handlungs- und Wahrnehmungsraum identisch gedacht wurde. Kants früher Versuch, die Dreidimensionalität des Raumes durch physikalische Argumente zu erweisen, hätte die Entwicklung höherdimensionaler Geometrien beschleunigen können, doch mit seiner „Kritik der reinen Vernunft“, in der Kant den Raum zu einer apriorischen Anschauungsform und die Geometrie zu einer Wissenschaft hyperstatisierte, welche die Eigenschaften des Raums synthetisch und doch apriori bestimmt, verfiel diese Chance, weil jede Entwicklung einer Geometrie, welche nicht der euklidischen des 3-dimensionalen Raumes entsprach, in Gegensatz mit der damals vorherrschenden Erkenntnistheorie Kants geriet.
3. Wir werden zwei Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels durchführen. An dieser Stelle ist nur die zweite anzusprechen, weil sie im Wesentlichen die Konstruktion ist, die M. Stifel (s.o.) bereits gefunden hat. Im Gegensatz zu Stifel, der die Konstruktion noch ganz im Sinne der geometrischen Algebra und im Sinne der Auffassung, Geometrie sei die mathematische Wissenschaft unseres Raumes (physikalischer, mathematischer Raum und Wahrnehmungsraum waren also noch nicht unterschieden) verstand und deswegen die Konstruktion nur als Vehikel für die Algebra bzw. Arithmetik deutete, unterscheiden wir den physikalischen Raum, den Wahrnehmungsraum und den mathematischen Raum voneinander und deuten die Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels als ein Beispiel für die Konstruktion eines mehr als 3-dimensionalen mathematischen Raumes, also als ein Stück höherdimensionale Geometrie.

Wir wenden uns nun den beiden Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels zu und reflektieren sie – zusammen mit dem gegebenen historischen Abriss – aus naturgeschichtlicher Sicht.

4.4 Ein Weg in den Exokosmos: Zwei Konstruktionen eines 4-dimensionalen Würfels – naturgeschichtlich reflektiert

4.4.1 Zur 3-Dimensionalität unseres Raumes

Einstieg in die Problematik des Raumbegriffs und seiner Dimensionen
Die meisten seiner Kursteilnehmer antworteten auf die Frage des Autors, was ihnen zu einem „4-dimensionalen Würfel“ einfalle, zunächst mit einer Orientierungsreaktion. Lassen wir die weniger ernst zu nehmenden, danach folgenden Antworten außer Acht, dann bleibt bemerkenswert, dass die Kursteilnehmer nicht in Zweifel zogen, dass es einen solchen Würfel gebe – in welchem Sinne blieb unreflektiert. Bald fiel das Stichwort Relativitätstheorie und 4-dimensionaler Raum. Vage wurde nachgeschoben, dass unser 3-dimensionaler Raum mit der Zeit in der Relativitätstheorie zu einem 4-dimensionalen Raum zusammengefasst sei.

Schon diese Antworten enthalten einige große Probleme um den Raumbegriff: Wie stehen Alltagsraum, kosmischer Raum, Raum-Zeit und mathematische Räume zueinander? Was haben die sogenannten „drei Dimensionen unseres Alltagsraumes“ (Mesokosmos) mit den Dimensionen zu tun, die Gegenstand physikalischer, d.h. empirisch prüfbarer Theorien über den kosmischen Raum (Exokosmos) sind? Was haben diese beiden Dimensionen mit dem Dimensionsbegriff in der Mathematik zu tun? Wie steht ein würfelartiger materieller Gegenstand zum Würfel als Gegenstand der Mathematik? In welchem Sinne „gibt“ es einen mathematischen Würfel? (Nicht (!) enthalten ist die Frage, wie diese Räume mit dem Wahrnehmungsraum zusammenhängen.)

Im gymnasialen Mathematikunterricht und in den meisten Lehrveranstaltungen an Hochschulen für angehende Mathematiker werden diese Fragen nicht einmal problematisiert. Man hält sich an „handfeste“ Mathematik und verweist Interessierte auf die Literatur. Auch der Autor hat die aufgeworfenen Probleme mit seinen Kursteilnehmern nicht wirklich bearbeitet, aber manche Einsichten, die sich aus der naturgeschichtlichen Reflexion der Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels oder aus der naturgeschichtlichen Sicht auf die Vorgeschichte höherdimensionaler Geometrien ergeben werden, erweisen sich als mögliche Ausgangspunkte für erste Antworten auf einige der obengenannten Probleme.

Wenden wir uns zunächst unserem Alltagsraum zu.

Unser Raum ist 3-dimensional

Quaderförmige Kisten erweisen sich handwerklich als leichter herstellbar als die meisten anderen. In eine solche Kiste kann man einen Körper einschließen, und es sind Invarianten unserer Raumerfahrung, dass man erstens auf keine der sechs rechteckigen Seitenflächen des Quaders verzichten kann, um den Körper einzuschließen, dass zweitens in jeder Ecke der Kiste drei aufeinander senkrecht stehende Kantenlinien des Quaders zusammenlaufen und drittens kein Arrangement mit z.B. vier paarweise aufeinander senkrecht stehenden Kantenlinien, die in einer Ecke zusammenlaufen, dafür möglich ist (vgl. Janich 1989). Indem wir nun eine Ecke der Kiste ins Auge fassen und die drei in dieser Ecke zusammenlaufenden Kantenlinien als Länge-Richtung, Breite-Richtung und Höhe-Richtung auszeichnen und diesen die Zahlen 1, 2 und 3 zuordnen, können wir sagen: Der uns umgebende Raum ist 3-fach ausgedehnt, er hat 3 Dimensionen, ist 3-dimensional; weil wir in unserer Vorstellung den Quader beliebig groß machen können, sprechen wir nun vom Raum und nicht mehr vom Quader. Weil in einer beliebigen Ecke einer beliebigen Seitenfläche des Quaders (Rechteck) jeweils zwei Seitenlinien aufeinander senkrecht stehen, nennt man eine Fläche 2-dimensional. Entsprechend heißt eine Linie 1-dimensional. In Fortsetzung dieser Überlegungen, nennen wir einen Punkt (idealisierter Ort) 0-dimensional[3]

Damit sind die Vorkenntnisse der Kursteilnehmer über den Raumbegriff im Wesentlichen skizziert. Sie entsprechen, soweit sie über den naiven (unreflektieren) Raumbegriff hinausgehen, in etwa dem Kenntnisstand der Mathematiker des Altertums und dem Kenntnisstand über den Dimensionsbegriff von Leibniz und Galilei.

3-dimensionaler Raum und Naturgeschichte

Warum wir überhaupt Kisten bauen und darüber nachdenken können, führt –

[3]Die Dimensionszahl der leeren Menge ist per definitionem gleich -1.

Auch gekrümmte Linien sind 1-dimensional, Flächen 2-dimensional und Räume 3-dimensional. Die Dimensionszahlen wurden nur für das Beispiel eines Quaders eingeführt, dessen einzelne Kantenlinien und Seitenflächen nicht gekrümmt sind.

Weil die mathematische Dimensionstheorie erst erfunden wurde, nachdem die Vorgeschichte höherdimensionaler Geometrien abgeschlossen war, lassen wir die mathematische Dimensionstheorie außer Acht. Übrigens hat man die mathematischen Dimensionsbegriffe so gewählt, dass ihre Dimensionszahlen mit den Dimensionszahlen der uns vertrauten Räume übereinstimmen.

insofern man den Zuständigkeitsbereich der empirischen Wissenschaften nicht verlassen möchte – auf die naturgeschichtliche Sicht, aus der wir für den Raum bereits in 3.3.1 Stellung bezogen haben: Dort haben wir begründet festgestellt, dass der 3-dimensionale Raum nicht nur unsere Alltagserfahrung ist, sondern dass er eine extrem stabile Invariante unseres Kosmos ist, die nahezu so alt ist wie der Kosmos selbst (ca. $13,6 \cdot 10^9$ Jahre) und deswegen unumgänglich jeder physikalischen Messtechnik vorausgeht. Er ist also eine globale Invariante unseres Kosmos, folglich auch unseres Mesokosmos. Wir betrachten den 3-dimensionalen Raum deswegen als die erste kosmische Invariante unseres dynamischen Systems „Naturgeschichte“ und tragen sie als solche in das vereinfachte ML-MS der Abb. 4.5 ein.

4.4.2 Wie kommen wir über unseren 3-dimensionalen Raum hinaus?

Eine 4-dimensionale Kiste, in deren jeder Ecke stets 4 auf einander senkrecht stehende Kantenlinien zusammenlaufen, kann man nicht bauen, weil die 3-Dimensionalität des Raumes eine unüberwindbare kosmische Invariante ist. Deswegen können wir eine 4-dimensionale Kiste bestenfalls kognitiv konstruieren, und da wir Menschen evolutionsgeschichtlich an den 3-dimensionalen Raum adaptiert sind, steht zu erwarten, dass Eigenschaften des Raumes über den Weg biologischer, psychischer und sozialer Strukturen Eingang in unsere Alltagssprache und dann in unsere Wissenschaftssprache gefunden haben und als Bedingungen für die Möglichkeit und Inspiration der kognitiven Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels nicht hoch genug bewertet werden können.

Wir gehen nun zuerst der Naturgeschichte der Passungen an unsere 3-dimensionale Umwelt und danach der Naturgeschichte unseres Quantisierungskonzepts etwas genauer nach. Die Passungen an unsere 3-dimensionale Umwelt in Verbindung mit unserem Quantisierungskonzept und unserer Sprachfähigkeit werden es uns dann ermöglichen, einen 4-dimensionalen Würfel zu konstruieren.

Stammesgeschichte der Raumrepräsentation

Die 3-Dimensionalität des Raumes haben wir als eine naturgeschichtliche Invariante des unbelebten Materiell-Energetischen ausgewiesen, die im Wesentlichen so alt ist wie unser Kosmos selbst. In allen höheren Emergenzebenen findet man naturgeschichtliche Passungen zur Optimierung von Orientierung und

Verhaltenssteuerung im 3-dimensionalen Raum, wenn auch von unterschiedlicher Komplexität: Bauplansymmetrien von Organismen und deren Brechungen (biotische Emergenzebene), unsere Fähigkeiten, Objekte mental rotieren, Spiegelbilder mental konstruieren (psychische Emergenzebene) oder Geometrie wissenschaftlich betreiben zu können (soziale Emergenzebene), seien beispielsweise genannt. Dazu RIEDL im Ansatz seiner STE:

> Man erinnere sich des Ansatzes zu billiger Ordnung [vgl. (Riedl 1975)], zu welcher auch die Symmetrien gleichgebauter Körperabschnitte gehören. Tatsächlich besitzen die frühen sphärischen Einzeller ... beliebig viele Symmetrien und noch keine Körperachse. Diese tritt als Oben-Unten-Achse bei der späteren Radiärsymmetrie auf. Und erst die Ortsbewegung mit Orientierung zum Boden läßt drei Achsen im Bauplan entstehen und reduziert die Symmetrie-Ebenen auf eine einzige. Der Erfolg des Bauprogramms mit drei aufeinander orthogonalen Achsen ist enorm. Fast alle beweglichen Vielzeller sind nach diesem Prinzip gebaut.
>
> Bei den Wirbeltieren kommt hinzu, daß auch die Sinne nach diesen drei Achsen entwickelt wurden, am offensichtlichsten in den drei aufeinander normal stehenden Bogengängen des Gleichgewichtsorganes. Zwei Bogengänge genügten nicht, ein vierter wäre nutzlos, und nur dadurch, daß sie rechtwinklig zueinander stehen, mißt jeder ausschließlich die Bewegungsänderung in seiner Ebene.
>
> So ist auch die Steuerung der Bewegung schon von den Haien aufwärts entsprechend drei Systemen zugeordnet: die Höhensteuerung den Brustflossen, die Seitenbewegung der Rumpfkrümmung und der Vortrieb Schlängelung und Schwanzflosse. Und selbst bei uns ist der Greifraum der Arme noch immer bevorzugt symmetrisch gesteuert, was man daran erkennt, daß spiegelbildliche Bewegungen beider Arme und Hände geringerer Übung bedürfen. Kein Wunder also, daß wir den Raum auch nach drei Vorzugsachsen erleben. Nur die perspektivische Darstellung auf der Fläche, wie deren Interpretation durch den Betrachter, ist kultur- und entwicklungsabhängig. Die Geometrie des EUKLID formalisiert eine angeborene Form der Anschauung.“ (Riedl 1994, S. 77-79)

Die Anpassung der Organismen an den 3-dimensionalen Raum ist folglich Teil der Stammesgeschichte aller Arten und deswegen wesentlich mit der Phylogenese ihrer Sensorik und ihrer Nervensysteme verwoben. Sowohl für einschlägige Informationen zur Phylogenese des Nervensystems (vgl. Sarnat/Netsky 1974;

Aboitiz/Montiel 2007; Bock/Cardew 2000; Roth/Wullimann 2001; Butler/Hodos 2005; Wenniger/Irle 1998) als auch zur funktionellen Neuroanatomie unseres Gehirns (vgl. Birbaumer/Schmidt 1996; Karnath/Thier 2006) verweisen wir auf die Literatur. Für unsere naturgeschichtliche Sicht sei aber etwas deutlicher gemacht, wie die Gehirnentwicklung in ihrer stammesgeschichtlichen Phase vermutlich verlief, in der das Gehör mit dem Gesichtssinn so integrierte wurde, dass der Raum in beiden Modalitäten repräsentiert und als der gleiche erlebt werden konnte. Dazu referieren wir nun aus L. Margulis und D. Sagan (vgl. Margulis/Sagan 1996, S. 145-178), die sich besonders auf Einsichten von H. Jerison und W. Calvin beziehen. Jerison und Calvin glauben weitergehend, dass aus der Integration von Gesichtssinn und Gehör, beginnend bei den frühren Säugetieren, ein elementares Zeitbewusstsein und die biologischen Voraussetzungen für unsere Sprachfähigkeit entstanden sein könnten:

> Die Synapsiden[4] oder säugetierähnlichen Reptilien, Nachfahren der anzestalen Stammreptilien, hatten ihre Blütezeit vor etwa $(250 - 150) \cdot 10^6$ Jahren (noch vor der Entstehung der meisten Dinosaurier) (vgl. Margulis/Sagan 1996, S. 158, 161). Sie waren vermutlich tagaktiv. Weil in ihrem Gehirn noch kein visueller Kortex entwickelt war, funktionierte ihr Sehen vermutlich so, dass bestimmte Gesichtsfeldreize reflexartig immer das gleiche Verhaltensmuster auslösten (vgl. S. 165). Ihre Verarbeitung von visuellen Daten aus dem Raum in Verhalten (Motorik) war also primitiv. Vor ca. $245 \cdot 10^6$ Jahre gingen die säugetierähnlichen Reptilien bis auf wenige zu Grunde (vgl. S. 164): Viele wurden wohl Beute ihrer Verwandten, den schnellen und aggressiv jagenden Thekodontiern. Die Wenigen überlebten vermutlich deswegen, weil sie von der Tagesaktivität zur Nachtaktivität übergegangen waren, auf diesem Weg eine Stäbchenretina, mit der sie auch in der Dämmerung sehen konnten, und vor allem ein differenziertes Gehör entwickelten (vgl. S. 166-167). Nach Jerison hat sich aus den nachtaktiven Synapsiden die Linie der Säugetiere entwickelt (vgl. S. 166).
>
> Soweit die Reptilien das Hören beibehalten haben, ist es etwas Autonomes, das anders als bei den Säugetieren nicht vom ganzen Gehirn

[4] In der Literatur findet man sowohl die Synapsiden als auch die von diesen abstammenden Therapsiden als säugetierähnliche Reptilien verstanden (vgl. Aboitiz/Montiel 2007, p. 28, 35; Sarnat/Netsky 1974, p. 17). Nach einer auf ihr Skelett Bezug nehmenden Beschreibung der Therapsiden (vgl. Sarnat/Netsky 1974, p. 17) heißt es, s. (Sarnat/Netsky 1974, p. 109) sogar: „The therapsids were the earliest mammals, although they retained many reptilian features.“

getragen wird. Sie sind nahezu taub für durch die Luft übertragene Töne und hören deswegen weniger mit ihren Ohren als mit ihren Knochen (Vibrationen); außerdem sind die meisten rezenten Reptilien weitgehend stumm, nur bei rezenten Geckos hat man Stimmbänder gefunden (vgl. S. 175).

Bei den entwickelteren Synapsiden hatten sich die Knochen Quadratum und Articulare des doppelten Kiefergelenks der Reptilien zwar schon verkleinert, waren aber noch nicht in die Gehörknöchelchen des Gehörs der Säugetiere (Amboß und Hammer des Innenohres) umgewandelt (vgl. S. 175-176). Die nachtaktiven säugetierähnlichen Reptilien entwickelten nach JERISON in ihrer Evolution zu Säugetieren nun ein Gehör. Mit dessen Hilfe konnten sie akustische Reize zu einer kognitiven Landkarte verarbeiten und schließlich Feinde und Artgenossen (insbesondere ihre Jungtiere) bei Nacht effizient orten. Wenn akustische Reize, die fast immer nacheinander auf ein Ohr treffen, für die Orientierung im Raum verwendet werden, dann darf angenommen werden, dass diese frühen Säugetiere akustische Reize in ein metronomisch getaktetes Nacheinander ordneten und dafür einen auditiven Speicher entwickelten. Auf diese Weise brachten sie verschiedene Ereignisse in einen linearen Zusammenhang, entwickelten also eine (ihnen unbewusste) neuronale Repräsentation der Zeit, die den Vorteil einer komplexeren Verhaltensauslösung mit sich brachte (vgl. S. 166-167, 176). Mit fortschreitender Entwicklung des Gehörs vergrößerte sich vor ca. $200 \cdot 10^6$ Jahren der auditorische Kortex der Säugetiere und die auditorisch aufgebauten räumlichen Landkarten wurden präziser und verhaltenseffizienter (vgl. S. 166).

Nachdem vor ca. $(60-70) \cdot 10^6$ Jahren die meisten tagaktiven Feinde der Säugetiere (die schnellen Riesenechsen) ausgestorben waren, verbesserten sich ihre Lebensbedingungen insofern, dass sie zu einem tagaktiven Leben zurückkehren konnten (vgl. S. 167). Während dieses Überganges bildete sich nach JERISON ein Teil der Stäbchen in der Retina der nachtaktiven Säugetiere in Zäpfchen um, mit denen ein Farbensehen möglich wurde (vgl. S. 167-168). Dieser „wiederentstehende Gesichtssinn wurde zur Basis eines neuen, auf die Hirnrinde, in das Hirn hinein verlagerten Sehens. Andere Verschiebungen folgten. Das ins Gehirn hinübergewanderte Hören, das aufeinanderfolgende Töne zu Umgebungskarten zusammensetzen konnte, wurde nun wiederum für den Gesichtssinn genutzt. Das heißt, zusätzlich zu seiner normalen ‚kartographischen' Funktion übernahm das Sehen die Aufgabe der Zeitverkopplung, ähnlich wie das Gehör, wenn es eine komplexe Tonfolge zu Melodien zusammenschließt. Dieser neue Gesichtssinn war weitgehend ins Gehirn verlagert. ... Ein derartiges System konnte visuelle Bilder sekundenlang oder länger in irgendeiner Form speichern und so hinter den zeitlichen und räumlichen Veränderungen das ‚Beständige' festhalten.

Zu einer weiteren Verbesserung des Gehörsinnes kam es ‚im Laufe der letzten Millionen Jahre. ... Das Gehörsystem war nun ... in der Lage, Töne und Tonmuster in Objekte umzusetzen und die Wahrnehmungswelt – zumal mit Rücksicht auf die Zeit – erheblich zu differenzieren.' Zu Recht vermerkt Jerison, daß ‚das Spezifikum der Sprache weniger in ihrer Bedeutung für die soziale Kommunikation als vielmehr in ihrer Rolle bei der Evokation der kognitiven Bilder liegt' " (S. 168).

„Die ersten Voraussetzungen für die Entstehung der menschlichen Sprache ... liegen wahrscheinlich schon etwa 70 Millionen Jahre zurück, datieren also aus einer Zeit lange vor den Anfängen der Menschhheit. Sprache definiert Jerison dabei als die Kodierung vieler, oftmals gleichzeitiger Geschehnisse in Symbolreihen, in Geschichten." (S. 164)

Nach Ansicht des Neurobiologen Calvin entwickelten sich phylogenetisch aus den Abläufen des Jagens und der Fürsorge die Konzentrations- und Kalkulationsfähigkeit zusammen mit dem Hang zum Fortlaufend-Linearen und die Sprache (vgl. S. 169-170). „Nach Calvins Darstellung arbeiteten die für das Töten kleiner Tiere durch Steinwürfe erforderlichen Rechenoperationen mit eben jenen Gehirnfunktionen, die später eine entscheidende Rolle in der Sprachlogik spielten. Der wachsende Erfolg, mit dem Menschen (in der Regel mit der rechten Hand) ihre Steine nach Kaninchen, Hirschen und Vögeln warfen, brachte eine adaptive Zunahme jener für das Werfen zuständigen Hirnstrukturen mit sich, die in der linken Hemisphäre zugleich den Sitz des Sprachzentrums bilden. ... Werfen hieß zielen, und zielen hieß planen; mit dem Tun entstand auch dessen Berechnung. Die Zunahme der seriell verarbeitenden Fähigkeiten war dann ihrerseits Bedingung dafür, daß die Menschen im Laufe ihrer Entwicklungsgeschichte Voraussicht und Antizipation lernen konnten; nach Calvins Überzeugung nämlich brachte sie nicht allein Fertigkeiten wie Baseballwerfen hervor, sondern auch die exquisite Kunst des Homo sapiens: die Sprache." (S. 170)

Eine naturgeschichtliche Sicht auf das werdende Nervensystem hin zu dem erst viel später in Erscheinung tretenden Menschen haben wir am Beispiel des

Gesichtssinns, des Gehörs und der Integration dieser beiden Modalitäten hinsichtlich der Verhaltenssteuerung im Raum soeben skizziert. Die beschriebenen Grundstrukturen des Sehens und Hörens im Raum und die Tatsache, dass beide Modalitäten das gleiche Raumkonzept repräsentieren und dass nacheinander folgende Geschehnisse in einem zeitlichen Zusammenhang repräsentiert werden, usw., deuten wir mit unserem naturgeschichtlichen Forschungsansatz als harte Invarianten der biotischen Emergenzebene. Denn soweit genetisch bestimmt, sind sie unveränderbare Bürden für zukünftige Entwicklungen, und soweit sie auf nichtgenetischen Veränderungen infolge von Umweltveränderungen beruhen, können sie nur sehr langsam, infolge weiterer Umweltveränderungen, verändert werden. Zur Erinnnerung an diese Zusammenhänge tragen wir in das vereinfachte ML-MS der Abbildung 4.6 den mit den Wirbeltieren vor $500 \cdot 10^6$ Jahren auch für den Menschen bestehenden Grundaufbau des Vertebratengehirns zusammen mit seinen sensorischen Modalitäten und das seit $(60-70) \cdot 10^6$ Jahren vorliegende moderne Säugetiergehirn in die biotische Emergenzebene ein.

Phylogenetisch früh bildeten Metazoa bereits Organe für ihre Orientierung und Verhaltenssteuerung im Raum, die vom Gesichtssinn und Gehör unmittelbar unabhängig sind. Wir verweisen dazu auf H.B. Sarnat und M.G. Netsky und lassen diese Autoren hier nur mit ihrem Hinweis zu Wort kommen, dass auch das Vestibularorgan bei der Raumrepräsentation des Menschen nicht zu unterschätzen sei:

> „An important factor enabling passive filter-feeding protochordates to become active and mobile predators was the evolution of organs of orientation in space. Centers in the central nervous system developed concurrently to receive and interpret appropriate information and translate it into motor responses. Organs of equilibrium and receptors for sense of motion, therefore, were early developments in vertebrate evolution. Although they are not identified in amphioxus, they occur in all presently living true vertebrates, as well as in many invertebrates. …
>
> The vestibulospinal tract was the first motor tract from the brain to exercise control over the motor neurons of the spinal cord, reflecting the importance of information about motion and spatial orientation. Its importance as a major pathway for postural control even in man often is underestimated, although the reliance on vestibular control is diminished by vision and other senses of orientation in space.“ (Sarnat/Netsky 1978, p. 85)

Die neuropsychologische und psychologische Forschung hat – trotz vieler ungeklärter Probleme – inzwischen ein brauchbares Bild von der Raumrepräsentation im Gehirn des rezenten Homo sapiens erarbeitet. Für einen Abriss des umfangreichen Forschungsstandes verweisen wir auf die Literatur (vgl. Karnath/Thier 2006; Birmaumer/Schmidt 1996), in der auch unser Vestibularorgan abgehandelt wird. Einige der in der Literatur beschriebenen Befunde, die wir als Invarianten im Rahmen unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes deuten werden, führen wir an, wenn wir unsere Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels naturgeschichtlich reflektieren und diese Reflexionen auf die Vorgeschichte der höherdimensionalen Geometrien beziehen. Die für die Zwecke unseres Vorhabens wichtigsten neuropsychologischen und psychologischen Befunde und Einsichten zur Ausstattung des rezenten Menschen fassen wir nun zusammen und behalten das hypothetische stammesgeschichtliche Panorama dabei im Hinterkopf:

- Die visuelle Modalität, die auditorische Modalität, die taktile Modalität, aber auch die propriozeptive Modalität (Sensoren in den Muskeln und Sehnen) und die vestibulare Modalität (Bogengängestruktur unseres Gleichgewichtsorgans) – die beiden zuletzt genannten Modalitäten unterstützen uns bei der Bestimmung der Lage unseres Körpers unter Schwere- und Trägheitskräften – haben sich in unserer Stammesgeschichte im zentralen Nervensystem so miteinander verbunden, dass wir den uns umgebenden 3-dimensionalen Raum in jeder Modalität als den gleichen erleben und einen Sachverhalt in Raum und Zeit wechselweise bzw. gleichzeitig (doch nicht immer qualitativ gleich) in jeder Modalität repräsentieren und zur Verhaltenssteuerung verwenden können.
  In der Integration der auditiven und der visuellen Modalität erkennen W. Calvin und H. Jerison einen evolutionären Quellgrund für unsere Sprachfähigkeit.

Unseren Eintragungen im vereinfachten ML-MS der Abbildung 4.6 fügen wir nun das Vestibularorgan als eine weitere stammesgeschichtlich alte Struktur hinzu, die vermutlich bald mit dem terrestischen Leben von Amniota[5] auftrat. In die Abbildung 4.6 tragen wir – zur Erleichterung unseres Überblicks – außerdem

[5]Amniota sind Tetrapoden, die ihre Reproduktion auf Grund eines umhüllten, nährstoffgefüllten Eies vom wässrigen Lebensraum lösten (vgl. Lecointre/Le Guyader 2006, S. 461, 481-483).

die vor ca. $4,5 \cdot 10^6$ Jahren auftretenden Hominiden, den vor ca. $2,3 \cdot 10^6$ Jahren aufgetretenen Homo und den vor ca. $0,2 \cdot 10^6$ Jahren aufgetretenen Homo sapiens ein (vgl. 3.3.2). Die in phylogenetischen Zeiten schnelle Entwicklung des Vorderhirns bei den Hominiden wurde mit der Hypothese einer beginnenden rapiden Entwicklung höherer kognitiver Funktionen in Verbindung gebracht. Die moderne Lautsprache des Homo sapiens entstand vermutlich erst vor etwa 40000 Jahren, mit ihr lag sicher auch die Fähigkeit vor, Symbole zu bilden und zu verknüpfen. Wir berührten das Problemfeld in 3.3.4, 2.4.5 (L5) und 2.4.6; auch (vgl. Krebs 2004, S. 70-73; Klix 1993). Diese Errungenschaften des Homo sapiens notieren wir ebenfalls in Abbildung 4.6.

Wir haben gezeigt, dass der 3-dimensionale Raum unseren Körper geprägt hat und die Strukturen unseres Körpers unser Wahrnehmen, Denken und Handeln pägen. Wie wir – natürlich nur kognitiv – über den 3-dimensionalen Raum hinaus kommen, haben wir noch nicht beantwortet. Aber Item •, zusammen mit der Erfahrung, dass es bis heute keinen Hinweis dafür gibt, demgemäß die Evolution ganz nebenbei Strukturen hervorgebracht hat, mit deren Hilfe „mehr als 3-dimensionale“ Objekte vollständig wahrgenommen werden können, weist uns bereits den Weg: Wenn also alle Modalitäten für die Konstruktion „mehr als 3-dreidimensionaler“ Objekte ausfallen, dann bleibt dafür nur ein evolutionäres Produkt übrig: unsere Sprache.

In 2.4.7 legten wir dar, dass der Homo sapiens ein – von der Sprache unabhängiges – phylogenetisch erworbenes mesokosmisches Quantisierungskonzept besitzt. Das haben wir in diesem Abschnitt bisher unterschlagen, müssen uns aber nun daran erinnern, weil es für die Konstruktion „mehr als 3-dimensionaler“ Objekte mindestens nützlich, um nicht zu sagen unverzichtbar ist. In dem folgenden Abschnitt geht es jedoch nicht um die stammesgeschichtliche Evolution des Quantisierungskonzepts, sondern darum, wie die tetrapodische Bauplanstruktur unseres Skeletts zusammen mit unserem phylogenetischen Quantisierungskonzept und unserer Sprachfähigkeit die Ausbreitung des am weitesten in der Welt verbreitetesten Zahlensystems, des Dezimalsystems, (mit-)bewirkt haben könnte. (Sprache ist ganz allgemein die Fähigkeit, Symbole, die etwas anderes bedeuten als ihr Kode, syntaktisch zu verwenden. Eine Sprache kann z.B. mithilfe von Lauten kodiert sein. Einer Lautfolge ist ihre Bedeutung nicht unmittelbar anzusehen, was jedem Besucher eines fremden Sprachraumes bekannt ist.)

Greifhand und Zahlensystem

Mit dem Befund, dass die erste Nervenzelle vor etwa $0,7 \cdot 10^9$ Jahren entstanden ist (s. 3.3.2), und der Tatsache, dass es für alle Zoa immer überlebensdienlich war, erkennen zu können, ob ein großes oder kleines Nahrungsangebot oder eine große oder kleine Anzahl von Feinden vorliegt, vermuten wir, dass elementare Quantifizierungskonzepte in der biotischen Evolution bereits bei anzienten höheren Wirbeltieren aufgetreten sind; für beispielsweise rezente Waschbären, Ratten und Vögel sind Quantisierungskonzepte nachgewiesen (vgl. Dahaene 1999; Lakoff/Núñez 2000; Siemann/Fersen/Delius 1998; Delius/Siemann/Emmerton/Xia 2001). Zu den höheren Wirbeltieren zählt aber auch der Mensch. Das mesokosmische Quantisierungskonzept des rezenten Menschen wurde in 2.4.8 beschrieben. Es war und ist bis heute auch überlebensdienlich im oben angeführten Sinne. Wir fokussieren nun darauf, welchen Einfluss die phylogenetisch erworbene biotische Ausstattung des Menschen auf die kulturelle Evolution der Zahlensysteme genommen hat.

Unsere zwei je fünffingerigen Greifhände dienen – früher wie heute – der Strukturierung des Zählprozesses und der Entlastung unseres Gedächtnisses beim Zählen und haben deswegen das Dezimalsystem für die Arithmetik nahegelegt. Neben weiteren, u.a. sozialen und kulturellen Gründen gibt es einen kognitiven Grund dafür, dass sich das Dezimalsystem etwa gegenüber dem Dualsystem oder dem Sechzigersystem in unserer modernen Alltagswelt durchgesetzt hat. Diesem Grund gehen wir jetzt nach: Wäre die Übersichtlichkeit einer arithmetischen Rechnung allein durch die Anzahl der verschiedenen Ziffern bestimmt, die zur Kodierung einer Zahl notwenig sind, dann hätte sich vermutlich das Dualsystem im Alltag durchgesetzt. Aber ein Zählen im Dualsystem macht die Zahlendarstellung schnell sehr lang (zählt man mit nur zwei Fingern die Anzahl der Schüler einer Schulklasse ab, dann hat man viele Durchläufe, die man protokollieren oder sich merken muss). Im Gegensatz zum 60er-Zahlensystem, in dem die Zahlendarstellung beim Zählen zwar lange kurz bliebe, hätte man aber eine wenig überschaubare Anzahl von 60 verschiedenen Ziffern oder zusätzliche Notationsstrukturen im Falle von zusätzlichen Zeichen für Teilbündelungen. Das Dezimalsystem kommt deswegen dem Optimum für das unbewaffnete menschliche Gehirn vielleicht am nächsten, weil einerseits die zur Kodierung von Zahlen verwandten zehn Ziffern noch eine überschaubare Anzahl sind und andererseits die im Alltag vorkommenden Anzahlen überwiegend noch überschaubare Längen geringer Komplexität haben. Diese Vermutung lässt sich noch mit dem

Befund stützen, dass ein ebenfalls mit der Fünfgliedrigkeit jeder Tetrapodenextremität verwandtes 15er- oder 25er-System nicht verbreitet ist. Demgegenüber sind das 5er-System im indischen Staat Maharashtra und Rudimente eines 20er-Systems (volles Tetrapoden-System) im „quatre-vingt“ (4 *mal* 20 = 80, „-“ bedeutet „mal“) des Französischen bis heute erhalten geblieben; zur Geschichte des Zahlensystems (vgl. Ifrah 1991, S. 53-75). Angemerkt sei hier, dass die Babylonier bereits ein Dezimalsystem entwickelt hatten, bevor sie das 60er-System für komplizierte Rechnungen einführten. Weil sie unser modernes Stellenwertsystem noch nicht besaßen, war das 60er-System für ihre Bedürfnisse vermutlich optimal (vgl. Klix 1993, S. 314-316; Ifrah 1991, S. 69-75): Ihr 60er-System eignete sich besser für Bruchrechnungen als ihr Dezimalsystem; weil die 60 mehr Teiler als die 10 hat, treten in der Praxis weniger Divisionen ohne Rest auf. Die heutige Verbreitung des Dualsystem lässt sich demgegenüber so verstehen: Weil duale Kodierungen besonders schnell und einfach in technischen Systemen implementiert und verarbeitet werden können, ist dies eine optimale Lösung, die der Mensch außerhalb seines Gehirns zu seinem Vorteil gefunden hat, aber im Alltag seines mit Technik unbewaffneten Gehirns geht der Trend bis heute weltweit zum 10er-System.

