

Berechnung der Stromverteilung in einem  
System rechteckiger Massivleiter  
bei Wechselstrom durch Kombination  
der Separations- mit der  
Randintegralgleichungsmethode

Vom Fachbereich Elektrotechnik der Helmut-Schmidt-Universität  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigte  
Dissertation

vorgelegt von  
Diplom-Ingenieur Lars Ole Fichte  
aus Hamburg  
Hamburg 2007

Referent: Prof. Dr.-Ing. M. Ehrich

Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. M. Clemens

Datum der mündlichen Prüfung: 01.12.2006

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet „Theoretische Elektrotechnik und Numerische Feldberechnung“ (bis 20.01.2004: „Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik“) an der Helmut-Schmidt-Universität – Universität der Bundeswehr Hamburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Matthias Ehrich, der die Anregung zu dieser Arbeit gab, gilt mein besonderer Dank. Seine zahlreichen Hilfestellungen und seine tatkräftige Unterstützung trugen wesentlich zum Gelingen bei.

Herrn Prof. Dr. rer. nat Markus Clemens danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferats und für das besondere Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Stefan Kurz möchte ich mich vor allem für seine stete Bereitschaft bedanken, Teilprobleme meiner Arbeit zu diskutieren.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Fachgebiets möchte ich für das angenehme Arbeitsklima und ihre stete Diskussions- und Hilfsbereitschaft meinen Dank aussprechen.



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>   | <b>1</b> |
| 1.1      | Thema und Aufbau der Arbeit . . . . .   | 1        |
| 1.2      | Bedeutung der untersuchten Problemstellung . . . . .                                  | 2        |
| 1.3      | Abgrenzung zu anderen Lösungsmethoden . . . . .                                       | 3        |
| <b>2</b> | <b>Grundlegende Gleichungen</b>   | <b>5</b> |
| 2.1      | Aufgabenstellung . . . . .  | 5        |
| 2.1.1    | Geometrie und Materialeigenschaften der Leiteranordnung . . . . .                     | 5        |
| 2.1.2    | Modellannahmen . . . . .  | 6        |
| 2.2      | Einführung der elektrodynamischen Potentiale $\vec{A}$ und $\varphi$ . . . . .        | 7        |
| 2.2.1    | Herleitung der feldbeschreibenden Differentialgleichungen . . . . .                   | 7        |
| 2.2.2    | Ebenes Problem . . . . .  | 9        |
| 2.2.3    | Bedeutung des Skalarpotentials $\Phi$ . . . . .                                       | 10       |
| 2.2.4    | Differentialgleichungen für die elektrodynamischen Potentiale . . . . .               | 12       |
| 2.3      | Grenzbedingungen an der Oberfläche der Leiter . . . . .                               | 15       |
| 2.3.1    | Allgemeine Grenzbedingungen . . . . .   | 15       |
| 2.3.2    | Übergang der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke . . . . .               | 16       |
| 2.3.3    | Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Flußdichte . . . . .                 | 17       |
| 2.3.4    | Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke . . . . .             | 18       |
| 2.3.5    | Übergang der Normalkomponente der elektrischen Flußdichte . . . . .                   | 19       |
| 2.4      | Integraldarstellungen für das Vektorpotential . . . . .                               | 19       |
| 2.4.1    | Herleitung der Integraldarstellung für nichtleitende Gebiete . . . . .                | 20       |
| 2.4.2    | Kernfunktion des ebenen Stromverdrängungsproblems für nichtleitende Gebiete . . . . . | 22       |
| 2.4.3    | Beitrag der unendlich fernen Hülle . . . . .  | 22       |
| 2.4.4    | Herleitung der Integraldarstellung für leitende Gebiete . . . . .                     | 24       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Untersuchung der Kernfunktion</b>  | <b>27</b> |
| 3.1      | FOURIERentwicklung des Kerns . . . . .  | 27        |
| 3.2      | Nachweis von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität des Kerns . . .                             | 29        |
| 3.3      | Nachweis der Singularität für den Kern und die Normalableitungen des Kerns                                  | 31        |
| <b>4</b> | <b>Reihenansatz für das BUCHHOLZ-Potential im Innenraum</b>   | <b>35</b> |
| 4.1      | Ansatz für $V_i$ aus Separation . . . . .   | 36        |
| 4.1.1    | Formulierung als DIRICHLET'sches Randwertproblem . . . . .  | 37        |
| 4.1.2    | Formulierung als NEUMANN'sches Randwertproblem . . . . .  | 38        |
| 4.2      | Einfluss der Nullterme . . . . .  | 40        |
| <b>5</b> | <b>Randabschnittsintegralgleichungen</b>  | <b>43</b> |
| 5.1      | Integraldarstellung von $A^{(a)}$ für Rechteckleiter . . . . .  | 44        |
| 5.2      | Reihendarstellung für $A^{(a)}$ . . . . .   | 47        |
| 5.3      | Überführung in eine Randintegralgleichung für $W^{(i)}$ . . . . .   | 49        |
| 5.4      | Berücksichtigung des eingepprägten Stromes . . . . .  | 53        |
| 5.5      | Formulierung der Matrixgleichung . . . . .  | 56        |
| 5.5.1    | Matrixgleichung für Einzelleiter . . . . .  | 56        |
| 5.5.2    | Matrixgleichung für Mehrleitersysteme . . . . .   | 61        |
| <b>6</b> | <b>Auswertung auftretender Integrale</b>  | <b>63</b> |
| 6.1      | Analytische Auswertung . . . . .  | 63        |
| 6.1.1    | Funktionen in der Reihendarstellung von $A^{(a)}$ . . . . .   | 64        |
| 6.1.2    | Entwicklung nach Orthogonalfunktionen . . . . .   | 73        |
| 6.2      | Numerische Integration . . . . .  | 83        |
| 6.2.1    | Auszuwertende Ausdrücke . . . . .   | 83        |
| 6.2.2    | GAUSS-LEGENDRE-Quadratur . . . . .  | 85        |
| 6.2.3    | GAUSS-LEGENDRE-Quadratur zwischen zwei Nullstellen mit gesonderter<br>Behandlung der Singularität . . . . . | 85        |
| 6.2.4    | FILON-Quadratur . . . . .   | 86        |
| 6.2.5    | Numerische Behandlung der singulären Integrale . . . . .  | 89        |
| 6.2.6    | Kontrolle durch Anwendung der NAG-Routinen . . . . .  | 91        |

|                |   |            |
|----------------|---|------------|
| <b>7</b>       | <b>Beispiele</b>  | <b>93</b>  |
| 7.1            | Einzelleiter . . . . .  | 93         |
| 7.1.1          | Homogenes äußeres Magnetfeld . . . . .  | 93         |
| 7.1.2          | Einzelleiter im Feld einer erregenden Stromschleife . . . . .   | 95         |
| 7.1.3          | Einzelleiter mit eingprägten Strom . . . . .  | 95         |
| 7.2            | Systeme aus mehreren Leitern . . . . .  | 102        |
| 7.2.1          | Doppelleitung . . . . .   | 102        |
| 7.2.2          | Drehstromsystem . . . . .   | 107        |
| 7.3            | Vergleich analytische Lösung / numerische Lösung . . . . .  | 111        |
| <b>8</b>       | <b>Zusammenfassung</b>  | <b>113</b> |
| <br>           |   |            |
| <b>Anhänge</b> |   |            |
| <b>A</b>       | <b>Rückführung der Funktionen <math>R</math> und <math>T</math> auf die Exponentialintegralfunktion</b> | <b>115</b> |
| A.1            | Die Funktion $T(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .  | 116        |
| A.1.1          | $T_{\pm}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . . . . .  | 116        |
| A.1.2          | Modifikationen für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . . . . .   | 118        |
| A.2            | Die Funktion $R(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$ . . . . .  | 119        |
| A.2.1          | $R_{\pm}$ für $\alpha \neq \beta$ . . . . .   | 120        |
| A.2.2          | $R_{\pm}$ für $\alpha = \beta \neq 0$ . . . . .   | 124        |
| A.2.3          | $R_+$ für $\alpha = \beta = 0$ . . . . .  | 126        |
| A.2.4          | $R_-$ für $\alpha = \beta = 0$ . . . . .  | 128        |
| A.2.5          | Mathematische Rückführung der Funktionen $H$ und $M$ auf $E_1$ . . . . .                                | 128        |
| <b>B</b>       | <b>Darstellung von <math>E_1(w)</math> für verschiedene Gebiete der komplexen Ebene</b>                 | <b>133</b> |
| B.1            | Reihenentwicklung nach Potenzen $w^p$ . . . . .   | 133        |
| B.2            | LAGUERRE-Integration . . . . .  | 134        |
| B.3            | Kettenbruchdarstellung . . . . .  | 135        |
| B.4            | Entwicklung nach Potenzen von $iy$ . . . . .  | 135        |
| B.5            | Genauigkeiten der verwendeten Reihendarstellungen . . . . .   | 135        |
| <b>C</b>       | <b>Verwendete NAG-Routinen</b>  | <b>137</b> |

|   |            |
|---|------------|
| <b>D Formelsammlung</b>                   | <b>139</b> |
| D.1 Integralausdrücke . . . . .           | 139        |
| D.2 Partialbruchzerlegungen . . . . .     | 140        |
| D.3 Zusammenfassende Funktionen . . . . . | 140        |
| D.4 Besondere Integrale . . . . .         | 141        |
| D.5 Elementare Umformungen . . . . .      | 142        |
| <b>E Orthogonalfunktionen</b>             | <b>143</b> |
| <b>F Alternativer Ansatz</b>              | <b>145</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>               | <b>151</b> |



# Verzeichnis der Abbildungen

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 1  | Schematische Darstellung des gewählten Lösungsweges . . . . .   | 2   |
| 2  | Darstellung des allgemeinen Lösungsweges . . . . .  | 4   |
| 3  | Aufbau der Leiteranordnung . . . . .  | 6   |
| 4  | Integrationsweg zur Bestimmung von $\Phi$ . . . . .   | 11  |
| 5  | Elektrische Feldstärke $\vec{E}$ zwischen zwei Leitern . . . . .  | 13  |
| 6  | Konturen und Normalenvektoren eines allgemeinen Leitersystems . . . . .   | 16  |
| 7  | Unendlich ferne Hülle . . . . .   | 23  |
| 8  | Linienladung $\lambda$ bei $x = x_0, y = y_0$ . . . . .   | 31  |
| 9  | Verhältnisse auf Randabschnitt 1 von Leiter $i$ . . . . .   | 38  |
| 10 | Normalenvektoren der Randabschnitte von Leiter $i$ . . . . .  | 44  |
| 11 | Abspaltung der Singularität . . . . .   | 86  |
| 12 | Unterteilung in oszillierende und singuläre Teilintegrale . . . . .   | 87  |
| 13 | Approximation einer singulären Funktion durch ein LEGENDRE-Polynom . . . . .  | 89  |
| 14 | Verlauf der Funktionen nach der ERF-Transformation . . . . .  | 90  |
| 15 | Eindringverhalten eines externen Magnetfeldes über $\omega$ . . . . .   | 94  |
| 16 | Eindringverhalten eines externen Magnetfeldes über $\mu_i$ . . . . .  | 94  |
| 17 | $\Re \{W^{(i)}\}$ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .            | 96  |
| 18 | $\Im m \{W^{(i)}\}$ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .          | 96  |
| 19 | $ W^{(i)} $ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .                  | 97  |
| 20 | $\Re \{W^{(i)}\}$ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=0,4$ m, $b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .   | 97  |
| 21 | $\Im m \{W^{(i)}\}$ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=0,4$ m, $b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . . | 98  |
| 22 | $ W^{(i)} $ im Einzelleiter in $\frac{V_s}{m}$ , $f = 50$ Hz, $a=0,4$ m, $b= 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .         | 98  |
| 23 | $ \vec{J}_i $ in $\frac{A}{m^2}$ , $f = 50$ Hz, $a = b = 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .                             | 99  |
| 24 | $ \vec{J}_i $ in $\frac{A}{m^2}$ , $f = 100$ Hz, $a = b = 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .                            | 100 |
| 25 | $ \vec{J}_i $ in $\frac{A}{m^2}$ , $f = 50$ Hz, $a = b = 0,2$ m, Material: Kobalt . . . . .                             | 100 |
| 26 | $ \vec{J}_i $ in $\frac{A}{m^2}$ , $f = 50$ Hz, $a = 0,4$ m, $b = 0,2$ m, Material: Kupfer . . . . .                    | 101 |
| 27 | Doppelleitung . . . . .   | 102 |
| 28 | $ \Re \{W^{(i)}\} $ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,1$ m . . . . .   | 103 |
| 29 | $\Im m \{W^{(i)}\}$ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,1$ m . . . . .   | 104 |
| 30 | $ W^{(i)} $ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,1$ m . . . . .   | 104 |
| 31 | $ \Re \{W^{(i)}\} $ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,05$ m . . . . .  | 105 |
| 32 | $\Im m \{W^{(i)}\}$ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,05$ m . . . . .  | 105 |
| 33 | $\text{abs}(W^{(i)})$ im Zweileitersystem, $f = 50$ Hz, $d = 0,05$ m . . . . .  | 106 |
| 34 | Drehstromsystem 1 . . . . .   | 107 |

|    |  |     |
|----|--|-----|
| 35 | $\Re \{W_1^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im linken Leiter . . . . .                     | 108 |
| 36 | $\Im \{W_1^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im linken Leiter . . . . .                     | 108 |
| 37 | $\Re \{W_2^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im mittleren Leiter . . . . .                  | 109 |
| 38 | $\Im \{W_2^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im mittleren Leiter . . . . .                  | 109 |
| 39 | $\Re \{W_3^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im rechten Leiter . . . . .                    | 110 |
| 40 | $\Im \{W_3^{(i)}\}$ in $\frac{Vs}{m}$ im rechten Leiter . . . . .                    | 110 |
| 41 | $ \arg(w) + \frac{\pi}{2}  >  \arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2} > 0 $ . . . . . | 130 |
| 42 | $\arg(\alpha) = 0$ . . . . .   | 131 |
| 43 | $\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0$ . . . . .                               | 131 |
| 44 | Funktionslandkarte für $E_1(w)$ . . . . .  | 136 |

# Verzeichnis der Tabellen

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 1 | Auswertung von $\oint_{C_i} \text{grad} G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0$ . . . . . | 46  |
| 2 | Werte von Auf- und Quellpunktsvektor für verschieden Randabschnitte . . .      | 58  |
| 3 | Werte von Auf- und Quellpunktsvektor für Mehrleitersysteme . . . . .           | 61  |
| 4 | Lage des Aufpunktes in Abhängigkeit von der Nummer des Randabschnitts .        | 82  |
| 5 | Genauigkeit und Rechenzeiten . . . . .   | 111 |
| 6 | Fallunterscheidungen bei der Auswertung der Funktion $R_+$ . . . . .           | 120 |
| 7 | LAGUERREkoeffizienten . . . . .  | 134 |
| 8 | Maximaler Fehler von $ E_1 $ . . . . .   | 136 |

# Liste der verwendeten Abkürzungen und Formelzeichen

## Feldgrößen, Potentiale, Materialparameter

|                   |  |
|-------------------|--|
| $\vec{A}$         | Vektorpotential  |
| $\vec{A}^{(a)}$   | Vektorpotential im nichtleitenden Außenraum                            |
| $\vec{A}_i^{(i)}$ | Vektorpotential im leitenden Innenraum von Leiter $i$                  |
| $\vec{A}_\infty$  | Potentialbeitrag der unendlich fernen Hülle                            |
| $\vec{B}$         | magnetische Flußdichte   |
| $\vec{D}$         | elektrische Flußdichte   |
| $\vec{E}$         | elektrische Feldstärke   |
| $\vec{H}$         | magnetische Feldstärke   |
| $I$               | Strom  |
| $I_i$             | Gesamtstrom in Leiter $i$  |
| $\vec{J}$         | elektrische Stromdichte  |
| $\vec{K}$         | elektrischer Strombelag  |
| $E_\Phi^{(a)}$    | Beitrag des Skalarpotentials $\Phi$ zum elektrischen Feld im Außenraum |
| $V$               | Ortsfunktion des BUCHHOLZ-Potentials im Leiterinneren                  |
| $\Phi^{(i)}$      | elektrisches Skalarpotential im Innenraum                              |
| $\varphi$         | elektrisches Skalarpotential   |
| $\vec{W}^{(i)}$   | BUCHHOLZ-Potential im Innenraum aller Leiter                           |
| $\vec{W}_i^{(i)}$ | BUCHHOLZ-Potential im Innenraum von Leiter $i$                         |
| $\varepsilon$     | Dielektrizitätskonstante   |
| $\kappa$          | elektrische Leitfähigkeit  |
| $\mu$             | magnetische Permeabilität  |
| $\omega$          | Kreisfrequenz  |

## Koeffizienten der Potentialansätze

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $v_{i1,n}, \dots, v_{i4,n}$         | Koeffizienten der Eigenfunktionen in Leiter $i$                                      |
| $\alpha_{in}$                       | Separationskonstante für Orthogonalfunktionen in $x$ -Richtung                       |
| $\beta_{in}$                        | frequenzabhängige Separationskonstante zu $\alpha_n$ für Funktionen in $y$ -Richtung |
| $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n$ | entsprechende Konstanten für die $y$ -gerichteten Funktionen                         |
| $n, m$                              | Laufindizes im Summenansatz für das Vektorpotential                                  |
| $i, k$                              | Laufindizes (Nummer des betrachteten Leiters)  |
| $p, q$                              | Laufindizes (Nummer des betrachteten Randabschnitts)                                 |

## Koordinaten und Bemaßungen

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $\vec{r}_p \in \mathbb{R}^3$    | Aufpunktvektor im Raum   |
| $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$      | Aufpunktvektor in der Ebene $z = 0$  |
| $w \in \mathbb{C}$              | Koordinaten des Aufpunkts in komplexer Darstellung                                   |
| $x, y$                          | kartesische Komponenten des Aufpunktvektors  |
| $x_i, y_i$                      | kartesische Komponenten des Aufpunktvektors im lokalen System des $i$ -ten Leiters   |
| $\vec{r}_q \in \mathbb{R}^3$    | Quellpunktvektor im Raum   |
| $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$    | Quellpunktvektor in der Ebene $z = 0$  |
| $w_0 \in \mathbb{C}$            | Koordinaten des Quellpunkts in komplexer Darstellung                                 |
| $x_0, y_0$                      | kartesische Komponenten des Quellpunktvektors  |
| $x_{0i}, y_{0i}$                | kartesische Komponenten des Quellpunktvektors im lokalen System des $i$ -ten Leiters |
| $\vec{r}_{qi} \in \mathbb{R}^2$ | Lagevektor von Leiter $i$ im globalen Koordinatensystem                              |
| $w_{qi} \in \mathbb{C}$         | Koordinaten des Lagevektors in komplexer Darstellung                                 |
| $x_{qi}, y_{qi}$                | kartesische Komponenten des Lagevektors von Leiter $i$ im globalen Koordinatensystem |
| $a_i, b_i$                      | Abmessungen von Leiter $i$ in $x$ - bzw. $y$ -Richtung                               |
| $\xi, \eta$                     | lokale Koordinaten   |
| $\nu$                           | Integrationsvariable der FOURIERtransformierten des Kerns                            |

## Integralgrenzen und Geometrien

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $\tau$                   | Volumen aller Leiter                                 |
| $\partial\tau$           | Oberfläche aller Leiter                              |
| $\tau_i$                 | Volumen von Leiter $i$                               |
| $\partial\tau_i$         | Oberfläche von Leiter $i$                            |
| $\Omega$                 | Querschnittsfläche aller Leiter                      |
| $C = \partial\Omega$     | Randkontur der Querschnittsfläche aller Leiter       |
| $\Omega_i$               | Querschnittsfläche des $i$ -ten Leiters              |
| $C_i = \partial\Omega_i$ | Randkontur des $i$ -ten Leiters                      |
| $C_\infty$               | Kontur der unendlich fernen Hülle                    |
| $\Omega_a$               | Querschnittsfläche des Außenraums                    |
| $\vec{n}_{(i,1\dots 4)}$ | Normalenvektor auf Randabschnitt 1..4 von Leiter $i$ |
| $N$                      | Anzahl der Leiter                                    |

## Funktionen und Matrizen

|                                    |   |
|------------------------------------|---|
| $\arg(w)$                          | Argument der komplexen Zahl $w$   |
| $\delta_{n,m}$                     | KRONECKER-Symbol  |
| $\delta_i(\vec{r})$                | $i$ -dimensionale DIRAC-Distribution, $\vec{r} \in \mathbb{R}^i$  |
| $g$                                | GREEN'sche Funktion des dreidimensionalen Raums   |
| $K^{(a)}$                          | Kernfunktion des Außenraums   |
| $K^{(i)}$                          | Kernfunktion des Innenraums   |
| $G_{20}$                           | Kern der Randintegralgleichung für das ebene Problem in kartesischen Koordinaten  |
| $P_k$                              | LEGENDRE-Polynom $k$ -ten Grades  |
| $\Phi, \Psi$                       | beliebige Skalarfunktionen  |
| $R_{\pm}, T_{\pm}$                 | zusammenfassende Funktionen   |
| $\tilde{H}_{\pm}, \tilde{M}_{\pm}$ | zusammenfassende Funktionen   |
| $H, M$                             | zusammenfassende Funktionen   |
| $f_{ik,n}^{(a)}(x, y)$             | Funktionen in der Reihendarstellung des Vektorpotentials im Außenraum   |
| $c_{(i,1\dots 4)(k,1\dots 4),nm}$  | Matrixkoeffizient zu $v_{1\dots 4,n}^{(i)}$ , Aufpunkt auf Leiter $k$ , Entwicklung nach der $m$ -ten Orthogonalfunktion  |
| $c_{(i,x)(k,x),nm}$                | Matrixkoeffizient: gehört zu $v^{i1/2}$ , Quellpunkt auf $x$ -Rand von Leiter $i$ , Aufpunkt auf $x$ -Rand von Leiter $k$<br>entsprechend $c_{(i,x)(k,y),nm}$ , $c_{(i,y)(k,x),nm}$ , $c_{(i,y)(k,y),nm}$ |
| $\gamma$                           | ( $M \times M$ Matrix des Beitrags eines Leiters)   |
| $\Gamma$                           | ( $NM \times NM$ Matrix des Leitersystems)  |
| $\text{sgn}(x)$                    | Vorzeichenfunktion  |

## Operatoren

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| $\Delta$                      | LAPLACE-Operator                                   |
| $\frac{\partial}{\partial n}$ | Richtungsableitung in Richtung des Normalenvektors |
| $\nabla$                      | Nabla - Operator                                   |
| $\Re \{ \}, \Im \{ \}$        | Realteil, Imaginärteil                             |
| $\partial$                    | Randoperator                                       |

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Thema und Aufbau der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird die Stromdichteverteilung im Inneren von mehreren geraden parallelen Leitern mit rechteckigem Querschnitt nach Abklingen der transienten Einschaltvorgänge untersucht. Die Querschnittsabmessungen der Leiter sind dabei sehr klein im Vergleich zur Längsausdehnung der Anordnung. Die Untersuchung beschränkt sich auf den in der Praxis meist vorliegenden Fall, daß die Ränder der Leiterquerschnitte parallel zueinander verlaufen.

Die feldbestimmenden Gleichungen werden in Kapitel 2 aus den MAXWELL'schen Gleichungen hergeleitet. Unter Verwendung eines geeigneten Vektorpotentials für den nichtleitenden Außenraum und unter Beachtung des Verhaltens dieses Potentials an Grenzflächen zu leitfähigem Material wird eine Randintegralgleichung für das Vektorpotential im Innenraum der Leiter entwickelt. Abweichend vom bisher angewendeten Vorgehen geschieht die Kopplung der Lösungsansätze in Innen- und Außenraum über die Normalableitung des Vektorpotentials.

Die Kernfunktion der Randintegralgleichung wird in Kapitel 3 untersucht. Kapitel 4 liefert einen Reihenansatz für das Vektorpotential im Innenraum eines Leiters. Diese Ergebnisse erlauben es, die Randintegralgleichung auf das definierte Leitersystem anzuwenden und in Kapitel 5 in ein lineares Gleichungssystem zu überführen, welches die Bestimmung der gesuchten Reihenglieder ermöglicht.

Die analytische Auswertung der auftretenden Randintegrale erfolgt in Kapitel 6.

Die resultierenden ortsveränderlichen Stromdichteverteilungen werden numerisch berechnet; die Ergebnisse werden in Kapitel 7 graphisch dargestellt und mit Lösungen verglichen, die unter Zuhilfenahme kommerzieller Feldberechnungsprogramme erstellt wurden.

Kapitel 8 liefert eine Zusammenfassung.