Das Beispiel zeigt, wie die naturgeschichtlich früh (vor ca. $360 \cdot 10^6$ Jahren) entstandene bis heute invariante Tetrapodenstruktur der biotischen Emergenzebene in der psychischen und der kulturellen Emergenzebene Einfluss auf das Zahlensystem genommen hat. Das Zahlensystem ist selbstverständlich eine weiche naturgeschichtliche Invariante, denn als Invariante des Wissens ist sie leicht modifizierbar, und das ist nun wichtig: Wechseln Individuen, oder wechselt eine Population das Zahlensystem, so ist ihr Überleben nicht unmittelbar existenziell gefährdet, obwohl unangepasste Maßsysteme zu ökonomischen Nachteilen führen können. Im Gegensatz zur harten biotischen Invariante der Tetrapodenstruktur, für das unser dynamisches System Erde keine Änderung zulässt, sind die meisten Strukturen des Wissens – so z.B. Zahlensysteme –, die ja Teilsysteme der psychischen bzw. der sozialen Emergenzebene sind, veränderbar.

Wir gehen der naturgeschichtlichen Reflexion des Zahlensystems nicht weiter nach, sondern werden es bei der Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels einfach verwenden, weil unser Fokus auf der Überschreitung des Anschauungsraumes liegen soll.

Wir erläutern unsere naturgeschichtlichen Einsichten zum Zahlensystem nun genauer auf dem Hintergrund unseres ML-MSs und betonen an dieser Stelle nachdrücklich, dass unsere nicht unumstrittenen Überlegungen als Anregungen zu verstehen sind und noch umfangreiche empirische und theoretische Untersuchungen nötig sind, bis ein halbwegs vollständiges und gesichertes Wissen zur Naturgeschichte des Zahlensystems vorliegt: In der Emergenzebene des Biotischen entstanden vor etwa $700 \cdot 10^6$ Jahren die ersten Nervenzellen, vor etwa $500 \cdot 10^6$ Jahren die ersten Wirbeltiere, vor etwa $360 \cdot 10^6$ Jahren die ersten Tetrapoden, und vor etwa $2 \cdot 10^5$ Jahren ist der Homo sapiens aufgetreten. Numerische Quantisierungskonzepte entstanden vielleicht schon mit den höheren Wirbeltieren. Ihnen liegen neuroanatomische Substrate (biotische Emergenzebene) zu Grunde, deren Aktivitäten sich auf eine mesokosmisch adaptive Informationsverarbeitung für Anzahlen (psychische Emergenzebene) abbilden. Die genannten biotischen Strukturen der biotischen Emergenzebene zählen zu den harten, irreversiblen Invarianten der biologischen Evolution, in der Sprache der STE von RIEDL sind es Bürden der Systemvergangenheit, die nicht mehr abgeworfen werden können. Nachdem die kulturelle Evolution des Homo sapiens vor etwa 40000 Jahren – es gibt Mutmaßungen, dass er zu dieser Zeit seine moderne Lautsprache erfand (s. 3.3.4) – eine starke Beschleunigung erfahren hatte, begann er vielleicht auch, sein mesokosmisches Quantisierungskonzept in seine Lautsprache zu implementieren. Befunde dazu haben wir nicht, aber unwahrscheinlich ist es auch nicht, denn auf einer 25000 bis 30000 Jahre alten Speiche eines jungen Wolfes hat man Einkerbungen von 1 bis 30 in Fünfer-Bündelung gefunden, was darauf schließen lässt, dass damals bereits gezählt worden ist (vgl. Klix 1993, S. 279). Die Zahlensysteme, so wie von ihnen oben die Rede war, entstanden erst mit dem Auftreten der ersten Hochkulturen ab 3000 v. Chr. (vgl. Klix 1993, S. 277-321). Sie sind naturgeschichtliche Phänomene der sozialen und der psychosozialen Emergenzebene und gehören zum Wissen einer Population, das nur von Individuuen erzeugt bzw. erworben werden kann, die über die Instanz eines bewussten „Ich“ verfügen und in Sprache planend denken können; diese Voraussetzungen waren schon lange gegeben: man denke sich das Gedächtnis des modernen Menschen (vgl. 2.4.5, insbes. L5) allmählich längs der Hominidenentwicklung zum modernen Menschen entstanden. Zahlensysteme und Sprachen sind verglichen mit den obengenannten Invarianten des Biotischen weiche Invarianten in dem Sinne, dass sie umlernbar, veränderbar und austauschbar sind und deswegen neues Wissen weniger nachhaltig prägen als die zu Grunde liegenden alten, irreversiblen, aber stets aktiven biotischen Invarianten. So nimmt möglicherweise die sehr alte biotische Invariante der Tetrapodenstruktur über die wenige Millionen Jahre alte Greifhand des Vormenschen nicht nur Einfluss auf die Greifhand des Homo sapiens, sondern sogar auf die Darstellung unseres heutigen Dezimalsystems. Eine vor mehr als $360 \cdot 10^6$ Jahren entlang unserer stammesgeschichtlichen Linie entstandene anatomische Bürde der biotischen Emergenzebene disponiert (nicht: determiniert (!)) nach diesen Überlegungen die Struktur unseres Zahlensystems in der psychosozialen bzw. in der sozialen Emergenzebene. Es ist aber nicht nur so, dass biotische Bürden die Struktur unseres Wissen prägen. Die modernen Wissenschaften zeigen, wie wir umgekehrt mithilfe von Symbolsprachen, zu denen auch unser Zahlensystem gehört (vgl. 2.4.8), die Grenze unseres Mesokosmos in allen Emergenzebenen überschreiten können. Im ML-MS haben wir also Invarianten und Wechselwirkungen in allen Emergenzebenen sowie über alle Emergenzebenen hinweg. Abbildung 4.6 fasst diese Überlegungen in einem gegenüber der Abbildung 3.2 vereinfachten ML-MS qualitativ zusammen.

Kommentar zum Unterricht

Der Passung unserer Wahrnehmungsorgane an den Raum gingen die Grundkursteilnehmer aus der Sicht der EE nach (Vollmer 1988a, 1988b, 1990) und präzisierten den Anschaulichkeitsbegriff; die Zeit dafür bestand. Den Teilnehmern des Leistungskurses vermittelte der Autor die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik im Rahmen kleiner Lehrervorträge. Diese Vorträge beschränkten sich während des zweijährigen Kurses nicht nur auf Inhalte mit einem geometrischen oder arithmetischen Bezug, sondern bezogen u.a. auch Inhalte ein, die zum Dunstkreis der Stochastik zählen.

4.4.3 Erste Würfelkonstruktion

Ein (3-dimensionaler) Würfel ist ein Körper, den wir basteln können. Er ist eindeutig bestimmt durch 8 (0-dimensionale) Punkte, die durch 12 gleichlange (1-dimensionale) Kanten so miteinander verbunden sind, dass in jedem Punkt genau 3 Kanten senkrecht aufeinander stehen. Punkte mit dieser Eigenschaft werden Eckpunkte, kurz: Ecken, genannt. Die 6 (2-dimensionalen) Seitenflächen des Würfels sind Quadrate.

Eine systematische Analyse dieses Würfels motiviert jede seiner Seitenflächen als einen 2-dimensionalen Würfel mit 4 Ecken und 4 Kanten, jede seiner Kanten als einen 1-dimensionalen Würfel mit 2 Ecken und jede Ecke als einen

0-dimensionalen Würfel zu bezeichnen, s. Abbildung 4.1.

Wir haben den 3-dimensionalen Würfel mithilfe unserer Anschauung und unserer Sprache analysiert, eine absteigende Systematik von n-dimensionalen Würfeln für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ konstruiert, den Würfeln Dimensionszahlen zugeordnet und die niederdimensionalen Objekte in den höherdimensionalen abgezählt; für beides letztere benutzten wir unsere numerischen Fähigkeiten.

Es stellt sich nun die Frage: Was soll ein 4-dimensionaler Würfel heißen? Wir versuchen, mit unseren bisherigen Ergebnissen ein geometrisches Objekt zu konstruieren, für das uns die Bezeichnung „4-dimensionaler Würfel" passend erscheint. Die Konstruktion verlangt Kreativität und deswegen einen induktiven Schluss im Sinne der kognitiven Psychologie (im Gegensatz zum vollständig induktiven Schluss im Sinne der Mathematik, der ein formales Verfahren in der axiomatisierten Mathematik ist).

Bezeichnungen und Sprechweisen

Für alles Weitere dieses Abschnitts ist die Einführung der folgenden Bezeichnungen und Sprechweisen zweckmäßig: Der Index n stehe für die Dimension eines vorgegebenen n-dimensionalen Würfels, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, und der Index $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ für dessen Ecken ($k = 0$), Kanten ($k = 1$), Seitenflächen ($k = 2$), Würfel ($k = 3$), 4-dimensionalen Würfel ($k = 4$). Die Schreibweise W_k^n bezeichne die Anzahl der k-Objekte für ein vorgegebenes n, s. Abbildung 4.1.

Die Abbildung 4.2 zeigt orthogonale k-Beine (endlicher Länge), die ein k-dimensionales Volumen aufspannen und für die „k-dimensionale Ecke" eine suggestive Bezeichnung ist. Je zwei Beine eines orthogonalen k-Beins stehen paarweise aufeinander senkrecht. Die Anzahl der k-Beine eines n-Beines (der k-dimensionalen Ecken einer n-dimensionalen Ecke) beträgt $\binom{n}{k}$.[6]

Die Sprechweise „parallelkopieren", die ab jetzt häufig vorkommen wird, ist eine Kurzform für „kopiere die Ausgangsobjekte in ihrem Ort und verschiebe die kopierten Objekte in eine noch nicht mit diesem Objekttyp besetzen Dimension um immer die gleiche Länge". Jede Parallelkopie verdoppelt also die Anzahl der vor der Parallelkopie vorhandenen Objekte. Parallelkopiert man ein Objekt in

[6] *n über k* ist die Lesart des Terms

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & f\ddot{u}r \quad 0 \leq k \leq n \quad und \quad n, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Darin bedeutet $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und $0! = 1$, lies: n *Fakultät* für $n!$.

k „freie“ Dimensionen, also k-mal, so erhält man insgesamt 2^k Objekte (s.u. 2. Idee (a) und Abbildung 4.3).

W_k^n	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
k=0	1	2	4	8	16
k=1	0	1	4	12	32
k=2	0	0	1	6	24
k=3	0	0	0	1	8
k=4	0	0	0	0	1

Abbildung 4.1: Lesebeispiel W_2^3: Ein $n = 3$-dimensionaler Würfel (d.h. *ein* Kubus) enthält sechs $k = 2$-dimensionale Würfel (d.h. *sechs* Seitenflächen).
Für $0 \leq k \leq n \leq 4$ werden die W_k^n (s. 1. u. 2. Idee und Abbildung 4.3) ermittelt. Für $0 \leq n < k \leq 4$ gilt $W_k^n = 0$ aus geometrischen Gründen, aber auch formal mit der Definition von $\binom{n}{k}$ (s. Fußnote 6).

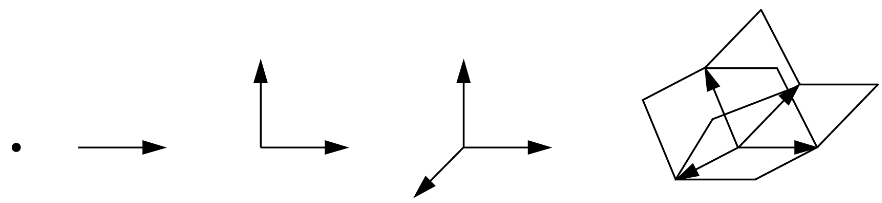


Abbildung 4.2: Jeder von einem Punkt ausgehende Pfeil steht für ein 1-Bein (endlicher Länge). Von links nach rechts ist ein 0-Bein (Punkt), ein 1-Bein (ein 0-Bein enthaltend), ein 2-Bein (ein 0-Bein und zwei 1-Beine enthaltend), ein 3-Bein (ein 0-Bein, drei 1-Beine und drei 2-Beine enthaltend) und ein 4-Bein (ein 0-Bein, vier 1-Beine, sechs 2-Beine und vier 3-Beine enthaltend) gezeichnet. Alle 1-Beine stehen hier paarweise aufeinander senkrecht, auch wenn dies für mehr als drei 1-Beine nicht praktisch realisierbar ist.

1. Idee

Versuche die Tabelle in Abbildung 4.1 bis $n = 4$ fortzusetzen. Als Fortsetzung der ersten Zeile bietet sich $W_0^4 = 16$ an, es gäbe also 16 Ecken. Die Hauptdiagonale wird man durch $W_4^4 = 1$ fortschreiben wollen, es gäbe somit 1 4-dimensionalen Würfel. Die Nebendiagonale (direkt über der Hauptdiagonale) legt $W_3^4 = 8$ nahe, der 4-dimensionale Würfel würde somit 8 3-dimensionale Würfel enthalten.

Unser Vorgehen legt es bereits hier nahe, W_4^4 als einen 4-dimensionalen Würfel zu definieren und W_k^4, $k = 0, 1, 2, 3$, als die Anzahl seiner Ecken, Kanten, Seiten und Kuben zu interpretieren. Weil wir dafür noch fast keine Anhaltspunkte haben, seht diese Idee lediglich zur Disposition.

Kommentar zum Unterricht

Weder die Grundkurs- noch die Leistungskursteilnehmer konnten mit den bereits bekannten Werten in der Tabelle W_2^4 oder W_1^4 erschließen. Auch wenn es ihnen mithilfe ihrer numerischen und sprachlichen Fähigkeiten allein gelungen wäre, W_2^4 und W_1^4 konsistent mit den übrigen Einträgen der Tabelle zu bestimmen, hätten sie doch kaum etwas vom 4-dimensionalen Würfel verstanden, solange ihnen noch jede geometrische Intuition fehlte.

2. Idee

Wir haben bereits oben in unserer Analyse des 3-dimensionalen Würfels Quadrate als 2-dimensionale Würfel, Kanten als 1-dimensionale Würfel und Ecken als 0-dimensionale Würfel bezeichnet. Versuche nun, aus einem 0-dimensionalen Würfel einen 1-dimensionalen Würfel, aus einem 1-dimensionalen Würfel einen 2-dimensionalen Würfel und aus einem 2-dimensionalen Würfel den 3-dimensionalen Würfel zu konstruieren, und hoffe, dass die Struktur der Konstruktion zusammen mit der Länge der Konstruktionsreihe genug Anhaltspunkte liefert, um damit einen 4-dimensionalen Würfel definieren und die Anzahl seiner Ecken W_0^4, Kanten W_1^4, Flächen W_2^4 sowie Kuben W_3^4 bestimmen zu können. Die folgenden Überlegungen sind in der Graphik von Abbildung 4.3 verdichtet.

(a) *Die Folge W_0^n für $n \in \{0,1,2,3,4\}$:*

Man erhält die Anzahl W_0^{i+1}, indem man die W_0^i Ecken in die neu hinzugekommene Dimension parallelkopiert. Jede dieser Kopien verdoppelt die vorhergehende Anzahl W_0^i. Insgesamt erhalten wir $W_0^4 = 2^4 = 16$.

(b) *Die Folge W_1^n für $n \in \{1,2,3,4\}$:*

Betrachte jede Kante ($k = 1$) als 1-Bein. $W_1^1 = 1$, da wir nur ($\binom{1}{1} = 1$) ein 1-Bein haben. $W_1^2 = 2 \cdot 2^1 = 4$, da ein 2-Bein genau ($\binom{2}{1} = 2$) zwei 1-Beine hat und jedes 1-Bein noch in die Koordinatenrichtung des 2-Beines parallelkopiert werden muss, in der das betrachtete 1-Bein nicht liegt. $W_1^3 = 3 \cdot 2^2 = 12$, da ein 3-Bein genau ($\binom{3}{1} = 3$) drei 1-Beine hat und jedes 1-Bein noch in die zwei Koordinatenrichtungen des 3-Beines parallelkopiert werden muss, in denen das betrachtete 1-Bein nicht liegt. $W_1^4 = 4 \cdot 2^3 = 32$, da ein 4-Bein genau ($\binom{4}{1} = 4$)

vier 1-Beine hat und jedes 1-Bein noch in die drei Koordinatenrichtungen des 4-Beines parallelkopiert werden muss, in denen das betrachtete 1-Bein nicht liegt.

(c) *Die Folge W_2^n für $n \in \{2, 3, 4\}$:*

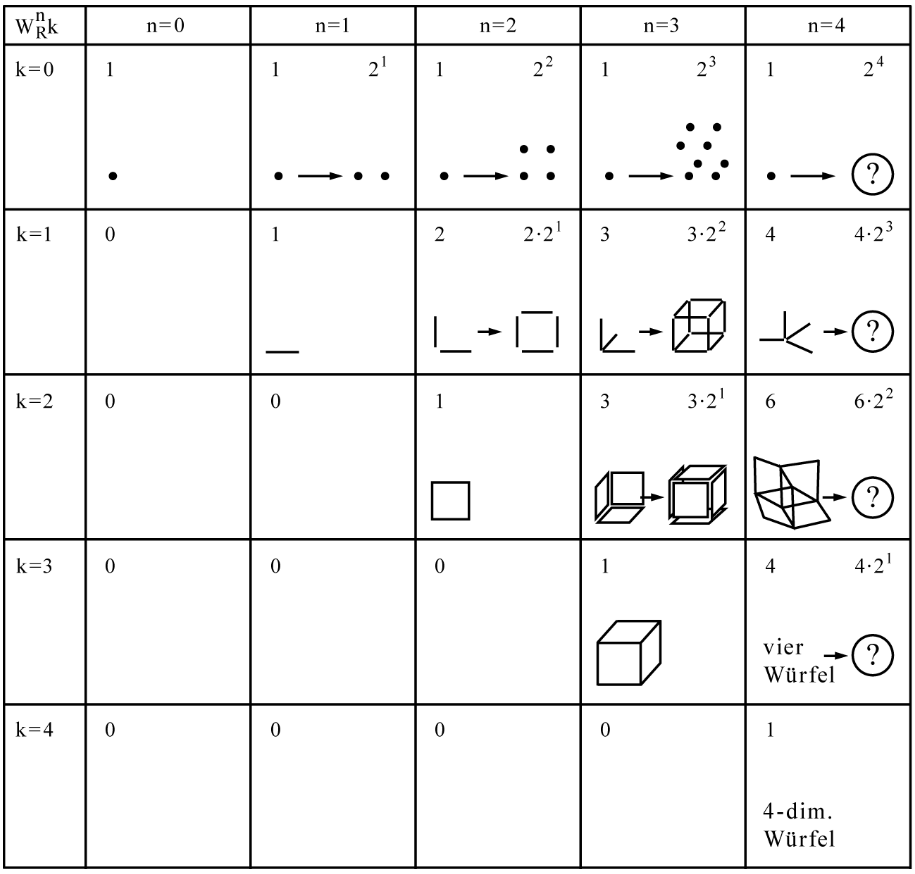
Betrachte jedes Quadrat ($k = 2$) als ein 2-Bein, da es eine Fläche aufspannt. $W_2^2 = 1$, da wir nur ($\binom{2}{2} = 1$) ein 2-Bein haben. $W_2^3 = 3 \cdot 2^1 = 6$, da ein 3-Bein genau ($\binom{3}{2} = 3$) drei 2-Beine hat und jedes 2-Bein noch in die Koordinatenrichtung des 3-Beines parallelkopiert werden muss, die nicht im betrachteten 2-Bein liegt. $W_2^4 = 6 \cdot 2^2 = 24$, da ein 4-Bein genau ($\binom{4}{2} = 6$) sechs 2-Beine hat und jedes 2-Bein noch in die Koordinatenrichtungen des 4-Beines parallelkopiert werden muss, die nicht im betrachteten 2-Bein liegen.

(d) *Die Folge W_3^n für $n \in \{3, 4\}$:*

Repräsentiere jeden Würfel ($k = 3$) durch ein 3-Bein, da es ein Volumen aufspannt. $W_3^3 = 1$, da wir nur ($\binom{3}{3} = 1$) ein 3-Bein haben. $W_3^4 = 4 \cdot 2^1 = 8$, da ein 4-Bein genau ($\binom{4}{3} = 4$) vier 3-Beine hat und jedes 3-Bein noch in die Koordinatenrichtung des 4-Beines parallelkopiert werden muss, die nicht im betrachteten 3-Bein liegt.

Weil diese Konstruktion in geometrisch motivierter Weise Zahlen $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ $(*)$ für $k, n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ liefert, die für $k, n \in \{0, 1, 2, 3\}$ genau mit den uns unmittelbar zugänglichen Zahlen übereinstimmen, nennen wir W_4^4 einen 4-dimensionalen Würfel und interpretieren W_k^4, $k = 0, 1, 2, 3$, als die Anzahl seiner Ecken, Kanten, Seiten und Kuben. Dass unser Konstruktionsverfahren auch für alle $k, n \in \{5, 6, 7, \ldots\}$ arbeitet, weist erstens darauf hin, dass wir den Namen „4-dimensionaler Würfel" für W_4^4 zu recht gewählt haben und legt zweitens nahe, W_n^n für $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ einen n-dimensionalen Würfel zu nennen. Die Anzahlen von dessen Teilstrukturen W_k^n ergeben sich für alle $k, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ aus $(*)$.

Der bisher im psychologischen Sinne induktiv gewonnene Ausdruck $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ lässt sich im Rahmen grundgelegter und axiomatisierter Mathematik durch vollständige Induktion beweisen:
Induktionsanfang: $W_k^0 = \binom{0}{k} \cdot 2^{0-k}$. Die Auswertung dieser Gleichung liefert für $k = 0$ den Wert $W_0^0 = 1$.



$W^n_R k$	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
k=0	1	1 $\quad 2^1$	1 $\quad 2^2$	1 $\quad 2^3$	1 $\quad 2^4$?
k=1	0	1	2 $\quad 2\cdot 2^1$	3 $\quad 3\cdot 2^2$	4 $\quad 4\cdot 2^3$?
k=2	0	0	1	3 $\quad 3\cdot 2^1$	6 $\quad 6\cdot 2^2$?
k=3	0	0	0	1	4 $\quad 4\cdot 2^1$ vier Würfel ?
k=4	0	0	0	0	1 4-dim. Würfel

Abbildung 4.3: Visualisierung der 1. Konstruktion (s. 4.4.3) des 4-dimensionalen Würfels (Hyperkubus). Es gilt $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$ und $k, n \in \{0,1,2,3,4\}$.

Induktionsschluss: W_k^{n+1} erhält man aus $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$, wegen

$$W_k^{n+1} = \binom{n+1}{k} \cdot \frac{W_k^n}{\binom{n}{k}} \cdot 2 = \binom{n+1}{k} \cdot \frac{\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}}{\binom{n}{k}} \cdot 2 = \binom{n+1}{k} \cdot 2^{(n+1)-k}.$$

$W_k^n / \binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Parallelkopien, die für ein W_k^n (das von einem k-Bein eines n-Beins aufgespannt wird) für die Konstruktion eines n-dimensionalen Würfels nötig sind. Für die Konstruktion eines $(n+1)$-dimensionalen Würfels benötigt man aber pro W_k^{n+1} (das von einem k-Bein eines $(n+1)$-Beins aufgespannt wird) doppelt soviele Parallelkopien; der Faktor 2 stammt von der zusätzlichen Dimension, in die auch parallelkopiert werden muss. Die Anzahl der Parallelkopien ist noch mit $\binom{n+1}{k}$ zu multiplizieren, weil es so viele k-Beine im $(n+1)$-Bein (von dem die Konstruktion des $(n+1)$-dimensionalen Würfel ausgeht) gibt.

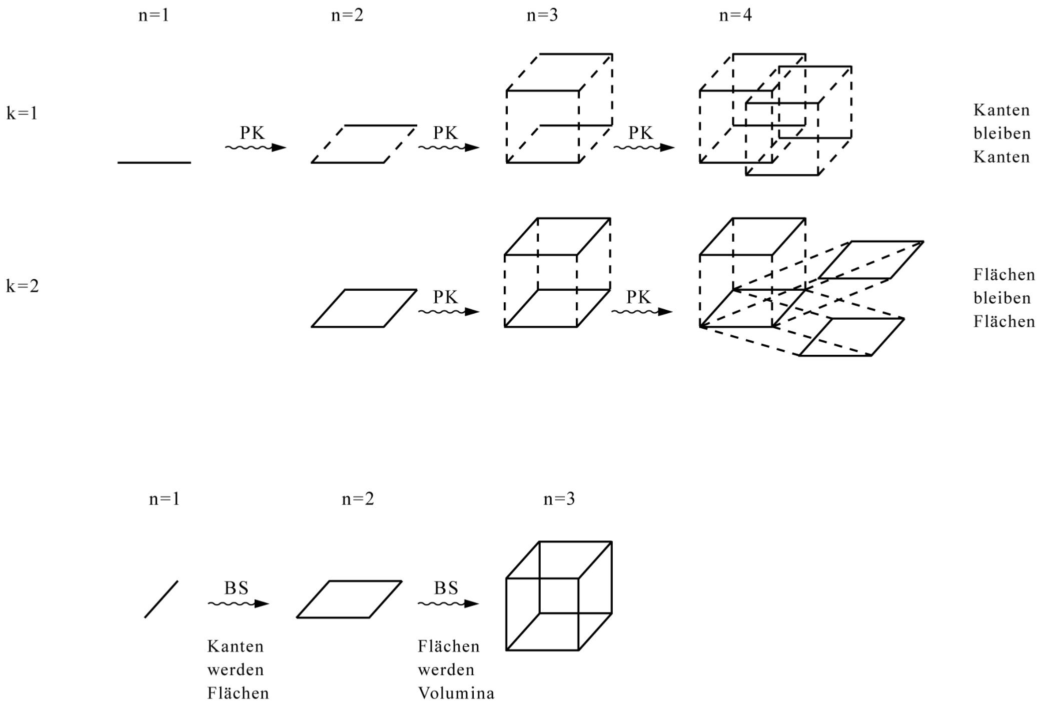


Abbildung 4.4: Vergleich der 1. Konstruktion (s. 4.4.3) des 4-dimensionalen Würfels (Hyperkubus) mit der 2. Konstruktion (s. 4.4.5): Oben: Die 1. Konstruktion respektiert die Invarianz der Teilstrukturen unter Parallelkopien (PK) (s. 4.4.4 u. 4.4.6). Z.B. Kanten bleiben Kanten, Flächen bleiben Flächen. Unten: Die 2. Konstruktion respektiert die Invarianz der Teilstrukturen unter Bewegungsspuren (BS) nicht (s. 4.4.6). Z.B. Kanten werden zu Flächen, Flächen werden zu Würfeln.

Kommentar zum Unterricht

In der begrenzten Zeit der Kurssitzungen, fanden weder die Teilnehmer des Grundkurses noch die Teilnehmer des Leistungskurses ein erfolgversprechendes Konstruktionsverfahren für das, was sie 4-dimensionalen Würfel nennen mochten. Der Autor hat seinen Kursteilnehmern deswegen die Konzepte „k-Bein“ und „Parallelkopieren“ vorgeschlagen. Die Vorstellung von einem k-Bein, in dem k paarweise aufeinander senkrecht stehende Beine von einem gemeinsamen Punkt ausgehen, war leicht zu vermitteln; mathematisch präzisiert wurde diese (intuitive) Vorstellung nicht. Mit dem Grundkurs wurde das Parallelkopieren mithilfe von langen Streichhölzern und quadratischen Bierdeckeln illustriert. Der Leistungskurs hat abstrakt gearbeitet, derart, dass in die Tabelle von Abbildung 4.3 beispielsweise unter $n = 4$ und $k = 2$ ohne Umschweif der Ausdruck $\binom{4}{2} \cdot 2^2 = 24$ eingetragen wurde. Ein Leistungskursteilnehmer bemerkte, nachdem wir die Tabelle von Abbildung 4.3 vollständig ausgefüllt hatten, dass die Summen der Spalten die Werte 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 ergeben und wir damit eine weitere Strukturbedingung des 4-dimensionalen Würfels gefunden haben. Mehreren Schülern war sofort klar, dass dies eine Folge des Binominalsatzes $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 2^k = (1+2)^n$ ist. Die mithilfe des Konstruktionsverfahrens gewonnene Formel $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ wurde nicht mithilfe vollständiger Induktion bewiesen.

4.4.4 Erste Würfelkonstruktion und höherdimensionale Geometrien: Interpretation und naturgeschichtliche Reflexion

Wir haben den 4-dimensionalen Wüfel (W_4^4) konstruiert und reflektieren nun die Wirkungen einiger naturgeschichtlicher Invarianten, die für die Konstuktion wesentlich sind.

Erinnerung an bereits gewonnene Einsichten

Unsere Phylogenese erkennen wir als ein sich in der Zeit entwickelndes Gewebe von Bürden, also als ein Gewebe naturgeschichtlicher Invarianten, das gleichzeitig Möglichkeiten und Einschränkungen für Späteres bestimmt. Weil dies bereits in den die Konstruktion vorbereitenden Abschnitten diskutiert worden ist, sei hier nur daran erinnert, dass wir an den 3-dimensionalen Raum phylogenetisch angepasst sind. Wir erinnern weiter an unsere Referate zum Raum, zur Anatomie, zur Sensorik und Wahrnehmung, zu Gedächtnisstrukturen, zur Kognition, zum mesokosmischen Quantisierungskonzept, zur Sprache, zur Verhaltenssteuerung etc. (2.4 u. 4.4.2) sowie an die Position naturgeschichtlicher Invarianten im ML-MS der Emergenzebenen (4.4.1 u. 4.4.2).

Da von vornherein nicht klar war, was ein 4-dimensionaler Würfel sein könnte, näherten wir uns dem Problem, indem wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf den uns vertrauten 3-dimensionalen Würfel und seine Teilstrukturen richteten. Denn wir hofften, dass uns die anschaulichen Strukturen des (ggf. realen) 3-dimensionalen Würfels vielleicht einen Weg zum 4-dimensionalen Würfel weisen würden. Schon diese Überlegungen setzen psychosozial konstruierte Instanzen („Ich“, „Selbst“ und – nach Klix: – „Ego“) eines entwickelten autobiographischen Gedächtnisses voraus, die das Problemlösen steuern. Das in Lern- oder Problemlöseprozessen erworbene, schließlich von autobiographischen

Episoden und Emotionen gelöste mathematische Wissen ist im semantischen Gedächtnis abgelegt (s. 2.4.5, auch 2.4.7 u. 2.4.8). Wir betrachten diese beim Menschen empirisch nachgewiesenen Gedächtnisstrukturen als naturgeschichtliche Invarianten der psychischen Emergenzebene.

Reflexionen, die sich konkret auf die Konstruktion beziehen

Gesichtssinn, visuelle Wahrnehmung und Vorstellung werden bei der Konstruktion zwar zentral verwandt, aber der Raum wird bekanntlich nicht allein visuell repräsentiert. Auch bei unserer Konstruktion bewegen wir gelegentlich den Kopf oder drehen die Hände während mentaler Operationen, so z.B. bei Drehungen oder Verschiebungen, um unsere visuell dominierte räumliche Vorstellung zu unterstützen. Erinnert sei hier an einige Tatsachen des visuellen Systems: Die von der Retina aufgenommenen Reizmuster sind zweidimensional und wegen ihrer Krümmung verzerrt. Sie werden in retinalen Ganglienzellen, dann in den Strukturen des Corpus geniculatum laterale vorverarbeitet und gelangen dann retinotrop in den visuellen Kortex, in dem sie weiter analysiert werden. Zur Anatomie und zu Funktionen unseres visuellen Systems bzw. des mit unserem verwandten von Katzen und Affen liegen heute viele gesicherte Kenntnisse vor (vgl. Karnath/Thier 2006), die wir als naturgeschichtliche Invarianten der biotischen bzw. psychischen Emergenzebene interpretieren. Zu diesen Kenntnissen zählen die Tatsachen, dass manche Zellen spezifisch Bewegung, Farbe, Form oder räumliche Tiefe analysieren und Zellen in höheren Verarbeitungsstufen nicht nur visuell, sondern multisensorisch arbeiten; manche Neurone verarbeiten biokulare Disparität, andere sind richtungsselektiv, geschwindigkeitselektiv oder beides. Mit diesen Fähigkeiten ausgestattet leistet das visuelle System einen wichtigen Beitrag zur Repräsentation der Lage des Organismus in seiner räumlichen Umwelt, sowohl in körpereigenen Koordinaten als auch in Koordinaten seiner Umwelt. Für uns ist nun die Tatsache entscheidend, dass weder im visuellen System noch in den anderen Systemen (vestibuläres System, auditives System, propriozeptives System), die zur Repräsentation des Raumes beitragen, Zellen oder Zellensembles aufgefallen sind, die Reizmuster in einer sensorischen Modalität mehr als 3-dimensional spontan interpretieren. Beispielsweise interpretiert unser visuelles System eine 2-dimensionale Projektion eines 4-dimensionalen Würfels in die Zeichenebene bestenfalls als eine 3-dimensionale Struktur und eine 3-dimensionale Projektion eines 4-dimensionalen Würfels in Gestalt eines Drahtgestells schlicht als 3-dimensionale Drahtstruktur, s.u. Abbildung 4.5. Den 3-dimensionalen Umweltraum (unbelebte Emergenzebene) erleben wir 3-dimensional repräsentiert (psychische Emergenzebene), das neurobiologische Pendant dieser Wahrnehmung gehört zur biotischen Emergenzebene. Dass diese Passung keinesfalls perfekt ist, belegen u.a. optische Täuschungen. Dass sie überlebensadäquat ist, lässt sich mit dem Argument stützen, dass Reizmuster, die Fehlinterpretationen nahelegen, im Mesokosmos nur relativ selten vorkommen. Beispielsweise repräsentieren wir Objekte und Vorgänge in unserem Mesokosmos in einem 3-dimensionalen euklidischen Raum, obwohl unser Wahrnehmungsraum nicht euklidisch ist. Der Grund dafür liegt wohl darin, dass wir unseren mesokosmischen Umweltraum als hinreichend euklidisch erfahren.