Der gewählte Lösungsweg ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

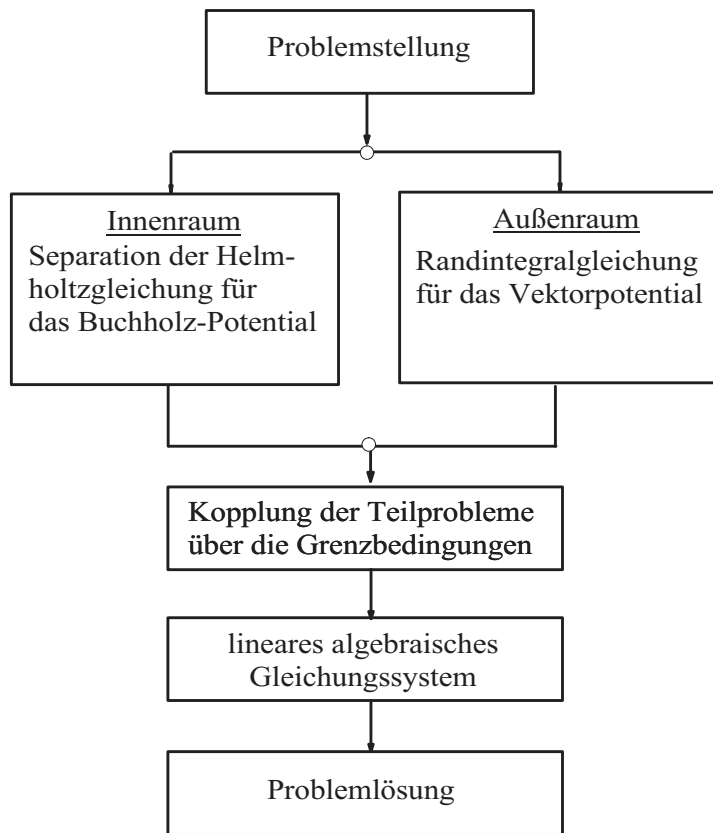


Abbildung 1: Schematische Darstellung des gewählten Lösungsweges

## 1.2 Bedeutung der untersuchten Problemstellung

Stromschienen mit rechteckigem Querschnitt sind in Starkstromanlagen sehr gebräuchlich, wobei die technische Bedeutung solcher Schienen besonders daran erkennbar ist, daß diese Problemstellung bereits sehr früh - 1927 - meßtechnisch untersucht wurde [41].

Bei Wechselstrom tritt eine inhomogene Verteilung der in die Leiter eingepprägten Gesamtströme über die Leiterquerschnitte auf, die als Stromverdrängung bezeichnet wird. Im Vergleich zu Leitern mit homogener Stromverteilung führt dies zu einer – teilweise deutlichen – Erhöhung der Verlustleistung. In Systemen aus mehreren Leitern hat dieser Effekt wegen der Verschiebung der Stromschwerpunkte zudem erhöhte Kräfte zwischen den Leitern zur Folge. Darüber hinaus wird der Leiterquerschnitt aufgrund der im Innengebiet deutlich kleineren Stromdichten schlechter ausgenutzt. Während die auftretenden Kräfte zu einer erhöhten mechanischen Beanspruchung der Stromschienen führen, entstehen durch die erhöhten Verluste sogenannte „Heißstellen“, in denen sich das Material der Leiter besonders stark erwärmt. Dieser Effekt erfährt in der Hochstromtechnik besondere Aufmerksamkeit. Daher enthält diese Arbeit auch eine Untersuchung von Drehstromsystemen, wie sie in Energieversorgungsanlagen üblich sind.



Da der Entwurf eines Energieversorgungssystems außer den Sicherheitsaspekten auch die Kosten maßgeblich berücksichtigen muß, ist eine genaue Untersuchung der verwendeten Leiter nötig. Hierbei ist als wichtigster Belastungsfall neben dem Verhalten beim Ein- oder Ausschalten der Versorgung der in dieser Arbeit untersuchte Dauerbetrieb bei Nennlast aufzuführen. Eine geeignete Modellierung der Leitung erlaubt eine rechnergestützte Simulation des Betriebes und trägt zur Klärung der Betriebsverhältnisse bei.

Der gewählte Lösungsweg ist ein Beitrag zur Analyse von Energieversorgungsanlagen im eingeschwungenen Zustand. Die Arbeit hat das Ziel, eine Lösung unter vollständigem Verzicht auf Näherungsverfahren zu erarbeiten und diese mit weiteren, numerisch gewonnenen Lösungen zu vergleichen. Sie erlangt zusätzliche praktische Bedeutung dadurch, daß in besonders kritischen Bereichen der Leiter besonders genaue Ergebnisse erzielt werden. Daher können die im folgenden präsentierten Ergebnisse zur Gewinnung von Referenzlösungen für allgemeinere numerische Verfahren dienen.

### 1.3 Abgrenzung zu anderen Lösungsmethoden

Die Berechnung der Stromverteilung innerhalb von wechselstromdurchflossenen Massivleitern fällt in die Kategorie der Wirbelstromprobleme, die seitens der Wissenschaft seit langer Zeit intensiv erforscht werden. Im Laufe der letzten Jahrzehnte ist dabei eine Vielzahl von Formulierungen sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Probleme aufgestellt worden. Die verwendeten Lösungsansätze orientieren sich dabei an der Geometrie der Anordnungen und an den gesetzten Untersuchungsschwerpunkten. Ein Verfahren, welches für alle Anwendungsfälle optimal ist, wurde bisher nicht gefunden, obwohl die Methode der Finiten Elemente unter Verwendung eines geometrischen Formalismus, der auf primalen und dualen Gittern beruht, wie sie in der Methode der Finiten Integration (FIT) Verwendung finden, sich offensichtlich zu einer kanonischen Formulierung für niedrige Frequenzen entwickelt. Weitere Methoden umfassen die Methode der Finiten Integration (WEILAND, [48], [50]), die Cell-Methode (TONTI, [46]), die Randelementemethode (Boundary Element Methode bzw. BEM, z.B. [15]), die Momentenmethode (HARRINGTON, [22], [23]) und die Methode der Finiten Differenzen (FD). Die folgende Abbildung 2 gibt einen Überblick; ein vertiefter Vergleich der existierenden Methoden findet sich in [27].

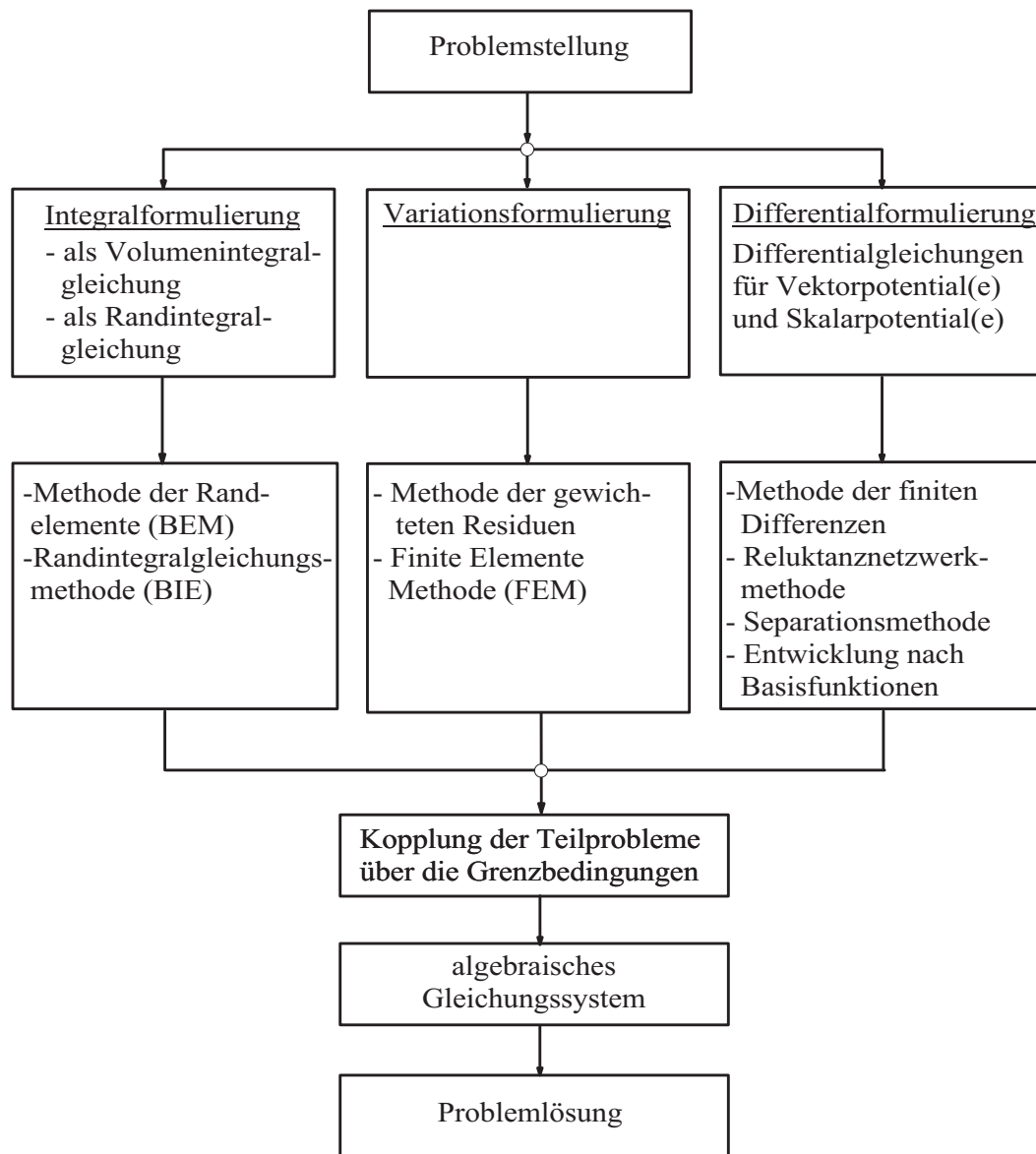


Abbildung 2: Darstellung des allgemeinen Lösungsweges

Der Schwerpunkt der Forschungsaktivitäten hat sich seit etwa 1980 von den zuerst favorisierten analytischen Verfahren weg zu Lösungsverfahren verschoben, die Feld- und Potentialprobleme unter Verwendung geeigneter Gittervernetzungen der Problemgeometrie numerisch lösen. Mit diesen Methoden ist es inzwischen möglich, transiente 3D-Wirbelstromprobleme zu lösen (z.B. [4], [6], [14], [49]) oder nichtlineare Materialeigenschaften mit in Betracht zu ziehen (z.B. [5], [7],[42]). Die analytischen Methoden haben sich seit dem Erscheinen von [44] kaum fortentwickelt, da sie nur für relativ einfache Geometrien zu Lösungen führen ([25], [33]) oder letztlich doch auf Näherungsmethoden zurückgreifen (z.B. auf die diskrete FOURIERtransformation [19]). Sie dienen daher vornehmlich als Referenzlösungen für numerische Verfahren (z.B. [31], [32], [45]).

# Kapitel 2

## Grundlegende Gleichungen

### 2.1 Aufgabenstellung

#### 2.1.1 Geometrie und Materialeigenschaften der Leiteranordnung

Gegenstand der Untersuchung ist ein System aus  $N$  parallelen Leitern, die in Richtung ihrer Achsen näherungsweise als unendlich ausgedehnt betrachtet werden. Alle Leiter weisen rechteckige Querschnitte auf, deren Randabschnitte parallel zu denen der anderen Leiter gerichtet sind.

Zur Beschreibung der Leiter wird ein kartesisches Koordinatensystem so eingeführt, daß die Randabschnitte aller Leiter parallel zur  $x$  bzw.  $y$ -Achse des Koordinatensystems liegen. Die  $z$ -Achse verläuft parallel zu den Achsen der Leiter.

Die Querschnittsfläche des Leiters  $i$  wird mit  $\Omega_i$ , ihre Berandung mit  $C_i = \partial\Omega_i$  bezeichnet. Sie hat die Ausdehnung  $a_i$  in Richtung der  $x$ - und  $b_i$  in Richtung der  $y$ -Achse. Die Abmessungen der Leiter unterscheiden sich im allgemeinen voneinander. Die Lage der linken unteren Ecke des  $i$ -ten Leiters in der Ebene wird durch den Vektor  $\vec{r}_{qi} = \vec{e}_x x_{qi} + \vec{e}_y y_{qi}$  festgelegt. Zur Beschreibung der Feldgrößen innerhalb des Leiters wird ein lokales Koordinatensystem  $x_i, y_i$  eingeführt, dessen Ursprung sich bei  $\vec{r}_{qi}$  befindet.

Der Aufbau der untersuchten Anordnung ist der Abbildung 3 zu entnehmen.

Der Leiter  $i$  besteht aus einem linearen, homogenen und isotropen Material mit der Leitfähigkeit  $\kappa_i = \text{const} \neq 0$  und der Permeabilität  $\mu_i$ . Der Außenraum ist nicht leitfähig ( $\kappa_a = 0$ ); die Permeabilität beträgt dort  $\mu_a$ .

Als erregende Größen werden Ströme zugelassen, die in  $z$ -Richtung und fließen und entweder in die Leiterquerschnitte eingepreßt sind oder durch dünne Leiter geführt werden.

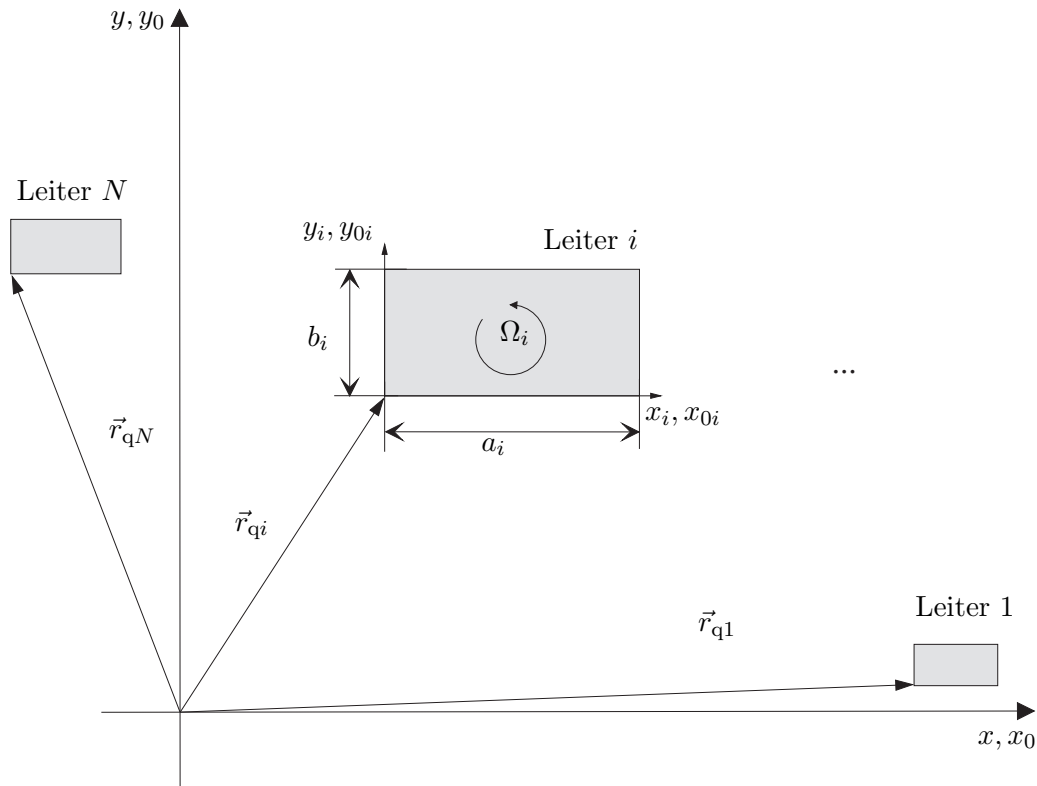


Abbildung 3: Aufbau der Leiteranordnung

### 2.1.2 Modellannahmen

Da Ausdehnung der Leiter in Richtung der  $z$ -Achse als unendlich angenommen wird, können sämtliche Randeinflüsse vernachlässigt werden und es ist möglich, zur Berechnung der Felder auf das ebene Feldmodells zurückzugreifen. Dieses Modell stellt eine Vereinfachung dar, welche die Beschreibung des Problems durch ein zweidimensionales Randwertproblem mit bekannten Randbedingungen zuläßt. Die Lösung dieses Problems führt zu Ergebnissen, die sich „mit guter Genauigkeit auf Leiteranordnungen in der Praxis übertragen lassen“ [8, S.3]. Die Lösungen, die unter diesen Voraussetzungen gewonnen werden, bilden allerdings gewisse Anteile des elektrischen Feldes außerhalb der leitfähigen Gebiete nicht ab.

Für das Zeitverhalten der Feldgrößen und Potentiale wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, daß alle erregenden Stromdichten eine harmonische Zeitabhängigkeit aufweisen und daß alle aus Schaltvorgängen herrührenden Effekte abgeklungen sind. Die Leiteranordnung befindet sich also im quasistationären Endzustand.

Bei Erregung durch eingepreßte Ströme fester Frequenz breitet sich das Feld in Form einer Welle von den Leitern weg in den Außenraum aus. Dies führt im allgemeinen dazu, daß die Wirkung einer Feldänderungen an entfernten Aufpunkten nur verzögert wahrgenommen wird. Die maximale Lateralausdehnung der Anordnung und damit auch jeder Abstand zwischen

zwei Leitern wird jedoch im Verhältnis zur Wellenlänge als so klein angenommen, daß jede Änderung einer Feldgröße instantan im gesamten interessierenden Gebiet wirkt.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Vernachlässigung des MAXWELL'schen Verschiebungsstroms im Außenraum möglich. Innerhalb der leitfähigen Gebiete ist die Dichte des Leitungsstroms sehr viel größer als die des Verschiebungsstromes. Die das Feld beschreibenden Differentialgleichungen, wie sie im folgenden hergeleitet werden, vereinfachen sich dadurch beträchtlich.

## 2.2 Einführung der elektrodynamischen Potentiale $\vec{A}$ und $\varphi$

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die MAXWELL'schen Gleichungen, die in ihrer differentieller Form wie folgt lauten:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}, \quad (2.2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{D}$  die elektrische Flußdichte,  $\vec{J}$  die elektrische Stromdichte,  $\vec{H}$  die magnetische Feldstärke,  $\vec{B}$  die magnetische Flußdichte und  $\rho$  die Dichte der freien Raumladungen. Alle Größen sind vom Ortsvektor  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$  abhängig.

Diese Gleichungen werden durch die Materialgleichungen ergänzt, die hier aufgrund der Tatsache, daß weder permanente elektrische Polarisation noch permanente Magnetisierung des Materials vorliegen, die folgende Form annehmen:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \kappa \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.5)$$

Die hier erscheinenden Materialparameter sind die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$ , die elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$  sowie die magnetische Permeabilität  $\mu$ .

### 2.2.1 Herleitung der feldbeschreibenden Differentialgleichungen

Sämtliche Berechnungen erfolgen – wie in Abschnitt 2.1.2 vorausgesetzt – unter der Voraussetzung, daß die Dichte des MAXWELL'schen Verschiebungsstromes bei der Berechnung der Felder nicht berücksichtigt werden muß.

In diesem Fall kann anstelle des AMPERE'schen Gesetzes (2.2) das Gesetz von OERSTEDT:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \quad (2.6)$$

verwendet werden.

Aus Gleichung (2.6) erhält man durch Divergenzbildung unter Verwendung des aus [28] entnommenen ersten Lemmas von POINCARÉ,  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ , für die für leitfähige Gebiete gültige Kontinuitätsgleichung der Quasistatik:

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (2.7)$$

Aufgrund der Tatsache, daß die magnetische Flußdichte  $\vec{B}$  in Gleichung (2.4) quellenfrei ist, kann man ein Vektorpotential  $\vec{A}$  einführen:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (2.8)$$

Setzt man diese Definition in die Gleichung (2.6) ein, so erhält man unter Verwendung von Gleichung (2.5):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu \kappa \vec{E}. \quad (2.9)$$

Betrachtet man nun nochmals das Induktionsgesetz (2.1) und setzt dort die Definitionsgleichung des Vektorpotentials (2.8) ein, so kann man aufgrund des ersten POINCARÉ'schen Lemmas  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$  zur elektrischen Feldstärke ein Skalarpotential  $\Phi$  hinzufügen, ohne die resultierende magnetische Flußdichte  $\vec{B}$  damit zu ändern:

$$\operatorname{rot} \left\{ \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \operatorname{grad} \Phi \right\} = 0,$$

woraus man für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \operatorname{grad} \Phi \quad (2.10)$$

ableiten kann.

Allerdings werden die elektrodynamischen Potentiale  $\vec{A}$  und  $\Phi$  durch die Gleichungen (2.8) und (2.10) nicht vollständig festgelegt, da sich die Feldgrößen nicht ändern, wenn der Gradient einer beliebigen Skalarfunktion  $\Psi$  zu  $\vec{A}$  addiert und gleichzeitig die Zeitableitung von  $\Psi$  von  $\Phi$  subtrahiert wird. Die neu definierten Potentialfunktionen  $\vec{A}'$  und  $\Phi'$ :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Psi \quad \text{und}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \Psi,$$

liefern dieselben Ergebnisse für  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$ .

Die beiden Potentialfunktionen sind nur dann eindeutig, wenn man eine Aussage über die Quellen des Vektorpotentials trifft und geeignete Grenzbedingungen definiert [43]. Im vorliegenden Fall der Erregung durch quasistationäre Ströme bietet sich die COULOMB-Eichung für die Formulierung des Problems an. Es wird daher

$$\operatorname{div} \vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad (2.11)$$

festgelegt.

### 2.2.2 Ebenes Problem

Die Feldgrößen und Potentiale des zu untersuchenden Problems sind nicht von  $z$  abhängig; es gilt  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ . Probleme dieser Art können in zwei Teilprobleme zerlegt werden, die durch folgende Feldgrößen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{H}_1 &= \vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y, \quad \vec{E}_1 = \vec{e}_z E_z, \\ (2) \quad \vec{H}_2 &= \vec{e}_z H_z, \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die beiden Teilsysteme sind voneinander entkoppelt. Diese Tatsache läßt sich nachweisen, indem man Änderungen der Energiedichte in einem beliebigen Volumen  $\tau$  untersucht, die von der elektrischen Feldstärke eines Systems zusammen mit einer Feldgröße des anderen Teilsystems verursacht werden. Wegen

$$\oiint_{\partial\tau} (\vec{E}_1 \times \vec{H}_2) dS = \oiint_{\partial\tau} (\vec{E}_2 \times \vec{H}_1) dS = 0$$

findet kein Leitungstransport durch die Oberfläche des Volumen statt, und wegen

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

wird in dem Volumen keine Leistung in Wärme umgesetzt.

Im hier vorliegenden Fall soll das Feld durch rein  $z$ -gerichtete Ströme erregt werden, sodaß auch die elektrische Feldstärke nur eine  $z$ -gerichtete Komponente ausweisen kann. Das in der zweiten Zeile von Gleichung (2.12) beschriebene Teilsystem wird somit nicht angeregt. Die nicht auftretenden Komponenten der Felder sowie deren Unabhängigkeit von  $z$  lassen Schlußfolgerungen auch für die Potentiale zu.

Da das magnetische Feld keine  $z$ -Komponente besitzt, muss das Vektorpotential rein  $z$ -gerichtet sein und darf nicht von  $x$  oder  $y$  abhängen [11]:

$$\vec{A} = \vec{e}_z A_z(x, y, t), \quad A_x = A_y = 0. \tag{2.13}$$

Durch das Ergebnis für das Vektorpotential wird auch die Eichbedingung (2.11) erfüllt.

Ausgehend von Gleichung (2.10) kann man noch eine Aussage zum Skalarpotential treffen. Der Gradient des Skalarpotentials im Leiterinneren und das Vektorpotential müssen dieselbe Richtung wie das zugehörige  $\vec{E}$ -Feld besitzen und dieselben Variablenabhängigkeiten aufweisen. Für die einzelnen Komponenten der elektrischen Feldstärke in Gleichung (2.10) erhält man mit Gleichung (2.13):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \Phi^{(i)}(x, y, z, t) &= E_x = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial y} \Phi^{(i)}(x, y, z, t) &= E_y = 0. \end{aligned}$$

Die Ortsableitungen des Skalarpotentials nach  $x$  und  $y$  verschwinden also. Ergo kann das Skalarpotential nur eine Abhängigkeit von  $z$  und  $t$  besitzen:

$$\Phi^{(i)} = \Phi^{(i)}(z, t).$$

### 2.2.3 Bedeutung des Skalarpotentials $\Phi$

Zur Untersuchung des Skalarpotentials  $\Phi$  ist es zweckmäßig, zwischen den leitfähigen Innenräumen der Leiter und dem nichtleitfähigen Außenraum zu unterscheiden. Größen im Innenraum der Leiter werden mit hochgestelltem (i), Größen im Außenraum mit (a) gekennzeichnet. Da die Stromdichte  $\vec{J}$  außerhalb der leitfähigen Gebiete bis auf die erregende Stromdichte  $\vec{J}_e$  nicht existiert, wird für diese Größe auf die Indizierung in hochgestellten Klammern verzichtet. Die folgende Herleitung ist [8, S. 16 ff] entnommen.

Innerhalb eines Leiters tritt also (immer unter Vernachlässigung der elektrischen Verschiebungsstromdichte) die folgende  $z$ -gerichtete Stromdichte bzw. elektrische Feldstärke auf:

$$\vec{J} = \vec{e}_z J(x, y, t), \quad \vec{E}^{(i)} = \vec{e}_z E^{(i)}(x, y, t).$$

Für das Skalarpotential im Inneren eines Leiters findet man unter Verwendung von Gleichung (2.10) durch Divergenzbildung:

$$\operatorname{divgrad}\Phi^{(i)} = \Delta\Phi^{(i)} = -\operatorname{div}\left(\vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{(i)}\right) = -\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}^{(i)}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{A}^{(i)}}_{=0},$$

da elektrisches Feld und Vektorpotential aufgrund der Gleichungen (2.7) und (2.11) divergenzfrei sind.

Das Potential  $\Phi^{(i)}$  genügt demnach der LAPLACE-Gleichung:

$$\Delta\Phi^{(i)} = 0.$$

Da es außerdem nur von einer Ortskoordinate abhängt, gelangt man durch zweimalige Integration zu dem Schluß:

$$\Phi^{(i)}(z, t) = C_1(t)z + C_2(t), \tag{2.14}$$

beziehungsweise:

$$\operatorname{grad}\Phi^{(i)} = \vec{e}_z C_1(t). \tag{2.15}$$

Unter Ausnutzung des einen Freiheitsgrades eines skalaren Potentials wird nun für die Konstante  $C_2(t) = 0$  gewählt.