Unserem Gesichtssinn kam während der Konstruktion eine Doppelrolle zu. Wir führten die Konstruktionschritte in unserer 3-dimensionalen Vorstellung durch, haben sie zur Entlastung unseres Arbeitsgedächtnisses auf dem Papier festgehalten und reflektieren sie hier pars pro toto für Kanten und für Flächen bis zum 3-dimensionalen Würfel: Für jede Kante (1-Bein, Zeile $k = 1$ in Abbildung 4.3) erhalten wir nach der ersten Parallelkopie zwei Kanten und nach der zweiten Parallelkopie vier Kanten, eine dritte Parallelkopie lieferte acht Kanten und ginge über die 3-dimensionale Situation hinaus (Abbildung 4.4 oben). Für jede Fläche (von einem 2-Bein aufgespannt, Zeile $k = 2$ in Abbildung 4.3) erhalten wir nach der ersten Parallelkopie zwei Flächen, eine zweite Parallelkopie lieferte vier Flächen und ginge über die 3-dimensionale Situation hinaus (Abbildung 4.4 unten). Die Idee der Konstruktion besteht darin, dass Teilstrukturen des Würfels unter Parallelkopien iterativ verdoppelt und bewegt werden, wobei die Teilstrukturen erhalten bleiben: Kanten bleiben Kanten, Flächen bleiben Flächen. Die bisher nur bis einschließlich zur Dimension 3 ins Auge gefasste Konstruktion ist allein mit dem kognitiven Werkzeug der Bewegungsvorstellung nicht zu bekommen, weil wir außer der Operation „Bewegung“ auch die Operation „Objektverdoppelung“ verwandten, die im Mesokosmos nicht vorkommt. Es gibt keine zwei Objekte am selben Ort, die man durch eine Bewegung trennen kann, und dem angenäherte Situationen waren in der Evolution wohl selten. Es scheint ganz so, dass wir schon deswegen für die bisher durchgeführte Konstruktion nicht auf Sprache verzichten können. Aber auch die in der Bikomplexstruktur der Abbildung 4.3 enthaltenen induktiven Schlussfolgerungen scheinen nicht ohne Sprache möglich zu sein. Mit Sprache ist hier (wie schon oben ausgeführt) gemeint, dass wir Symbole (deren Bedeutung ihnen nicht unmittelbar anzusehen ist) bilden, kombinieren und interpretieren können.

Wir zeigen nun, welche Funktion der Sprache in unserer Konstruktion beim Übergang vom 3-dimensionalen Würfel zum 4-dimensionalen Würfel zukommt: Die Erweiterung unseres mesokosmischen Quantisierungskonzepts (s. 2.4.8) durch die Sprache ermöglicht es uns, die mesokosmische Tatsache dreier paarweise aufeinander senkrecht stehender Kanten eines Quaders sprachlich zu fassen und die Kanten mit den Zahlen 1, 2 und 3 zu indizieren. Es ist nun ein induktiver Schluss im Sinne der Psychologie (ein kreativer Akt), den drei paarweise aufeinander senkrecht stehenden Kanten des Quaders in Gedanken (in innerer Rede) eine mit der Zahl vier indizierte Kante hinzuzufügen, die paarweise senkrecht auf den anderen steht. In unserer Vorstellung gelingen uns nur Projektionen davon. Wir repräsentieren diese Situation in unserer Vorstellung als vier Beine und denken uns jedes Bein senkrecht zu allen anderen, obwohl klar ist, dass dies nur für insgesamt drei Beine möglich ist. Stehen drei Beine paarweise senkrecht aufeinander, dann bildet das vierte Bein im 3-dimensionalen Umweltraum drei Winkel mit den drei anderen Beinen, die nicht alle rechtwinklig sein können. Auf der Grundlage dieser Überlegungen denken wir uns und formulieren wir Paralleverschiebungen in eine vierte Dimension. Die Kopie eines Objekts in seinem Ort erkannten wir bereits im 3-dimensionalen Raum als kaum ohne Sprache denkbar. Das Abzählen der k-Beine in einem n-Bein ($\binom{n}{k}$), die Protokollierung der durchgeführten Parallelkopien (2^{n-k}) und schließlich die Ermittelung der Gesamtanzahl der Teilstrukturen des n-dimensionalen Würfels ($W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$), jede dieser Tätigkeiten ist ohne Sprache unmöglich. Hier zeigt sich der Vorteil einer formalisierten Sprache gegenüber der für diese Zwecke sehr schwerfälligen Alltagssprache und außerdem, wie in einer problemangepassten symbolischen Notation die Abzählprobleme für unsere Konstruktion auch für Dimensionen größer als drei durchsichtig werden. Anders als in einer seriellen sprachlichen Repräsentation können wir in unserer Vorstellung zwar viele Aspekte einer räumlichen Struktur gleichzeitig betrachten, doch führt eine Manipulation der Strukturen vor unserem inneren Auge schnell an die Grenzen unseres Arbeitsgedächtnisses. Der Vorteil einer symbolischen (sprachlichen) Repräsentation besteht demgegenüber in flexiblen Symbolverknüpfungen nach definierten Regeln, die wir zur Entlastung unseres Gedächtnisses z.B. mit Stift und Papier protokollieren können. In unserer Konstruktion sind wir mehrfach von einer räumlichen (wesentlich gestützt von unserem Gesichtssinn und unserer Vorstellung) Repräsentation zu einer symbolischen (alltagssprachlichen und formalsprachlichen) Repräsentation und umgekehrt übergegangen. In den

Wechseln der Repräsentationsformate entstand unsere Idee, die geometrischen Begriffe von einem Würfel und seinen Teilstrukturen auf Dimensionen größer als drei kognitiv zu „vererben“. Dabei übernahm unsere Sprache die Funktion eines Vehikels: Mit ihrer Hilfe konnten wir vom 3-dimensionalen zum 4-dimensionalen Würfel übergehen, also die Grenze unseres 3-dimensionalen Mesokosmos kognitiv überschreiten.

Unsere Konstruktion kennzeichneten wir bereits oben als einen induktiven Schluss im psychologischen Sinne. Sie führt fortgesetzt zu dem, was wir als einen n-dimensionalen Würfel begreifen wollen. Aus mathematischer Sicht ist die Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels jedoch erst dann zufriedenstellend begründet, wenn nach dem beschriebenen Verfahren aus dem n-dimensionalen Würfel auch der $n + 1$-dimensionalen Würfel konstruiert worden ist. Eine auf Messdaten oder Wissen beruhende kreative Induktion ist demnach von der sogenannten „vollständigen Induktion“ der Mathematik zu unterscheiden, die ein wissenschaftssozial definiertes mathematisches Beweisverfahren ist. Produkte der kreativen Induktion interpretieren wir als weiche, weil leicht veränderbare Invarianten unseres Wissens (psychosoziale Emergenzebene), die vollständige Induktion interpretieren wir außerdem als eine wissenschaftssozial festgelegte Invariante (Norm) der Mathematik (wissenschaftssoziale Emergenzebene).

Ausblick und Anregungen für weitere Untersuchungen

Weil die bisherigen naturgeschichtlichen Reflexionen spürbar unvollständig sind, aber im Umfang der vorliegenden Arbeit nicht weitergeführt werden können, geben wir an dieser Stelle einen Ausblick mit Anregungen für weitere Untersuchungen.

Die anatomischen Strukturen unserer Raumrepräsentation (biotische Emergenzebene) bildeten sich phylogenetisch und ermöglichen uns ein überlebensadäquates Verhalten (psychische Emergenzebene) im Umweltraum. Bleiben wir kurz bei dem ausgesprochenen Zusammenhang zwischen der biotischen und der psychischen Emergenzebene: Während die Gehirnforschung überwiegend in der biotischen Emergenzebene arbeitet und der Untersuchungsschwerpunkt der meisten psychologischen Disziplinen die Emergenzebene des Psychischen ist, stehen in der Neuropsychologie die Wechselwirkungen zwischen der biotischen und der psychischen Emergenzebene im Mittelpunkt des Interesses. Unsere Konstruktion betreffend lautet ein – in empirischen Untersuchungen anzugehender – Problemkomplex, der sowohl die Selbstwechselwirkungen in der biotischen und der psychischen Emergenzebene als auch die Wechselwirkungen von der biotischen und der psychischen Emergenzebene betrifft: Identifiziere die einen 3-dimensionalen Würfel in der Vorstellung bzw. sprachlich repräsentierenden neuronalen Substrate, untersuche die Repräsentationwechsel psychologisch und neuropsychologisch. Worin besteht in jeder der beiden Emergenzebenen der Übergang zum 4-dimensionalen Würfel. Welche messbaren Einflüsse hat das Training im Umgang mit einem 4-dimensionalen Würfel in beiden Emergenzebenen.

Demgegenüber wäre das folgende – ebenfalls empirisch zu bearbeitende – Problem in der psychischen oder, falls man z.B. den Aufbau einer Wissensbasis in sozialen Prozessen mitbeschreiben möchte, in der psychosozialen und sozialen Emergenzebene lokalisiert: Untersuche, ob sich unsere Konstruktion im Rahmen einer wissenspsychologischen Modellierung als ein Beispiel für eine „Generalisierung" (vgl. Möbus/Schröder 1998, S. 433) erweisen lässt. Weitere empirische Untersuchungen, sei es, dass sie unsere Konstruktion im Rahmen von Produktionssystemen oder mithilfe von semantischen Netzen analysieren (vgl. Opwis 1992), sei es dass sie die Stabilität von kognitiven Strukturen (vgl. Sommerfeld 1994) von uns als Invarianten des Wissens interpretieren, sind möglich.

Wir betonen, dass diese von uns angesprochenen empirisch zu entscheidenden Probleme und andere selbst Teil unseres dynamischen Systems „Naturgeschichte" sind und dass ihre Platzierung im ML-MS (bzw. seinen Varianten: BS-MS bzw. 3F-MS) einem guten Überblick dient. Weiter stellen wir heraus, dass unsere Konstruktion überhaupt nur möglich war, weil wir in einer sich zwar in Raum und Zeit entwickelnden, aber doch für uns überwiegend stabilen, durch viele wirksame Invarianten und relativ sanfte mesokosmische Wechselwirkungen bestimmten Umwelt leben. Verglichen mit physikalischen oder biotischen (harten) Invarianten sind die der (wissenschafts)sozialen Emergenzebene zuzuordnenden Invarianten unseres Wissens sehr weich. Sie wurden und werden in (wissenschafts)sozialen Prozessen des Wissenserwerbs, denen auch Normierungen zu Grunde liegen, in die Wissensbasis eines Menschen eingespeist. Bei unserer Konstruktion gehört z.B. das Wissen von geometrischen Formen (z.B. Ecke, Kante, senkrecht stehen, ...), Konstruktionsschritten (z.B. Parallelverschiebung) und dem Rechnen mit Dezimalzahlen zu diesen weichen Invarianten.

Anders als in einer Theorie, in der die Systemevolution wesentlich mithilfe der Begriffe Variation und Selektion beschrieben wird, die also das stochastische Element betont, haben wir uns hier auf die im 3. Kapitel eingeführte heuristische Verwendung der mathematischen Theorie der dynamischen Systeme zur Beschreibung der Naturgeschichte bezogen, weil sie uns als das umfassendere Werkzeug erscheint. Die Klasse der dynamischen Systeme enthält ja nicht nur die deterministischen, sondern auch die stochastischen (dass wir im Abriss des 3. Kapitels überwiegend auf deterministische dynamische Systeme fokussierten, hatte didaktische Gründe). Wegen der vielen Bürden (Invarianten), so vermuten wir, kann die Naturgeschichte mithilfe von dynamischen Systemen der allgemeinen Klasse erfolgreicher beschrieben werden. Zu dieser Einsicht kam Riedl bereits in (vgl. Riedl 1975), als er die synthetische Evolutionstheorie zur STE erweiterte; er hat seine Einsicht nur anders formuliert.

Bezug der Konstruktion auf die Vorgeschichte der höherdimensionalen Geometrie

Menschheitsgeschichtlich und individualgeschichtlich ist jeder Anfang von Geometrie eng mit unserem Gesichtssinn verbunden, weil er beim Basteln oder beim Zeichnen das Arbeitsgedächtnis des Menschen besonders wirksam entlastet und Formveränderungen in ihm am effizientesten kontrolliert werden können. Wir stellten bereits im Abriss der Geschichte der höherdimensionalen Geometrien heraus, dass etwa bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts Geometrie stets als Geometrie im Umwelt- bzw. im Anschauungsraum aufgefasst wurde und man höherdimensionalen Objekten nur mögliche Anwendungen in der Algebra zusprach. Diese Auffassung ist verständlich, denn das Motiv, Geometrie zu schaffen, nährt sich vor allem aus unserem Bedürfnis, Konstruktionen oder Messungen im Umweltraum effizient und möglichst algorithmisch durchführen zu können. Erst im 19. Jahrhundert, nachdem konsistente Geometrien entdeckt wurden, in denen das für unsere mesokosmische Umwelt so plausible Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie nicht gilt, löste man den Geometriebegriff vom Umwelt- bzw. Anschauungsraum, und umgekehrt betrachtet hat der an die mesokosmische Umwelt gekoppelte Geometriebegriff die Klärung des Status des Parallelenaxioms 2200 Jahre dauern lassen. Hier lag – psychologisch gesprochen – eine kognitive Gebundenheit vor, die den Geometriebegriff an den Raum unserer mesokosmischen Umwelt (dementsprechend an unseren Anschauungs- und Vorstellungsraum) kettete und damit diese Auffassung von Geometrie zu einer 2200 Jahre stabilen Invariante unseres Wissenssystems machte.

Es stellt sich nun die Frage, warum es sinnvoll ist, gewisse in unserem Denken konstruierte Objekte – hier den 4-dimensionalen Würfel (W_4^4) – als Gegenstände einer mehr als 3-dimensionalen Geometrie zu bezeichnen. Eine Antwort ergibt sich im Rückblick auf unsere Konstruktion: Wir haben, von den Strukturen unserer visuellen und räumlichen Wahrnehmung bzw. Vorstellungskraft geleitet, mithilfe unserer numerischen, sprachlichen und anderen kognitiven Fähigkeiten – die in ihrer Beteiligung an der Konstruktion nur durch empirische Untersuchungen genauer bestimmt werden können – unser Wissen von den charakteristischen Eigenschaften W_k^3 für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ eines 3-dimensionalen Würfels zunächst in eine in den Dimensionen absteigende Folge W_k^n für $k, n \in \{0, 1, 2, 3\}$ angeordnet, s. Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.3. Im Vergleich der Folgeglieder erkannten wir dann, dass für $k = 0$ alle W_0^n für $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ durch das Konzept „Parallelkopieren“ einer Ecke W_0^0, für $k = 1$ alle W_1^n für $n \in \{1, 2, 3\}$ durch das Konzept „Parallelkopieren“ einer Kante W_1^1, für $k = 2$ alle W_2^n für $n \in \{2, 3\}$ durch das Konzept „Parallelkopieren“ einer Fläche W_2^2, für $k = 3$ alle W_3^n für $n \in \{3\}$ durch das Konzept „Parallelkopieren“ eines Kubus W_3^3 reproduziert werden und dass dies Konstruktionsverfahren W_k^n nach $n, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ fortgesetzt werden kann. Unser Ergebnis W_4^4 dieser an geometrischen Begriffen der alltäglichen Anschauung durchgeführten Strukturfortsetzung haben wir als einen 4-dimensionalen Würfel bezeichnet, und dies ist sinnvoll, denn dabei wurden räumliche Vorstellungsinhalte in bildhafte Sprache überführt, mit Strukturen eines unanschaulichen Kalküls integriert und dadurch Möglichkeiten für synergetische Prozesse geschaffen, in denen unser Gehirn eine neue Leistungsfähigkeit als Denkwerkzeug gewonnen hat.

Die Lösung der Geometrie vom Anschauungsraum und die Erzeugung abstrakter Kalküle, motiviert und mit erzeugt von anschaulich-bildhaften sprachlichen Elementen (wie z.B. Krümmung oder Torsion), führte zur algebraisierten Geometrie bzw. zur geometrisierten Algebra der Gegenwart und zählt deswegen zu den fruchtbarsten Entwicklungen in der Geschichte der neueren Mathematik. Das Substrat unserer kognitiven Ausstattung (biotische Emergenzebene) hatte ursprünglich nur überlebenswichtige psychischen Grundfunktionen (psychische Emergenzebene), aber während unserer jüngeren Entwicklung in psychosozialen Prozessen (psychische und soziale Emergenzebene) auch alle sogenannten höheren kognitiven Funktionen hervorgebracht. Die Erfindung einer vom Anschauungsraum losgelösten Geometrie erkannten wir als ein Beispiel für ein Emergenzphänomen in der psychosozialen und sozialen Emergenzebene, von dem eine Steigerung unserer kognitiven Leistungsfähigkeit ausgeht. Einen Abriss ihrer langen Vorgeschichte, die mit der Erfindung höherdimensionaler Geometrien im 19. Jahrhundert endete, gaben wir in 4.3.1. Der Frage, wie mit der in 3.2 entwickelten Forschungsheuristik das Werden höherdimensionaler Geometrien aus dynamisch-systemischer Sicht zu verstehen sei, gingen und gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht nach. Stattdessen haben wir den Übergang vom 3-dimensionalen zum 4-dimensionalen Raum am Beispiel der Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels im Labor selbst durchgeführt und mit Unterrichtserfahrungen des Autors dazu angereichert. Vergleichbar ist die Vorgeschichte der höherdimensionalen Geometrien mit unserer Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels, insoweit wir den Fokus auf die gemeinsamen Invarianten richten (s. 4.2): Sowohl die Erfinder der höherdimensionalen Geometrien als auch heutige Lernende sind mit der gleichen biologischen Ausstattung an den gleichen Mesokosmos adaptiert, und ihre Wissensbasen unterscheiden sich lediglich in einigen „höheren" Emergenzphänomenen, die wir als das Ergebnis psychosozialer bzw. sozialer Prozesse erkannten. In der naturgeschichtlichen Reflexion unserer Konstruktion haben wir uns aber gerade auf diese gemeinsamen Invarianten beschränkt.

Der 4-dimensionale Würfel ist nicht anschaulich

Wir übernehmen hier das Kriterium von Vollmer (s. 2.4.3), demnach ein 4-dimensionaler Würfel nicht anschaulich ist. Man kann ihn aber partiell veranschaulichen, indem man sich Bilder von ihm unter Projektionen ansieht. Abbildung 4.4 zeigt (links) eine 2-dimensionale zentralprojektive und (rechts) eine 2-dimensionale parallelprojektive Darstellung des 4-dimensionalen Würfels in der Zeichenebene. Dafür musste man den 4-dimensionalen Würfel offensichtlich 2-mal projizieren. Würde man nach einer der Zeichnungen ein 3-dimensionales Drahtgestell basteln, so wäre dies Drahtgestell eine 3-dimensionale projektive Darstellung des 4-dimensinalen Würfels. Die parallelprojektive Darstellung legt eine zweite Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels nahe, der wir uns nun zuwenden.

4.4.5 Zweite Würfelkonstruktion

Eine 3-dimensionale parallelprojektive Darstellung des 4-dimensionalen Würfels (also z.B. ein entsprechend der rechten Abbildung 4.5 gebautes Drahtgestell) lässt sich als ein gedankliches Konstruktionsverfahren für einen 4-dimensionalen Würfel interpretieren: Verschiebe den linken 3-dimensionalen Würfel von sei-

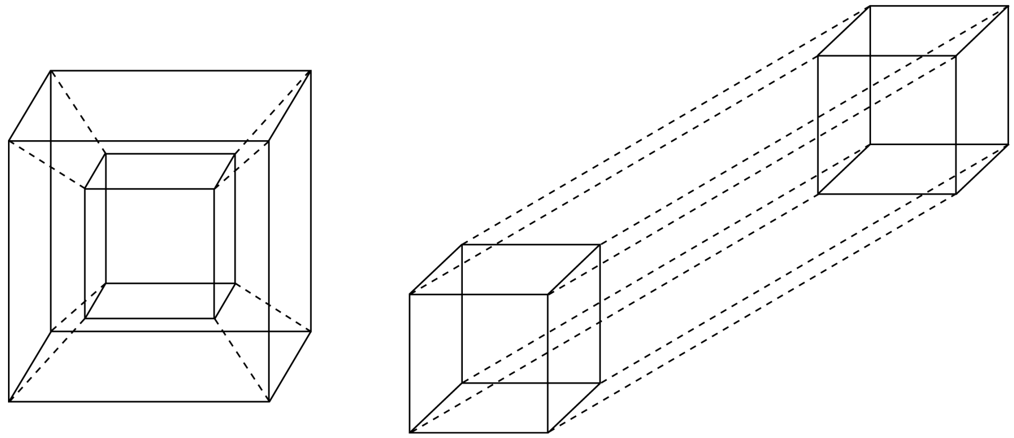


Abbildung 4.5: 4-dimensionaler Würfel (Hyperkubus). Links: Darstellung in 2-dimensionaler Zentralperspektive, das Projektionszentrum ist der Mittelpunkt des inneren Würfels. Man denke sich den kleinen Würfel (Startwürfel) zum großen (Zielwürfel) „aufgeblasen". Rechts: Darstellung in 2-dimensionaler Parallelperspektive, die man erhält, indem man einen Würfel (Startwürfel) an einen anderen Ort des Raumes (Zielwürfel) parallelverschiebt. In beiden Fällen: Startwürfel und Zielwürfel zusammen mit den Objekten der Bewegungsspur ergeben eine partielle Veranschaulichung *desselben* 4-dimensionalen Würfels. Man zählt 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Flächen und 8 Kuben. Ein z.B. entsprechend den Zeichnungen gefertigtes Drahtgestell, wäre eine 3-dimensionale projektive Darstellung des 4-dimensionalen Würfels; jede Zeichnung ist eine 2-dimensionale projektive Darstellung eines der 3-dimensionalen Drahtgestelle des 4-dimensionalen Würfels. Die projektiven Darstellungen lassen nicht erkennen, dass alle Kanten des 4-dimensionalen Würfels die Länge 1 haben.

nem ursprünglichen Ort längs einer geraden Linie bis an die Stelle des rechten 3-dimensionalen Würfels. Die 8 Ecken des Ausgangswürfels und die 8 Ecken des verschobenen Würfels ergeben zusammen die 16 Ecken einer 3-dimensionalen Parallelprojektion eines 4-dimensionalen Würfels W_0^4, falls die Länge der Verschiebung genau der Knantenlänge des 3-dimensionalen Würfels entspricht. Anders als in der 3-dimensionalen projektiven Darstellung stehen die 4 in einer Ecke zusammenlaufenden Kanten des 4-dimensionalen Würfels paarweise aufeinander senkrecht. Eine Abzählung der Kanten ($W_1^4 = 32$), Flächen ($W_2^4 = 24$) und Kuben ($W_3^4 = 8$) ergibt anhand der Abbildung 4.5 oder anhand eines entsprechenden Drahtgestells die mithilfe der 1. Konstruktion ermittelten Werte.

Diese 2. Konstruktion hat der Autor seinen Kursteilnehmern mitgeteilt, nachdem die 1. Konstruktion fertig war. Weil sie gleich den ganzen Würfel mithilfe einer Translation in eine um 1 höhere Dimension fortsetzt und dabei Ecken in Kanten, Kanten in Flächen, Flächen in Würfel verwandelt, s. Abbildung 4.4 unten, ist sie eleganter als die 1. Konstruktion, die Teilstrukturen des Würfels

– Ecken, Kanten, Flächen – in den Blick nimmt und sie mithilfe von Parallelkopien in eine um 1 höhere Dimension fortsetzt (s.o.). Diese Idee hatte bereits der deutsche Cossist M. Stifel, der von einem Punkt W_0^0 (0-dimensionaler Würfel) ausgehend eine Strecke W_1^1 (1-dimensionaler Würfel), ein Quadrat W_2^2 (2-dimensionaler Würfel), einen Kubus W_3^3 (3-dimensionaler Würfel), einen Hyperkubus W_4^4 (4-dimensionaler Würfel) und einen n-Hyperkubus W_n^n (n-dimensionaler Würfel) jeweils durch eine Verschiebung in eine neue Dimension konstruierte. Er sprach ihr aber nur für bis zu drei Dimensionen geometrischen, darüber hinaus nur arithmetischen Sinn zu (s. 4.3.1, 7.). Diese rekursive Konstruktion liefert die W_k^{n+1} aus dem bereits konstruierten W_k^n und nicht die Formel $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$, für die eine gesonderte Überlegung nötig ist.

Kommentar zum Unterricht

Ein Teilnehmer des Leistungskurses legte (eigeninitiativ) dem Kurs in einer der nächsten Kurssitzungen die rekursive Struktur $W_k^{n+1} = 2 \cdot W_k^n + W_{k-1}^n$ für die beschriebene 2. Konstruktion vor. Sie ist durch die folgende Überlegung bestimmt, die hier nur für $n = 3$ und $k = 2$ erläutert sei: Ein 3-dimensionaler Würfel hat $W_2^3 = 6$ Seitenflächen, der verschobene 3-dimensionale Würfel hat $W_2^3 = 6$ Seitenflächen und durch die Verschiebung des 3-dimensionalen Würfels werden seine $W_1^3 = W_{2-1}^3 = 12$ Kanten zu $W_{1+1}^{3+1} = W_2^4 = 12$ Seitenflächen eines 4-dimensionalen Würfels, dessen Gesamtzahl an Seitenflächen $2 \cdot W_2^3 + W_{2-1}^3 = 2 \cdot 6 + 12 = 24 = W_2^{3+1}$ beträgt.

Anschließend zeigte er mithilfe einer vollständigen Induktion über n, dass die mithilfe der 1. Konstruktion gefundene Formel $W_k^n = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ mit der rekursiven Struktur der 2. Konstruktion konsistent ist:
Induktionsanfang $n = 0$:

$$W_k^{0+1} = 2 \cdot W_k^0 + W_{k-1}^0$$
$$\binom{(0+1)}{k} \cdot 2^{(0+1)-k} = 2 \cdot \binom{0}{k} \cdot 2^{0-k} + \binom{0}{(k-1)} \cdot 2^{0-(k-1)}$$

Die Auswertung der letzten Gleichung ergibt die korrekten Werte $W_0^1 = 2$ und $W_1^1 = 1$.
Induktionsschluss:

$$W_k^{n+1} = 2 \cdot W_k^n + W_{k-1}^n$$
$$\binom{(n+1)}{k} \cdot 2^{(n+1)-k} = 2 \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} + \binom{n}{(k-1)} \cdot 2^{n-(k-1)}$$

$$= [\binom{n}{k} + \binom{n}{(k-1)}] \cdot 2^{(n+1)-k} = \binom{(n+1)}{k} \cdot 2^{(n+1)-k} = W_k^{(n+1)}.$$

Wie bereits in 4.2 (I) u. (II) angesprochen, stand der 4-dimensionale Würfel sowohl für den Grundkurs als auch für den Leistungskurs nicht für sich, sondern diente der Verdeutlichung für die Idee einer Geometrie in höherdimensionalen Räumen und ihrer Interpretation aus evolutionär erkenntnistheoretischer bzw. naturgeschichtlicher Sicht: Den Lehrplänen entsprechend hatten beide Kurse lineare Gleichungssysteme in n reellen Variablen und m Gleichungen zu lösen und für Gleichungen in bis zu drei Variablen auch geometrisch zu interpretieren gelernt. Darüber hinaus hat der Autor in beiden Kursen die Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems in n reellen Variablen und m Gleichungen anhand ausgewählter Beispiele mit einer geometrischen Terminologie für höherdimensionale Räume versehen (wir sprachen z.B. von 4-dimensionalen Hyperebenen im reellen 7-dimensionalen Raum, wenn ein lineares Gleichungssystem in 7 Variablen 4 frei wählbare Parameter enthält). Mit dem Leistungskurs hat er außerdem die Parameterdarstellungen für zwei verschiedene W_2^4 eines 4-dimensionalen Würfels der Kantenlänge 1 erarbeitet, deren Schnittmenge bestimmt, Abstände von Punkten mithilfe der eukidischen Norm ($||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$) und Winkel zwischen Vektoren ($\cos\alpha = \frac{x \cdot y}{||x|| \cdot ||y||}$) auch in mehr als 3-dimensionalen Räumen bestimmt. Wir gehen hier darauf nicht weiter ein, sondern setzen nun die naturgeschichtliche Reflexion unserer Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels fort.

4.4.6 Zweite Würfelkonstruktion und höherdimensionale Geometrien: Interpretation und naturgeschichtliche Reflexion

Weil die in der naturgeschichtlichen Reflexion der 1. Konstruktion gewonnenen wesentlichen Einsichten auch für die 2. Konstruktion gelten, führen wir sie hier nicht noch einmal an, sondern konzentrieren uns nur auf einige wichtige Unterschiede und Gemeinsamkeiten.

Vergleich beider Konstruktionen

Beide induktiven Konstruktionen (im psychologischen Sinne) sind Beispiele für Generalisierungen. Aber die den beiden Konstruktionen zu Grunde liegenden Ideen, das ist nun unsere Vermutung, unterscheiden sich darin, dass die Idee der 2. Konstruktion viel mehr kognitive Flexibilität in den Abstraktionen erfordert als die 1. Konstruktion. Wir werden unsere Vermutung mit einem evolutionspsychologischen Argument stützen und betonen, dass empirische Untersuchungen notwendig sind, um über unsere Vermutung zu entscheiden:

Die 1. Konstruktion beruht auf der Idee, alle von den k-Beinen eines n-Beins aufgespannten W_k^n in $(n-k)$ Dimensionen parallel zu kopieren (s. Abbildung 4.3 u. Abbildung 4.4 oben). Unter Parallelkopien bleiben aber die von den k-Beinen aufgespannten W_k^n erhalten, d.h. Ecken bleiben Ecken, Kanten bleiben Kanten usw. nur die Anzahl der Ecken, Kanten usw. erhöht sich und die neu erzeugten Ecken, Kanten usw. erscheinen an neuen Orten. Für die 1. Konstruktion gilt also (trotz aller Abstraktionen, die auch ihr zu Grunde liegen), dass Parallelkopien die Objektinvarianz unter Bewegungen respektieren. Die 2. Konstruktion respektiert demgegenüber die Objektinvarianz unter Bewegungen nicht: Aus Ecken werden Kanten, aus Kanten Flächen usw. (s. Abbildung 4.4 unten). Die der 2. Konstruktion zu Grunde liegende Idee erfordert also das Aufgeben (das Abstrahieren, das nach Klix auf Inhibitionen basiert, s. 2.4.6) einer Objektinvarianz unter Bewegungen, also eine kognitive Leistung, die uns der Mesokosmos nur selten abverlangt. Ob die diesen Überlegungen zu Grunde liegende Hypothese richtig ist, kann nur experimentell entschieden werden: Anbieten würden sich im Rahmen der kognitiven Psychologie mit Erwachsenen Reaktionszeiten messende Designs, die auf Typen der beiden Konstruktionen beruhen. Längere Reaktionszeiten wären der Hypothese entsprechend für Typen der 2. Konstruktion zu erwarten. Werden Designs, die Typen der 1. Konstruktion verwenden, von jungen und älteren Kindern, solche, die Typen der 2. Konstruktion verwenden, jedoch nur von älteren Kindern bewältigt, ist eine entwicklungspsychologische Deutung angezeigt.

Wozu nützt Geometrie in Räumen jenseits unseres Anschauungsraumes?

Wissen wir z.B. ein algebraisches Problem mit mehr als drei Variablen algebraisch nicht zu lösen, so steht uns der Weg, mit geometrischen Methoden vielleicht zur Lösung zu kommen, nur offen, wenn wir auf eine Geometrie in einem mehr als 3-dimensionalen Raum zugreifen können, in der wir das algebraische Problem zwar nicht mehr veranschaulichen können, in der wir aber einen an Begriffen unserer Anschauung entwickelten symbolischen Kalkül zur Verfügung haben (unsere visuell-räumlichen Fähigkeiten kommen hier also mittelbar, leitgebend für unsere symbolischen kognitiven Fähigkeiten zum Einsatz). Aus diesen Gründen ist die Konstruktion von Geometrien in Räumen mit mehr als 3 Dimensionen zu einer der fruchtbarsten Problemlösetechniken der modernen Mathematik geworden. Aus psychologischer Sicht handelt es sich dabei um ein kognitives Ressourcenmanagement durch den Wechsel und die Integration von analogen (visuellen, räumlichen) und seriellen (symbolischen, d.h. sprachlichen und numerischen) Repräsentationsformaten beim Problemlösen. Auf diese Weise werden nicht nur das Arbeitsgedächtnis entlastet und damit Ressourcen für weitere Jobs freigesetzt, sondern es wird auch Wissen vernetzt, das als solches für das Problemlösen effizient verfügbar wird.

Mithilfe abstrakter Mathematik, insbesondere auch höherdimensionaler Geometrie, hat der Homo sapiens aber nicht nur die Grenze seines kognitiven, sondern auch die Grenze seines unbelebten und sozialen Mesokosmos überschritten: Rundfunk, Flugtechnik, Kernkraftwerke, Halbleitertechnologie, Computer, Sonographie, Kernspin-Resonanz-Tomographie etc. beruhen auf naturwissenschaftlichen Kenntnissen, die nicht ohne die Kalküle einer Mathematik der höherdimensionalen (insbesondere der unendlichdimensionalen Funktionen-)Räume formulierbar sind. Die Rückwirkungen dieser nur mithilfe von abstrakter Mathematik möglichen technologischen Entwicklungen verändern unsere sozialen Strukturen in allen Gößenordnungen, vom Individuum über die Familien bis zur Weltbevölkerung. Es ist also nicht nur so, dass die unbelebte Emergenzebene die biotische hervorbringt, dass diese beiden die psychische und alle drei die soziale Emergenzebene hervorbringen. Offensichtlich wirken auch die höheren auf die niedrigeren Emergenzebenen zurück, wie die Gestaltung von Materie durch den Menschen hochtechnologischer Gesellschaften zeigt.

4.5 Die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik: Ertrag, Desiderate, Perspektiven

Das Beispiel im Rückblick:

Den Übergang von unserem mesokosmischen Anschauungs- und Vorstellungsraum zu einem abstrakten Raum haben wir beispielhaft anhand von Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels in 4.4 durchgeführt und dabei die Erfahrungen einbezogen, die der Autor mit jungen – 16 bis 19 Jahre alten – Erwachsenen im gymnasialen Mathematikunterricht gewonnen hat. Die Verallgemeinerung zum n-dimensionalen Würfel „lag auf der Hand“, wir konnten sie sofort notieren. Dann haben wir unsere Konstruktionen naturgeschichtlich reflektiert.

Unser Beispiel ist nach Auffassung des Autors unterrichtenswert, weil Menschen ab ca. 15 Jahren anhand dessen verstehen können, wie der Homo sapiens kognitiv, vor allem auf Grund seiner Sprachfähigkeit, die Grenze seines Mesokosmos überschreiten kann. Der Grenzgang erscheint hier, leicht nachvollziehbar, in „einem großen Schritt" (Fortsetzung der beiden – im psychologischen Sinne – induktiven Konstruktionen von der Dimension 3 zur Dimension 4), und zumindest Gymnasiasten interessieren sich nach den Erfahrungen des Autors wirklich dafür. Wenn wir im 5. Kapitel unseren naturgeschichtlichen Ansatz unter mathematikdidaktischen und evolutionspädagogischen Gesichtspunkten diskutieren, werden wir uns dabei auf unser Beispiel beziehen.