Der Gradient des Skalarpotentials ist also eine Konstante. Für die weitere Rechnung ist dieses Ergebnis ausreichend. Der Konstanten  $C_1(t)$  läßt sich allerdings für Zweileitersysteme mit einer physikalischen Größe in Verbindung bringen.

Zur Bestimmung von der verbleibenden Konstante  $C_1(t)$  wird dazu Gleichung (2.15) in Gleichung (2.10) eingesetzt:

$$\vec{E}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{(i)} - \operatorname{grad}\Phi^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}^{(i)} - \vec{e}_z C_1(t).$$



Anschließend wird das unten angeführte Flächenintegral gebildet, das aufgrund des Induktionsgesetzes verschwindet:

$$\iint_S \text{rot} \left\{ \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(a)} \right\} \cdot d\vec{S} = \iint_S \left\{ \text{rot} \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Als Integrationsgebiet wählt man eine Fläche  $S$ , die über die Kontur  $C$  der Leiterschleife gespannt ist (also:  $C = \partial S$ ). Die Kontur  $C$  ist in zwei Abschnitte unterteilt: die infinitesimal kleine Strecke der Spannungsquelle  $U_0$  zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  und den Rest der Kontur. Die Darstellung von  $S$  und  $C$  kann der Abbildung 4 entnommen werden.

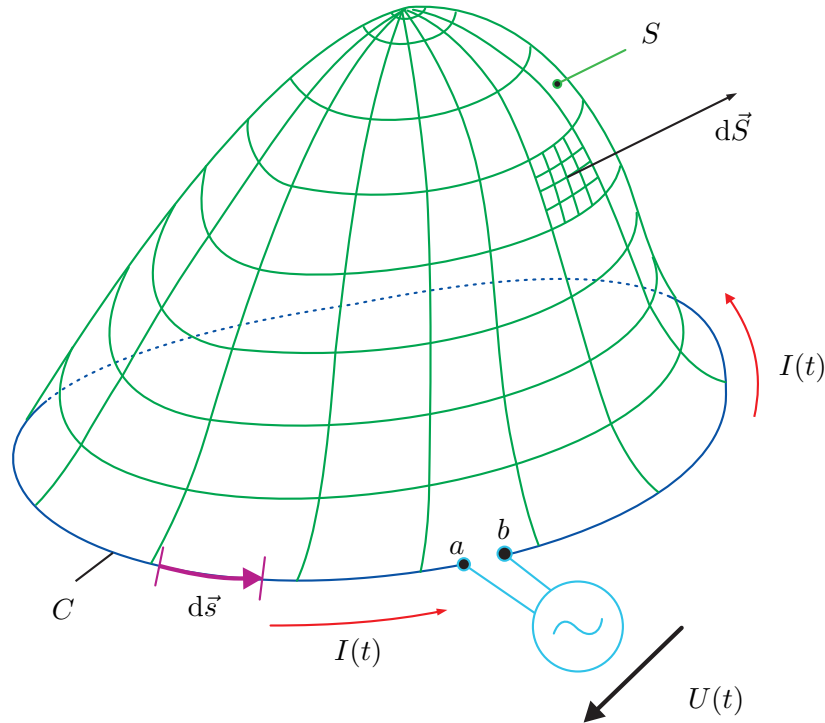


Abbildung 4: Integrationsweg zur Bestimmung von  $\Phi$

Das Flächenintegral lässt sich dabei nach dem STOKES'schen Satz in zwei Linienintegrale aufteilen, deren Integrationswege zum einen von  $a$  nach  $b$  entlang der Kontur  $C$  durch beide Leiter und zum anderen von  $b$  nach  $a$  über die punktförmig gedachte Spannungsquelle  $U$  verlaufen.

$$\iint_S \left\{ \text{rot} \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \left\{ \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{s} + \int_b^a \left\{ \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{s} = 0$$

Mit Gleichung (2.10) drückt man nun das Integral längs der Leitungskontur als

$$\int_b^a \left\{ \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{s} = - \int_b^a \text{grad} \Phi^{(i)} \cdot d\vec{s} = (\Phi_b^{(i)} - \Phi_a^{(i)})$$

aus. Für das zweite Integral liefert nach [8] die Zeitableitung des Vektorpotentials keinen Beitrag, da das Vektorpotential beschränkt ist und die Integration über einen infinitesimal kleinen Weg verläuft. Man erhält:

$$\int_a^b \left\{ \vec{E}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(i)} \right\} \cdot d\vec{s} = -U(t).$$

Die Addition der beiden Integrale liefert den Wert Null. Aus diesem Grunde erhält man für eine Doppelleitung der Länge  $l$  im ebenen Fall die Beziehung

$$C_1(t) = \vec{e}_z \cdot \text{grad} \Phi^{(i)} = \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{(i)} = -\frac{1}{2l} (\Phi_b^{(i)} - \Phi_a^{(i)}) = \frac{1}{2l} U(t).$$

Die Konstante  $C_1(t)$  stellt somit den Spannungsabfall über einem Leiterstück der Länge  $l$  dar, den eine angeschlossene Spannungsquelle, die in den Leiter einen konstanten Strom  $I$  einprägt, verursacht.

## 2.2.4 Differentialgleichungen für die elektrodynamischen Potentiale

Bei der Herleitung der für die Potentialfunktionen gültigen Differentialgleichungen unterschieden werden, ob sich der Aufpunkt

- im stromdichtefreien Außenraum bzw.
- im leitfähigen Innenraum eines Leiters

befindet. Der folgende Rechengang folgt dabei der in [11] ausgeführten Argumentation.

### 2.2.4.1 Differentialgleichungen für den Innenraum

Im Innenraum des  $i$ -ten Leiters kann man die Gleichung (2.9) (Seite 8) unter Verwendung der Gleichungen (2.11) und (2.10) wie folgt umformen:

$$\text{rot rot } \vec{A}_i^{(i)} = -\Delta \vec{A}_i^{(i)} = \mu_i \kappa_i \vec{E}_i^{(i)} = -\mu_i \kappa_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_i^{(i)} + \vec{e}_z C_i(t) \right).$$

Fasst man den Term  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_i^{(i)} + \vec{e}_z C_i(t)$  gemäß der BUCHHOLZ-Konvention

$$\vec{W}_i^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{A}_i^{(i)} + \vec{e}_z \int C_i(t) dt = \vec{e}_z W_i^{(i)} \tag{2.16}$$

zusammen, erhält man als Differentialgleichung für die einzige verbleibende Komponente und damit für den Betrag des BUCHHOLZ-Potentials die Diffusionsgleichung:

$$\Delta W_i^{(i)} - \mu_i \kappa_i \frac{\partial}{\partial t} W_i^{(i)} = 0. \tag{2.17}$$

Das BUCHHOLZ-Potential erfüllt im übrigen auch die COULOMB-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{W}_i^{(i)} = 0.$$

Die gesuchten Feldgrößen lassen sich aus dem BUCHHOLZ-Potential berechnen:

$$\vec{B}_i^{(i)} = \operatorname{rot} \vec{W}_i^{(i)}, \quad (2.18)$$

$$\vec{E}_i^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{W}_i^{(i)}. \quad (2.19)$$

#### 2.2.4.2 Differentialgleichungen für den Außenraum

Die Untersuchung der Eigenschaften der Differentialgleichungen für den Außenraum folgt den Betrachtungen in [11]. Im Gegensatz zum Inneren der Leiter, in denen die elektrische Stromdichte und damit die elektrische Feldstärke nur eine  $z$ -Komponente aufweisen, besitzt die elektrische Feldstärke im Außenraum der Leiter stets alle drei Komponenten. Die  $z$ -Komponente des Außenraumfeldes ist dabei von  $z$  unabhängig:

$$\vec{E}^{(a)}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} E_x^{(a)}(x, y, z, t) \\ E_y^{(a)}(x, y, z, t) \\ E_z^{(a)}(x, y, t) \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung resultieren aus den Potentialdifferenzen zwischen mehreren Leitern.

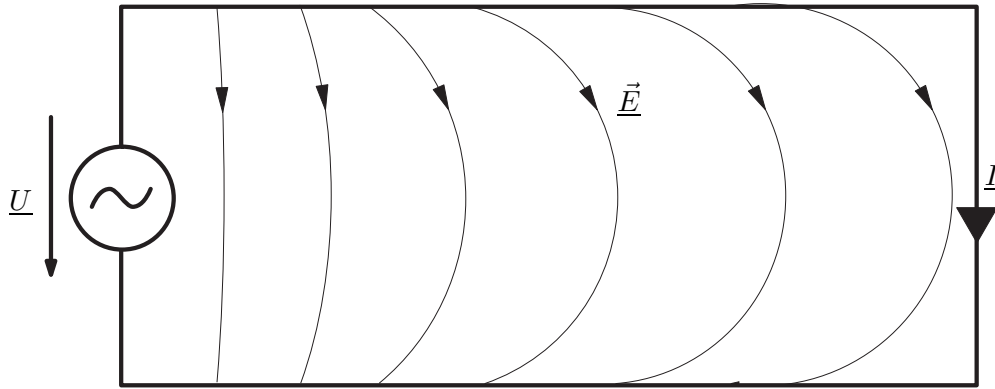


Abbildung 5: Elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  zwischen zwei Leitern

Das gemäß Gleichung (2.10) dem Vektorpotential  $\vec{A}^{(a)}$  zuzuordnende Skalarpotential ist daher im allgemeinen auch von allen drei Koordinaten abhängig:

$$\Phi^{(a)} = \Phi^{(a)}(x, y, z, t).$$

Als einzige Komponente von  $\vec{E}^{(a)}$  steht dessen  $z$ -Komponente

$$E_z^{(a)} = \vec{e}_z \cdot \vec{E}^{(a)} = E_z^{(a)}(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A^{(a)}(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{(a)}(x, y, z, t) \quad (2.20)$$

mit dem Vektorpotential im Außenraum  $\vec{A}^{(a)}$  in Beziehung. Aufgrund der Forderung nach Stetigkeit der tangentialen Anteile der elektrischen Feldstärke an den Leiteroberflächen darf daher die  $z$ -Komponente von  $E^{(a)}$  nicht von  $z$  abhängig sein. Bezeichnet man mit  $E_{\Phi}^{(a)}$  den Anteil von  $E^{(a)}$ , der durch das Skalarpotential im Außenraum verursacht wird, also:

$$E_{\Phi}^{(a)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial z} \Phi^{(a)}(x, y, z, t),$$

kann  $E_{\Phi}^{(a)}$  ebenfalls nur eine Funktion von  $x$  und  $y$  sein:

$$E_{\Phi}^{(a)} = E_{\Phi}^{(a)}(x, y, t). \quad (2.21)$$

Als Ansatz für das skalare Außenraumpotential erhält man demnach:

$$\Phi^{(a)}(x, y, z, t) = (z - z_0) E_{\Phi}^{(a)}(x, y, t). \quad (2.22)$$

Die für das Skalarpotential im Außenraum gültige Differentialgleichung erhält man aus der Gleichung (2.10) durch Divergenzbildung:

$$\text{div grad } \Phi^{(a)} = -\text{div}(\vec{E}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(a)}) = -\text{div} \vec{E}^{(a)} - \text{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{(a)}.$$

Die Divergenz der Feldstärke verschwindet aufgrund von Gleichung (2.3), da im Außenraum keine freien Ladungen existieren:

$$\text{div} \vec{D}^{(a)} = \text{div} \vec{E}^{(a)} = 0.$$

Die Divergenz des Vektorpotentials im Außenraum  $\vec{A}^{(a)}$  ist aufgrund der COULOMB-Eichung des Potentials (Gleichung (2.11)) bekannt:

$$\text{div} \vec{A}^{(a)} = 0.$$

Damit ergibt sich:

$$\Delta \Phi^{(a)}(x, y, z, t) = 0. \quad (2.23)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.22) reduziert sich diese Gleichung auf die zweidimensionale LAPLACE-Gleichung für  $E_{\Phi}^{(a)}$ :

$$\Delta E_{\Phi}^{(a)}(x, y, t) = 0.$$

Die zur Lösung dieses Potentialproblems nötigen Randbedingungen müssen noch ermittelt werden.

Für das Vektorpotential im Außenraum  $\vec{A}^{(a)}$  vereinfacht sich die Gleichung (2.9) aufgrund der Divergenzfreiheit von  $\vec{A}$  zu

$$\text{rot rot } \vec{A}^{(a)} = \text{grad div } \vec{A}^{(a)} - \Delta \vec{A}^{(a)} = \mu_a \vec{J}_e,$$

wobei die Größe  $\vec{J}_e$  die erregende Stromdichte im Außenraum beschreibt.

Da Vektorpotential und erregende Ströme im vorliegenden ebenen Fall nur eine  $z$ -Komponente aufweisen und nicht von  $z$  abhängig sind:

$$\vec{A}^{(a)}(x, y, t) = \vec{e}_z A^{(a)}(x, y, t), \quad \vec{J}_e(x, y, t) = \vec{e}_z J_e(x, y, t),$$

gehört die einzig verbleibende  $z$ -Komponente von  $A^{(a)}$  der zweidimensionalen POISSON-Gleichung:

$$\Delta A^{(a)}(x, y, t) = -\mu_a J_e. \quad (2.24)$$

Diese geht für stromdichtefreie Gebiete in die LAPLACE-Gleichung über:

$$\Delta A^{(a)}(x, y, t) = 0. \quad (2.25)$$

Alle elektromagnetischen Feldgrößen des Leitersystems lassen sich somit durch Lösung zweidimensionaler Potentialprobleme bestimmen.

## 2.3 Grenzbedingungen an der Oberfläche der Leiter

Wertet man die MAXWELL'schen Gleichungen für Aufpunkte auf der Oberfläche eines Leiters aus, erhält man die im folgenden aufgeführten Grenzbedingungen für die in Abschnitt 2.1 vorgestellten elektromagnetischen Feldgrößen.

### 2.3.1 Allgemeine Grenzbedingungen

Der Vektor  $\vec{r}_c \in \mathbb{R}^2$  beschreibt im folgenden einen Aufpunkt auf einem Abschnitt der Randkontur des Leiters  $i$ . Der dort existierende Normalenvektor  $\vec{n}_0$  steht senkrecht auf dem Konturabschnitt und weist in den Leiter hinein. Die Gleichungen sind [30], S. 91 ff (für die Größen des elektrischen Feldes) und S. 310 ff (für die magnetischen Größen), entnommen; auf eine Herleitung aus den MAXWELL'schen Gleichungen wird verzichtet. An einer Grenzschicht gilt:

$$\vec{n}_0 \times (\vec{H}^{(a)}(\vec{r}_c, t) - \vec{H}^{(i)}(\vec{r}_c, t)) = \vec{K}(\vec{r}_c, t), \quad (2.26)$$

$$\vec{n}_0 \cdot (\mu_a \vec{H}^{(a)}(\vec{r}_c, t) - \mu_i \vec{H}^{(i)}(\vec{r}_c, t)) = 0, \quad (2.27)$$

$$\vec{n}_0 \times (\vec{E}^{(a)}(\vec{r}_c, t) - \vec{E}^{(i)}(\vec{r}_c, t)) = 0, \quad (2.28)$$

$$\vec{n}_0 \cdot (\varepsilon_a \vec{E}^{(a)}(\vec{r}_c, t) - \varepsilon_i \vec{E}^{(i)}(\vec{r}_c, t)) = \sigma(\vec{r}_c, t). \quad (2.29)$$

Die Gleichung (2.26) verknüpft hier die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke an der Leiterkante mit dem Strombelag  $\vec{K}(\vec{r}_c, t)$ . Die Normalkomponenten der magnetischen Flußdichte gehen ebenso wie die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke stetig über. Dagegen springt laut Gleichung (2.29) am Rand der Leiter die Normalkomponente

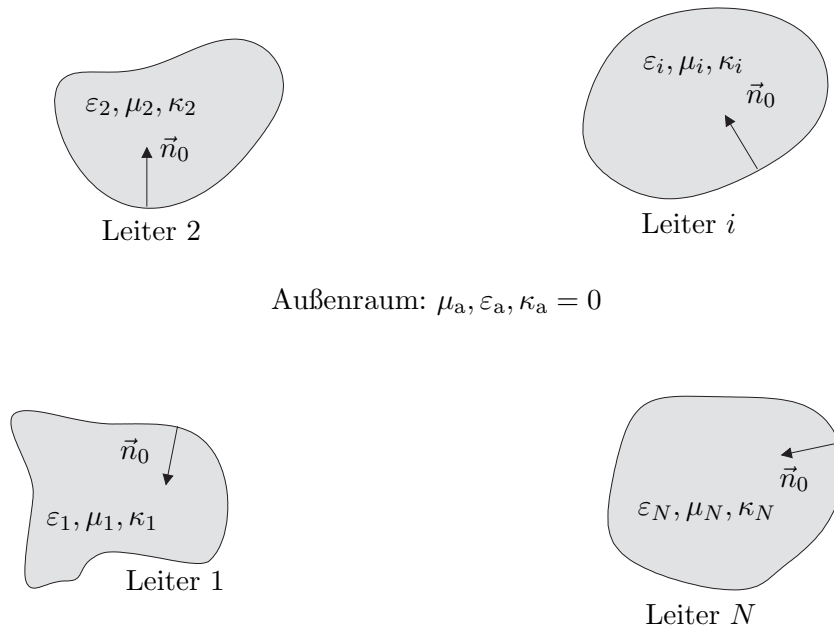


Abbildung 6: Konturen und Normalenvektoren eines allgemeinen Leitersystems

der elektrischen Flußdichte um die orts- und zeitveränderliche Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{r}_c, t)$ . Die in Gleichung (2.27) enthaltenen Größen  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_a$  stellen die Dielektrizitätskonstanten innerhalb von Leiter  $i$  bzw. im Außenraum der Leiter dar.

Mit Hilfe dieser allgemein gültigen Grenzbedingungen ist es nun möglich, entsprechende Grenzbedingungen für die eingeführten Vektorpotentiale  $\vec{A}^{(a)}$ ,  $\vec{W}^{(i)}$  (bzw.  $\vec{A}^{(i)}$ ) sowie die Skalarpotentiale  $\Phi^{(a)}$  und  $\Phi^{(i)}$  zu formulieren. Dabei werden die gegebenen ebenen Verhältnisse berücksichtigt.

Aus den Grenzbedingungen für die magnetischen Feldgrößen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  kann man dabei Grenzbedingungen für die magnetischen Vektorpotentiale  $\vec{A}^{(a)}$  und  $\vec{W}^{(i)}$  gewinnen, die zur Lösung der Randwertprobleme für diese Potentiale nötig sind.

Die Grenzbedingungen für die elektrischen Größen  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  liefern schließlich die Randbedingungen für das Potentialproblem für  $\Phi^{(a)}$ . Das elektrische Potential im Außenraum hat jedoch keinen Einfluß auf die Stromverteilung im Inneren der Leiter und wird daher auch nicht weiter untersucht.

### 2.3.2 Übergang der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke

Da die Oberfläche des Leiters aus physikalischen Gründen keinen Flächenstrombelag trägt ( $\vec{K} = 0$ ), erhält man aus Gleichung (2.26) unter Verwendung der Definition des Vektorpo-

tentials  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  und der Materialgleichung  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ :

$$\frac{1}{\mu_a}(\vec{n}_0 \times \text{rot}\vec{A}^{(a)}(\vec{r}_c, t)) = \frac{1}{\mu_i}(\vec{n}_0 \times \text{rot}\vec{A}^{(i)}(\vec{r}_c, t)).$$

Wie in Gleichung (2.13) nachgewiesen, besitzen die eingeführten Vektorpotentiale  $\vec{A}^{(a)}$ ,  $\vec{A}^{(i)}$  und  $\vec{W}^{(i)}$  nur eine Komponente in  $z$ -Richtung:  $\vec{A}^{(a)} = \vec{e}_z A^{(a)}$ ,  $\vec{W}^{(i)} = \vec{e}_z W^{(i)}$ . Damit kann das Kreuzprodukt aus Normalenvektor und Rotation des Vektorpotentials mit Hilfe des Nabla-Kalküls umgeformt werden. Mit

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

und  $\text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$  erhält man

$$\vec{n}_0 \times \text{rot}(\vec{e}_z A(\vec{r}_c, t)) = \vec{n}_0 \times (\nabla \times (\vec{e}_z A(\vec{r}_c, t))) = \vec{n}_0 \times ((\nabla A(\vec{r}_c, t)) \times \vec{e}_z).$$

Auf dieses Ergebnis wird der GRASSMANN'sche Entwicklungssatz für doppelte Kreuzprodukte,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c},$$

angewendet, der zu dem Zwischenergebnis

$$\vec{n}_0 \times \text{rot}(\vec{e}_z A(\vec{r}_c, t)) = \nabla A(\vec{r}_c, t) \underbrace{(\vec{n}_0 \cdot \vec{e}_z)}_{=0} - \vec{e}_z (\vec{n}_0 \cdot (\nabla A(\vec{r}_c, t))) = -\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial n_0} A$$

führt. Die Grenzbedingung (2.26) an der Leiteroberfläche lautet also (mit  $\nabla A = \text{grad}A$ ):

$$\frac{1}{\mu_a} \vec{n}_0 \cdot \text{grad} A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = \frac{1}{\mu_i} \vec{n}_0 \cdot \text{grad} A^{(i)}(\vec{r}_c, t).$$

Abschließend kann der Gradient des Vektorpotentials im Innenraum wegen

$$\text{grad} W^{(i)}(x, y, t) = \text{grad} \left( A^{(i)}(x, y, t) + \int C(t) dt \right) = \text{grad} A^{(i)}(x, y, t)$$

noch durch den Gradienten des BUCHHOLZ-Potentials ersetzt werden:

$$\frac{1}{\mu_a} \vec{n}_0 \cdot \text{grad} A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = \frac{1}{\mu_i} \vec{n}_0 \cdot \text{grad} W^{(i)}(\vec{r}_c, t). \quad (2.30)$$

### 2.3.3 Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Flußdichte

Aufgrund der aus der Quellenfreiheit der magnetischen Flußdichte resultierenden Gleichung (2.27) geht die Normalkomponente der magnetischen Flußdichte  $\vec{B}$  auf der Oberfläche stetig über, also:

$$\vec{n}_0 \cdot (\vec{B}^{(a)}(\vec{r}_c, t) - \vec{B}^{(i)}(\vec{r}_c, t)) = 0.$$

Mit Hilfe von

$$\vec{n}_0 \cdot \text{rot}(\vec{e}_z A) = \vec{n}_0 \cdot (\nabla \times (\vec{e}_z A)) = \vec{n}_0 \cdot (\nabla A \times \vec{e}_z) = (\vec{n}_0 \times \nabla A) \cdot \vec{e}_z,$$

und  $\nabla A = \text{grad}A$  erhält man

$$\vec{n}_0 \times \text{grad} A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = \vec{n}_0 \times \text{grad} A^{(i)}(\vec{r}_c, t).$$

Die Komponente des Gradienten von  $A$ , die entlang der Leiterkontur weist, muß also an der Grenzfläche stetig übergehen.

Diese Forderung kann auf zwei verschiedene Arten erfüllt werden. Die erste Möglichkeit liegt darin, daß das rein tangential zur Leiteroberfläche gerichtete Vektorpotential  $\vec{A} = \vec{e}_z A(\vec{r}_c, t)$  selbst als stetig angesetzt wird. Dies führt zu der Forderung

$$A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = W^{(i)}(\vec{r}_c, t) - \int C(t)dt = A^{(i)}(\vec{r}_c, t). \quad (2.31)$$

Alternativ dazu wäre wegen

$$\text{grad} W^{(i)}(\vec{r}_c, t) = \text{grad} A^{(i)}(\vec{r}_c, t)$$

auch die Formulierung

$$A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = W^{(i)}(\vec{r}_c, t) \quad (2.32)$$

möglich. Zur Beantwortung der Frage, welche der beiden Gleichungen richtig ist, muß der Übergang der elektrischen Feldgrößen an der Grenzschicht untersucht werden.

### 2.3.4 Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke

Über die Grenzbedingung (2.28) werden die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke in Außen- und Innenraum miteinander gekoppelt. Im Inneren eines Leiters besitzt das elektrische Feld nur eine  $z$ -Komponente und verläuft damit ohnehin rein tangential zur Oberfläche des Leiters:  $\vec{E}^{(i)} = \vec{e}_z E^{(i)}$ . Der  $z$ -gerichteten Anteil der Feldstärke im Außenraum,  $E_z^{(a)}$ , kann mit Hilfe der Gleichungen (2.20) und (2.21) bestimmt werden:

$$E_z^{(a)}(\vec{r}_c, t) = -\frac{\partial}{\partial t} A^{(a)}(\vec{r}_c, t) - E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t).$$

Unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen BUCHHOLZ-Potential und elektrischer Feldstärke im Innenraum aus Gleichung (2.19), Seite 13, erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} W^{(i)}(\vec{r}_c, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} A^{(a)}(\vec{r}_c, t) - E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t), \\ W^{(i)}(\vec{r}_c, t) &= A^{(a)}(\vec{r}_c, t) + \int E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t)dt. \end{aligned}$$



Das BUCHHOLZ-Potential kann nach Gleichung (2.16) durch  $W^{(i)}(x, y, t) = A^{(i)}(x, y, t) + \int C(t)dt$  ersetzt werden:

$$A^{(i)}(\vec{r}_c, t) + \int C(t)dt = A^{(a)}(\vec{r}_c, t) + \int E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t)dt.$$

Berücksichtigt man die aus Gleichung (2.31) ersichtliche Stetigkeit des Vektorpotentials:

$$A^{(a)}(\vec{r}_c, t) = A^{(i)}(\vec{r}_c, t),$$

kann man als Ergebnis dieser Überlegungen feststellen, daß der Beitrag des elektrischen Skalarpotentials im Außenraum  $E_{\Phi}^{(a)}$  auf den Oberflächen der Leiter konstant ist:

$$E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t) = C(t);$$

die Leiteroberflächen bilden also die Äquipotentiallinien von  $E_{\Phi}^{(a)}$ . Diese Beziehung liefert die Randbedingung, welche zusammen mit Gleichung (2.23) das Potentialproblem im Außenraum beschreibt. Die Lösung dieses Randwertproblems liefert das skalare Potential  $\Phi^{(a)}$ .