Mithilfe unseres naturgeschichtlichen Ansatzes erkannten wir und mithilfe unserer Erklärungsheuristik wäre weiter zu erhärten gewesen, wie uns unbelebte, biotische, psychische und soziale Bürden (Invarianten) geleitet haben. Im ML-MS haben wir diese Einsichten zur Entlastung unseres Gedächtnisses protokolliert. Weil eine detaillierte Ausarbeitung des Beispiels mithilfe der im 3. Kapitel entwickelten Forschungsheuristik den Rahmen der vorliegenden Arbeit gesprengt hätte, sprachen wir im vorliegenden Kapitel bewusst bescheiden davon, dass wir „naturgeschichtlich reflektieren" (unsere Konstruktionen mithilfe unseres Ansatzes naturgeschichtlich deuten), und machten durch vorsichtige Formulierungen sowie den Hinweis auf die Notwendigkeit weiterer, vor allem empirischer Untersuchungen deutlich, dass noch viel zu tun ist. Und was unsere Forschungsheuristik zu leisten vermag, lässt sich zwar auf der Grundlage unserer naturgeschichtlichen Reflexionen ausloten, kann aber nur in weitergehenden Ausarbeitungen und Beispielen sichtbar werden. Erkannt haben wir einige wichtige Glieder der Folge früher entstandener stabiler Strukturen – des Unbelebten, Biotischen, Psychischen oder Sozialen –, die Form oder Inhalt von Wissen, das unseren Konstruktionen zu Grunde liegt, ersichtlich geprägt haben; also das, was wir in 3.1 suggestiv eine „evolutionäre Spur" zu unserem Wissen (salopp: unseres Wissens) nannten.

Welche Einsichten liefert das Beispiel für die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik?

Wir gehen zuerst der Frage nach, was wir von einer naturgeschichtlich reflektierten Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels über die Entstehungsgeschichte höherdimensionaler Geometrien lernen können, und wenden uns danach der

Mathematik im Allgemeinen zu.

Unsere Würfelkonstruktionen, so stellten wir in 4.2 fest, geben uns nur insoweit auch Einblick in die Vorgeschichte der höherdimensionalen Geometrien, wie beide Prozesse von denselben naturgeschichtlichen Invarianten geprägt werden: Sowohl die Erfinder der höherdimensionalen Geometrien als auch heutige Lernende (einer höherdimensionalen Geometrie oder der Konstruktionen des 4-dimensionalen Würfels) sind mit der gleichen biologischen Ausstattung an den gleichen Mesokosmos adaptiert, und ihre Wissensbasen unterscheiden sich lediglich in einigen „höheren“ Emergenzphänomenen, die wir als das Ergebnis psychosozialer bzw. sozialer Prozesse erkannten. In der naturgeschichtlichen Reflexion unserer Konstruktion haben wir uns aber gerade auf diese gemeinsamen Invarianten beschränkt. Unsere Sprachfähigkeit in Verbindung mit Repräsentationsformatwechseln und unseren numerischen Fähigkeiten erkannten wir als die biotisch-psychischen Voraussetzungen für die Erfindung einer vom Anschauungsraum losgelösten Geometrie in der wissenschaftssozialen Emergenzebene und als eine Quelle für die Steigerung unserer kognitiven Leistungsfähigkeit. Bis diese Prozesse jedoch befriedigend naturgeschichtlich durchleuchtet werden können, sind vor allem noch viele empirische Untersuchungen nötig.

Die naturgeschichtliche Reflexion unserer Würfelkonstruktionen zeigt beispielhaft, dass auch die Mathematik ein Produkt der Naturgeschichte (vgl. 3.1) ist. In der naturgeschichtlich hierarchisch weit oben stehenden wissenschaftssozialen Emergenzebene wird mathematisches Wissen von Menschen formalisiert und erscheint hier als ein normatives Wissenssystem, das als ein soziales Phänomen selbstverständlich einem Wandel in der Zeit unterliegt. Deswegen gibt es eine Mathematik ewiger Begriffsstrukturen und Wahrheiten nur im gedanklichen Spiel mit zeitlosen Begriffen und Regeln, und nur in dieser gedanklichen Abgehobenheit von der Naturgeschichte sind jene idealen Standards für die mathematische Arbeit formuliert worden, derentwegen wohl die Mathematik von ihrern Verehrern in den Stand der „Königin der Wissenschaften“ erhoben wurde: alle Begriffsstrukturen sind scharf definiert und formalisierbar, der Beweisbegriff ist festgelegt, der „ideale Mathematiker“ ist allmächtig (in dem Sinne, dass er – falls das Auswahlaxiom im Regelsystem der Mathematik zugelassen ist – fähig ist, aus jeder Menge eine Teilmenge auszuwählen) und macht keine Fehler. Aber jedes derartige normative System der Mathematik ist defizitär, weil die Leistung eines jeden formalen Systems – wie wir in 2.2.2 herausstellten – begrenzt ist, unklar ist, welches normative System (von den vielen möglichen, s. 2.2.2) man nehmen soll, und weil Beweisideen (sie beruhen auf Heuristiken) nur reale Menschen bekommen, die Fehler machen.

Am Ende von 4.4.6 wiesen wir darauf hin, dass der Homo sapiens mithilfe abstrakter Mathematik nicht nur die Grenze seines kognitiven, sondern längs des Weges von empirischer Forschung und Technikentwicklung auch die Grenze seines realen Mesokosmos überschreiten konnte. Die Möglichkeit für eine erfolgreiche Mathematisierung eines realwissenschaftlichen Problems hängt natürlich von der Schwierigkeit des Problems und damit vom Entwicklungsstand der Mathematik selbst ab. So lässt sich die Erzeugung elektrischer Energie (z.B. in einem Kraftwerk) recht leicht, aber die zeitliche Entwicklung der Form einer Wolke bis heute noch fast gar nicht brauchbar mathematisieren. Andererseits – dies legitimiert die Massenproduktion – funktioniert eine Technik (z.B. die Radiotechnik), die einmal (Naturgesetzen entsprechend) nach den Regeln normativer Mathematik konstruiert worden ist, im Prinzip immer.

Perspektiven für die Mathematikdidaktik?

Wir schlossen das 2. Kapitel mit der Feststellung, dass eine „Evolutionäre Mathematikdidaktik“ bis heute ein Desiderat sei. Im 5. Kapitel entwickeln wir mithilfe der bisher gewonnenen Einsichten Perspektiven für eine „Evolutionäre Mathematikdidaktik“ und bestimmen ihren Platz im Rahmen der Evolutionären Pädagogik.

Abbildung 4.6: Vereinfachtes Multi-Layer-Modellschema (ML-MS) der Emergenzebenen. Die – nebenstehend erläuterten – Items deuten Emergenzphänomene zur Zeit ihres ersten Auftretens an und sind nur in der (den) höchsten Emergenzebene(n) eingetragen. Beispielsweise ist der Homo sapiens (11) nur in der psychischen und in der sozialen Emergenzebene notiert, sein biotisches Emergenzphänomen ist der Übersichtlichkeit wegen nicht eingetragen. In (nicht eingezeichnet) bzw. zwischen (↕) allen Emergenzebenen bestehen permanent Selbstwechselwirkungen bzw. Wechselwirkungen. Die Zeitangaben dienen hier nur einem orientierenden Überblick:

(1) 3-dimensionaler Raum ($-13,6 \cdot 10^9$ Jahre, vgl. 3.3.1).

(2) Geologische Grundstruktur der Erde ($-4,5 \cdot 10^9$ Jahre); elektromagnetische Bänder, die die Erdoberfläche erreichen; Akustik auf der Erdoberfläche (vgl. 3.3.1, 2.4.8).

(3) Wirbeltiere ($-500 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 3.3.2) mit bis heute vorliegenden Grundstrukturen der Sensorik und des Nervensystems.

(4) Tetrapoden ($-360 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 3.3.2) gehen zum Leben auf dem Land über.

(5) Elementarste numerische Fähigkeiten (?), Vestibularorgan (?).

(6) Frühste Säugetiere, tagaktiv, die Reptilien noch ähnlich sehen ($-230 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 3.3.2, 4.4.2 und Lecointre/Le Guyader 2006, S. 468).

(7) Säugetiere, nun nachtaktiv, entwickeln ein effizientes Gehör, einen auditorischen Speicher, eine neuronale Repräsentation der Zeit und verarbeiten akustische Reize zu einer kognitiven Landkarte, ihr auditorischer Kortex vergrößert sich ($-200 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 4.4.2).

(8) Säugetiere, nun wieder tagaktiv, entwickeln Farbensehen, der Gesichtssinn verlagert sich weiter ins Gehirn, Integration mit der auditorischen Informationsverarbeitung ($-70 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 4.4.2).

(9) Hominiden, bedeutende Vergrößerung des Vorderhirns, beginnende Entwicklung höherer kognitiver Funktionen ($-4,5 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 2.4.6, 3.3.2, 4.4.2).

(10) Homo, Gebrauch, Lagerung und Herstellung von Werkzeugen, weitere Vergrößerung des Vorderhirns, fortschreitende Entwicklung höherer kognitiver Funktionen ($-2,3 \cdot 10^6$ Jahre, vgl. 3.3.2).

(11) Homo sapiens, fortschreitende Entwicklung höherer kognitiver Funktionen – setzt sich in den folgenden Items fort – ($-0,2 \cdot 10^6$ Jahre; vgl. 2.4.5 u.a. (L5), 3.3.2, 3.3.4).

(12) Moderne Lautsprache, setzt die Bildung von Symbolen voraus, nur beim Homo sapiens (-40000 Jahre, vgl. 3.3.4, 4.4.2).

(13) Systematisches Zählen, ältestes bekanntes Fossil (-30000 Jahre, vgl. 4.4.2).

(14) Zahlensysteme, elementare Algebra und elementare Geometrie entstehen mit den erste Hochkulturen, der Mensch verändert verstärkt seinen Mesokosmos (-3000 Jahre, vgl. 2.3.1).

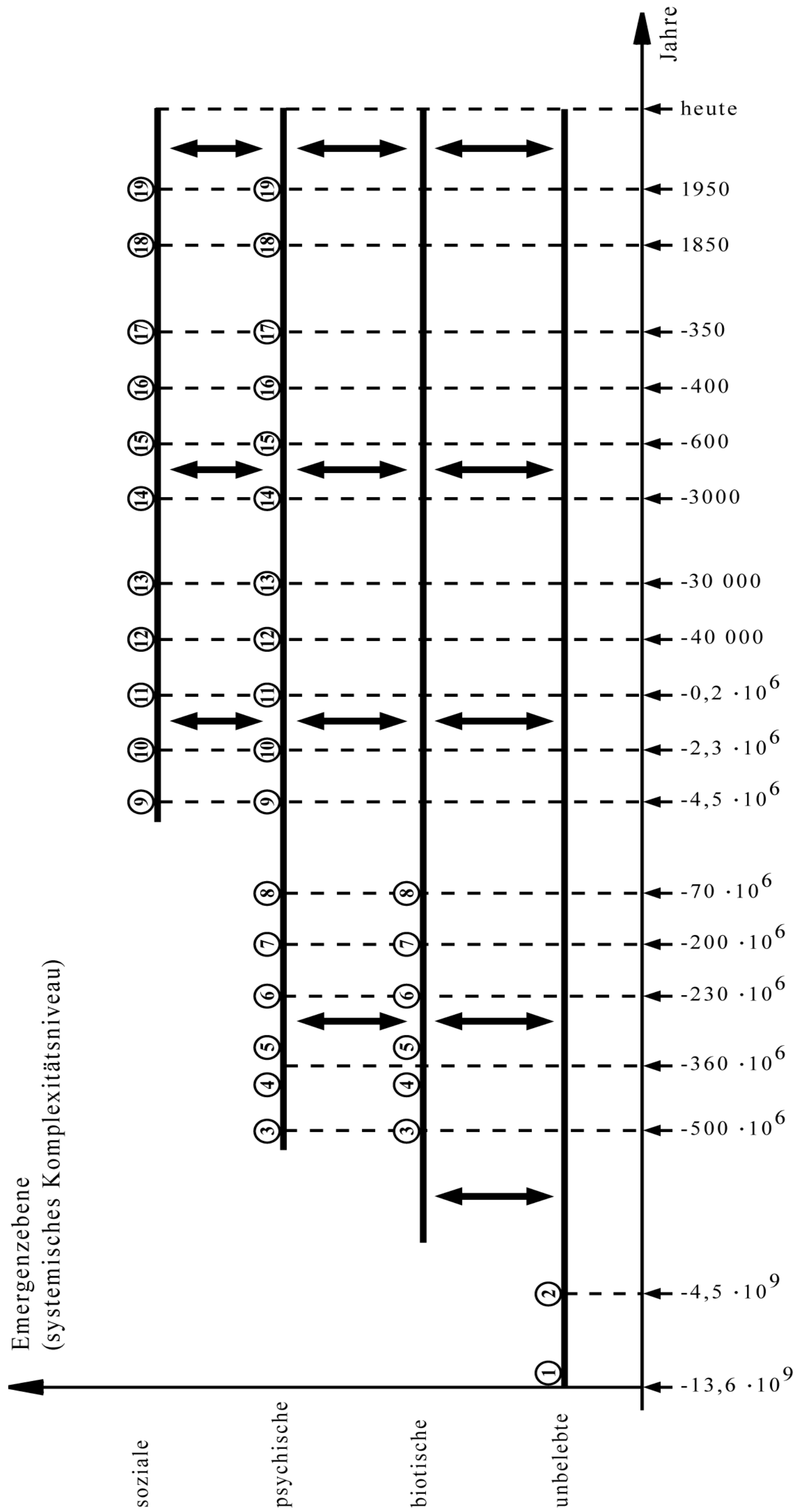
(15) Beginn der wissenschaftlichen Mathematik bei den Griechen (-600 Jahre, vgl. 4.3.1, 2.).

(16) Beginn der von der Geometrie dominierten nachpythagoreischen Mathematik (-400 Jahre, vgl. 4.3.1, 5.).

(17) Das systematische Werk von Euklid, euklidische Geometrie (-350 Jahre, vgl. 4.3.1, 4.).

(18) Lösung des Geometriebegriffs vom kosmischen (euklidisch gedachten) Raum und vom wahrgenommenen Raum, Entwicklung abstrakter, u.a. höherdimensionaler Räume mit nichteuklidischer Metrik (1850 Jahre, vgl. 4.3.1, 4.).

(19) Moderne Algebra, algebraisierte höherdimensionale Geometrie (1950).



Jahre
heute
1950
1850
-350
-400
-600
-3000
-30 000
-40 000
$-0{,}2 \cdot 10^6$
$-2{,}3 \cdot 10^6$
$-4{,}5 \cdot 10^6$
$-70 \cdot 10^6$
$-200 \cdot 10^6$
$-230 \cdot 10^6$
$-360 \cdot 10^6$
$-500 \cdot 10^6$
$-4{,}5 \cdot 10^9$
$-13{,}6 \cdot 10^9$
Emergenzebene
(systemisches Komplexitätsniveau)
soziale
psychische
biotische
unbelebte

Kapitel 5

Perspektiven für eine naturgeschichtlich begründete Mathematikdidaktik und Evolutionäre Pädagogik

5.1 Reframing

Im vorhergehenden 4. Kapitel haben wir an einem Beispiel gezeigt, was eine naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik bedeutet, welche Einsichten von ihr ausgehen können, und sie bereits mit einigen didaktischen Bezügen in Kontakt gebracht. Diesen Gesichtspunkten gehen wir im vorliegenden Kapitel weiter nach, indem wir sie in den allgemeineren Zusammenhang einer Evolutionären Pädagogik und einer Evolutionären Didaktik stellen. Die beiden im 1. Kapitel formulierten Fragen beantworten wir auf diesem Wege. In 5.2 beantworten wir die zweite Frage

- *Welche Bedeutung haben die Einsichten für die Evolutionäre Pädagogik, die auf dem Weg zur Antwort auf die erste Frage gewonnen wurden?*

In 5.4. beantworten wir die erste Frage

- *Könnte die Mathematikdidaktik von einer naturgeschichtlichen Sichtweise auf die Mathematik profitieren?*

Die in 5.3 erzielten Einsichten zur 3-Welten-Theorie ergänzen sowohl die Überlegungen des 4. Kapitels als auch die Antworten auf beide Fragen.

5.2 Evolutionäre Pädagogik, evolutionäre Didaktik und der naturgeschichtliche Ansatz

Evolutionäre Pädagogik

Pädagogik wurde in ihrer langen Geschichte zunächst im philosophischen oder theologischen Diskurs begründet und, seit die Soziologie und die Psychologie als eigenständige Wissenschaften einfussreich geworden sind, auch mit soziologischen oder psychologischen Befunden und Einsichten bereichert. Anstelle von Pädagogik ist heute oft gleichbedeutend von Erziehungswissenschaft die Rede. Demgegenüber definiert TREML *Pädagogik* als die „Kommunikation über Erziehung" (Treml 2000, S. 285) und *Erziehung* „im weiteren Sinne als ... de[n] Prozess der Vermittlung von Lernprozessen, die im Verlaufe einer Ontogenese durch Umwelterfahrungen auf der Basis von Lernfähigkeit erworben werden." (Treml 2000, S. 282) Erklärt man Erziehung als den Gegenstand der Erziehungswissenschaft, dann wird der Definition von TREML zufolge die Pädagogik zu einer Metadisziplin der Erziehungswissenschaft.

Die DARWINsche Evolutionstheorie hat man seit ihrem Erscheinen im Jahre 1859 viel diskutiert, aber das evolutionäre Paradigma wurde – von wenigen verstreuten und peripheren Versuchen, z.B. von H. SPENCER und HAECKEL abgesehen[1], – erst 1972 in der Erziehungswissenschaft aufgeriffen (vgl. Liedtke 1972). E. NIPKOW bemerkt dazu, „dass bereits früher Pädagogen ihre Thesen auch aus einem *impliziten evolutionären Wissen* heraus gewonnen haben. Soweit sie Wirklichkeitserfahrungen beachteten, mussten sie mit jenen evolutiven *Bedingungen hinter den Bedingungen* zu tun bekommen, die die kulturelle und gesellschaftliche Evolution und die aus ihr resultierenden Bedingungsgeflechte ihrerseits prädisponierten." (Nipkow 2002, S. 672) Eine evolutionstheoretische Grundlegung der Allgemeinen Pädagogik gibt A. TREML (2000), und mit dem „Thementeil: Evolutionäre Pädagogik"(EP) in (Z. f. P. 48.-5. Sept./Okt. 2002), spätestens mit der Einführung in die „Evolutionäre Pädagogik" (Treml 2004) darf die „Evolutionäre Pädagogik" als eine Teildisziplin der Pädagogik gelten.

Motivierend für das Programm einer evolutionären Pädagogik führt TREML an, dass die „Brutpflege von (höheren) Tieren und die Erziehung von unseren Kindern ... in evolutionstheoretischer Perspektive homologe Erscheinungsformen [sind], die gleichwohl – einmal entstanden und stabilisiert – analoge

[1]Der Autor dankt A. TREML für diesen Hinweis auf die Vorgeschichte der Evolutionären Pädagogik.

Funktionen erfüllen.“ (Treml 2004, S. 133) Aus evolutionstheoretischer Sicht erscheinen nun das Phänomen Erziehung und auch die Evolutionäre Pädagogik als Produkte der Evolution (vgl. Treml 2004, S. 14).

Gesucht ist nun ein effizientes Theoriedesign für die Evolutionäre Pädagogik, dass erstens das Ensemble der unterschiedenen Wirkebenen – Treml fokussiert auf die biologische Evolution in der Wirkebene des Genoms, auf die individuelle Evolution in der Wirkebene des Individuums in der Umwelt und auf die soziokulturelle Evolution in der Wirkebene der Kultur (s.u.) – der Evolution umfasst und zweitens seine Dynamik beschreibt. Die Problemstruktur der Wirkebenen legt eine systemtheoretische Beschreibung nahe, und Treml entscheidet sich dafür, die in den Sozialwissenschaften verbreitete luhmannsche Systemtheorie zu verwenden. Beschreibt man die Dynamik in jeder Wirkebene der Evolution durch Variationen und Selektionen, dann erhält man durch Abstraktion über alle Wirkebenen in sehr einfacher Weise eine alle Wirkebenen der Evolution umfassende – universelle – Dynamik. Der Allgemeinen Evolutionstheorie von Luhmann liegt diese Idee zu Grunde und Treml verwendet sie für sein Vorhaben.

Wir skizzieren nun das der Evolutionären Pädagogik von Treml zu Grunde liegende Theoriedesign nur soweit, wie wir es unten von unserem naturgeschichtlichen Forschungsansatz aus diskutieren werden:

> Treml gründet seine Evolutionäre Pädagogik auf eine Allgemeine Evolutionstheorie, die er in der von Luhmann entworfenen Allgemeinen Systemtheorie reformuliert (vgl. Treml 2004, S. 55, Fußnote 23).
>
> Der hier gemeinten Allgemeinen Evolutionstheorie (vgl. S. 63ff.) – sie ist das von spezifisch biologischen Sachverhalten der Darwinschen oder synthetischen Evolutionstheorie abstrahierte Resultat der allgemeinsten Evolutionsmerkmale (Variation und Selektion) – wenden wir uns zu, nachdem uns die wesentlichsten Züge der Allgemeinen Systemtheorie vorliegen:
>
> „Ein System ist mehr als die Summe seiner Teile. Dieses Mehr ist die Systemleistung, die in der Beziehung zwischen den Einzelteilen, und nicht in ihrer bloßen Summierung, begründet ist.“ (S. 57) Der Gegenbegriff zum System ergibt sich als das, was nicht durch die Beziehungen der Konstituenten (also durch das, was nicht zum System gehört) bestimmt ist, und wird Umwelt genannt: „Ein System *ist* der Unterschied von System und Umwelt. ... Nur als System-Umwelt-Differenz kann man den Systembegriff einführen. ... Dass Evolution nicht mit einer Einheit beginnt

. . ., sondern mit einer Differenz, ist deshalb notwendig, um überhaupt die beiden Grundmechanismen der Evolution, Variation und Selektion, in Gang zu bringen.“(S. 57) Um diese Dynamik der Evolution erklären zu können, vertieft Treml zunächst seine Ausführungen zum Systembegriff: „Ein System ist – aus der Sicht eines fernen (systemtheoretischen) Beobachters – die Einheit der Differenz von System und Umwelt“(S. 57), und jedes Systen ist für seine Umwelt selbst wieder Umwelt (vgl. S. 57). „Betrachtet man nun Systeme nicht in ihrem Verhältnis zur äußeren Umwelt, sondern aus Sicht der Umwelt – also gewissermaßen bezüglich ihrer inneren Umwelt, dann kann man sagen: Sie bestehen aus Strukturen. Strukturbildung ist die Beschränkung der Möglichkeiten, Elemente zu kombinieren; man kann auch sagen: Strukturen sind Muster von Aus- und Einschließungen, von möglichen und unmöglichen Relationen. Sie bestimmen damit eine doppelte Differenz, jene zu ihrer äußeren und jene zu ihrer inneren Umwelt. Systeme haben also streng genommen zwei Umwelten: eine äußere und eine innere. Zur äußeren Umwelt gehört all das, was nicht zum System gehört, zur inneren Umwelt alle ihre Elemente und ihre internen Relationen.“(S. 57-58) Weiter weist Treml darauf hin, dass „die Umwelt . . . immer komplexer als das System [ist], denn in ihr kommt ja eine Vielzahl von Systemen vor, ... Jede Beziehung von System und Umwelt ist also asymmetrisch oder anders formuliert: zwischen System und Umwelt gibt es ein Komplexitätsgefälle.“ (S. 58-59) In der Tatsache, dass wir unsere Aufmerksamkeit bei unseren Beobachtungen augenblicklich nur entweder auf das System oder auf die Umwelt richten können, erkennt Treml jene allgemeine Funktion, mit der „Evolution in Gang kommen und in Bewegung gehalten werden kann. Der binäre zweiwertige Code dupliziert die Möglichkeiten der weiteren Evolution und macht sie deshalb wahrscheinlicher; die Bifurkation des Denkens zwingt dazu, entweder den einen Weg (System) oder den anderen Weg (Umwelt) zu gehen, ohne den anderen ein für alle Male eliminiert zu haben. Dadurch wird die Varianz nicht vernichtet, sondern multipliziert und in Differenzierung übersetzt. . . . Wir müssen es der Evolution . . . selbst überlassen herauszufinden, welche Ergebnisse im Augenblick wichtig und anschlussfähig an die weitere Entwicklung sind [(teleonome Sicht)]. . . . Allgemeine Systemtheorie gewinnt damit die Möglichkeit, disjunktive Möglichkeiten [von System und Umwelt, insbesondere auch von der Sicht des erkennenden Beobachters und der naturalistischen Sicht] durch Verzeitlichung ihrer eingebauten Paradoxien fruchtbar . . . zu machen.“ (S. 62-63)

Die Allgemeine Evolutionstheorie beschreibt, abstrahiert von spezifischen Sachverhalten, Evolutionsmerkmale mithilfe der dynamischen Begriffe Variation und Selektion „aus der Sicht eines fiktiven fernen Beobachters. ... Damit wird in der Zeitdimension eine kontinuierliche Evolutionsentwicklung und in der Raumdimension eine alle Emergenzebenenen verbindende allgemeine Evolution angenommen: von den ersten Atomen über die ersten Bakterien bis hin zum Nobelpreisträger." (S. 70) TREML beschränkt sich für die Entfaltung seiner Evolutionären Pädagogik auf drei emergente Selektionsebenen bzw. Selektionseinheiten, die strukturell analog evolvieren (vgl. S.79-80): In der biologischen Evolution ist das Gen die Selektionseinheit, die Phylogenese der Selektionszeitraum und die sexuelle Selektion die Selektionsform. In der individuellen Evolution ist das Phän die Selektionseinheit, die Ontogenese der Selektionszeitraum und die natürliche (Umwelt-)Selektion die Selektionsform. Das Phän definiert TREML hier „als die Einheit der Differenz von körperlichen und geistigen Eigenschaften eines individuellen Menschen in Abhängigkeit von seiner aktiven Umweltanpassung" (S. 79 u. vgl. Treml 2000, S. 285). In der sozio-kulturellen Evolution (Emergenzebene des Sozial-Kulturellen) ist das Mem (vgl. Treml 2000, S. 284 u. Kapitel 3) die Selektionseinheit, die Kulturgeschichte der Selektionszeitraum und die kulturelle Selektion die Selektionsform. Eine explizite Unterscheidung einer biotischen, psychischen und sozialen systemischen Emergenzebene nimmt TREML für die Individualentwicklung nicht vor, stattdessen – so scheint es zu sein – deutet er die Gesamtheit der körperlichen und geistigen Eigenschaften eines Individuums zusammen mit den von ihm erzeugten Wirkungen auf seine Umwelt als eine Externalisierung (vgl. 79-81).

TREML zitiert (vgl. S. 82-91) den 2. Hauptsatz der Thermodynamik und verwendet eine Reihe von Begriffen, die wir hier nur anführen, um das von ihm entfaltete theoretische Panorama zu umreißen: (1) „Komplexität" (vgl. mit 3.1-3.3), (2) „Selbstorganisation" (synonym mit operationale Geschlossenheit); (3) „Wiederholung (der Einzelbausteine)", „Hierarchisierung (Schichtung)", „Wechselwirkung (Interdependenz)", „Tradierung (Vererbung)" aus der STE von RIEDL (vgl. 2.4.3); (4) „Korrespondenz" und „Kohärenz", wobei der Begriff der „Kohärenz" die internen Funktionszusammenhänge eines Systems beschreibt, die nach LUHMANN operativ geschlossen operieren (vgl. 2.4.3 für die Begriffsexplikationen von RIEDL dazu); (5) drei verschiedene Arten der „Anpassung" (Adaption: das System passt sich an seine Umwelt an, Adaptation: das

System passt die Umwelt an sich an, Adjustierung: das System macht sich unabhängig von den veränderten Umweltbedingungen und wird teilweise autonom); (6) „Kultur“ (vgl. mit 3.3.4).

Den Begriff *Erziehung* definiert TREML zunächst sehr allgemein als eine Form der Anpassung (vgl. S. 86), die durch die Einflussnahme auf das Lernen eines Lebewesens spezifiziert wird (vgl. S. 81) und wegen ihrer Kopplung an die Anpassung zumindest zeitweilig eine Stabilisierung impliziert. Weil das Lernen die (empirische) Bedingung der Möglichkeit von Erziehung ist, nimmt TREML die Evolution des Lernens genauer in den Blick und arbeitet das allgemeine Muster lernender Systeme heraus, das insbesondere in seinen grundlegenden (molekularen) Mechanismen bei allen Lebewesen gleich ist (vgl. S. 97 u. S. 97-132). – Prozessen des Lernens und der Gedächtnisbildung wandten wir uns in 2.4.4 zu. – Der bisher entfaltete Erziehungsbegriff ist viel zu weit, um zu interessanten Einsichten für die Pädagogik zu kommen. Deswegen schränkt TREML den Begriff Erziehung schrittweise ein und expliziert Erziehung als die soziale Einflussnahme auf jene Differenzerfahrungen (Variation), die ein Individuum zu Lernprozessen (Selektion) anregt, vorausgesetzt, das Individuum hat Lernbedürftigigkeit signalisiert und die soziale Zuwendung wurde ausgelöst. Das charakterisiert die Brutpflege von Tieren oder die Erziehung von Menschen besser und setzt sich ins Unterrichten von Verhaltenskompetenzen (Selektionsebene der Phäne) und sozialen Traditionen (Selektionsebene der Meme – Kultur) fort (vgl. S. 132-133, 146-148, 176 und für einen kompakten Überblick: Treml 2000, S. 11-29). Dieser in systemischer Perspektive entwickelte Erziehungsbegriff ist (system-)funktional[2], denn hier ist von sozialer Einflussnahme auf Differenzerfahrungen und der (wahrscheinlichen) Anregung eines Individuums zu Lernprozessen die Rede. Funktionale Erziehung teilt ihren Begriff weitgehend mit den Begriffen „beiläufige“ oder „implizite“ Erziehung bzw. „Sozialisation“ (vgl. Treml 2000, S. 67-74, insbes. S. 68) und erfordert eine teleonome Sicht, wie sie für die Beschreibung komplexer dynamischer Systeme angemessen ist, weil über die Absicht und Auslösung von Erziehung hinaus die Erziehungsprozesse selbst sowie die Wirkungen von Erziehung nicht zugänglich sind. „Teleonomie“ meint „Zweckmäßigkeit im Sinne von: funktionaler

[2]Ähnlich wie salopp von Evolutionärer Pädagogik anstelle von Evolutionistischer Pädagogik die Rede ist, so verwenden wir im Folgenden die Bezeichnungen funktional bzw. intentional – und ihre Derivate – oft auch dort, wo es korrekter funktionalistisch bzw. intentionalistisch heißen sollte.

Angepasstheit an die Umwelt als Produkt evolutionärer Selektionsprozesse" (Treml 2000, S. 287) und ist hier der Gegenbegriff zur „Teleologie", der „Denkweise, die alles unter dem Gesichtspunkt [eines] ‚Zieles' sieht" (Treml 2000, S. 287).

Funktionale Erziehung steht zum herkömmlichen, sogenannten „intentionalen" Erziehungsbegriff (vgl. Treml 2000, S. 62-67) insofern in einem Gegensatz, dass in letzterem eine absichtsvolle, auf ein antizipiertes Ziel gerichtete Erziehung als durchführbar und damit eine nachhaltig wirksame Erziehung (System-Stabilisierung) unterstellt wird (teleologische Sicht). Die Tatsache, „dass jede Erziehung – und damit auch jede Lehre – keine direkte, kausal-technologische Durchgriffsmöglichkeit auf die intendierten Ziele besitzt", wird häufig als das „Technologiedefizit" der Pädagogik bezeichnet (Treml 2000, S. 96; vgl. Liebau/Zirfas 2006, S. 240 u. Scheunpflug 2001, S. 97 Fußnote 54).

Ebenfalls aus evolutionärer Sicht wendet sich Treml in seiner „Allgemeinen Pädagogik" der Didaktik, dem Teilgebiet der Pädagogik zu, dessen Gegenstand das wissenschaftliche „Nachdenken und Kommunizieren über Lehren und Unterrichten" ist (vgl. Treml 2000, S. 82-101).

Evolutionäre Didaktik

Eine „Evolutionäre Didaktik" hat seine damalige Mitarbeiterin A. Scheunpflug in ihrer Habilitationsschrift im Dezember 1998 – also bevor (Treml 2004) erschienen ist – vorgelegt (vgl. Scheunpflug 2001); Treml hatte bereits früher zur Diaktik aus evolutionärer Sicht gearbeitet, publiziert und Scheunpflug ermuntert, hier weiterzudenken. Ihre Argumentation stützt sie im Rahmen des im Wesentlichen unter „Evolutionäre Pädagogik" skizzierten Theoriedesigns überwiegend auf die Luhmannschen Theorie der sozialen Systeme. Gemäß dieser Theorie sind soziale, psychische und biologische Systeme operational geschlossen und Umwelten zueinander, die Dynamik sozialer Systeme ist durch Kommunikation bestimmt.

Wir referieren nun drei Einsichten aus (Scheunpflug 2001), auf die wir aus der Sicht unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes eingehen werden:
1. Scheunpflug teilt mit, dass sie die Mathematik der dynamischen Systeme zwar für eine Grundlegung ihrer Evolutionären Didaktik erwogen, sich aber dagegen entschieden hat, weil diese Theorien im pädagogischen Diskurs noch nicht anschlussfähig seien (Scheunpflug 2001, S. 8 u. S. 22-23 Fußnote 5); ebenso

äußerte sich auch Treml noch 2006 gegenüber dem Autor.
2. Sie zeigt, wie ihre Evolutionäre Didaktik die traditionelle intentionale Didaktik erweitert und eine vertiefte und umfassendere Reflexion von Unterricht und Schule ermöglich, stellt aber fest, dass ihre Evolutionäre Didaktik weniger handlungsanleitend ist (vgl. S. 134-135).
3. Sie vermutet, dass eine Evolutionäre Didaktik von einer weiteren anthropologischen Fundierung (z.B. mithilfe von Befunden zu den stammesgeschichtlichen Bedingungen unseres Lernens) profitieren wird (vgl. S. 146-147).