Die Verwendung der in Gleichung (2.32) formulierten Randbedingung für das Vektorpotential,  $A^{(a)} = W^{(i)}$  führt hier auf

$$E_{\Phi}^{(a)}(\vec{r}_c, t) = 0$$

und damit auf ein physikalisch unsinniges Ergebnis für  $E_{\Phi}^{(a)}$ . Daher muß für den Übergang der Vektorpotentiale die Gleichung (2.31) verwendet werden.

### 2.3.5 Übergang der Normalkomponente der elektrischen Flußdichte

Die Gleichung (2.29) nimmt hier aufgrund der Tatsache, daß die elektrische Feldstärke im Innenraum rein  $z$ -gerichtet ist und somit keinen Anteil in Richtung der Flächennormalen auf der Grenzschicht besitzt, die folgende Form an:

$$\sigma(\vec{r}_c, t) = \vec{n}_0 \cdot (\epsilon_a \vec{E}^{(a)}(\vec{r}_c, t)).$$

Nach Lösen des Randwertproblems für das elektrische Feld im Außenraum kann mit Hilfe dieser Gleichung aus der dann bekannten Feldstärke die Dichte der Flächenladung, die sich auf der Leiteroberfläche ausbildet, berechnet werden.

## 2.4 Integraldarstellungen für das Vektorpotential

Ausgehend vom zweiten GREEN'schen Satz und der Differentialgleichung für das Vektorpotential (Gleichung (2.25), Seite 15) werden in diesem Abschnitt Integraldarstellungen für das Vektorpotential entwickelt.

## 2.4.1 Herleitung der Integraldarstellung für nichtleitende Gebiete

Der zweite GREEN'sche Satz

$$\iiint_{\tau} (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) d\tau_0 = \iint_{S=\partial\tau} (\Phi \text{grad} \Psi - \Psi \text{grad} \Phi) \cdot \vec{n}_0 dS_0 \quad (2.33)$$

ist gültig für Volumina  $\tau$  mit stückweise glatter Berandung  $\partial\tau$  und für mindestens zweimal stetig differenzierbare skalare Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$ , wobei  $\tau$  ein Volumen mit einer geschlossenen Oberfläche  $S = \partial\tau$  bezeichnet und der Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}_0$  aus dem Integrationsvolumen  $\tau$  herauszeigt. Die angegebenen Integrationen und Differentiationen geschehen grundsätzlich nach den Koordinaten des Quellpunktes  $\vec{r}_0$ . Die Koordinaten des Aufpunktes spielen in diesem Zusammenhang die Rolle von Parametern.

Für die Skalarfunktion  $\Psi$  in Gleichung (2.33) setzt man die  $z$ -Komponente des Vektorpotentials  $A^{(a)}$  im nichtleitenden Außenraum ein, für die die Differentialgleichung (2.24) gilt:

$$\Delta A^{(a)} = -\mu_a J_e.$$

Benötigt wird nun für  $\Phi$  eine Funktion, die einer Differentialgleichung genügt, welche in ihrer Struktur derjenigen für das Vektorpotential ähnlich ist:

$$\Delta \Phi = -\delta_3.$$

Der Ausdruck  $\delta_3$  bezeichnet die dreidimensionale DIRAC-Distribution [39, Kap.2].

Aus der Literatur entnimmt man den Fundamentalkern

$$\underline{K} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad \text{mit} \quad \Delta \underline{K} + k^2 \underline{K} = -\delta_3.$$

Wie unschwer zu erkennen ist, erhält man mit  $k = 0$  die gesuchte Funktion, die als Kernfunktion  $K^{(a)}$  bezeichnet werden soll und für die Funktion  $\Phi$  eingesetzt wird. Diese Kernfunktion stimmt hier mit der GREEN'schen Funktion des freien Raumes überein. Die Funktion  $K^{(a)}$  ist dabei von Auf- und Quellpunktvektor abhängig.

Damit erhält man für die linke Seite von Gleichung (2.33):

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} (K^{(a)} \underbrace{\Delta A^{(a)}}_{=-\mu_a J_e} - A^{(a)} \underbrace{\Delta K^{(a)}}_{=-\delta_3}) d\tau_0 &= \iint_{S=\partial\tau} (K^{(a)} \text{grad} A^{(a)} - A^{(a)} \text{grad} K^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 dS_0, \\ \underbrace{\iiint_{\tau} A^{(a)} \delta_3 d\tau_0}_{= A^{(a)}} &= \mu_a \iiint_{\tau} K^{(a)} J_e d\tau_0 + \iint_{S=\partial\tau} (K^{(a)} \text{grad} A^{(a)} - A^{(a)} \text{grad} K^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 dS_0. \end{aligned}$$

Der Beitrag einer externen erregenden Stromdichte  $\vec{J}_e$  wird als erregendes Vektorpotential  $A_e$  ausgedrückt:

$$A_e \stackrel{\text{def}}{=} \mu_a \iiint_{\tau} K^{(a)} J_e d\tau_0. \quad (2.34)$$

Mit dieser Abkürzung ergibt sich:

$$A^{(a)} = \iint_{S=\partial\tau} (K^{(a)} \text{grad} A^{(a)} - A^{(a)} \text{grad} K^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 \, dS_0 + A_e.$$

Das Hüllflächenintegral auf der rechten Seite dieses Ausdrucks ist über die Oberfläche aller Leiter sowie die unendlich ferne Hülle zu bilden. Da das Vektorpotential  $A^{(a)}$  im Integranden nicht von  $z$  abhängig ist, kann die Integration in  $z$ -Richtung separat durchgeführt werden. Unter Beachtung der Tatsache, daß für das Flächenelement auf der Hüllfläche  $dS_0 = dz_0 \, ds_o$  gilt, erhält man:

$$A^{(a)} = \oint_{C=\partial\Omega} (A^{(a)} \text{grad} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0 \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} G_{20}} - \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0 \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} G_{20}} \text{grad} A^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 \, ds_o + A_e.$$

Der Integrand des Volumeneintegral in Gleichung (2.34) ist ebenfalls unabhängig von  $z$ . Daher läßt sich diese Gleichung mit  $d\tau_0 = dz_0 \, d\Omega_0$  wie folgt formulieren

$$A_e = \mu_a \iint_{\Omega_a} J_e \left( \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0 \right) d\tau_0;$$

die Integrationsfläche  $\Omega_a$  erstreckt sich dabei über den Außenraum aller Leiter.

Die hier neu eingeführte Funktion  $G_{20}$  bezeichnet die Kernfunktion für den ebenen Fall. Sie wird als

$$G_{20} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0 \quad (2.35)$$

definiert; ihre Eigenschaften werden in Abschnitt 2.4.2 und Kapitel 3 genauer untersucht.

Unter Verwendung dieser Funktion erhält man die Integraldarstellung des Vektorpotentials aus den Randwerten:

$$A^{(a)} = \oint_{C=\partial\Omega} (A^{(a)} \text{grad} G_{20} - G_{20} \text{grad} A^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 \, ds_o + A_e. \quad (2.36)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\Omega$  die Querschnittsfläche aller Leiter und  $C = \partial\Omega$  deren Kontur. Die Funktion  $G_{20}$  ist die zweidimensionale Kernfunktion für ebene Feldprobleme.

Alternativ zu Gleichung (2.36) ist eine weitere Integraldarstellung für die Normalableitung von  $A^{(a)}$  möglich. Dazu wird jeweils auf beiden Seiten die Richtungsableitung  $\vec{n} \cdot \text{grad}$  gebildet:

$$\vec{n} \cdot \text{grad} A^{(a)} = \vec{n} \cdot \text{grad} \oint_{C=\partial\Omega} (A^{(a)} \text{grad} G_{20} - G_{20} \text{grad} A^{(a)}) \cdot \vec{n}_0 \, ds_o + \vec{n} \cdot \text{grad} A_e. \quad (2.37)$$

Wählt man in Gleichung (2.36) das Gebiet der Leiter als Querschnittsfläche  $\Omega$  und dementsprechend den Rand  $C = \partial\Omega$  als Integrationskontur, erhält man für Aufpunkte auf dem Rand des Konturintegrals die „klassische“ Randintegralgleichung. Auf analogem Weg ist über Gleichung (2.37) eine vollständig gleichwertige Integralgleichung für die tangentialen Komponenten der magnetischen Feldstärken zu erreichen.

## 2.4.2 Kernfunktion des ebenen Stromverdrängungsproblems für nichtleitende Gebiete

Für die weitere Rechnung wird die in Abschnitt 2.4.1 definierte Kernfunktion  $G_{20}$  benötigt, die aus dem Fundamentalkern durch Durchführung der Integration  $dz_0$  berechnet werden kann.

Die Kernfunktion für den ebenen Fall wurde in Gleichung (2.35) wie folgt definiert:

$$G_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0.$$

Nach dem Einsetzen des Kerns kann die Integration analytisch ausgeführt werden. Hier wird die Abkürzung  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  verwendet:

$$\begin{aligned} G_{20} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K^{(a)} dz_0 = \frac{1}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^{+L} \frac{dz_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}}, \\ &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( z_0 + \sqrt{r^2 + z_0^2} \right) \right]_{z_0=-L}^{z_0=+L}, \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \ln \left\{ -1 + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + 1} \right\} - \ln \left\{ 1 + \sqrt{\frac{r^2}{L^2} + 1} \right\} \right). \end{aligned}$$

Der auftretende Ausdruck  $\sqrt{\frac{r^2}{L^2} + 1}$  kann für große Werte von  $L$  durch die folgenden Ausdruck ersetzt werden:

$$\sqrt{\frac{r^2}{L^2} + 1} \approx \frac{r}{2L} + 1,$$

mit dessen Hilfe die Gleichung für  $G_{20}$  weiter umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned} G_{20} &= -\frac{1}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{-1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} + 1}{1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} + 1} \right) \approx -\frac{1}{4\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2}}{2} \right), \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left( \ln(R^2) - 2 \lim_{L \rightarrow \infty} \ln(2L) \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + \text{const.} \end{aligned}$$

Die Konstante, die dem Kern hinzugefügt wurde, ist unendlich groß und führt theoretisch dazu, daß das Integral divergiert. Sie ist jedoch physikalisch bedeutungslos ([30, S. 270]); ihr Beitrag zum Integral muß also nicht berücksichtigt werden.

## 2.4.3 Beitrag der unendlich fernen Hülle

Der Rand  $C = \partial\Omega$  der in dieser Arbeit betrachteten Leiteranordnungen besteht aus mehreren nicht zusammenhängenden Gebieten: den Rändern der einzelnen Leiter  $C_i = \partial\Omega_i$  sowie der unendlich fernen Hülle  $C_\infty$ .

Durch die folgende Betrachtung wird jedoch gezeigt, daß das Randintegral über die unendlich ferne Hülle verschwindet und damit keinen Beitrag zur Normalableitung des Vektorpotentials im Lösungsgebiet liefert.