Evolutionäre Pädagogik und Evolutionäre Didaktik aus der Sicht unseres naturgeschichtlichen Ansatzes

Das Theoriedesign der Evolutionären Pädagogik und der Evolutionären Didaktik, so fasst es Scheunpflug in (vgl. Scheunpflug 2001, S. 138) zusammen, komme zur Beschreibung der zeitlichen Dimension mit Variations, Selektions- und davon nicht trennbaren Stabilisierungsprozessen, zur Beschreibung der räumlichen Dimension mit der System-Umwelt-Beziehung, also mit insgesamt zwei zentralen Differenzen aus. Demgegenüber liegt dem im 3. Kapitel erarbeiteten naturgeschichtlichen Ansatz eine Formulierung (ausgewählter Aspekte) der Naturgeschichte mithilfe der Mathematik der dynamischen Systeme zu Grunde (Mathematik wird hier also als Werkzeug auf einer Metaebene verwendet und ist von der von der Naturgeschichte mit hervorgebrachten Mathematik als Gegenstand der Untersuchung zu unterscheiden). Weil ein detaillierter Vergleich der beiden Theorieblöcke den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde, beschränken wir uns darauf, anhand ausgewählter Gesichtspunkte für unseren naturgeschichtlichen Ansatz begründet zu werben. Zuvor sei daran erinnert, dass Treml und Scheunpflug unseren Ansatz zwar nicht übersahen, aber als nicht anschlussfähig im erziehungswissenschaftlichen Diskurs beurteilten (so führt denn Treml den 2. Hauptsatz der Thermodynamik (vgl. Treml 2004, S. 82) an und zitiert die Systemtheorie der Evolution (STE) von Riedl (vgl. Treml 2004, S. 84), während Scheunpflug einen Ansatz aus dem Dunstkreis der Schlagwörter „Chaostheorie“, „Synergetik“, „Mathematik“ und „Physik“ explizit erwogen hat).

1. Mit Bezug auf Riedl stellten wir im 2. Kapitel und in 3.2.5 heraus, dass jedes Erkennen dem Erklären vorausgeht. Das Erkennen der unauflösbaren Einheit der Differenzerfahrung von System und Umwelt ist der nicht weiter hinterfragbare Ausgangspunkt, von der aus Luhmann seine Systemtheorie kon-

struiert. Bleiben wir beispielhaft für viele andere Begriffe der Allgemeinen Systemtheorie (z.B. doppelte Kontingenz, operationale Geschlossenheit, Emergenz, Komplexität, Evolution) bei dem Begriff „Einheit der Differenzerfahrung“, der unumstritten – mindestens in den Sozialwissenschaften – wissenschaftlich fruchtbar ist. In diesem Begriff steckt erstens die Wahrnehmung eines ins Bewusstsein gehobenen Unterschieds und zweitens das (redundante) Statement, dass dieser Unterschied immer etwas Ganzes ist. Der so formulierte Begriff hinterlässt kometenhaft im Gedächtnis des Lesers zwar einen langen semantischen Schweif und ist deswegen angregend, aber er ist weit entfernt von einer Präzisierung, wie sie für mathematische Modellierungen, lauffäufige Computerprogramme oder auch nur für empirische Untersuchungen nötig ist. Auch wenn es für die wenigsten biologischen oder sozialen Systeme möglich ist, brauchbare Formalisierungen anzugeben, so hat doch z.B. die in 3.2.2 und 3.2.3 vorgestellte mathematische Sprache der dynamischen Systeme drei Vorteile: erstens ist sie päzise, zweitens liegt sie in formalisierter Fassung vor (so kann man zwar von Bifurkationen sprechen, hat aber auch formalisierte Beispiele dafür) und drittens erlaubt sie es, den evolutionspädagogischen bzw. evolutionsdidaktischen Diskurs den empirisch bzw. technisch arbeitenden Wissenschaften anzunähern.
2. Hatten wir unter 1. einen Begriff der räumlichen Dimension angesprochen, so wenden wir uns hier, ebenfalls exemplarisch, den Begriffen Variation, Selektion und Stabilisierung der zeitlichen Dimension des evolutionspädagogischen bzw. evolutionsdidaktischen Theoriedesigns, also der Allgemeinen Evolutionstheorie, zu. Während Treml Variation und Selektion in den Mittelpunkt seiner Evolutionären Pädagogik stellt und Stabilisierung die Rolle eines Hilfsbegriffs hat, verwendet Scheunpflug – vermutlich bequemlichkeitshalber – alle drei Begriffe eher gleichwertig (und steht damit Riedl nahe, der in seiner Systemtheorie der Evolution den der Stabilisierung entsprechenden Begriff der Bürde verwendet). Für eine rein stochastische Formulierung der zeitlichen Entwicklung von Systemzuständen würden Variation und Selektion allein ausreichen, weil sich Stabilisierung als eine Veränderung des Systemzustands mit nur sehr kleiner Wahrscheinlichkeit beschreiben ließe. Die Sprache der Mathematik der dynamischen Systeme enthält zwar auch die stochastischen Systembeschreibungen, ist aber reichhaltiger: denn mit ihrer Hilfe lassen sich Phänomene, wie sie linearen oder nichtlinearen dynamischen Systemen eigen sind (vgl. 3.2.2 und 3.2.3), ebenfalls beschreiben. Wieder mit den Einschränkungen, die tatsächliche Durchführbarkeit von Formalisierungen im Einzelfall betreffend, gelten auch

hier die unter 1. angeführten drei Vorteile.
3. Anders als in der Evolutionären Pädagogik bzw. Evolutionären Didaktik, in der die zeitliche Dimension mit der aus der DARWINschen Evolutionstheorie abstrahierten Allgemeinen Evolutionstheorie und die räumliche Dimension mit der Allgemeinen Systemtheorie jeweils getrennt beschrieben werden, ist die Mathematik der dynamischen Systeme von Anfang an so konzipiert, dass die Entwicklung von Systemzuständen in Raum und Zeit formuliert sind, wobei Raum, Zeit und Zustände zunächst abstrakte Variablen sind, die zur Modellierung des realen Raumes, der realen Zeit und realer Zustände speziell zur Verfügung stehen, wie es für die Modellierung von Naturgeschichte benötigt wird. Ist aus diesen Gründen das monistische Theoriedesign vorteilhafter?
4. Der in der Evolutionären Pädagogik bzw. Evolutionären Didaktik explizierte Erziehungsbegriff „funktionale Erziehung“ wurde der systemischen Sicht angepasst und dem Begriff „intentionale Erziehung“ gegenübergestellt (siehe oben). Theoretisch umfasst der funktionale Erziehungsbegriff den intentionalen (vgl. Fußnote 2) und ist diesem beim Nachdenken über Erziehung, Schule oder Unterricht, insbesondere wenn erklärt werden soll, warum etwas nicht geklappt hat, überlegen. Als Grund dafür wurde angeführt, dass der funktionale Erziehungsbegriff die Tatsache berücksichtigt, dass Erziehung zwar in bester Absicht ausgelöst, aber ihr Erfolg nicht erzwungen werden kann, weil der Erziehungsprozess selbst immer unzugänglich und außerdem sehr störungsanfällig ist. Der funktionale Erziehungsbegriff ist deswegen kaum für die Planung und noch weniger für die Praxis pädagogischen Handelns brauchbar, für die sich der intentionale Erziehungsbegriff als nützlicher erwiesen hat.

Nun trägt die Mathematik – ohne sie oder ihr Vergleichbares wären hochtechnologische Gesellschaften undenkbar – selbst handlungsplanende Züge und eignet sich deswegen zur Handlungsplanung: Mit Elementen wird operiert (sie werden geordnet, verglichen oder sonstwie verknüpft oder abgebildet), ein formulierter Satz wird bewiesen (dabei werden vom Satz zugelassene Begriffe und Schlussregeln nach dem Repertoir, wie es uns die Problemlösepsychologie vorgelegt hat, verknüpft), und beides kann als geistiges Tun betrachtet werden. Mit guten Gründen wird nicht jedes mathematische Tun als konstruktiv bezeichnet (vgl. 2.2.2), aber alles in der Mathematik ist absichtsvoll. In diesem Sinne intentional ist auch die Mathematik der dynamischen Systeme (vgl. 3.2.2 und 3.2.3), obwohl schon recht einfache auf den reellen Zahlen definierte dynamische Systeme z.B. chaotisches Systemverhalten zeigen können. Intentional haben wir auch unseren naturgeschichtlichen Ansatz verfasst und intentional von einer meist nicht explizit benannten Metaebene (Wissenschaftstheorie) aus kommentiert. Handeln ist zwar immer mit gewissem Risiko störungsanfällig, aber in den meisten Situationen (d.h. kleinen Ausschnitten der Naturgeschichte) ist dieses Risiko kalkulierbar; wäre dies nicht so, dann würde es uns vermutlich gar nicht geben:

> Wenn uns auf einem Hafenkai ein Geldschein aus der Hand fällt und dieser vom Wind umhergetrieben wird, dann könnten wir, selbst wenn wir viel Zeit hätten, um diese Situation als dynamisches System mathematisch zu modellieren, den Pfad des Geldscheins im Wind nicht vorherbestimmen. Aber das ist in dieser Situation auch gar nicht nötig, denn um den Geldschein einzufangen, reicht hier ein einfacher Algorithmus, der in vielen Fälle zum Ziel führen wird und der hier alltagssprachlich formuliert sei: Um zu vermeiden, dass der Geldschein vom Wind aufs Wasser getragen wird, werden wir unsere Position zum Geldschein und zur Kaikante unter grober Abschätzung der Windrichtung möglichst schnell so verändern, dass wir den Geldschein zu fassen bekommen, bevor ihn der Wind vielleicht auf das Wasser trägt. Weht der Wind in Richtung Land, dann können wir uns etwas mehr Zeit lassen.

Das Beispiel referiert einen Situationstypus, der auch auf die meisten realen Erziehungssituationen zutrifft: Sie sind nicht determiniert, aber auch nicht wirklich zufällig, sie sind eigentlich nie durchschaubar, doch nur gelegentlich und meist kurzzeitig „chaotisch“, derart, dass Handlungen ihr Ziel völlig verfehlen. Die meisten Situationen sind zwar störungsanfällig, doch ist es in ihnen zumindest möglich, ein Nahziel durch die Regelung vergleichsweise weniger Parameter (z.B. unterrichtliche „Stellgrößen“) zu erreichen. Fernziele sind demgegenüber fast immer sehr schwer zu erreichen. So steht es auch um die in den Erziehungswissenschaften vieldiskutierte „Nachhaltigkeit“. Beide sind Beispiele, an denen das Technologiedefizit der Pädagogik sinnfällig wird. Wir merken hier jedoch an, dass Nachhaltigkeit und die Schwierigkeit Fernziele zu erreichen, nicht für die Erziehungswissenschaften charakteristisch sind, sondern dass sie allen Wissenschaften gemeinsam sind, die sich abmühen, Systeme so zu präparieren, dass Zustände zeitinvariant (also stabil) bleiben. Die Erziehungswissenschaften könnten von einem solchen multidisziplinären Diskurs, für den sich die Mathematik der dynamischen Systeme als Fachsprache anböte, nur profitieren.

Die Stärken der Evolutionären Pädagogik bzw. der Evolutionären Didaktik liegen offensichtlich nicht in ihren Prognosefähigkeiten. Da sie aber erstmalig auch die stammesgeschichtlichen Bedingungen für die Möglichkeit von Lernen für Erziehung und Unterricht thematisieren, wird von ihnen erwartet, dass sie auf der Grundlage weiterer anthropologischer Befunde neue Einsichten und vielleicht sogar praktische Hinweise für Erziehung und Unterricht liefern.

4. Treml unterscheidet in seiner Evolutionären Pädagogik auf Grund des von ihm gewählten Theoriedesigns entsprechend den drei aus empirischen Befunden abgeleiteten evolutionären Selektionsmechanismen (sexuelle, natürliche und kulturelle Evolution) die drei Systemebenen (oder Emergenzebenen: Genom, Umwelt und Kultur) mit den drei Selektionseinheiten (Gen, Phän und Mem).

Im naturgeschichtlichen Ansatz – siehe 3. Kapitel – führten unsere Analysen zur Bildung von emergenten Strukturen zu einer etwas anderen Schichtung, die einerseits auf empirischen Befunden und andererseits auf von uns explizit gemachten Wahlentscheidungen gründen. So haben wir die unbelebte materiell-energetische, die biotische, die psychische und die soziale Emergenzebene eingeführt, wobei wir die psychische von der sozialen Emergenzebene auf Grund von pragmatischen Argumenten unterschieden haben. Die kulturelle Emergenzebene wurde durch eine an der sozialen Emergenzebene vorgenommene Differenzierung eingeführt. Außerdem haben wir den Begriff der Dynamik aus dynamisch systemischer Sicht differenziert problematisiert, während Treml sich für die sehr einfache, spezielle und hoch abstrakte universelle Dynamik „Variation und Selektion“ entschieden hat.

Wir können hier nur mit dem Argument der Reichhaltigkeit für unseren naturgeschichtlichen Ansatz werben. Ob der Ansatz von Treml oder der naturgeschichtliche Ansatz geeigneter ist, können wir nicht entscheiden. Denn diese Entscheidung hängt erstens von der jeweiligen konkreten Problemstellung und zweitens von pragmatischen Gesichtspunkten ab. Selbst wenn wir die beiden Theorieansätze ausführlich vergleichen würden, was – wie oben gesagt – den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, so tritt eine dritte Schwierigkeit auf, die eine Theorieentscheidung ausschließen könnte: Beide Theorieansätze liegen in einer für detaillierte Vergleiche noch zu grobmaschigen Fassung vor, sodass Vergleiche schnell die Grenze erreichen, jenseits derer sie wenig Sinn machen. Die Situation ist vielleicht eine andere, wenn das Arbeitsgebiet besser anthropologisch fundiert ist und wirklich entscheidungskräftige Fallbeispiele vorliegen.

5.3 Die 3-Welten-Theorie aus evolutionspädagogischer und naturgeschichtlicher Sicht

3-Welten-Theorie und unsere Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels – 1. Teil

Bevor der Autor im Winter 1993/94 mit seinem Grundkurs im Mathematikunterricht den 4-dimensionalen Würfel konstruierte, hatte er mit seinen Schülern die Übergänge vom „realen Raum des täglichen Lebens“ zu dem mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen „mathematisierten Wahrnehmungsraum“ der idealisierten geometrischen Vorstellung (innere Anschauung) und, davon ausgehend, den Übergang in den „ abstrakten Raum“, definiert durch das dreifache kartesische Produkt der reellen Zahlen, aus evolutionär erkenntnistheoretischer Sicht erarbeitet. Die damaligen Unterrichtsnotizen des Autors, die er auch seiner Lerngruppe zur Verfügung stellte, fassen die Übergänge zusammen (vgl. Köck 1994, S. A15), siehe Abbildung 5.1: Das Übergangsschema

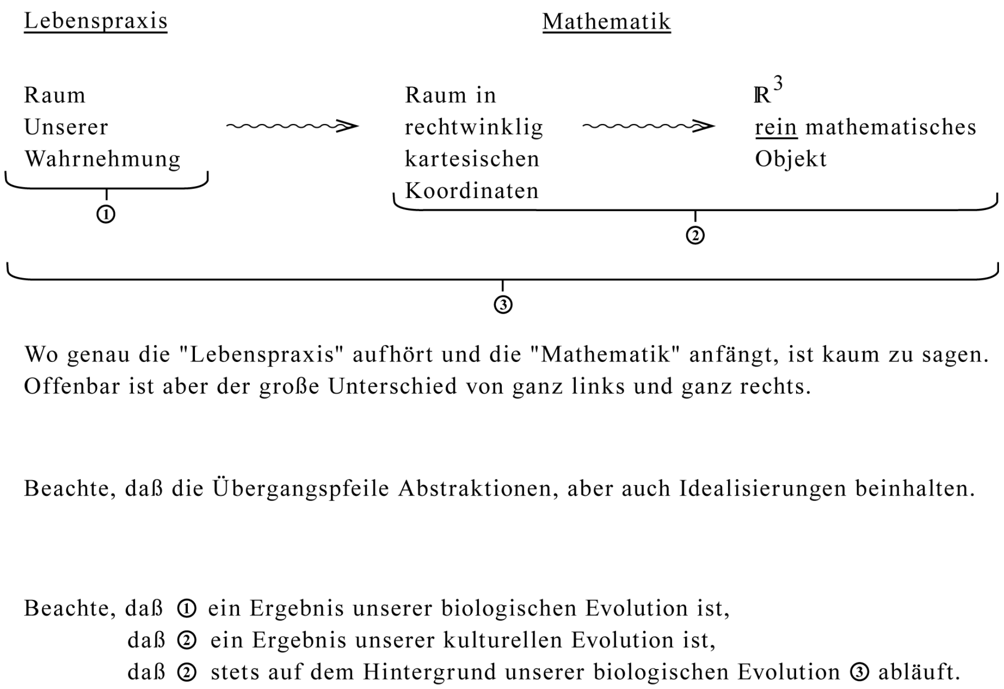


Abbildung 5.1: Zweistufiger Übergang von unserem Wahrnehmungsraum zu dem mithilfe von kartesischen Koordinaten mathematisierten Wahrnehmungsraum und zum abstrakten dreifachen kartesischen Produkt reeller Zahlen. Erläuterungen im Text.

beginnt links mit der nicht-mathematisierten Lebenspraxis, und rechts steht die abstrakte Mathematik. Die Unterklammerung (1) verweist auf den Raum unserer Wahrnehmung als ein Ergebnis der biologischen Evolution. Der Zusammenhang von Wahrnehmungsraum und dem uns umgebenden Raum wurde im Zusammenhang mit der hypothetisch realistischen Position problematisiert, das Diagramm enthält diese Problematisierung nicht. Die Unterklammerung (2) verweist darauf, dass die (wissenschaftliche) Mathematik ein Ergebnis unserer kulturellen Evolution ist. Die Unterklammerung (3) betont, dass der ganze Übergangsprozess in die biologische Evolution eingebettet ist. Die Übergänge selbst enthalten sowohl Idealisierungen (z.B. bei der kognitiven Erzeugung von Punkten, geraden Linien etc.) als auch Abstraktionen (Weglassungen), sodass auf dem Weg von links nach rechts die Anschaulichkeit bzw. Vorstellbarkeit der Objekte schließlich ganz verloren geht. Das Übergangsschema ist aber nicht nur menschheitsgeschichtlich, sondern auch individuell problemlösegeschichtlich lesbar, und so hat es der Autor im Winter 1993/94 mit seiner Lerngruppe auch verwendet, als er mit ihr zur Vorbereitung der Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels den 3-dimensionalen Würfel mathematisierte: Ausgangspunkt war ein realer Würfel im (Wahrnehmungs-)Raum, der im ersten Schritt in der Vorstellung idealisiert und in ein kartesisches Koordinatensystem gestellt wurde. Im zweiten Schritt wurde er dann – vorstellungsfrei – als eine Teilmenge des dreifachen kartesischen Produkts der reellen Zahlen beschrieben.

Im 4. Kapitel zeigten wir anhand unserer Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels beispielhaft, dass uns mit der Überführung von Gegenständen unserer Vorstellung in eine geeignete symbolische (sprachliche) Repräsentation eine Möglichkeit gegeben ist, die Grenze unseres Mesokosmos zu überschreiten. Genau diese Funktion hat auch das in der Abbildung 5.1 angegebene, in der Reflexion über unseren Mathematisierungsprozess entstandene Überführungsschema, und auch diese Funktion hatte der Autor mit seiner Lerngruppe herausgearbeitet.

Das im Unterricht herausgearbeitete Überführungsschema steht in engem Zusammenhang mit der von Treml verwendeten Variante der 3-Welten-Theorie, mit der er sowohl in (vgl. Treml 2000, S. 49-52) als auch in (vgl. Treml 2004, S. 109-111) zeigt, auf welchem Wege wir die Grenze unseres Mesokosmos überschreiten können:

> Weil die direkte sensorisch bedingte Informationsaufnahme, die Gewöhnung, die Sensibilisierung und das assoziative Lernen in der sinnlich erfahrbaren Handlungswelt die stammesgeschichtlich ältesten Erfahrungen

> widerspiegeln, konstituieren sie den Bereich der sogenannten Welt 1.
>
> Weil die Entwicklung analoger bildlicher Vorstellungen im zentralen Nervensystem, die Zwischenlagerung der bildlichen Informationen in der Vorstellungswelt und das bildliche Denken jünger als die Welt 1 sind, konstituieren sie den Bereich der sogenannten Welt 2.
>
> Weil die Ablösung vom bildlichen Denken und die Entwicklung eines formalen Denkens, das ohne bildliche Vorstellungen auskommt und sich in der Abstraktionswelt zwischen Begriffen und Zahlen und deren regelförmigen Verbindungen ereignet, stammesgeschichtlich am jüngsten sind, konstituieren sie den Bereich der sogenannten Welt 3. (vgl. Treml 2004, S. 109-110)

In einer eigens dafür vorbehaltenen Arbeit (vgl. Treml 2008) geht dann Treml der Frage nach, ob die in die Bereiche der 3-Welten-Theorie abgebildete Dreistufigkeit unserer Geistestätigkeit empirisch nachweisbar ist. Wir problematisieren nun die von ihm in (vgl. Treml 2008) dazu verfassten Überlegungen unter dem Aspekt der Abgrenzbarkeit der dritten Welt von der zweiten Welt aus naturgeschichtlicher Sicht (vgl. Köck 2008, S. 150-153):

Zum Problem der Abgrenzbarkeit der dritten Welt von der zweiten Welt

Anhand von ausgewählten Beispielen geht A. Treml den in der philosophischen und auch in der pädagogischen Tradition unter dem Schlagwort „3-Welten-Theorien“ diskutierten Klassifikationen der Welt in drei Teilwelten unter dem Gesichtspunkt nach, inwieweit diese Dreiteilungen „eine reale Erfahrung wider[spiegeln], für die es inzwischen empirische Nachweise gibt“ (Treml 2008, S. 190). Verständigen wir uns hier darauf, die erste Welt sei das Materiell-Energetische, die zweite Welt das Anschauliche und Vorstellbare und die dritte Welt das nicht ohne Sprache und Symbole fassbare Abstrakte, dann sind die abstrakte Mathematik und damit auch ein 4-dimensionaler Würfel ein Beispiel für Wissen aus der dritten Welt. Die folgenden Überlegungen betreffen vor allem die vieldiskutierte Frage nach der Abgrenzbarkeit der dritten Welt von der zweiten Welt.

„Am nachdrücklichsten“, so erwägt A. Treml, „dürfte eine dritte Welt empirisch in der Hirnforschung nachgewiesen werden, wenn es ihr gelänge, für die Welt Drei eine eigene zerebrale lokale Verankerung nachzuweisen“ (S. 199), und mit Bezug auf neuropsychologische Befunde argumentiert er für die mentale

Arithmetik „Eigenständig wäre die Welt der reinen Zahlen qua ‚dritte Welt' u.a. dann, wenn – vereinfacht gesagt – die Hirnforschung nachweisen könnte, dass in unserem Gehirn andere Bereiche arbeiten, wenn wir rechnen, als wenn wir uns etwas bildlich vorstellen oder gar handeln." (S. 200) Dass dieses Bild zu einfach ist, betont A. Treml durch den Hinweis, dass schon an vergleichsweise einfachen arithmetischen Operationen bereits viele Hirnareale beteiligt sind, die vermutlich nicht alle für Arithmetik spezifisch sind (vgl. S. 200). Zu erwägen ist, ob man unsere Fähigkeit zum elementaren Rechnen nicht besser zur Welt Zwei zählen sollte, weil sie (neben vielen unserer anderen Fähigkeiten) stammesgeschichtlich angelegt ist. Demgegenüber geht die mit den Griechen beginnende wissenschaftliche Mathematik weit über unser stammesgeschichtlich privilegiertes mathematisches Wissen hinaus und gehört der oben gegebenen Verständigung entsprechend zur Welt Drei. Diesem Gesichtspunkt folgend ist eine Antwort auf die Frage, ob eine kognitive Leistung aus der Welt Drei von einer kognitiven Leistung aus der Welt Zwei in der biotischen Emergenzebene trennscharf unterscheidbar ist, nicht nur eine empirische Frage, sondern auch davon abhängig, wie die Welt Drei definiert ist.

Lernpsychologen und Didaktiker stellen fest, dass den meisten Lernenden der Schritt von der Anschauung oder Vorstellung hin zur abstrakten Struktur oder Symbolisierung besonders schwer fällt. Für das mathematische Denken liegt so ein Schritt vor, wenn zwei Mengen in quantitative Relation zueinander zu setzen sind, so wie es in der Prozentrechnung oder für das Verständnis des Funktionsbegriffs nötig ist (vgl. Oerter 2008, S. 176). Diese Feststellung könnte dazu motivieren, die Welt Drei als den Bereich außerhalb „des Rings von kognitiven Barrieren" zu charakterisieren, innerhalb dessen wir Menschen stammesgeschichtlich an unseren Mesokosmos adaptiert sind. Operationalisiert man nun die Metapher der „kognitiven Barriere" durch die zur Überwindung der Barriere notwendigen kognitiven Ressourcen, dann wird man vermutlich feststellen, dass Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis, die Aufmerksamkeitssteuerung, das Orientierungswissen (z.B. Einstellungsänderungen) beim Wissenserwerb oder Problemlösen im Bereich der Welt Zwei gelegentlich höher sind als im Bereich der Welt Drei: Sich auf Anhieb in einer Landschaft mit wenigen Marken fehlerfrei orientieren zu können oder ein kniffeliges Schachmatt in drei Zügen zu finden, kann mehr kognitive Ressourcen fordern als die Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels. Angemerkt sei, dass zu prüfen ist, ob ein Problem nicht gelöst wurde, weil die kognitive Barriere zu hoch oder die Motivation dafür zu gering war. Man kann somit begründet vermuten, dass es überwiegend einen hohen kognitiven Aufwand erfordert, in der Welt Drei (jenseits des Mesokosmos) erfolgreich zurechtzukommen, dass aber Probleme in Welt Zwei vorkommen, für deren Lösung mehr kognitive Ressourcen erforderlich sind als für viele Probleme der Welt Drei, womit Welt Drei auf der psychischen Emergenzebene zumindest nicht allein auf Grund eines Ressourcenvergleichs trennscharf von Welt Zwei unterschieden werden kann.

A. Treml führt (vgl. S. 203) G. Frege an, der mathematischen Sätzen (z.B. dem Satz des Pythagoras), die er für zeit- und trägerlos wahr hält, einen eigenständigen, vom Materiell-Energetischen und Psychischen unabhängigen ontologischen Bereich entsprechend einer Welt Drei einer 3-Welten-Theorie zuweist. Den Selektionswert für diesen ontologischen Bereich erkennt A. Treml aus evolutionstheoretischer Sicht darin, dass „man dadurch eine ‚gemeinsame Außenwelt' für autopoietisch geschlossen operierende Subjekte (mit je eigenen sinnlichen Eindrücken und je eigenen Vorstellungen) ermöglicht" (S. 203). Diese Einsicht lässt sich in die Sprache unseres naturgeschichtlichen Forschungsansatzes übertragen und weiterdenken: Der Versuch mathematische Begriffs- und Schlussfolgerungsstrukturen möglichst scharf zu fassen, hat ganz wesentlich die Konsistenz und Kohärenz des mathematischen Wissens mithervorgebracht und den leibhaftigen Mathematikern damit Arbeitsstandards gegeben (u.a. auch die Gestalt eines idealen Mathematikers, der z.B. keine Fehler macht, jeden Widerspruch entdeckt und alle Probleme lösen kann). Diese Standards dienen den Mathematikern in der Emergenzebene des Wissenschaftssozialen als Arbeits- und Kommunikationsplattform. Nichts spricht dagegen, die in der – im Wesentlichen mit den Griechen (ca. 600 v.Chr.) entstehenden – Emergenzebene des Wissenschaftssozialen hervorgebrachten Produkte als die Welt Drei einer 3-Welten-Theorie zu bezeichnen. Diese Welt Drei ist (wie die vorhergehenden Überlegungen zeigen) von Welt Eins und Welt Zwei nicht etwa durch einen „Sphärensprung" getrennt: Die in der Emergenzebene des Wissenschaftssozialen hervorgebrachten Produkte (der ideale Mathematiker, der Satz des Pythagoras etc.) erscheinen in der Emergenzebene des Psychischen als Gedächtnisinhalte von in der Emergenzebene des Biotischen leibhaftigen Mathematikern, die mit ihrer Umwelt der materiell-energetischen Emergenzebene angehören. Innerhalb und zwischen den Emergenzebenen bestehen empirisch beschreibbare Wechselwirkungen.

Der Arbeit und Kommunikation in der Wissenschaftlergemeinschaft dient auch (wie der ideale Mathematiker, der Satz des Pythagoras etc.) die 3-Welten-Theorie, die in der Emergenzebene des Wissenschaftssozialen so lange ein nützliches Schema bleiben wird, bis sie in der Geschichte der Wissenschaften durch ein präziseres Instrument der Beschreibung ersetzt werden wird. Die Deutung der 3-Welten-Theorie – wie hier geschehen – als ein Produkt der wissenschaftssozialen Emergenzebene ist damit verträglich, dass die 3-Welten-Theorie nicht kulturuniversell ist[3].

3-Welten-Theorie und unsere Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels – 2. Teil

Die Ähnlichkeit des anhand der Abbildung 5.1 erläuterten Übergangsschemas mit der 3-Welten-Theorie (wir beziehen uns hier auf: die erste Welt sei das Materiell-Energetische, die zweite Welt das Anschauliche und Vorstellbare und die dritte Welt das nicht ohne Sprache und Symbole fassbare Abstrakte) fällt ins Auge.

Die Schwierigkeit der Abrgenzung der Welten 2 und 3 voneinander haben wir soeben problematisiert, und doch liegt es nahe, den 4-dimensionalen Würfel der Welt 3 und die der Konstruktion vorhergehenden geometrischen Überlegungen im Vorstellungsraum der Welt 2 zuzuweisen.

Ohne in die Tiefe zu gehen, sei aber anhand des Übergangsschemas der Abbildung 5.1 bemerkt, dass auch die Abgrenzung der Welt 1 von der Welt 2 nicht weniger problematisch ist: In der Abbildung 5.1 ist von unserem Wahrnehmungsraum (und Handlungsraum) und nicht vom physikalischen Raum als Welt 1 die Rede. Dieser Unterschied kann mithilfe der hypothetisch realistischen Position geklärt werden und, wie oben bemerkt, geschah dies im Winter 1993/94 im Unterrricht. Da Wahrnehmung und Vorstellung auf Grund der Beteiligung von Gedächtnisprozessen nur schwer voneinander trennbar sind, ist die Welt 1, interpretiert als der von uns wahrgenommene Handlungsraum, nicht scharf von der Welt 2 zu unterscheiden. Kurz: Um die Welt 1 – interpretiert als Außenwelt im physikalischen Sinne – von der Welt 2 zu unterscheiden, bedarf es der Entscheidung für eine (z.B. hypothetisch) realistische Position; und für die Unterscheidung der Welt 1 – interpretiert als wahrgenommene Welt und Handlungswelt aus der Sicht eines erkennenden Beobachters – von der Welt 2 scheint

[3]Der Autor dankt R. Oerter für den Hinweis, dass die 3-Welten-Theorie nicht kulturuniversell ist, und Treml für den diese Mitteilung stützenden Aufsatz (Schöfthaler 1984).

mit experimentalpsychologischen Kriterien nur eine vage Abgrenzung möglich[4].

Insgesamt zeigt sich, dass die 3-Welten-Theorie in unserer reflektierenden Innensicht plausibel ist, dass es aber schwierig sein wird, die 3 Welten auch empirisch als drei hinreichend scharf getrennte Bereiche nachzuweisen.

Wir führten oben die Feststellung an, dass den meisten Menschen der Schritt von der Anschauung oder Vorstellung hin zur abstrakten Struktur oder Symbolisierung sehr schwer fällt. Der Gedanke an die Auswirkungen und eine Abmilderung dieser Schwierigkeit im Feld der mathematischen Bildung, führt uns zu didaktischen Überlegungen, die wir aus naturgeschichtlicher Sicht anstellen werden.

5.4 Perspektiven für eine Evolutionäre Mathematikdidaktik

Wir beginnen mit einem kurzen Blick über die Geschichte des mathematischen Unterrichts und legen danach unsere naturgeschichtlichen Überlegungen zur Mathematikdidaktik dar. Der historische Überblick wurde so verfasst, dass er evolutionstheoretische Deutungsgesichtspunkte, die in den bisherigen Abschnitten dieser Arbeit angelegt worden sind, in unsere Erinnerung rückt. Deswegen ist er vielleicht schon für sich stehend interessant. Ein wichtiger Deutungsgesichtspunkt, der im naturgeschichtlichen Ansatz alle Emergenzebenen und viele Wechselwirkungen berührt, ist die Beurteilung der Funktionalität von Unterricht bezogen auf die Bedürfnisse einer sich wandelnden Population in ihrer sich wandelnden Umwelt. Im Abschnitt „Perspektiven für eine Evolutionäre Mathematikdidaktik“ gehen wir auf die Funktionalität von Unterricht unter 5.4.2 (2) ein, nachdem wir uns unter 5.4.2 (1) überwiegend kognitiven und Orientierungswissen stiftenden Überlegungen gewidmet haben. Für die Diskussion unter 5.4.2 (2) ist unser historischer Überblick mindestens hilfreich, für einen mit der Thematik nicht vertrauten kritischen Leser vielleicht unverzichtbar.

---

[4] Tremls Ausführungen zum Naturalismus-Rationalismus-Streit (vgl. Treml 2004, S. 59-63) erhellen auch einige Probleme bei den Unterscheidungsversuchen der Welten 1 und 2 mithilfe der Dialektik von System und Umwelt.

5.4.1 Geschichte des mathematischen Unterrichts und Genese der Mathematikdidaktik – ein kurzer Überblick

Wir haben darauf hingewiesen (vgl. 1., Item 2.), dass es keine Evolution mathematischen Wissens jenseits von Lehre und Lernen gibt – auf molekulargenetischem Wege können wir mathematisches Wissen nicht weitergeben –, bereits im alten Ägypten mathematisches Wissen systematisch unterrichtet wurde und Lehrer schon dort Lehrstoff zusammenstellten und über Didaktik und Erziehung nachdachten.

Fassen wir mit Treml „Didaktik“ als „das wissenschaftliche Nachdenken und Kommunizieren über Lehren und Unterrichten auf“ (Treml 2000, S. 82), dann hängt es davon ab, was man „wissenschaftlich“ nennt, um bestimmen zu können, wann die Mathematikdidaktik entstanden ist. Denn kommuniziert und nachgedacht über das Lehren und Unterrichten von mathematischem Wissen wird ja schon seit langem.

Die in Preußen (vgl. 5.4.1, Item 7.) Ende des 18. Jahrhunderts einsetzende Folge von Bildungsreformen zielte unter anderem auf eine Professionalisierung des Mathematiklehrerberufs (vgl. 5.4.1, Item 7e.). Sie löste in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhundert – unter anderem weil die wissenschaftliche Mathematik bereits so schnell voran schritt, dass Forschung und schulischer Alltag immer unvereinbarer wurden – Entwicklungen aus, die zur Bildung der Sektion für Mathematik und Naturwissenschaftler in der Philologenversammlung, zur Einigung der Mathematiklehrer der Sektion auf den Begriff „Schulmathematik“ (1864) und zur Gründung der „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ (1870) führten (vgl. 5.4.1, Item 7f.).

Die grobe Zeitspanne, die mit der Konsolidierung der „Schulmathematik“ beginnt und bis etwa in die 1950er Jahre reicht, in denen die wissenschaftliche Mathematikdidaktik in Deutschland als ein an Universitäten institutionalisiertes Geschäft beginnt, bezeichnen wir als die nähere Vorgeschichte der Mathematikdidaktik.

Der Entwicklung des mathematischen Unterrichts und der Herausbildung der Mathematikdidaktik aus ihrer näheren Vorgeschichte gehen wir im vorliegenden Abschnitt etwas genauer nach. Soweit wir uns dabei auf die erziehungswissenschaftliche Arbeit von G. Strobel-Eisele (Strobel-Eisele 1992) beziehen, profitieren wir davon, dass diese Arbeit aus system- und evolutionstheoretischer Perspektive verfasst wurde.

1. Die in der Einleitung (vgl. 1., Item 2.) angeführten Informationen zum mathematischen Unterricht im alten Ägypten ergänzen wir hier um einige Bemerkungen:

Mathematik (vgl. Brunner 1957, S. 69-71, 145-146, 151-152) wurde anhand von in Sachkontexten eingekleideten Beispielaufgaben unterrichtet, die die Schüler auswendig lernen und dann anwenden mussten. Ihnen wurde nicht einmal ansatzweise beigebracht, selbstständig, forschend oder kreativ zu denken. Über praktische Anwendungen hinausgehende theoretische Überlegungen und Abstraktionen gehörten einer höheren Ausbildungsstufe an, die von den meisten Beamten nicht erreicht wurde, und nur wenige waren berufen, neue Wege zu gehen. Die Ägypter übernahmen überliefertes Wissen – sie sahen es als Teil der herkömmlichen Ordnung an, die nicht in Frage gestellt wurde –, beschränkten sich darauf und gaben es weiter. Diese Mentalität wird auch als Grund dafür angeführt, warum die Ägypter keine komplexe Bruchrechnung schufen, sondern nur mit ganzen Zahlen und Stammbrüchen rechneten (vgl. Brunner 1957, S. 145-146).

Als unvollkommene Erwachsene betrachtet, besaßen Kinder in Ägypten geringen Wert (vgl. Brunner 1957, S. 139-141). Scheiterten Erziehungsversuche, so wurde das Erziehungsverständnis nicht in Frage gestellt, denn die Erziehbarkeit eines Menschen bestimmte Gott (vgl. Brunner 1957, S. 112-116). Damit waren auch Prügel, Freiheitsstrafen und Drohungen legitimiert, die ebenso zum erzieherischen Alltag der Schüler gehörten wie Ermahnungen, Appell, Wettbewerb, kleine Geschenke, Hinweise auf zukünftiges gesellschaftliches Ansehen, Geld und Macht (vgl. Brunner 1957, S. 56-65).

2. Erste Schultypen, die über die des alten Ägyptens hinausgingen, so führt Strobel-Eisele aus, entstanden in Griechenland mit der Entwicklung von Handel, Gewerbe und Handwerk ab etwa 800 v. Chr. (vgl. Strobel-Eisele 1992, S. 90-116): In Schreibschulen, die es fast sicher seit den Perserkriegen gab, unterrichteten Lehrer die technischen Fertigkeiten des Lesens und Schreibens, ohne dass sie die Kinder erzogen (vgl. S. 90-94). Unterrichtsmethode und Bestrafungen unterschieden sich noch nicht grundsätzlich von dem, was von ägyptischen Schulen bekannt ist. Der Lehrerberuf (Grammaticus) gehörte zum Handwerk, weil er erwerbsmäßig ausgeübt wurde, und war deswegen von den freien und besitzenden Hellenen wenig geachtet, wie alles, was dem Erhalt der Lebensgrundlagen und nicht der freien Muße angehörte.

Mitte des 5. Jahrhundert v. Chr. erkannte man die Relativität sozialer Konventionen und, dass man mithilfe von Sprache Interessen effizient durchsetzen kann. Die Sophisten, sie waren sprachgewandte Wanderlehrer und später auch Lehrer in Rhetorikschulen, vermittelten diese Einsichten, und einige nahmen auch die Erziehung des ganzen Menschen in den Blick (vgl. S. 99-109).

> „[Es] schufen die Sophisten ein Lehrsystem der Rhetorik. ... Die Rhetorik ist die zweite der sieben freien Künste, die sich aus dem Trivium (Grammatik, Rhetorik, Dialektik) und dem Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik) zusammensetzen. ... ‚artes' ist mit Lehre richtig übersetzt, genauer mit Sprachlehre. ... Mit ‚liberales' soll hervorgehoben werden, dass es die Studien des freien Mannes und der freien Muße waren. ... Schulen, die die ‚artes' lehrten, [waren] ausschließlich den Oberschichten, genauer ihren erwachsenen Mitgliedern, vorbehalten." (Strobel-Eisele 1992, S. 103)

Anders als in den Schulen der frühgeschichtlichen Hochkulturen, deren Unterricht stur von mimetischem Lernen bestimmt war, verlangte der Unterricht von Lehrern und Schülern nun die Fähigkeit zum selbstständigen Urteil, zum Nachdenken, zur Kreativität, zur inneren Distanz zum Gegenstand des Lernens und die Fähigkeit zur gewandten Kommunikation (vgl. S. 104).

Trugen einst die Sophisten die „argumentative Sprachkompetenz" als ein Problemlöseinstrument in die Polis, so brachte Platon, nachdem die Sprache als Garant gesellschaftlicher Ordnung kraftlos geworden war, die methodische Bildung (als Weg zur Wahrheit) bzw. die Mathematik als ordnungstiftendes Instrument in dem folgenden Sinne für die Polis in die Diskussion (vgl. S. 109): Ihre vom sinnlich Wahrnehmbaren gelösten Gegenstände geben den inneren Blick frei auf innere Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten und weisen damit auf (unveränderbare und ewige – damit wahre) Ideen (vgl. S. 109-112). Die vier Fächer des Quadriviums (Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Musik), die den Schwerpunkt im Lehrplan der von Platon gegründeten Akademie bestimmten, erfüllten aus seiner Sicht auch praktische Funktionen für die Polis, die Strobel-Eisele so zusammenfasst:

> „Platon sah die Schule resp. die mathematischen Fächer funktional für das Problem der Heranbildung und richtigen Auslese des Führungsnachwuchses. Die soziale Auslese und Schulung der Führungskräfte hatten

> auch die Sophisten angestrebt, … Aber Platon entwickelte eine Variante hinsichtlich des sozialen Auslesemechanismuses: Die gesellschaftlichen Partizipationschancen und Positionen sollten nicht mehr ausschließlich über Geburt und Vererbung vergeben werden, sondern nach individuellen Fähigkeiten und Anlagen[5].“ (Strobel-Eisele 1992, S. 112)

3. Merkmale und soziale Funktionen des griechisch-hellenistischen mathematischen Wissens und des griechischen Mathematikunterrichts blieben im römischen Reich bestimmend (vgl. Strobel-Eisele 1992, S. 116-117). In zunächst bescheidenem Maße diffundierten Kenntnisse der griechisch-hellenistischen Mathematik aus den Quellen des zerfallenen römischen Reiches in das Reich der Karolinger, der Wissensimport über Gelehrte aus dem irisch-angelsächsischen Raum ist dafür bedeutend (vgl. Günther 1887, S. 1-19, bes. S. 1-3 u. S. 14-19).

Der Schulunterricht für die Ausbildung von Geistlichen wurde bereits vor der Zeit von Karl dem Grossen (742-814) auf altgermanischem Boden um erste Kathedral- und Stiftsschulen ergänzt (vgl. Günther, S. 19-20). Karl der Grosse war wissenschaftlich vielseitig interessiert, gewann Gelehrte für seinen Hof zu Aachen und förderte die Bildung unter seinen Franken (vgl. S. 20-36): Er selbst nahm Unterricht bei seinem angesehensten Hofgelehrten Alkuin (735-804) in den sieben freien Künsten, insbesondere in Astronomie und in Arithmetik (die Zahlenmystik lehnte Karl ab). Alkuin verfügte 789 (Aachener Kapitulare), jeder Geistliche müsse so viel arithmetische und astronomische Kenntnisse haben, um selbstständig die kirchlichen Festtage vorausberechnen zu können. Stifts- und Klosterschulen seien zu gründen, in denen dafür die grundlegenden freien Künste zu unterrichten seien. Diese auf den Priesterstand bezogene Anordnung dachte Karl bereits seinem ganzen Volk zukommen zu lassen: „Jedermann soll seinen Sohn zu litterarischer Lehre senden und mit aller Sorge in derselben belassen, bis er gut unterrichtet ist.“ (S. 23) Mit der an seinem Hof gegründeten Palastschule schuf er ein anregendes Zentrum der wissenschaftlichen Diskussion und der Bildung. Mathematische Themen unterrichtete Alkuin dort im Rahmen der freien Künste, eine Sonderstellung erhielten vielleicht die zur Verstandesschärfung gestellten Rätsel.

Ludwig der Fromme, Sohn und Nachfolger Karls des Grossen, interessierte sich ebenfalls für die Wissenschaften und zog Gelehrte an seinen Hof, aber allgemeine Umstände bewirkten, dass die Palastschule verkümmerte. Karls Wunsch nach allgemeiner Volksbildung wurde zwar nicht realisiert (vgl.

[5] „Die gesellschaftlichen … Anlagen“ sind im Original kursiv gesetzt.

S. 38), aber Klosterschulen, von denen es schon unter KARL einige gab, unterrichteten neben dem jungen klösterlichen Nachwuchs (angehende Mönche) in der inneren Klosterschule nun auch Söhne bemittelter Laien, die ein weltgeistliches oder ein weltliches Leben führen wollten, in der äußeren Klosterschule (vgl. S. 42). Das Konzept der inneren und der äußeren Schule setzte sich auch in den anderen kirchlichen Schulen (Kathedral-, Stiftsschulen) durch, und überhaupt glichen sich die verschiedenen Schulen einander an (vgl. S. 54); gelegentlich waren innere und äußere Schulen wenig streng getrennt. Diese Situation änderte sich für die Dauer des gesamten Mittelalters fast nicht. Auch die nun weiter nach S. GÜNTHER referierten Bemerkungen zur Mathematik gelten für das ganze Mittelalter (vgl. S. 39-130):

In allen Schularten wurden die freien Künste und die Mathematik – als Gegenstand des Quadriviums – unterrichtet. Methodisch verlief der Mathematikunterricht vermutlich so, dass der Lehrer zu Beginn des Unterrichts die in der Mitte des Schulzimmers aufgestellte Kanzel bestieg, die Schüler saßen um ihn herum auf ihren Stühlen. Der Lehrer trug vor, stellte Fragen und erwartete eine genau vorgeschriebene Antwort bzw. er stellte Aufgaben, die Schüler zeigten ihm ihre auf Wachstafeln notierten Rechnungen und erwarteten Lob oder Tadel. Eine selbsttätige Auseinandersetzung der Schüler mit dem Unterrichtsgegenstand war kaum möglich. Der Unterricht war sehr gedächtnisbelastend und erforderte ein ergänzendes Selbststudium oder Privatunterricht (insbesondere dann, wenn es keine Unterrichtsmaterialien gab). Man differenzierte Mathematik noch nicht in Wissenschaft und Schulmathematik, aber schon früh hat man mathematische Texte, die keinen wissenschaftlichen oder monographischen Anspruch hatten, für Anfänger verfasst. Mathematische Studien wurden in manchen Klöstern, sofern sie kirchliche Interessen überstiegen, bestenfalls bis zu einem gewissen Grade geduldet, denn sie standen in Verdacht, einem geistlichen Leben entgegen zu stehen. Mathematik wurde überwiegend rezipiert, gelegentlich kommentiert, selten um neue Überlegungen ergänzt, Rezeption und Unterricht hatten oft bescheidenes Niveau. Nur wenige Gelehrte (meist Mönche oder Äbte), erreichten – soweit Texte zugänglich waren – den griechisch-hellenistischen Forschungsstand. Einen Berufsstand des Mathematikers oder Mathematiklehrers gab es nicht, war man Experte für Mathematik, so aus eigenem Interesse.

4. Universitäten entstanden aus manchen von Geistlichen geleiteten Einrichtungen, gelegentlich auch dort, wo sich Schüler um Berufslehrer scharten (meist im Umfeld einer bestehenden Schule) oder wurden vom Papst, einem Fürsten bzw.

von einer städtischen Gemeinschaft gegründet (vgl. Cantor 1900, Bd. II, S. 54 u. S. 200-202; Müller 1990). Zur Vorbereitung auf einen der drei eigentlichen Universitätsstudiengänge (Rechtswissenschaft, Medizin oder Theologie) durchliefen die Studenten zuerst das Trivium und dann das Quardrivium an der Artistenfakultät. Gegen Ende des 14. Jahrhunderts – in Bologna beginnend – entwickelte sich die Mathematik an den europäischen Universitäten „zum selbstständigen akademischen Nominalfach“ in dem Sinne, dass Dozenten bestellt wurden, die sich nur der Mathematik zu widmen hatten (Vgl. S. 219-221). Sowohl die Nominalprofessoren (vgl. S. 271) als auch die Ordinarien (vgl. S. 198, 253, 257, 265, 267, 275) gingen aus dieser Gruppe im Wesentlichen beginnend am Ende des 15. Jahrhunderts hervor.

An der Artistenfakultät der Universitäten saß der Lehrer zwar auch am Katheder und trug vor, aber anders als an Schulen existierten hier Texte, die jeder Student in die Lehrveranstaltung mitbrachte und dort mit Verbesserungen und Ergänzungen versah. Im letzten Teil der Lehrveranstaltung wurde der Vortrag unterbrochen, und es gab Zeit für Fragen. (vgl. Günther 1887, S. 192-197).

5. Für den mittelalterlichen gelehrten mathematischen Unterricht bis um das Jahr 1525 – so schließt Günther seine Untersuchungen mit den Bemerkungen ab – „ist da zu betonen, dass die theoretische Pädagogik, die es doch damals schon zu ganz leidlichen Anfängen gebracht hatte, vor dieser Seite des Unterrichts schüchtern halt macht, wohl aus dem Grunde, weil die wohlmeinenden Vorkämpfer didaktischer Reform sich zu der damals wie jetzt von vielen mit etwas argwöhnischem Blick betrachteten Wissenschaft in etwas gar zu wenig innigem Wechselverhältnis fühlten. . . . Eine eigentliche Didaktik der exakten Wissenschaften jedoch gab es nicht, und nur die feste Überlieferung, in der sich alle Unterweisung, sei es elementare, sei es akademische, zu bewegen hatte, dürfte junge Lehrer vor allzu gröben Verstößen bewahrt haben.“ (S. 276) Diese sehr zurückhaltende Formulierung Günthers ist ergänzungsbedürftig: Während des gesamten Mittelalters (und bis ins 20. Jahrhundert hinein) gehörten – oft unerbittliche – Strenge, Bestrafungen und körperliche Züchtigungen nicht nur zum pädagogischen Alltag (vgl. Günther 1887, S. 296-297 Fußnote 3), sondern wurden für die Entwicklung eines jungen Menschen von vielen Pädagogen als wertvoll angesehen. Daneben waren einige Einsichten über das Lehren und Lernen verbreitet, die aus heutiger Sicht wissenschaftlich unhaltbar sind (z.B. vgl. Strobel-Eisele 1992, S. 129-132).

6. Wachsender Handel und auch zunehmend mehr Geld- und Finanzgeschäfte in wachsenden Gemeinwesen verlangten im Spätmittelalter erstens nach mathematischen Experten für die Praxis und drängten zweitens eine wachsende Bevölkerungsgruppe dahin, sich bedürfnisgerecht mathematisch zu bilden (vgl. Günther 1887, S. 127-141 u. 286-324): Die Mathematik war inzwischen als Wissenschaft vorangeschritten und zu einer eigenständigen Disziplin an der Universität geworden (s.o.). Aber nur ein sehr kleiner Teil der Bevölkerung studierte an einer Universität, und die mathematische Ausbildung an den Universitäten war den neuen ökonomischen und sozialen Herausforderungen nur wenig angemessen. Die kirchlichen Schulen erfüllten die mathematischen Bedürfnisse der Gewerbetreibenden kaum, und an den zur Vorbereitung auf ein Studium gegründeten städtischen Schulen wurde eigentliche Mathematik bis auf wenige Ausnahmen nicht gelehrt (vgl. S. 131-133). So entstand ein Geschäft mit der Lehre von praktischer Mathematik. Außerdem fielen in den wachsenden Gemeinwesen nun vielerlei mathematische Aufgaben sowie diverse Büroarbeiten an. Beide Marktsegmente schufen im Laufe des 15. Jahrhunderts die sich später (etwa ab dem 16. Jahrhundert) zunftmäßig organisierende Berufsgruppe der Rechenmeister, die nicht zuletzt deswegen bedeutend zur mathematischen Volksbidung beitrug, weil von den Rechenmeistern auch viele Lehrbücher zur praktischen Mathematik verfasst worden sind. Auch die von Handwerkern, Architekten, Kunstmalern oder Visierern zur Ausübung ihres Berufs wichtigen geometrischen Kenntnisse wurden außerhalb der Schulen vermittelt; ein frühes Lehrbuch der Geometrie hat A. Dürer verfasst (vgl. Winter 1984, S. 108-109).

Wir halten hier fest, dass sich mit dem ökonomischen und sozialen Wandel in den Städten Strukturen bildeten, die jene für Handel- und Gewerbetreibende erforderlichen mathematischen Kenntnisse vermittelten, die von den herkömmlichen Bidungseinrichtungen nicht unterrichtet wurden.

Die höheren Schulen hatten die Aufgabe, den Übergang zur Universität vorzubereiten. Weil aber Mathematik in der artistischen Fakultät der Universitäten auf so elementarem Niveau unterrichtet wurde, dass sie keiner schulischen Vorbereitung bedurfte, stand sie meist gar nicht auf der Stundentafel der Schulen. Mathematik und Naturwissenschaften lernte man in Ritterakademien (nur für Adelige), in Bürgerschulen oder im Privatunterricht (vgl. Schubring 1983, S. 26-28). Diese Situation änderte sich in der Folge diverser Reformvorstöße nur langsam während des 18. Jahrhunderts (vgl. S. 28-32); es war schwierig, geeignete Lehrer für Mathematik zu finden.

7. Wir richten den Fokus nun auf Preußen, dessen Bildungsreformen die Bildung in Deutschland bestimmt hat, und folgen dabei den Arbeiten (Schubring 1983; Winter 1984; Inhetveen 1976):

7a. Preußen führte 1788 die Abiturprüfung an seinen höheren Schulen ein, die zwar noch keine Prüfung in Mathematik vorsah, aber vorgedruckte Aussagen über Kenntnisse in Geometrie und Arithmetik in Zeugnisformulare mit aufnahm (vgl. Schubring 1983, S. 32). Die aufklärerisch-philanthropische Schulreform des Ministers v. Massow ab 1798 führte intensiven mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Schulen ein, zielte aber noch auf eine berufsständische Ausbildung hin (vgl. S. 32-33). Erst nachdem (ab 1803), der höheren Schule die Aufgabe zugewiesen worden war, u.a. die Vorbereitung auf ein berufsbildendes Universitätsstudium zu leisten, für das das Abitur verpflichtende Zulassungsvoraussetzung war, ließ sich im Rahmen der ab 1809 unter W. v. Humboldt beginnenden neuhumanistischen Schul- und Hochschulreform auch ein intensiver prüfungsrelevanter mathematischer Unterricht (vgl. Winter 1984, S. 111), der auch neuere Entwicklungen und Anwendungen der Mathematik einbezog, in eine von Stand und künftigem Beruf unabhängige Konzeption von Allgemeinbildung in der Schule implementieren (vgl. Schubring 1983, S. 32-36).

7b. Die neuhumanistische Bildungsreform – sie war eine im Wesentlichen vom Bildungsbürgertum konzipierte und durchgeführte (vgl. S. 71) Verwaltungsreform von oben – selektierte individuelle Leistung und bedrohte deswegen Privilegien herkömmlicher Stände (vgl. Schubring 1983, S. 94-95). Die Aufwertung der Mathematik zu einem Hauptfach, die Prüfungsrichtlinien und später die Ablösung des Fachklassensystems durch das Jahrgangsklassensystem wirkten in diese Richtung. Zum Übergang vom Fachklassen- zum Jahrgangsklassensystem (vgl. S. 85-88).

7c. Auf Grund der Tatsache, dass der Lehrplan (1810/1816) für Mathematik mehr Themen einforderte als das Abiturreglement (1812) (vgl. S. 56), interpretierten Gegner der Bildungsreform die beabsichtigten Standards für Mathematik minimalistisch, bis sie teilweise zurückgenommen wurden. Aber, so Schubring, „bei der Einschränkung der Mathematik auf die als ‚Grenze' des Schulwissens definierten Abiturforderungen [ging es] um reine Machtkämpfe zwischen den Fächern ... – als Teil größerer Auseinandersetzungen um die soziale Funktion von Bildung – und nicht um pädagogische Zielsetzungen" (S. 60 u. vgl. S. 56-60 u. 184-185). „Diese Kürzung ...", so stellt Winter heraus, „wirkte sich auf die Teile des Lehrplans aus, die stärkeren Anwendungscharakter besaßen, ...

Die Inhalte des Mathematikunterrichts an Gymnasien war damit auf die ‚reine Mathematik' zurückgedrängt, deren ‚Bildungswert' [– besonders das formale Denken zu schulen (vgl. Schubring 1983, S. 69-70) –] anerkannt war, damit wurde aber auch die deutliche Beziehung der Mathematik zur Realität verschüttet." (Winter 1984, S. 112-113; vgl. auch Schubring 1983, S. 188).

7d. Weil das Wirtschaftsbürgertum in den neuhumanistischen Gymnasien seine Bildungsinteressen schlecht vertreten sah, gingen von seiner Initiative Realschulgründungen aus, an denen die Mathematik mit ihren Anwendungen eine bedeutendere Rolle erhielt, die sie aber im Ringen um die Gleichstellung mit den neuhumanistischen Gymnasien weitgehend wieder verlor (vgl. Winter 1984, S. 113-115; Schubring 1983, S. 70-74).

7e. Schubring kennzeichnet die Lehrerausbildung als den Kern der Bildungsreform von 1810: Die Einsicht, dass nur mit gut versorgten und fachlich qualifizierten Lehrkräften das Bildungsniveau der Bevölkerung wirksam erhöht werden kann, war der Grund für die Bestrebungen, mit denen der Lehrerberuf durch eine wissenschaftliche Ausbildung an der Universität und durch eine rigide Prüfungsordnung zum ersten modernen wissenschaftlichen Beruf – zur Profession – werden konnte. Wissenschaftliche Kenntnisse im Spezialfach allein reichten nach der Prüfungsordnung vom 12.7.1810 für die Lehrbefähigung nicht aus. Weil man der Auffassung war, ein Lehrer müsse an der Gesamtkonzeption der Bildung mitwirken können, durfte sie nur erteilt werden, nachdem auch hinreichende Kenntnisse der anderen Fächern nachgewiesen wurden (vgl. Schubing 1983, S. 103-105). Der Tatsache, dass mit der wissenschaftlichen Fachausbildung des Mathematiklehrers noch nicht das pädagogische und berufliche Handlungswissen gegeben ist, begegnete man 1826 mit der Einführung eines Probejahres, während dessen die Lehramtskandidaten unterrichteten, bei erfahrenen Lehrern hospitierten und sich methodisch weiterbildeten (vgl. S. 114). Die geringe Effizienz dieser berufspraktischen Ausbildung führte schließlich 1855 zur „Gründung des von K.H. Schellbach geleiteten ‚Seminars zur Ausbildung der Lehrer der Mathematik und Physik für Gymnasien und Realschulen' " (S. 117), mit dem die Situation des Mathematikunterrichts insgesamt noch nicht besser wurde (vgl. S. 118).

Während also die wissenschaftliche Qualifikation der Mathematiklehrer gelang – viele der an den höheren Schulen beschäftigten Mathematiklehrer arbeiteten und publizierten noch fachwissenschaftlich, und das war staatlich gewünscht – standen die unterrichtspraktischen Kenntnisse nicht zum Besten (vgl. S. 167-

178; Winter 1984, S. 112 u. S. 115-116): Verbreitet waren ein universitärer Vortragsstil, der die Eigenaktivität der Schüler ausschloss, und eine z.B. präzise fachsystematische, aber nicht schülergerechte Aufbereitung der Lehrinhalte. Überforderungen waren die Folge und die Unterrichtsdisziplin ging verloren. Ebenso erkannte man, dass ein konzentrierter und disziplinierter Unterricht, der methodisch auf Drill und pägagogisch auf Rauheit, überzogene Härte etc. sowie Angst vor der Lehrkraft gründet, auch nicht zum Bestem steht. Wir merken an, dass die vorherrschenden pädagogischen Methoden zumindest teilweise die gesellschaftlichen und staatlichen Verhältnisse abbilden und deswegen vermutlich nicht allein schulisch zu erklären sind.

7f. Sowohl die Begrenzung des Mathematikunterrichts auf das Betreiben der Philologen als auch die Tatsache, dass fachwissenschaftliche Expertise in der inzwischen beschleunigt fortgeschrittenen fachwissenschaftlichen Mathematik und beruflicher Lehralltag an höheren Schulen immer unvereinbarer wurden (vgl. Inhetveen 1976, S. 117-122) und sich außerdem Lehrergenerationen mit verschiedenen Bildungsgeschichten ablösten, all dies trug zur Entstehung der „Schulmathematik“ bei (vgl. Schubring 1983, S. 184-186 u. 189; Winter 1984, S. 115). Nach mehreren Vorstößen und Vorbereitungen bildeten die Mathematiklehrer der höheren Schulen in der allgemeinen Philologenversammlung eine Sektion für Mathematik und Naturwissenschaften, die 1864 erstmals tagte und sich dabei auf einen Begriff „Schulmathematik“ einigte (vgl. Schubring 1983, S. 186, 190, 195-196). Mit dem fortschreitenden 19. Jahrhundert wandte sich eine wachsende Gruppe von Lehrern der Elementarisierung mathematischer Inhalte für den Unterricht – „1880 z.B. waren 130 verschiedene Lehrbücher an den preußischen höheren Schulen in Gebrauch“ (S. 182) – und später auch methodischen Fragen des Mathematikunterrichts zu. Die von J.C.V. Hoffmann 1870 gegründete „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (ZfmnU)“ entwickelte sich zur ersten allgemein anerkannten Zeitschrift für methodische Fragen der Mathematik und der Naturwissenschaften (vgl. S. 194), und 1891 entstand der „Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (vgl. S. 198; Inhetveen 1976, S. 122-127).

7g. H. Inhetveen geht für die Zeitspanne zwischen 1890 und 1914 aus sozioökonomischer Sicht der Frage nach, wie die gesellschaftlichen Veränderungen in Preußen Veränderungen des Mathematikunterrichts an den preußischen Gymnasien bewirkten, und begründet, warum ihre Ergebnisse auf höhere Schulen

Deutschlands verallgemeinerbar sind (vgl. Inhetveen 1976, S. 11-13).

Im ersten Teil ihrer Arbeit legt sie die Vorgeschichte jener Entwicklung dar, auf die sich ihr Untersuchungszeitraum bezieht, und skizziert die preußische Bildungsreform auf der Folie der von der industriellen Revolution ausgelösten gesellschaftlichen Veränderungen: Die Bildungsreform in Preußen (s.o.) löste das für die industrielle Revolution dysfunktional gewordene Bildungssystem des 18. Jahrhunderts ab. Die Tatsache, dass mathematisch und naturwissenschaftlich gebildete Menschen und schließlich Berufswissenschaftler für die Produktion im Bereich der neuen technischen Industrien benötigt wurden und mathematisches Wissen auch immer mehr das wirtschaftliche Leben durchdrang, führte einerseits dazu, dass das Betreiben von Wissenschaft zum Beruf wurde, und wies andererseits den Schulen die Aufgabe zu, die jungen Menschen auch auf diese ökonomischen Realitäten vorzubereiten (vgl. S. 28-70). Interessenkonflikte der einflussreichen gesellschaftlichen und staatlichen Kräfte verhinderten eine zufriedenstellende Lösung dieser Aufgabe (vgl. S. 71-82).

Der zweite Teil ihrer Arbeit ist der „Meraner Reform“ (vgl. S. 83ff.) bestimmt: Die Problematik des dysfunktionalen Mathematikunterrichts – angemahnt wurden im Rahmen einer beizubehaltenden Konzeption der Allgemeinbildung ein unzureichender Lebens- und Berufsbezug (Anwendungen) sowie methodische Mängel – und die Überbürdung der Schüler an den höheren Schulen entwickelten sich ab 1890 zu unabweisbaren Themen (vgl. S. 83-85). Vertreter aus Schule, Wissenschaft (einflussreich wirkte F. Klein), Industrie und Ärtzeschaft erarbeiteten Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht der höheren Schulen, die während der Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärtze 1905 in Meran vorgelegt wurden (vgl. S. 86). Diese Meraner Vorschläge brachten den Reformprozess des Mathematikunterrichts nun erst wirklich in Fahrt (vgl. S. 86-96), und wir stellen es als bemerkenswert heraus, dass ihre lehrplanbildenden Wirkungen bis in die 1960er Jahre reichen (vgl. S. 154 u. S. 236).

Inhetveen führt die „Erziehung zur quantifizierend-mathematisierenden Betrachtungsweise von Natur und Gesellschaft“ (S. 155) als das Topziel der Meraner Reformer für die höheren Schulen an und betont, dass damit erstens „eine konsequente Anpassung ... an diejenigen Qualifikationserfordernisse, die aus der mathematisch formbestimmten Verwissenschaftlichung verschiedener Produktionsbranchen und Reproduktionsbereiche entspr[a]ngen“ (S. 157) und zweitens eine Standessicherung der Bildungselite gegenüber der elementar gebildeten Bevölkerung bewirkt wurde (vgl. S. 158-159).

Wir fokussieren nun auf Gesichtspunkte der Meraner Reformvorschläge, die im Zusammenhang mit einer evolutionären Mathematikdidaktik interessant sind: Die neuhumanistische Norm, „derzufolge durch den Mathematikunterricht formale Bildung vermittelt werden soll, bleibt unangetastet“ (S. 156). Wichtige übergeordnete Lernziele sind die Mathematisierung (vgl. S. 156) von Sachverhalten (der Umwelt – Anwendungsbezug), die Schulung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Schulung des funktionalen Denkens (vgl. S. 157). Zu beachten ist hier, dass sich der in den Meraner Plänen verwandte Anschauungsbegriff an Kant und Pestalozzi lehnt (vgl. S. 161) und nicht mit der Begriffsexplikation der heutigen Psychologie übereinstimmt. Bereits in den 1870er Jahren wurden didaktische und methodische Vorschläge erarbeitet, um die o.g. Defizite (s.o. 7e; vgl. auch S. 211-213) des mathematischen Unterrichts abzubauen und den Unterrichtserfolg zu verbessern. Diese didaktischen und methodischen Errungenschaften wurden in die Meraner Pläne in der Weise aufgenommen, dass dort Konzeptionen vorgeschlagen werden, die einen erfolgreichen Unterricht wahrscheinlich machen. Vorgeschlagen wird u.a.: neue Begriffe propädeutisch einzuführen (vgl. S. 214-216), den Unterricht anschaulich und praktisch zu fundieren (vgl. S. 216-217), einfache Darstellbarkeit als Kriterium für die Stoffauswahl zu verwenden (vgl. S. 218), Stoffgebiete aufeinander zu beziehen und zu vernetzen (Fusion) (vgl. S. 219-220) und Beweisverfahren nach alters- und entwicklungsspezifischen Gesichtspunkten (Entwicklungspsychologie!) auszuwählen, z.B. Plausibilitäten und empirisch-induktive Verfahren haben hier ihren Platz (vgl. S. 220-221).

Nun zur Überbürdungsproblematik: Die Überlastung der Schüler an höheren Schulen wurde in den 1820er und 1830er Jahren bereits einmal thematisiert (vgl. S. 226, Fußnote 3). Wieder aktuell wurde das Thema, nachdem klar geworden war, dass von den Lehrplänen für die höheren Schulen von 1882 und 1892 für die Schüler eine große Mehrbelastung ausging, in deren Folge viele Schüler krank wurden (vgl. S. 222-234): Nicht nur die besorgten Eltern monierten, sondern auch die herrschenden Stände und das Kriegsministerium, weil sie – so argumentiert Inhetveen – an der Reproduktion einer gesunden Elite interessiert waren. Entwicklungspsychologische Resultate und Einsichten der in den 1880er Jahren aufgekommenen pädagogischen Psychologie flossen in die Überbürdungsdiskussion ein (vgl. S. 224-225, insbes. Fußnote 3). Die Verbesserung der Unterrichtsmethodik, auch auf der Grundlage psychologischer Resultate, sollte das Überbürdungsproblem abmildern (vgl. S. 229); gefordert wurde ein dem Entwicklungstand der Schüler angemessener Unterricht, der den Stoff elementarisiert darstellt, der von der Anschauung gestützt sowie motivierend ist und in dem die Schüler selbst tätig werden können (vgl. S. 229-230). Substanziell wurden diese Forderungen in den Meraner Pläne berücksichtigt.

8. Wenn man die Institutionalisierung eines Faches an einer Universität als den Beginn ihrer Wissenschaftsgeschichte auffasst, dann beginnt die wissenschaftliche Mathematikdidakitik in den 1950er Jahren (vgl. Burscheid 2003, S. 146). Für die vorhergehende Zeitspanne, seitdem die Schulmathematik (s.o.: (7f)) entstanden ist, sei hier von der näheren Vorgeschichte der (gymnasialen) Mathematikdidaktik die Rede: Am Beispiel der verschiedenen Auffassungen von der Infinitesimalrechnung, die unter den Gymnasialdidaktikern gegen Ende des 19. Jahrhunderts vertreten wurden, konnte H.J. BURSCHEID noch Eigenschaften nachweisen, die KUHN als charakteristisch für die Schulen einer vorparadigmatischen Wissenschaft ansieht (vgl. Burscheid 1985).

Es ist charakterisierend für die Mathematikdidaktik – zumindest seit dem Beginn ihrer näheren Vorgeschichte –, dass sie Inhalte oder Standpunkte der Mathematik aufgreift, diese analysiert, systematisiert, elementarisiert und für die Lehre in einer geeigneten Weise aufbereitet und sich dabei für immer neue Gesichtspunkte und auch für nichtmathematische Bezugswissenschaften öffnet (vgl. Burscheid 2003): Viele Disziplinen der Psychologie und der Soziologie gehören heute ebenso dazu wie die Allgemeine Didaktik, die Mathematikgeschichte oder die Erkenntnistheorie und empirische Forschungsmethoden. Dass BURSCHEID keine Untersuchung kennt, die die Wirkungen der mathematikdidaktischen Forschung auf die Unterrichtspraxis thematisiert, und er deswegen nur persönliche Einschätzungen dazu geben kann (vgl. S. 151), ist für didaktische Innovationen und damit auch für eine Evolutionäre Mathematikdidaktik nicht weniger interessant als die Tatsache, dass in seinem Aufsatz die Neuropsychologie, die Evolutionäre Pädagogik oder die Evolutionäre Didaktik nicht genannt werden.

9. Für einen Blick über die neueren mathematikdidaktischen Richtungen verweisen wir pauschal auf die Literatur. Exemplarisch folgen wir hier wieder INHETVEEN, die den zweiten Teil ihrer Arbeit mit einem Abschnitt beendet, in dem sie die Meraner Reform mit der an der modernen Strukturmathematik orientierten Reform des mathematischen Unterrichts der 1960er und 1970er Jahre („New Math“) vergleicht (vgl. Inhetveen 1976, S. 235-242). Mit dem Ergebnis ihres

Vergleichs anitizipiert sie den in den 1980er Jahren einsetzenden und bis heute anhaltenden Trend in der Mathematikdidaktik, der Anwendungen, Anschauung und Heuristik wieder in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichts stellt.

Wir erinnern kurz an die Entwicklung der Mathematik zur Strukturwissenschaft (vgl. 2.2.2 u. 2.3): Das moderne Ringen um die Präzisierung des mathematischen Wissens begann im 19. Jahrhundert, erlebte eine Krise im Streit um die Grundlegungen der Mathematik – in denen auch philosophische Positionen eine wichtige Rolle spielten – in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts und fand mit den Arbeiten der Mathematiker, die unter dem Pseudonym BOURBAKI publizierten, im Wesentlichen ihren Abschluss. Wie die Strukturmathematik in Deutschland didaktisch wirksam wurde, erläutert H. LENNÉ in (Lenné 1969, S. 77-108).

Die strukturwissenschaftliche Deutung der Mathematik wurde von Didaktikern aufgearbeitet, in den 1960er Jahren für den Mathematikunterricht in Deutschland empfohlen und 1972 für die allgemeinbildenden Schulen verbindlich eingeführt (vgl. Inhetveen 1976, S. 239-240; Winter 1984, S. 122-124). INHETVEEN erkennt aber bereits 1976 richtig – LENNÉ sogar schon früher (vgl. Lenné 1969, S. 94) –, dass diese Reformlehrpläne problematisch sind (vgl. Inhetveen 1976, S. 240): Der abstrakte, stark mithilfe von Mengenlehre, Axiomatik, algebraischen Strukturen und Formalismen durchsetzte Mathematikunterricht erwies sich erstens für zu viele Schüler als motivationstötend oder unverständlich und zweitens auch als bildungspolitisch dysfunktional. Tatsächlich näherten sich die Mathematiklehrpläne wieder den bewährten Meraner Vorschlägen in dem Sinne an, dass z.B. die räumliche Anschauung, das heuristische Argument und Anwendungen ihre große Bedeutung zurückerhielten und das bis heute!

Wir referieren nun nach INHETVEEN einige soziologische und ökonomische Gründe für den Erfolg der Meraner Vorschläge gegenüber den strukturmathematischen Reformlehrplänen (vgl. S. 235-242): Die Meraner Vorschläge wurden von Experten erarbeitet, die sowohl die Situation an den Schulen als auch die aus der damaligen ökonomischen Situation sich abzeichnenden arbeitsmarkts- und bildungspolitischen Konsequenzen voll erfasst hatten. Demgegenüber arbeiteten in den 1960er Jahren staatlich beauftragte, fachwissenschaftlich orientierte Experten Vorschäge für einen neuen Mathematikunterricht aus, denen zufolge die nun weitgehend abgeschlossenen strukturwissenschaftlichen Systematisierungen der Mathematik ansatzweise in die Schulen einzogen. Aus dem wenig konkreten Grund, dass die neue Mathematik die Schüler frühzeitig auf die – infolge verstärkter Automatisierung der Produktion zu erwartenden – Anforderungen zukünftiger Arbeitsplätze vorbereite, glaubte man, dass diese Reform des Mathematikunterrichts für die gesellschaftliche Entwicklung funktional sei. Tatsächlich verfehlte die strukturwissenschaftliche Reform des Mathematikunterrichts die realen Bedürfnisse des Arbeitsmarkts und erwies sich auch als pädagogisch nicht vertretbar.

Der historische Überblick legt nahe, den Mathematikunterricht als ein Werkzeug anzusehen, das eine sich mit ihrer Umwelt wandelnde Population zur Sicherung ihrer Lebensgrundlagen, technischen Überlegenheit gegenüber anderen Populationen etc. geschaffen hat und verwendet. Das mit der vorliegenden Arbeit verfolgte Ziel wäre aber verfehlt, würden wir den Überblick nur auf die soziale Emergenzebene und nicht auf das unserem naturgeschichtlichen Ansatz zu Grunde liegende wechselwirkende Ensemble von Emergenzebenen beziehen.

5.4.2 Mathematikdidaktik aus naturgeschichtlicher Sicht

Erweiterung des bezugswissenschaftlichen Rahmens für die Mathematikdidaktik zur naturgeschichtlichen Sicht

In 3.3.4. bezeichneten wir Gelerntes tradierende soziale Systeme als kulturelle Systeme. Weiter erinnern wir hier an den dort erörterten schwierigen Zusammenhang von kultureller Phylogenese und kultureller Ontogenese und betonen das untrennbare Ineinandergreifen von sozialen und psychischen Prozessen. In 5.2 erkannten wir diese Tradierung als das Kerngeschäft der Pädagogik, das radikal bis heute nur von der Evolutionären Pädagogik behandelt wird. Spezieller, nach den geeigneten Mechanismen des Lehrens und Unterrichtens aus evolutionärer Sicht, fragt die Evolutionäre Didaktik.

Wir teilten oben mit (s. 5.4.1 Item 8.), dass sich die jüngere Mathematikdidaktik bereits vielen nicht mathematischen Bezugswissenschaften geöffnet hat. Seit einigen Jahren diskutiert man in didaktischen Fachkreisen und in der Öffentlichkeit, was die Neuropsychologie und eine Neurodidaktik zur Steigerung des Lernerfolgs beitragen könnten. Aber davon ist im täglichen Mathematikunterricht der meisten Schulen nichts zu spüren. (Dass es schon seit gut zehn Jahren Trainingsprogramme z.B. zur Behandlung von Rechenschwächen gibt, in die auch neuropsychologische Ergebnisse eingehen, steht damit nicht im Widerspruch). Demgegenüber hat die Evolutionäre Pädagogik bis jetzt weder die

Öffentlichkeit noch die mathematikdidaktische Diskussion noch die Schulen erreicht.

Vor allen bezugswissenschaftlichen Einflüssen ist die Mathematikdidaktik bis heute mit drei Kerngeschäften befasst: Im ersten analysiert sie Inhalte der mathematischen Fachwissenschaft und bereitet sie unter Gesichtspunkten der Lehre und des Unterrichts (methodische Gesichtspunkte gehören dazu) auf. Ihr zweites Kerngeschäft besteht in der Anpassung der mathematischen Lehrpläne an die aktuellen gesellschaftlichen Bedürfnisse oder Trends. Im dritten Geschäft befasst sie sich als Wissensschaft mit sich selbst und analysiert z.B. ihre Wissenschaftsgeschichte.

Perspektiven für eine Evolutionäre Mathematikdidaktik

Die Mathematikdidaktik könnte für ihre Kerngeschäfte davon profitieren, würde sie sich nicht nur schrittweise weiteren Bezugswissenschaften, sondern auch für den evolutionären, naturgeschichtlichen Forschungsansatz öffnen:

Im 3. Kapitel gingen wir konzeptionell und im 4. Kapitel anhand unseres Beispiels der Frage nach, wie sich unbelebte materiell-energetische, biotische, psychosoziale etc. Strukturschichtungen im Verlaufe unserer Erdgeschichte herausgebildet haben, und erkannten, dass diese Strukturen auch mathematisches Wissen prägen. So gesehen ist Mathematik ein multidisziplinär zu erklärendes Phänomen, für das der naturgeschichtliche Ansatz einen umfassenden Rahmen gibt. Aber der naturgeschichtliche Ansatz (vgl. 3.1) umfasst ebenso wie die Mathematik auch die Pädagogik und die Mathematikdidaktik, die – wie alle Wissenschaften – ebenfalls Produkte der Naturgeschichte sind. Ein Bezug der didaktischen (einschließlich methodischen) Arbeit auf die unserem naturgeschichtlichen Ansatz entsprechend evolutiv gefügte Ordnung verweist von Beginn an auf z.B. unbelebte, biologische, psychologische und soziale Strukturen und Funktionen. Wir erinnern an einige Strukturen und Funktionen, von denen wir meinen, dass sie für die Mathematikdidaktik zumindest interessant sind und skizzieren dann, in welcher Weise die Mathematikdidaktik davon profitieren könnte. Dabei gehen wir so vor, dass wir in (1) die Mathematik zunächst allgemein und dann die mathematische Arbeit in Lernprozessen ins Visier nehmen (1. Kerngeschäft). Dem Gesichtspunkt einer Vermittlung mathematischen Wissens aus ökonomischer bzw. gesellschaftlicher Sicht (2. Kerngeschäft) und den selbstreflektierenden Aktivitäten der Mathematikdidaktik (3. Kerngeschäft) wenden wir uns in (2) zu.

(1) Mathematisches Wissen ist ein Produkt der Naturgeschichte (vgl. 3.1), insbesondere ermöglicht und geprägt von den Strukturen unseres Körpers und seinen Funktionen zur überlebensadäquaten Verhaltenssteuerung in unserer Umwelt. Wie hätte ohne unsere räumliche Wahrnehmung, ohne unsere Fähigkeit, Muster und Anzahlen erkennen zu können, ohne unsere Fähigkeit zur Symbolbildung und der Verarbeitung von Symbolen (Sprache) unser mathematisches Wissen entstehen können? Umgekehrt verweist das Gefüge der mathematischen Arbeitsgebiete auf unsere kognitive Ausstattung zurück.

Anhand der Konstruktion unseres 4-dimensionalen Würfels haben wir beispielsweise gezeigt, wie wir unsere evolutionär alten Strukturen der analogen Raumrepräsentation mithilfe unserer evolutionär jüngeren Sprachfähigkeit kombinieren und auf diese Weise abstraktes mathematisches Wissen schaffen können. Die Sprache – also die serielle Verkettung von Symbolen (Zeichen, deren Bedeutung man ihnen nicht ansieht) – erkannten wir dabei als das kognitive Werkzeug, mit dessen Hilfe es dem Homo sapiens gelang, kognitiv „evolutionäre Gebirge zu überwinden“ und so seinen Mesokosmos zu verlassen. Den uns naturgeschichtlich gegebenen 3-dimensionalen Raum, in dem unsere Phylogenese verläuft, können wir selbstverständlich nicht verlassen.

Wir erinnern an die Strukturen und die Arbeitsweise unseres Gedächtnisses beim Wissenserwerb und Problemlösen und daran, dass alle höheren kognitiven Leistungen und nicht nur abstrakte Mathematik in psychosozialen Prozessen erzeugte, akkumulierte und tradierte Konstrukte sind. Für Details verweisen wir auf 2.4, 3.3.4 und das 4. Kapitel.

Die Mathematikdidaktik könnte mithilfe dieser Befunde und Einsichten vermitteln, wie mathematisches Wissen entsteht, eine aus naturgeschichtlicher Sicht verfasste Begriffsexplikation der Mathematik transportieren, diese mit anderen Begriffsexplikationen konstrastieren (s. 2. Kapitel) und dabei die Stellung und Bedeutung der Mathematik im Gefüge der Wissenschaften erörtern. Eine solche, dem naturgeschichtlichen Ansatz verpflichtete *Evolutionäre Mathematikdidaktik* würde Lernenden vermitteln, dass sogar ihre mathematischen Gedanken ein Stück Natur sind, die sie zur Verhaltenssteuerung in ihrer Umwelt und damit zur Veränderung ihrer Umwelt einsetzen können. Die Lernenden könnten, ihre Arbeit reflektierend, Einblicke in die Funktionsweise ihres Denkens gewinnen und so zu einer vertieften Selbstbewusstheit gelangen, die ihrerseits neue Anregungen auslösen könnte. Für einen ausgewogenen und reflektierten Unterricht, der gleichermaßen mathematisches Orientierungswissen wie mathematisches Fachwissen, mathematisches Können und den Nutzen der Mathematik zur kognitiven Strukturierung und Modellierung der Welt vermitteln will, ist die naturgeschichtliche Sicht eine bereichernde Möglichkeit. Würde eine naturgeschichtliche Aufarbeitung der Mathematikgeschichte vorliegen, würden wir die unser Lernen steuernden anthropologischen Invarianten besser kennen und gäbe es mehr Versuche, vorliegende Kenntnisse von der Informationsverarbeitung in unserem Gehirn für den Unterricht zu nutzen, dann gäbe es zu einer Evolutionären Mathematikdidaktik wohl mehr zu sagen als heute. Unsere Konstruktion des 4-dimensionalen Würfels zeigt beispielhaft, wie der Homo sapiens „evolutionäre Gebirge kognitiv überwinden“ und so seinen Mesokosmos verlassen kann. Vermutlich lassen sich Lernprozesse noch optimieren. Nicht zu erwarten steht aber, dass Lernende auf Grund einer Evolutionären Mathematikdidaktik mathematische Begriffe verstehen, die ihnen ohne sie unzugänglich geblieben wären. Erinnert sei an die im 4. Kapitel referierte Erfahrung des Autors, dass seine Schüler die naturgeschichtliche Sicht auf die Mathematik interessant fanden und sich sehr motiviert mit den beschriebenen Konstruktionen befassten. Wenn es wahr ist, dass sich die Bindung des Mathematiklernens an den naturgeschichtlichen Kontext günstig auf die Motivlage und die Motivstärke der Lernenden auswirkt, dann läge auch darin eine Chance für die Mathematikdidaktik.

(2) Anhand unseres historischen Überblicks zum Mathematikunterricht lassen sich einige Invarianten erkennen, die nicht nur für die mathematische Bildung spezifisch und plausibel sind:
Schon früh in der Geschichte wurde bemerkt, dass Bildung ein Faktor ist, der für den gesellschaftlichen Aufstieg und die Sicherung von Macht bzw. Privilegien wichtig ist. Deswegen investieren wissende Eltern in die Bildung ihrer Kinder. Elterninvestment ist – evolutionär betrachtet – ein biologisch angelegtes und deswegen robustes (kaum zu verhinderndes) Verhalten. Eine dem Elterninvestment (und anderen vitalen Interessen) einflussreicher Gruppen von Staat und Gesellschaft widersprechende oder ökonomischen Entwicklungen gegenüber dysfunktionale Bildungspolitik, lässt sich, wenn sie durchgesetzt werden konnte, kaum lange aufrecht er-

halten. Bildungspolitik bewirkt Selektionsprozesse, sie sind funktional, solange sie das Überleben der Population wahrscheinlich machen. (Auch das Konzept der allgemeinbildenden Schule ist – oder wirkt als – ein Selektionsmechanismus: Eine möglichst große Anzahl intellektuell fähiger junger Menschen soll rekrutiert werden, um der Population möglichst keine zukünftigen Leistungsträger vor zu enthalten.) Der interessanteste Fall liegt fast immer vor: nämlich eine sich mit ihrer Umwelt verändernde Population, für die sich auch die Frage der Funktionalität bzw. Dysfunktionalität von Bildung fortwährend neu stellt.
Wir richten unsere Aufmerksamkeit beispielsweise auf moderne Industriegesellschaften: Hier gilt, dass es in naturwissenschaftlichen oder technischen Berufen nur noch systematisch ausgebildeten Menschen nach aufwändigen systematischen wissenschaftlichen Forschungsarbeiten in Teams möglich ist, innovativ zu werden. Funktionale Bildung scheint hier in der Kopplung von kognitiver und sozialer Kompetenz mit ökonomischer und technischer Anschlussfähigkeit zu bestehen. Wissenschaft und Bildung erfassen und kultivieren immer weitere Gebiete unseres Kosmos und lösen technologische Entwicklungen aus, die schließlich auf unser soziales Gefüge zurückwirken. Für derartige Überlegungen ist unser naturgeschichtlicher Ansatz mit seinen Emergenzebenen und Wechselwirkungen ein Rahmen, indem z.B. auch Bildungsreformen hinsichtlich ihrer Funktionalität umfassend reflektiert werden können. Gelungene Bildungsreformen sind gesellschaftlich funktional, wie dementsprechende Wirkungen zeigen. Demgegenüber erscheinen dysfunktionale Bildungsreformen historisch nur als Moden oder Ideologien.
Eine aus naturgeschichtlicher Sicht verfasste Geschichte des mathematischen Unterrichts kann die vorliegende Arbeit nicht leisten. Aber wir führen hier einige den Mathematikunterricht betreffende Einsichten an, die – so glauben wir – gerade in ihrer Gesamtheit mithilfe des naturgeschichtlichen Ansatzes umfassend erklärt werden könnten:
Zur Charakterisierung des Mathematikunterrichts aus bildungsgeschichtlicher Sicht sei hier zwischen (a) psychologischen, (b) sozialen, (c) mathematisch inhaltlichen Gesichtspunkten und (d) Arbeitshilfsmitteln unterschieden. Zu (a) zählen wir z.B. kogitions- und motivationspsychologische Gesichtspunkte, die wir schon in (1) angesprochen und mit der naturgeschichtlichen Sicht verknüpft haben. Zu (b) zählen wir Sozialformen des

Lernens, unter denen in der Geschichte des Mathematikunterrichts lange Zeit der Frontalunterricht vorherrschte, bis man zu vielen anderen Varianten eines lehrerzentrierten oder schülerzentrierten Unterrichts fand. Mit diesen Sozialformen – so vermuten wir – erzielen Lehrkräfte in erster Linie eine soziale Ordnung, die effizientes Lernen in ihrem Unterricht erst möglicht macht, und inwieweit mit ihnen schon soziale Kompetenzen anlegt werden, die später z.B. im Beruf funktional werden könnten, ist noch zu erweisen. Bemerkenswert ist die Tatsache, wie gering der Zugewinn an unterrichtsmethodischen Einsichten über lange Zeit blieb (vgl. 5.4.1), obwohl schon einige tausend Jahre lang Mathematik unterrichtet worden ist. Es scheint so zu sein, dass Lehrfahrung allein nicht ausreichend ist, um die Gesetze des Lernens mit ihren Nebenbedingungen zu erkennen, und ihr angelegtes Brutpflegeverhalten macht auch Eltern nicht automatisch zu guten Lehrern. Zu (c) zählen wir die fachmathematischen Begriffsstrukturen einschließlich der Operatoren. Diese Strukturen unterliegen dem fachdisziplinären zeitlichen Wandel. Für den Unterricht ausgewählt und in Lehrplänen kodifiziert werden mathematische Inhalte (die Vorgaben betreffen meist auch die Art der Darstellung) im Wesentlichen nach Gesichtspunkten der unterrichtlichen Möglichkeiten, der Tradition und dem prognostizierten Nutzen für die Lernenden und die Gesellschaft. Unser historischer Überblick zeigt deutlich, dass eine bestimmte Gewichtung und Interpretation vor allem der Gesichtspunkte Tradition und Nutzen für die Lernenden und die Gesellschaft einen funktionalen bis dysfunktionalen Mathematikunterricht hervorbringen können. Funktional würde man einen Mathematikunterricht nennen, wenn er viele Lernende an den ökonomischen und technischen Wandel anschlussfähig macht. Ein funktionaler Mathematikunterricht muss kein „guter“ sein, wenn man einen Mathematikunterricht „gut“ heißen möchte, falls Lernende die fachmathematischen Begriffsstrukturen eines besonderen Gebiets in ihren Gedächtnissen effizient strukturiert haben und damit schnell schwierige Probleme lösen können. Man kann pointieren, dass ein schlechter Mathematikunterricht (der den Schülern z.B. nur Verfahren unproblematisiert anhand von Beispielen aus der Praxis vermittelt) funktional und demgegenüber ein guter Mathematikunterricht (der den Schülern z.B. auch die begrifflichen und beweistheoretischen Details eines Gebiets vermittelt) dysfunktional sein kann (vgl. 5.4.1). Optimal ist selbstverständlich ein guter und funktionaler Mathematikunterricht. Reformierter Mathematikunterricht ist also zunächst einmal nur anders, vielleicht moderner, Trends angepasster oder nachlaufend, und erst die Zukunft wird zeigen, ob die Reform die Funktionalität des Unterrichts erhöht. Noch deutlicher wird der Unterschied von gutem und funktionalem Mathematikunterricht, nachdem man auch die unter (d) angeführten Arbeitsmittel in die Überlegungen einbezieht. Der Trend vom Rechenstab über den Taschenrechner zum Computeralgebrasystem folgt einem realen technologischen und informationsverarbeitenden Fortschritt und bewirkt nicht nur am Arbeitsplatz einen sozialen Wandel. Eine Reform des Mathematikunterrichts, die in erster Linie funktional sein will, wird deswegen bevorzugt versuchen, an die von technologischen Entwicklungen ausgelösten sozialen Veränderungen anschlussfähig zu bleiben. Man muss nicht gleich alles und jedes anschließen, aber mit einem lokalen Abriss darf nicht die Anschlussfähigkeit insgesamt verloren gehen. Die zeitintensive Förderung der Anschlussfähigkeit an Trends wie informationstechnologische Entwicklungen kostet Lernzeit und Lernenergie. Der funktionalitätsorientierte Mathematikunterricht wird schlechter, wenn nur ein unverstandenes technisches System unverstandene mathematische Strukturen korrekt bearbeitet, ein kognitiver Aufbau dieser Strukturen also zu kurz kommt. Wird der Mathematikunterricht allerdings zu schlecht, dann wird er deswegen dysfunktional. Es sei hier angemerkt, dass jede Bildungsreform auch den (Partei-, Gewerkschafts-, Schul-, Hochschul- etc.) Karrieren ihrer Repräsentanten dient, und zwar bevor sie sich bewähren kann.

Wir glauben, dass unsere naturgeschichtliche Sicht zumindest keinen systemischen Aspekt der komplexen Bildungsdynamik von Anfang an ausnimmt. Viele Fragen zum Mathematikunterricht wird z.B. die herkömmliche Bildungs- bzw. Unterrichtsforschung beantworten können. Wenn aber Problemstellungen zu bearbeiten sind, die Fernbezüge – z.B. auf die biologische Anthropologie, die Evolutionspsychologie oder auf die unbelebte Emergenzebene – in sich tragen, dann bieten sich evolutionspädagogische Modellierungen oder Modellierungen mithilfe unseres naturgeschichtlichen Ansatzes an. Für evolutionäre Bezugswissenschaften hat sich die Mathematikdidaktik bis heute noch nicht geöffnet, eine Evolutionäre Mathematikdidaktik ist ein Desiderat.

Literatur

ABOITIZ, F./MONTIEL, J. (2007): Origin and Evolution of the Vertebrate Telencephalon, with Special Reference to the Mammalian Neocortex. Heidelberg a.e.: Springer. Series: Advances in Anatomy, Embryology and Cell Biology, 193.

ANDERSON, J.R. (1996): Kognitive Psychologie. 2. Auflage Heidelberg u.a.: Spektrum Akademischer Verlag.

ASANGER, R./WENNINGER, G. (Hrsg.) (1983): Handwörterbuch der Psychologie. Weinheim u.a.: Beltz.

BECKER, O. (1964): Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. 2. Auflage Freiburg u.a.: Alber.

BEESE, W. (1987): Die Herausbildung der Molekulargenetik. In: Guntau, M./ Laitko, H. (Hrsg.): Der Ursprung der modernen Wissenschaften. Studien zur Entstehung wissenschaftlicher Disziplinen. Berlin (DDR): Akademie-Verlag. S. 200-212.

BENSE, M./WALTHER, E. (Hrsg.) (1973): Wörterbuch der Semiotik. Köln: Kiepenheuer & Witsch.

BIALAS, V. (1990): Allgemeine Wissenschaftsgeschichte. Philosophische Orientierungen. Wien u.a.: Böhlau. Reihe: Grössing, H. (Hrsg.): Perspektiven der Wissenschaftsgeschichte, Bd. 2.

BIRBAUMER, N./SCHMIDT, R.F. (1996): Biologische Psychologie. 3. Auflage Heidelberg u.a.: Springer.

BOCK, G.R./CARDEW, G. (eds.) (2000): Evolutionary Developmental Biology of the Cerebral Cortex. New York a.e.: John Wiley & Sons. Novartis Foundation Symposium, 228.

BOYSEN, S.T./BERNTSON, G.G. (1990): The development of numerical skills in the chimpanzee (Pan troglodytes). In: Parker, S.T./Gibson, K.R. (Eds.): „Language“ and intelligence in monkeys and apes. Comparative developmental perspectives. 435-450. Cambridge a.e.: Cambridge Univ. Press.

Boysen, S.T./Berntson, G.G./Hannan, M.B./Cacioppo, J.T. (1996): Quantity-Based Interference and Symbolic Representations in Chimpanzees (Pan troglodytes). Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, Vol. 22, No. 1, 76-86.

Boysen, S.T./Capaldi, E.J. (eds.) (1993): The Development of Numerical Competence: Animal and Human Models. Hillsdale, New Jersey a.e.: Erlbaum.

Brandis, C. (2005): Stammbäume der Technik. Einführung in die Systematik und Geschichte technischer Innovationen. Bremen: MontAurum

Brockhaus (2006): Brockhaus Enzyklopädie in 30 Bänden. 21. Auflage Leipzig u.a.: F.A. Brockhaus.

Brunner, H. (1957): Altägyptische Erziehung. Wiesbaden: Otto Harrassowitz.

Burda, H./Hilken, G./Zrzavý, J. (2008): Systematische Zoologie. Stuttgart: Ulmer, UTB.

Burscheid, H.J. (1985): Eine Schulenbildung unter den Gymnasialdidaktikern des ausgehenden 19. Jahrhunderts. In: Steiner, H.-G./Winter, H. (Hrsg.): Mathematikdidaktik – Bildungsgeschichte – Wissenschaftsgeschichte. Köln: Aulis Verlag Deubner. S. 123-135. Reihe: IDM, Bd. 12 (Institut für Didaktik der Mathematik, Bielefeld).

Burscheid, H.J. (2003): Zur Entwicklung der Disziplin Mathematikdidaktik in den alten Bundesländern. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) 2003 Vol. 35 (4), S. 146-152.

Butler, A.B./Hodos, W. (2005): Comparative Vertebrate Neuroanatomy. Evolution and Adaptation. 2. Edition Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Cantor, M. (1900): Vorlesungen über Geschichte der Mathematik Bd. II. 2. Auflage Leipzig: Teubner.

Changeux, J.-P./Connes, A. (1992): Gedankenmaterie. Berlin u.a.: Springer.

Claus, V. (2003): In: (Grosche/Zeidler/Ziegler/Ziegler 2003), Kap. 8.3.

Connes, A. (1994): Noncommutative Geometry. London a.e.: Academic Press.

Courant, R./Robbins, H. (2001): Was ist Mathematik? 5. Auflage Berlin u.a.: Springer.

Crawford, C./Krebs, D.L. (eds.) (1998): Handbook of Evolutionary Psychology. Ideas, Issues, and Applications. Mahwah N.J. a.e.: Erlbaum Associates.

DAMEROW, P./LEFÈVRE, W. (1998): Wissenssysteme im geschichtlichen Wandel. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 4: S. 76-113.

DEHAENE, S. (1999): Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel u.a.: Birkhäuser.

DELIUS, J.D./SIEMANN, M./EMMERTON J./XIA L. (2001): Cognitions of Birds as Products of Evolved Brains. In: (Roth/Wullimann 2001, chap. 15: p. 451-490): .

DEMETRIOU, A. (2006): Neo-Piagetsche Theorien der kognitiven Entwicklung. In: (Schneider/Wilkening 2006), Kap. 4: S. 191-263.

DEVLIN, K. (2001): Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können. Stuttgart: Klett-Cotta.

DIEUDONNÉ, J. (Hrsg.) (1985): Geschichte der Mathematik 1700-1900. Ein Abriß. Braunschweig u.a.: Vieweg.

DÖRNER, D.(1976): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart u.a.: Kohlhammer. Reihe: Herrmann, T.H./Tack, W.H./Weinert, F.E. (Hrsg.): Kohlhammer Standards Psychologie. Teilgebiet: Denkpsychologie. Basisbücher und Studientexte.

DÖRNER, D. (1995): Problemlösen und Gedächtnis. In: Dörner, D./van der Meer, E. (Hrsg.): Das Gedächtnis. Probleme – Trends – Perspektiven. Göttingen u.a.: Hogrefe. S. 295-320.

DÖRNER, D. (2006): Sprache und Denken. In: (Funke 2006), Kap. 10: S. 619-646.

DUDEN, BD. 7 (2007): Duden. Das Herkunftswörterbuch. Etymologie der deutschen Sprache. 4. Auflage Mannheim u.a.: Dudenverlag. Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus. Reihe: Wermke,M./Kunkel-Razum, K./Scholze-Stubenrecht, W. (Hrsg.): Der Duden in zwölf Bänden. Das Standardwerk zur deutschen Sprache, Bd. 7.

EBBINGHAUS, H.-D./FLUM, J./THOMAS, W. (1992): Einführung in die mathematische Logik. 3. Auflage Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut.

EBELING, W./ENGEL A./FEISTEL R. (1990): Physik der Evolutionsprozesse. Berlin (DDR): Akademie-Verlag.

EBELING, W./FREUND, J./SCHWEITZER, F. (1998): Komplexe Strukturen: Entropie und Information. Leipzig u.a.: Teubner.

Engelking, R. (1995): Theory of Dimensions. Finit and Infinite. Series: Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 10. Lemgo: Heldermann.

Erdfelder, E./Mausfeld, R./ Meiser, T./Rudinger, G. (Hrsg.) (1996): Handbuch Quantitative Methoden. Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Ewert, J.-P. (1998): Neurobiologie des Verhaltens. Kurzgefasstes Lehrbuch für Psychologen, Mediziner und Biologen. Bern u.a.: Huber.

Fiedler, K./Plessner, H. (2006): Induktives Schließen: Umgang mit Wahrscheinlichkeiten. In: (Funke 2006), Kap. 4: S. 265-328.

Fischbein, E. (1987): Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach. Dordrecht a.e.: D. Reidel. Series: Bishop, A.J./et.al. (Eds.): Mathematics Education Library.

Fischer, L./Wiswede, G. (1997): Grundlagen der Sozialpsychologie. München u.a.: Oldenbourg.

Funke, J. (Hrsg.) (2006): Denken und Problemlösen. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/II/Bd. 8.

Geiger, G. (1990): Evolutionary Instability. Logical and Material Aspects of a Unified Theory of Biosocial Evolution. Berlin a.e.: Springer.

Gigerenzer, G./Murray D.J. (1987): Cognition as Intuitive Statistics. Hillsdale, New Jersey a.e.: Erlbaum.

Gigerenzer, G./Gaissmaier, W. (2006): Denken und Urteilen unter Unsicherheit: Kognitive Heuristiken. In: (Funke 2006), Kap. 5: S. 329-374.

Gnedenko, B.W. (1991): Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. (Orig. russ. 1988) Reihe: Mathematische Lehrbücher und Monographien. I. Abteilung (Mathematische Lehrbücher): Band 39. Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik, Berlin (Hrsg.). Berlin (DDR): Akademie Verlag.

Greene, H.W. (1994): Homology and Behavioral Repertoires. In: Hall, B.K. (Ed.): Homology. The Hierarchical Basis of Comparative Biology. Chap. 11: p. 369-391. San Diego, California (US): Academic Press.

Grosche, G./Zeidler, E./Ziegler, D./Ziegler, V. (Hrsg.) (2003): Teubner Taschenbuch der Mathematik, Teil II. 8. Auflage Wiesbaden: Teubner/GWV Fachverlage.

Günther, S. (1887): Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525. Berlin: A. Hoffmann & Comp. Reihe: Kehrbach,

K. (Hrsg.): Monumenta Germaniae Paedagogica. Schulordnungen, Schulbücher und pädagogische Miscellaneen aus den Landen deutscher Zunge, Bd. III.

Guntau, M./Laitko, H. (1987): Entstehung und Wesen wissenschaftlicher Disziplinen. In: Guntau, M./Laitko, H. (Hrsg.): Der Ursprung der modernen Wissenschaften. Studien zur Entstehung wissenschaftlicher Disziplinen. Berlin (DDR): Akademie-Verlag, Kap. 1: S. 17-89.

Haas, G. (1980): Gödel. In: (Mittelstraß 1980), s.v.: Gödel.

Herrmann, T. (Hrsg.) (2003): Sprachproduktion. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/III/Bd. 1.

Hiebsch, H. (1977): Wissenschaftspsychologie. Psychologische Fragen der Wissenschaftsorganisation. Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschften.

Hilbert, D./Bernays, P. (1968 u. 1970): Die Grundlagen der Mathematik Bd. I u. II. 2. Auflage Bd. I (1968), Bd. II (1970) Heidelberg: Springer.

Hoffmann, J./Kintsch, W. (Hrsg.) (1996): Lernen. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/II/Bd. 7.

Huylebrouck, D. (2006): Afrika, die Wiege der Mathematik. In: (Pöppe 2006).

Ifrah, G. (1991): Universalgeschichte der Zahlen. 2. Auflage der Sonderausgabe, Frankfurt u.a.: Campus.

Inhetveen, H. (1976): Die Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts zwischen 1890 und 1914. Eine sozioökonomische Analyse. Bad Heilbrunn/Obb.: Verlag Julius Klinkhardt. Reihe: Sünkel, W. (Hrsg.): Erlanger Pädagogische Studien.

Irle, E./Markowitsch, H.J. (Hrsg.) (1998): Vergleichende Psychobiologie. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/I/Bd. 7.

Irrgang, B. (1993): Lehrbuch der Evolutionären Erkenntnistheorie. Evolution, Selbstorganisation, Kognition. München u.a.: Reinhardt.

Janich, P. (1989): Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional? München: Beck.

Jetschke, G. (1989): Mathematik der Selbstorganisation. Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in

Physik, Chemie und Biologie. Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Joseph, R. (1994): Limbic System. In: Ramachandran, V.S. (Ed.): Encyclopedia of Human Behaviour. Vol. 3: p. 67. San Diego, California (US): Academic Press.

Jungermann, H. (1976): Rationale Entscheidungen. Am Beispiel Wahrscheinlichkeits-Lernen: Theoretische Überlegungen zu den entscheidungstheoretischen Konzepten „Rationalität“ und „subjektive Wahrscheinlichkeit“ und experimentelle Überprüfung daraus abgeleiteter Annahmen. Bern u.a.: Huber.

Kämpfe, L./Kittel, R./Klapperstück, J. (1993): Leitfaden der Anatomie der Wirbeltiere. 6. Auflage Jena u.a.: Fischer.

Karnath, H.-O./Thier, P. (Hrsg.) (2006): Neuropsychologie. 2. Auflage Heidelberg: Springer.

Klaus, G./Buhr, M. (Hrsg.) (1970): Philosophisches Wörterbuch Bd. 1 u. 2. Berlin (DDR): das europäische Buch (Lizenzausgabe für die Bundesrepublik Deutschland und Westberlin). (7. Auflage, Copyright 1964 by VEB Verlag Enzyklopädie Leipzig (DDR).)

Klix, F. (1965a): Einige Ergebnisse kybernetischer Forschungen in der Pschologie. In: Psychologie als gesellschaftliche Produktivkraft. Bericht über den 1. Kongress der Gesellschaft für Psychologie in der DDR. Berlin.

Klix, F. (1965b): Remarks on relationships between the algorithmic and the stochastic approach in mapping human thought processes. Coll. Int. du Centre Nat. de la Rech. Sci. Paris.

Klix, F. (1968): Ergebnisse und Perspektiven der Anwendung des kybernetischen Konzepts in der Psychologie. Biokybernetik-Tagung Leipzig 1967, Bd. 2. Leipzig.

Klix, F./Sydow, H./Wysotzki, F. (Hrsg.) (1974): Erkennungs- und Klassifizierungsprozesse. Reihe: Kybernetik-Forschung Heft 4. Zentralinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse der Akademie der Wissenschaften der DDR. Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Klix, F. (1976a): Information und Verhalten. Kybernetische Aspekte der organismischen Informationsverarbeitung. Einführung in naturwissenschaftliche Grundlagen der Allgemeinen Psychologie. 3. Auflage Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Lizenzausgabe: Bern u.a.: Huber). (1. Auflage Berlin (DDR): VEB (1971)).

Klix, F. (Hrsg.) (1976b): Psychologische Beiträge zur Analyse kognitiver Prozesse. Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. (Lizensausgabe: München: Kindler).

Klix, F. (1976c): Über Grundstrukturen und Funktionsprinzipien kognitiver Prozesse (Aspekte eines Zugangs zu Analyse und Synthese geistiger Leistungen). In: (Klix 1976b), S. 9-56.

Klix, F. (1976d): Strukturelle und funktionelle Komponenten des menschlichen Gedächtnisses. In: (Klix 1976b), S. 57-98.

Klix, F. (1976e): Über die notwendige und mögliche Ausdehnung von Begriffsanalysen auf komplexe Klassifizierungsleistungen. In: (Klix 1976b), S. 157-170.

Klix, F./Kukla, F./Klein, R. (1976f): Über die Unterscheidbarkeit von Klassen semantischer Relationen im menschlichen Gedächtnis. In: (Klix 1976b), S. 302-314.

Klix, F. (1989): Über Emotion und Kognition in evolutionsgeschichtlicher Betrachtung und aktualgenetischer Prüfung. In: Roth, E. (Hrsg.): Denken und Fühlen. Aspekte kognitiv-emotionaler Wechselwirkung. S. 17-35. (Symposium „Kognitive und emotionale Evolution“ (Salzburg 1987.06.01-04). Reihe: Albert, D./Pawlik, K./Stapf, K.-H./Stroebe, W. (Hrsg.): Lehr- und Forschungstexte Psychologie, 32. Berlin u.a.: Springer.

Klix, F. (1992): Die Natur des Verstandes. Göttingen u.a.: Hogrefe.

Klix, F. (1993): Erwachendes Denken. Geistige Leistungen aus evolutionspsychologischer Sicht. Heidelberg u.a.: Spektrum Akademischer Verlag. (Erwachendes Denken. 1. Auflage (1980), 3. Auflage (1983) Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.)

Klix, F. (1995): Stabilität und Wandlungen in geistigen Dispositionen des Menschen. Berichte der Leibniz-Sozietät Bd. 1. Berlin.

Klix, F. (1996): Lernen und Denken. In: (Hoffmann/Kintsch 1996), Kap. 13: S. 529-582.

Klix, F. (1997): Gedächtnis und Denken in evolutionspsychologischer Sicht. In: Lühr, G./Lass, U. (Hrsg.): Erinnern und Behalten. Wege zur Erforschung des menschlichen Gedächtnisses. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, S. 4-38. Reihe: Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, in Verbindung mit der Wilhelm-Wundt-Gesellschaft Heidelberg. Mathematisch-Physikalische Klasse, Dritte Folge, Nr. 47.

Klix, F./Spada, H. (Hrsg.) (1998): Wissen. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/II/Bd. 6.

Klix, F./Spada, H. (1998a): Einführung. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 1: S. 1-14.

Klix, F. (1998b): Evolutionsbiologische Spuren in kognitiven Strukturbildungen und Leistungen des Menschen. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 3: S. 43-76.

Klix, F. (1998c): Begriffliches Wissen – episodisches Wissen. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 6: S. 167-211.

Klix, F. (1998d): Zur Evolution der menschlichen Intelligenz. In: Roth, E. (Hrsg.): Intelligenz. Grundlagen und neuere Forschung. Kap. 6: S. 101-143. Stuttgart: Kohlhammer.

Klix, F. (1998e): Evolutionsschübe prägten Lernleistungen, Denken und Sprache. 41. Kongress der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Wolfgang-Köhler-Gedächtnis-Vorlesung.

Klix, F./Lanius, K. (1999): Wege und Irrwege der Menschenartigen. In: Hörtz, H./Alexander, K.F. (Hrsg.) (2000): Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät, Bd. 33, Jahrg. 1999, Heft 6, S. 5-33. Berlin: Leibniz-Sozietät e.V.

Kluwe, R.(1979): Wissen und Denken. Modelle, empirische Befunde und Perspektiven für den Unterricht. Stuttgart u.a.: Kohlhammer. Reihe: Herrmann, T.H./Tack, W.H./Weinert, F.E. (Hrsg.): Kohlhammer Standards Psychologie. Teilgebiet: Pädagogische Psychologie. Basisbücher und Studientexte.

Knauff, M. (2006): Deduktion und logisches Denken. In: (Funke 2006), Kap. 3: S. 167-264.

Köck, M. (1994): Anregungen von der Evolutionären Erkenntnistheorie für die Didaktik der Mathematik – Ein Unterrichtsversuch. (II. Staatsarbeit) Hamburg: unveröffentlicht.

Köck, M. (2008): Evolutionäre Spuren in der Mathematik jenseits unseres Anschauungsraumes. Möglichkeiten für die Mathematikdidaktik und Evolutionäre Pädagogik. In: (Kurig/Treml 2008), S. 134-156.

Konopka, M. (1996): Das psychische System in der Systemtheorie Niklas Luhmanns. Frankfurt a.M. u.a.: Lang. Reihe: Europäische Hochschulschriften: Reihe 22, Soziologie, 287.

Krebs, N. (2008): Evolutionäre Ursprünge des mathematischen Denkens. (Diss.) Giessen: Justus-Liebig-Universität.

Kreisel-Korz, U. (1998): Affen und Sprache. Studien zur Biolinguistik. Frankfurt a.M. u.a.: Peter Lang.

Krohn, W./Küppers, G. (1989): Die Selbstorganisation der Wissenschaft. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Kurig, J./Treml, A.K. (Hrsg.)(2008): Neue Pädagogik und alte Gehirne? Erziehung und Bildung in evolutionstheoretischer Sicht. Reihe: Scheunpflug, A./Treml, A.K. (Hrsg.): Beiträge zur Evolutionären Pädagogik – Interdisziplinäre Bildungsforschung in evolutionstheoretischer Perspektive, Bd. 2. Berlin (auch: Münster): Lit.

Lakoff, G./Núñez R.E. (2000): Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York (USA): Basic Books.

Lecointre, G./Le Guyader, H. (2006): Biosystematik. Berlin u.a.: Springer.

Lenné, H. (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Aus dem Nachlaß hrsg. von Walter Jung – im Verbindung mit der Arbeitsgruppe für Curriculum-Studien. Stuttgart: Ernst Klett. Reihe: Institut für Bildungsforschung in der Max-Planck-Gesellschaft (Hrsg.): Texte und Dokumente zur Bildungsforschung.

Liebau, E./Zirfas, J. (2006): Erklären und Verstehen: Zum methodologischen Streit zwischen Bio- und Kulturwissenschaft. In: (Z. f. E.-W. 9., B. 5 2006), S. 231-244.

Liedtke, M.H. (1972): Evolution und Erziehung. Ein Beitrag zur integrativen pädagogischen Anthropologie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. (Hamburg: Habil.-Schr. Univ. Hamburg 1971)

Liedtke, M.H. (Hrsg.) (1996): Kulturethologische Aspekte der Technikentwicklung. Reihe: Schriftenreihe der Forschungsgemeinschaft Wilhelminenberg: Matreier Gespräche. Graz: austria medien service.

Lorenzen, P. (1987): Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie. Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut.

Lüer, G. (Hrsg.) (1987): Allgemeine Experimentelle Psychologie. Eine Einführung in die methodischen Grundlagen mit praktischen Übungen für das Experimentelle Praktikum. Stuttgart: Fischer.

Mainzer, K. (1980): In: (Mittelstraß 1980), s.v.: Dimension.

Mainzer, K. (1984): Mathematik. In: (Mittelstraß 1984), s.v.: Mathematik.

Mandl, H./Spada, H. (Hrsg.) (1988): Wissenspsychologie. Weinheim u.a.: Psychologie Verlags Union.

Margulis, L./Sagan, D. (1996): Geheimnis und Ritual. Die Evolution der menschlichen Sexualität. München: DTV.

Markowitsch H.J./Welzer H. (2005): Das autobiographische Gedächtnis. Hirnorganische Grundlagen und biosoziale Entwicklung. Stuttgart: Klett-Cotta.

Matszuzawa, T. (1985): Use of Numbers by a Chimpanzee. In: Nature 315, p. 57-59.

Maturana, H.R./Varela F.J. (1987): Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Wurzeln des menschlichen Erkennens. Bern u.a.: Scherz, erschienen bei Goldmann.

Mesarović, M.D./Takahara, Y. (1989): Abstract Systems Theory. Berlin a.e.: Springer. Series: Lecture notes in control and information sciences, 116.

Mittelstrass, J. (Hrsg.)(1980-1996): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Bd. 1: A-G (1980), Bd. 2: H-O (1984), Bd. 3: P-So (1995), Bd. 4: Sp-Z (1996) Mannheim u.a.: Bibliographisches Institut.

Mittelstrass, J./Mainzer, K. (1995a): In: (Mittelstraß 1995), s.v.: Raum.

Mittelstrass, J. (1996a): In: (Mittelstraß 1996), s.v.: Wissenschaftsgeschichte.

Möbus, C./Schröder, O. (1998): Zur Modellierung des Wissenserwerbs als deduktive und induktive Wissensveränderung. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 13: S. 403-456.

Möhn, E. (1984): System und Phylogenie der Lebewesen. Bd. 1: Physikalische, chemische und biologische Evolution. Prokaryonta. Eukaryonta (bis Ctenophora). Stuttgart: E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (Nägele u. Obermiller).

Morel, J./Bauer, E./Meleghy, T./Niedenzu, H.-J./Preglau, M./ Staubmann, H. (1995): Soziologische Theorie. Abriß der Ansätze ihrer Hauptvertreter. 4. Auflage München u.a.: Oldenbourg.

Müller, R.A. (1990): Geschichte der Universität. Von der mittelalterlichen Universitas zur deutschen Hochschule. München: Callwey.

Nagata, J. (1965): Modern Dimension Theory. Series: Bruhn, N.G. de/Groot, J. de/Zaanen A.C. (Eds.): Bibliotheca Mathematica. A series of Monographs of

Pure and Applied Mathematics, Vol. VI. Groningen (NL): Noordhoff; Amsterdam (NL): North-Holland.

Nieder, A. (2006): Neurobiologische Grundlagen der Zahlenverarbeitung. In: (Karnath/Thier 2006), S. 391-399.

Nicolis, G./Prigogine, I. (1987): Die Erforschung des Komplexen. Auf dem Weg zu einem neuen Verständnis der Naturwissenschaften. München u.a.: Piper. Reihe: Nicolis, G./Prigogine, I. (Hrsg.): Die Beherrschung des Komplexen, Bd. 1.

Nipkow, K.E.(2002): Möglichkeiten und Grenzen eines evolutionären Paradigmas in der Erziehungswissenschaft. In: (Z. f. P. 48.-5. Sept./Okt. 2002), S. 670-689.

Oerter, R./Montada,L. (Hrsg.)(2002): Entwicklungspsychologie. 5. Auflage Weinheim u.a.: Beltz.

Oerter, R. (2008): Förderung in Kindergarten und Schule. Eine evolutionspädagogische Perspektive. In: (Kurig/Treml 2008), S. 157-179.

Oeser, E. (1976): Wissenschaft und Information. Systematische Grundlagen einer Theorie der Wissenschaftsentwicklung. Band 1: Wissenschaftstheorie und empirische Wissenschaftsforschung. München u.a.: Oldenbourg.

Oeser, E. (1988): Das Abenteuer der kollektiven Vernunft. Evolution und Involution der Wissenschaft. Hamburg u.a.: Parey.

Oeser, E. (1996): Die EE als Metatheorie. In: (Riedl/Delpos 1996), S. 289-293.

Opwis, K. (1992): Kognitive Modellierung. Zur Verwendung wissensbasierter Systeme in der psychologischen Theoriebildung. Göttingen u.a.: Huber.

Opwis, K. (1998): Reflexionen über eigenes und fremdes Wissen. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 12: S. 369-401.

Pedersen, G.K. (1979): C^*-Algebras And Their Automorphism Groups. London a.e.: Academic Press.

Piaget, J. (Hrsg.) (1975): J. Piaget: Gesammelte Werke. Bde. I-X. Stuttgart: Klett.

Piaget, J. (1992): Biologie und Erkenntnis. Über die Beziehungen zwischen organischen Regulationen und kognitiven Prozessen. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch. (Orig. franz. (1967): Biologie et connaissance. Editions Gallimard.)

Pichler, F. (1975): Mathematische Systemtheorie. Dynamische Konstruktionen. Berlin u.a.: de Gruyter.

PÖPPE, C. (Redakteur) (2006): Ethnomathematik. Reihe: Spektrum der Wissenschaft – Spezial, Heft 2/2006. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft.

PÓLYA, G. (1969): Mathematk und plausibles Schließen, Bd. 1.: Induktion und Alalogie in der Mathematik. 2. Auflage Basel u.a.: Birkhäuer. Reihe: Wissenschaft und Kultur, Bd. 14.

PÓLYA, G. (1975): Mathematk und plausibles Schließen, Bd. 2.: Typen und Strukturen plausibler Folgerung. 2. Auflage Basel u.a.: Birkhäuer. Reihe: Wissenschaft und Kultur, Bd. 15.

PÓLYA, G. (1980): Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme. 3. Auflage Bern u.a.: Francke. Reihe: Sammlung Dalp, Bd. 36.

PÓLYA, G. (1983): Vom Lösen mathematischer Aufgaben: Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. 2. Auflage Basel u.a.: Birkhäuser. Reihe: Wissenschaft und Kultur, Bd. 21.

POSER, H. (1994): Mathematik. In: Seiffert, H./Radnitzky, G. (Hrsg.): Handlexikon zur Wissenschaftstheorie. 2. Auflage München: Deutscher Taschenbuch Verlag. S. 206-215.

REASON, J. (1994): Menschliches Versagen. Psychologische Risikofaktoren und moderne Technologien. Berlin u.a.: Spektrum Akademischer Verlag.

RAO, M.M. (1981): Foundations of Stochastic Analysis. London a.e.: Academic Press.

RATH, M. (1994): Der Psychologismusstreit in der deutschen Philosophie. Freiburg u.a.: Alber.

RESNIKOFF, H.L./WELLS, R.O. (JR.) (1983): Mathematik im Wandel der Kulturen. Braunschweig u.a.: Vieweg.

RESTIVO, S. (1992): Mathematics in Society and History. Sociological Inquiries Dordrecht a.e.: Kluwer Academic Publishers. Series: Bunge, M. (Ed.): Episteme. A Series in the Foundational, Methodological, Philosophical, Psychological, Sociological, and Political Aspects of the Sciences, Pure and Applied, Vol. 20.

REUSSER, K. (1998): Denkstrukturen und Wissenserwerb in der Ontogenese. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 5: S. 115-166.

REUSSER, K. (2006): Jean Piagets Theorie der Entwicklung. In: (Schneider/Wilkening 2006), Kap. 3: S. 91-189.

RIEDL, R. (1975): Die Ordnung des Lebendigen. Systembedingungen der Evolution. Hamburg u.a.: Parey.

Riedl, R. (1980): Biologie der Erkenntnis. Die stammesgeschichtlichen Grundlagen der Vernunft. Hamburg u.a.: Parey.

Riedl, R. (1985): Die Spaltung des Weltbildes. Biologische Grundlagen des Erklärens und Verstehens. Hamburg u.a.: Parey.

Riedl, R. (1987): Begriff und Welt. Biologische Grundlagen des Erkennens und Begreifens. Hamburg u.a.: Parey.

Riedl, R. (1992): Wahrheit und Wahrscheinlichkeit. Biologische Grundlagen des Für-Wahr-Nehmens. Hamburg u.a.: Parey.

Riedl, R. (1994): Mit dem Kopf durch die Wand. Die biologischen Grenzen des Denkens. Stuttgart: Klett-Cotta.

Riedl, R./Delpos, M. (Hrsg.) (1996): Die Evolutionäre Erkenntnistheorie im Spiegel der Wissenschaften. Wien: WUV-Universitätsverlag.

Riedl, R. (2003): Riedls Kulturgeschichte der Evolutionstheorie. Die Helden, ihre Irrungen und Einsichten. Berlin u.a.: Springer.

Ritter, J./Gründer, K./Eisler, R./Bien, G. (Hrsg.) (1971-2007): Historisches Wörterbuch der Philosophie. Bd. 1: A-C (1971), Bd. 5: L-Mn (1980), Bd. 10: St-T (1998). Basel u.a.: Schwabe.

Roebers, C./Schneider, W. (2006): Die Entwicklung des autobiografischen Gedächtnisses und der Suggestibilität. In: (Schneider/Sodian 2006), Kap. 7: S. 327-375.

Rosenfeld, B.A. (1988): A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space. Series: Toomer, G.J. (Ed.): Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 12. Berlin a.e.: Springer.

Roth, G./Wullimann, M.F. (eds.) (2001): Brain Evolution and Cognition. New York a.e.: John Wiley & Sons, Heidelberg a.e.: Spektrum Akademischer Verlag.

Ruzavin, G.I. (1977): Die Natur der mathematischen Erkenntnis. Studien zur Methodologie der Mathematik. Berlin (DDR): Akademie-Verlag.

Sarnat, H.B./Netsky, M.G. (1974): Evolution of the Nervous System. New York a.e.: Oxford Univerity Press.

Scheunpflug, A. (2001): Evolutionäre Didaktik. Unterricht aus system- und evolutionstheoretischer Perspektive. Weinheim u.a.: Beltz. Reihe: Fölling-Albers, M./u.a. (Hrsg.): Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Bd. 18.

SCHMID, U. (2006): Computermodelle des Denkens und Problemlösens. In: (Funke 2006), Kap. 8: S. 483-547.

SCHNEIDER, W./WILKENING, F. (Hrsg.) (2006): Theorien, Modelle und Methoden der Entwicklungspsychologie. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/V/Bd. 1.

SCHNEIDER, W./SODIAN, B. (Hrsg.) (2006): Kognitive Entwicklung. Göttingen u.a.: Hogrefe. Reihe: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F.E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie C/V/Bd. 2.

SCHÖFTHALER, T. (1984): Menschenbilder, Weltkulturen. Was wir aus der Diskussion um die Ziele interkultureller Erziehung lernen können. In: Zeitschrift für internationale Bildungsforschung und Entwicklungspädagogik (ZEP) 3/1984, S. 4-9.

SCHOLZ, R.W. (1987): Cognitive Strategies in Stochstastic Thinking. Dordrecht: Reidel.

SCHUBRING, G. (1983): Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810-1870). Weinheim u.a.: Beltz. Reihe: Bielefelder Beiträge zur Ausbildungsforschung und Studienreform, Bd. 2.

SCHULZ, M. (2000): Todeskampf der Flachköpfe. In: Der Spiegel, Nr. 12/20.3.2000, S. 240-255.

SCHUSTER, H.G. (1994): Deterministisches Chaos. Eine Einführung. Weinheim u.a.: VCH Verlagsgesellschaft.

SCRIBA, C.J./SCHREIBER, P. (2001): 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen. Berlin u.a.: Springer.

SEEL, N.M. (1991): Weltwissen und mentale Modelle. Göttingen u.a.: Hogrefe.

SEIFFERT, H./RADNITZKY, G. (Hrsg.) (1994): Handlexikon zur Wissenschaftstheorie. 2. Auflage München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

SIEMANN, M./FERSEN, L. VON/DELIUS, J.D. (1998): Kognition bei Tieren. In: (Irle/Markowitsch 1998), Kap. 9: S. 695-738.

SIEWING, R. (Hrsg.) (1982): Evolution. Bedingungen – Resultate – Konsequenzen. 2. Auflage Stuttgart u.a.: Fischer.

SLOBODA, J.A./ROGERS D. (1987) (Hrsg.): Cognitive Processes in Mathematics. Series: Keele Cognition Seminars: 1. Oxford: Clarendon.

SMITH, J.M./SZATHMÁRY, E. (1996): Evolution. Prozesse, Mechanismen, Modelle. Heidelberg u.a.: Spektrum Akademischer Verlag.

SOMMERFELD, E. (1994): Kognitive Strukturen. Mathematisch-psychologische Elementaranalysen der Wissensstrukturierung und Informationsverarbeitung. Münster u.a.: Waxmann.

STEGMÜLLER, W. (1973): Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie. Band IV: Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit. Erster Halbband: Personelle Wahrscheinlichkeit und rationale Entscheidung. Zweiter Halbband: Statistisches Schließen, Statistische Begründung und Statistische Analyse. Berlin u.a.: Springer.

STOTZ, K. (1996): Wechselbezüge zwischen EE und Ethnologie. In: Riedl, R./Delpos, M. (Hrsg.): Die Evolutionäre Erkenntnistheorie im Spiegel der Wissenschaften. S. 110-127. Wien: WUV-Universitätsverlag.

STROBEL-EISELE, G. (1992): Schule und soziale Evolution. System- und evolutionstheoretische Untersuchungen zur Entstehung und Entwicklung der Schule. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

STRUIK, D.J. (1948): Stone Age Mathematics. In: Scientific American, 179 (December 1948), 44-49.

TAKAHASHI, S./TAKAHARA, Y. (1995): Logical Approach to Systems Theory. London a.e.: Springer. Series: Lecture notes in control and information sciences, 204.

TREML, A.K. (2000): Allgemeine Pädogogik. Grundlagen, Handlungsfelder und Perspektiven der Erziehung. Stuttgart: Kohlhammer.

TREML, A.K. (2004): Evolutionäre Pädogogik. Eine Einführung. Stuttgart: Kohlhammer.

TREML, A. K. (2008): Gibt es drei Welten? Über die ontologischen Voraussetzungen einer Evolutionären Pädagogik. In: (Kurig/Treml 2008), S. 190-212.

VAN DER MEER, E. (1995): Gedächtnis und Inferenzen. In: Dörner, D./van der Meer, E. (Hrsg.): Das Gedächtnis. Probleme – Trends – Perspektiven. Göttingen u.a.: Hogrefe. S. 341-380.

VAN DER MEER, E. (1998): Inferenzen in Wissenskörpern. In: (Klix/Spada 1998), Kap. 7: S. 213-247.

VAN DER MEER, E./ KLIX, F. (2003): Die begriffliche Basis der Sprachproduktion. In: (Herrmann 2003), Kap. 14: S. 333-359.

Vollmer, G. (1978): Grundlagen einer projektiven Erkenntnistheorie. In: Hejl, P.M./Köck, W.K./Roth, G. (Hrsg.): Wahrnehmung und Kommunikation. S. 79-97. Frankfurt: Lang.

Vollmer, G. (1988a): Was können wir wissen? Band 1. Die Natur der Erkenntnis. 2. Aufl. Stuttgart: Hirzel (1. Aufl. 1985, 4. Aufg. 2008).

Vollmer, G. (1988b): Was können wir wissen? Band 2. Die Erkenntnis der Natur. 2. Aufl. Stuttgart: Hirzel (1. Aufl. 1986, 4. Aufg. 2008).

Vollmer, G. (1990): Evolutionäre Erkenntnistheorie. 5. Aufl. Stuttgart: Hirzel (1. Aufl. 1975, 8. Aufg. 2002).

Vollmer, G. (2003): Wieso können wir die Welt erkennen? Neue Beiträge zur Wissenschaftstheorie. Stuttgart: Hirzel.

Vollrath, H.-J. (Hrsg.) (1988): Hans-Georg Steiner. Das mathematische Denken und die Schulmathematik. Aufsätze zur Didaktik der Mathematik. Reihe: Artmann, B./Kirsch, A./Steiner, H.-G. (Hrsg.): Moderne Mathematik in elementarer Darstellung. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Wägele, J.-W. (2001): Grundlagen der Phylogenetischen Systematik. 2. Auflage, München: Verlag Dr. Friedrich Pfeil.

Wagner, G.P./Ackermann, G. (1987): Der Beitrag der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Begründung der Evolutionären Erkenntnistheorie. In: Riedl, R./Bonet, E.M. (Hrsg.): Entwicklung der Evolutionären Erkenntnistheorie, S. 113-124. Reihe: Flamm, D./Guttmann, G./Langer, G./Markl, P./Oeser, E./Reichel, H.-C./Riedl, R./Wuketits, F.M./(Lorenz, K) (Hrsg.): Wiener Studien zur Wissenschaftstheorie, Bd. 1. Ohne Ortsangabe: Österreichische Staatsdruckerei.

Waldmann, M.R. (1996): Wissengeleitetes Lernen. In: (Hoffmann/Kintsch 1996), Kap. 8: S. 321-353.

Weniger, G./Irle, E. (1998): Die Phylogenese des Menschen. In: (Irle/Markowitsch 1998), Kap. 2: S. 105-177.

Wilder, R.L. (1981): Mathematics as a Cultural System. Oxford: Pergamon Press. Series: Bunge, M. (Ed.): Foundations of Philosophy of Science and Technology Series.

Willke, H. (1991): Systemtheorie. Eine Einführung in die Grundprobleme in die Theorie sozialer Systeme. 3. Auflage Stuttgart u.a.: Fischer.

Willmes, K. (2006): Mathematische Leistungen und Akalkulien. In: (Karnath/Thier 2006), S. 400-422.

WINTER, M. (1984): Zur Geschichte des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen in Deutschland – Versuch einer Rekonstruktion des Verlaufs. In: Mannzmann, A. (Hrsg.): Geschichte der Unterrichtsfächer III. Biologie, Physik, Mathematik, Chemie, Haushaltslehre, Handarbeit. München: Kösel-Verlag. S. 103-132.

WOODRUFF, G./PREMACK, D. (1981): Primative mathematical concepts in the chimpanzee: proportionality and numerosity. In: Nature, Vol. 293, No. 5833: 568-570. London: Macmillan Journals.

WUSSING, H. (1979): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin (DDR): VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Reihe: Engel, W./Brehmer, S./ Schneider, M./Wußing, H. (Hrsg.): Mathematik für Lehrer, Bd. 13.

WUSSING, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise, Bd. 1: Von den Änfängen bis Leibniz und Newton. Berlin u.a.: Springer. Reihe: Alten, H.-W./Djafari Naini, A./Wesemüller-Kock, H. (Hrsg.): Vom Zählstein zum Computer.

ZEIDLER, E. (2003a): Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen. In: (Grosche/Zeidler/Ziegler/Ziegler 2003), Kap. 12, insbes. 12.6: S. 468-472.

ZEIDLER, E. (2003b): Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit. In: (Grosche/Zeidler/Ziegler/Ziegler 2003), Kap. 13: S. 481-529.

ZEITLER, H./NEIDHARDT, W. (1993): Fraktale und Chaos. Eine Einführung. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Z. F. E.-W. 9., B. 5 (2006): Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9. Jahrgang, Beiheft 5/2006. Scheunpflug, A./Wulf, C. (Hrsg.): Biowissenschaft und Erziehungswissenschaft.

Z. F. P. 48.-5. SEPT./OKT. (2002): Zeitschrift für Pädagogik, Jahrgang 48 – Heft 5, September/Oktober 2002. Thementeil: Evolutionäre Pädagogik. S. 649-740.

Abkürzungen

a.e.	im Literaturverzeichnis: and else where
BCD	„Bürde, Constraint und (Prä-)Disposition“ vgl. mit „Bürde, Kanalisation und Überdetermination“, s. 2.4.2.
BS-MS	Biogenetisch-Stationäre-Modellschema, s. 3.4.
3F-MS	3-Faktoren-Modellschema, s. 3.5.
EE, EE_1, EE_2	Evolutionäre Erkenntnistheorie, s. 2.4.3.
J	Jahre
MJ	Millionen Jahre
ML-MS	Multi-Layer-Modellschema, s. 3.3.5.
STE	Systemtheorie der Evolution, s. 2.4.3.
u.a.	im Literaturverzeichnis: und anderswo
W_k^n	s. 4.4.3.

Zusammenfassung

Fast alle Lehrer, ob sie an Universitäten unterrichten oder an Schulen, vertreten eine apriorische (nicht empirische) Sicht auf das mathematische Wissen (kurz: auf die Mathematik), meist sogar unausgesprochen, denn im Unterricht halten sie sich bevorzugt an „handfeste“ Begriffsstrukturen. Die apriorische Sicht kennt keine leibhaftigen Menschen, die mathematisches Wissen lernen oder schaffen, sondern nur idealisierte Mathematiker, die (definitionsgemäß) z.B. fehlerfrei arbeiten. Die herkömmliche – eine apriorische Sicht auf die Mathematik vertretende – Mathematikdidaktik untersucht, wie leibhaftige Lernende mit apriorischen Begriffsstrukturen der Mathematik umgehen.

Der Dualität von leibhaftigen Menschen und apriorischer Mathematik wird mit der Annahme, dass nicht nur der mathematisches Wissen lernende oder schaffende Mensch, sondern auch sein mathematisches Wissen Produkte einer umfassenden, empirischen Untersuchungen zugänglichen Evolution in Raum und Zeit sind, eine aposteriorische (empirische) Position gegenübergestellt und der Frage nachgegangen, wie die in dieser Evolution entstandenen

- unbelebten materiell-energetischen Strukturen (z.B. die 3-Dimensionalität des Raumes),
- biotischen Strukturen (z.B. in der Phylogenese auf dem Weg zum Homo sapiens erworbene Strukturen unseres Nervensystems und seine Grundfunktionen)

und

- psychosozialen Strukturen
  (z.B. Netzwerke von Begriffsstrukturen, die den Homo sapiens zur Veränderung seiner Umwelt befähigen)

bis heute die Herausbildung jener Begriffsstrukturen beeinflussen, die mathematisches Wissen genannt werden. Die aus der aposteriorischen Position gewonnene Sicht, gemäß der „Materie in ihrer Evolution in Raum und Zeit Wissen erzeugt“, wird auf das mathematische Wissen bezogen zur Frage *Mathematik ein Produkt der Naturgeschichte?* verdichtet und ausgearbeitet.

Die ausgearbeitete aposteriorische Sicht – kurz „naturgeschichtliche Sicht“ genannt – wird anhand eines prominenten Beispiels, nämlich der Konstruktion eines 4-dimensionalen Würfels, auf ihren Nutzen hin untersucht. Das Beispiel wurde gewählt, weil es sowohl Aspekte der Herausbildung höherdimensionaler Geometrien beleuchtet als auch leicht zeigen lässt, wie der Homo sapiens mithilfe von Sprache (sie setzt die Fähigkeiten zur Bildung und regelgeleiteten Manipulation von Symbolen voraus) und Arithmetik im Zusammenwirken mit anderen invarianten Strukturen des Unbelebten, des Biotischen und des Psychosozialen seinen 3-dimensionalen Anschauungsraum kognitiv verlassen kann und zu höherdimensionalen (abstrakten) Raumbegriffen kommt, auf die keine moderne Natur- oder Ingenieurwissenschaft verzichten kann.

Die Hypothese, dass die ausgearbeitete aposteriorische, hier naturgeschichtlich genannte Sicht auf das mathematische Wissen für die Didaktik des Mathematikunterrichts Gewinn bringend verwendet werden könnte, wird plausibilisiert. Inwieweit auch die Evolutionäre Pädagogik, die gerade die herkömmliche Kommunikation über Erziehung explizit um phylogenetische Gesichtspunkte erweitert, von der naturgeschichtlichen Sicht profitieren könnte, wird ausgelotet.