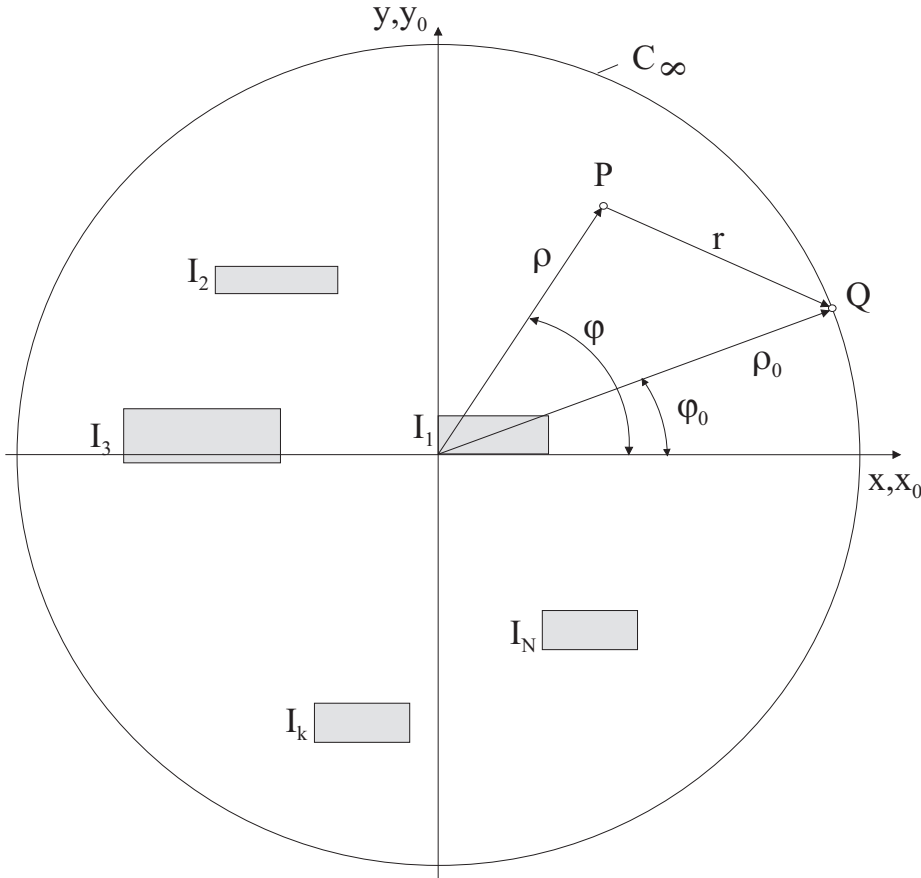


Abbildung 7: Unendlich ferne Hülle

Der Beitrag  $\vec{n}_0 \cdot \text{grad} A_\infty^{(a)} = \frac{\partial}{\partial \rho_0} A_\infty^{(a)}$  der Fernhülle zur Richtungsableitung des Vektorpotentials im Aufpunkt  $P_\infty$  ergibt sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_0} A_\infty^{(a)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \oint_{C_\infty} (A^{(a)}(\vec{r}_0, t) \text{grad} \ln(r) - \ln(r) \text{grad} A^{(a)}(\vec{r}_0, t)) \cdot \vec{n}_0 ds_\infty; \quad (2.38)$$

hier bezeichnet  $\vec{r}$  den Ortsvektor eines beliebigen Punktes im Außenraum und  $\vec{r}_0$  einen Quellpunkt auf der fernen Hülle. Die unendlich ferne Hülle wird unter den gegebenen ebenen Verhältnisse hier als Kreis mit Radius  $\rho_0$  angenommen, der sehr groß gegenüber allen Abmessungen der Leiteranordnung in  $x$  und  $y$ -Richtung sein soll. Diese Voraussetzung stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, da die Form der Fernhülle eben wegen ihres Abstandes zum den Leitern keinen Einfluß auf das Ergebnis hat.

Der Nachweis, daß die unendlich ferne Hülle  $C_\infty$  keinen Beitrag zur Ableitung des Vektorpotentials im Außenraum liefert, wird vorteilhaft in ebenen Zylinderkoordinaten geführt, in

denen Aufpunktvektor  $\vec{r}$  und Quellpunktvektor  $\vec{r}_0$  ( $\vec{r}, \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ ) die folgende Form annimmt:

$$\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos(\varphi) + \vec{e}_y \rho \sin(\varphi), \quad \vec{r}_0 = \vec{e}_x \rho_0 \cos(\varphi_0) + \vec{e}_y \rho_0 \sin(\varphi_0).$$

Den Betrag des Abstandsvektors  $r = |\vec{r}| = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  wird hier zu

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Die im folgenden benötigte Normalenableitung ist auf der Fernhülle mit der Ableitung nach  $\rho_0$  identisch:

$$\vec{n}_0 \cdot \text{grad} = \frac{\partial}{\partial \rho_0}.$$

Die Winkel  $\varphi$  und  $\varphi_0$  sowie die Größen  $\rho$  und  $\rho_0$  können der Abbildung 7 entnommen werden. Mit diesen Größen wird Gleichung (2.38) zu:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_0} A_\infty^{(a)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \int_0^{2\pi} (A^{(a)}(\rho_0, \varphi_0, t) \frac{\partial}{\partial \rho_0} \ln(r) - \ln(r) \frac{\partial}{\partial \rho_0} A^{(a)}(\rho_0, \varphi_0, t)) \rho_0 d\varphi_0. \quad (2.39)$$

Das Vektorpotential realer Stromverteilungen läßt sich stets durch die Überlagerung von Stromschleifen erzeugen und weist Dipolcharakter auf; es klingt daher für  $r \rightarrow \infty$  mit  $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{\rho_0}$  ab. Die Normalenableitung des Vektorpotentials verhält sich für weit entfernte Quellpunkte proportional zu  $\frac{1}{\rho_0^2}$ , so daß der Integrand in Gleichung (2.39) auf der unendlich fernen Hülle tatsächlich verschwindet.

Eine detailliertere Betrachtung zum Beitrag der Fernhülle kann [11] und [33] entnommen werden.

#### 2.4.4 Herleitung der Integraldarstellung für leitende Gebiete

Zur Vervollständigung der Ansätze wird hier kurz die Herleitung der Integraldarstellung für das BUCHHOLZ-Potential im Innenraum des  $i$ -ten Leiters beschrieben. Diese kann auf analoge Weise zu einer Randintegralgleichung umformuliert werden. Zusammen bilden diese beiden Integralgleichungen ein System zur Berechnung der Potentialfunktionen im Innen- und Außenraum (siehe auch [38]). Dieser Weg wird aber zugunsten eines in Kapitel 4 beschriebenen Reihenansatzes für den Innenraum **nicht** begangen.

Für das BUCHHOLZ-Potential im Innenraum  $W^{(i)}$  gilt die Differentialgleichung (2.17):

$$\Delta W_i^{(i)} = -\mu_i J_i = -\kappa_i \mu_i \frac{\partial}{\partial t} W_i^{(i)},$$

die nach Übergang in die komplexe Ebene mit  $W_i^{(i)}(\vec{r}, t) = \Re \{ \underline{W}_i^{(i)} e^{j\omega t + \psi} \}$  auf die HELMHOLTZgleichung führt:

$$\Delta \underline{W}_i^{(i)} = -j\omega \kappa_i \mu_i \underline{W}_i^{(i)}.$$

Da die im Innenraum gültige komplexwertige Kernfunktion  $\underline{K}^{(i)}$  eine entsprechende Gleichung erfüllen muß, ist sie eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \underline{K}^{(i)} + k^2 \underline{K}^{(i)} = -\delta_3$$

mit  $k^2 = j\omega\kappa_i\mu_i$ . Die Kernfunktion

$$\underline{K}^{(i)} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}, r = |\vec{r}_p - \vec{r}_q|, k \in \mathbb{C}$$

genügt dieser Forderung. Aus diesem Grundkern kann man die Kernfunktion für ebene Probleme berechnen:

$$\underline{G}_{20}^{(i)} = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(\underline{k}r);$$

der Ausdruck  $H_0^{(2)}$  bezeichnet die HANKEL-Funktion zweiter Art der Ordnung Null. Zur Herleitung von  $\underline{G}^{(i)}$  wird auf [21] oder [38] verwiesen. Der Kerne für den Innenraum im ebenen Fall wird hier zur Unterscheidung mit einem hochgestellten <sup>(i)</sup> indiziert.

In den zweiten GREEN'schen Satz werden nun für die Skalarfunktion  $\Psi$  das  $z$ -gerichtete BUCHHOLZ-Potential  $W^{(i)}$  im Innenraum von Leiter  $i$  und für  $\Phi$  den entsprechenden Kern für leitfähige Gebiete  $G_i$  eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left( K^{(i)} \underbrace{\Delta W^{(i)}}_{=-k^2 W^{(i)}} - W^{(i)} \underbrace{\Delta K^{(i)}}_{=-k^2 K^{(i)} - \delta_3} \right) d\tau_0 &= \iint_{S=\partial\tau} (K^{(i)} \text{grad} W^{(i)} - W^{(i)} \text{grad} K^{(i)}) \cdot \vec{n}_0 dS_0, \\ \underbrace{\iiint_{\tau} W^{(i)} \delta_3 d\tau_0}_{= W^{(i)}} &= \iint_{S=\partial\tau_0} (K^{(i)} \text{grad} W^{(i)} - W^{(i)} \text{grad} K^{(i)}) \cdot \vec{n}_0 dS_0, \end{aligned}$$

und als Ergebnis:

$$W^{(i)} = \iint_{S=\partial\tau_0} (K^{(i)} \text{grad} W^{(i)} - W^{(i)} \text{grad} K^{(i)}) \cdot \vec{n}_0 dS_0.$$

Da die Funktion  $W^{(i)}$  nicht von  $z_0$  abhängig ist, kann auch hier mit  $dS_0 = dz_0 ds_0$  die Integration  $dz_0$  durchgeführt werden. Man erhält analog zum Außenraum für

$$W^{(i)} = \oint_{C_i=\partial\Omega_i} (G_{20}^{(i)} \text{grad} W^{(i)} - W^{(i)} \text{grad} G_{20}^{(i)}) \cdot \vec{n}_0 ds_0.$$





## Kapitel 3

# Untersuchung der Kernfunktion

In Kapitel 2 wird der zweite GREEN'sche Satz zur Herleitung der Integraldarstellungen des Vektorpotentials verwendet (s. Seite 20). Die Funktionen im Integranden des Hüllflächenintegrals auf der rechten Seite der Gleichung (2.33) müssen dabei verschiedene Bedingungen hinsichtlich Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit erfüllen. Während diese Bedingungen seitens des Vektorpotentials  $\vec{A}$  ohne weiteres als erfüllt angesehen werden können, bedarf die Kernfunktion einer genaueren Untersuchung.

Da die Lösung der in den oben definierten Integraldarstellungen auftretenden Integrale auch unter Verwendung umfangreicher Integralsammlungen wie [20], [36], [37] nicht direkt möglich ist, wird die Kernfunktion nach FOURIER transformiert. Diese Rechnung ist in [8] erstmalig vorgenommen worden und ist von dort übernommen. Mit der FOURIERtransformierten des Kerns wird die weiter unten erfolgende analytische Auswertung der Integrale möglich, wobei auch die Transformierte des Kernes integrierbar und differenzierbar sein muß. Sie wird daher in die in diesem Kapitel vorgenommenen Betrachtungen mit eingeschlossen.

### 3.1 FOURIERentwicklung des Kerns

Der in der Kernfunktion  $G_{20}$  auftretende Abstand  $|\vec{r} - \vec{r}_0|$ ,  $\vec{r}, \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^2$  zwischen Auf- und Quellpunkt kann durch den entsprechenden Abstand in der komplexen Ebene ersetzt werden:

$$G_{20}(x, x_0, y, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln |r| = -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |w - w_0|, \quad (3.1)$$

mit  $w = x + jy$  und  $w_0 = x_0 + jy_0$ .

Nach [8, S.221] gewinnt man die FOURIERtransformierte einer reellen und geraden Funktion  $f(x, y)$  gewinnt als

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} Q(\nu, y) \cos(\nu x) d\nu,$$

mit

$$Q(\nu, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x, y) \cos(\nu x) dx.$$

Setzt man für  $f(x, y)$  die Funktion

$$\ln |w| = \Re \{ \ln(w) \} = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + y^2)), \quad w = x + jy \in \mathbb{C}$$

ein und berechnet das erste Integral, so erhält man unter der Voraussetzung  $\Im\{w\} \geq 0$ :

$$\ln |w| = -\Re \left\{ \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\nu} e^{j\nu w} \right) d\nu \right\}.$$

Im Bildbereich der FOURIERtransformation ergibt sich im Integranden des FOURIERintegrals eine Exponentialfunktion mit einem komplexwertigen Argument  $j\nu w$ . Der positive Imaginärteil von  $w$  liefert nach Multiplikation mit  $j$  einen negativen reellen Wert, der den Integranden für  $\nu \rightarrow \infty$  exponentiell abklingen läßt. Dieses Verhalten ist zur Konvergenz des Integrals notwendig (s. [47]).

Da die logarithmische Abstandsfunktion hinsichtlich der Variablen  $x$  und  $y$  symmetrisch ist, können beide Koordinaten vertauscht werden, ohne das Ergebnis der Abstandsbildung zu beeinflussen. Für die in dieser Arbeit behandelten Fälle, bei denen die Kanten aller Leiter parallel zu den Achsen eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems verlaufen, sind zwei Darstellungen erforderlich, bei denen je nach Lage von Auf- und Quellpunkt unterschieden werden muß.

Die erste Darstellungsmöglichkeit lautet:

$$G_{20}^{(y)} = -\frac{1}{2\pi} \ln |(w-w_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[\nu(x-x_0)] e^{-\nu|y-y_0|} \frac{d\nu}{\nu}. \quad (3.2)$$

Bei dieser FOURIERentwicklung des Kerns ist aufgrund der oben angeführten Voraussetzungen für die Konvergenz des Integrals eine Fallunterscheidung in  $y$  nötig, wenn die im Exponenten enthaltene Betragsfunktion im Laufe der Rechnung aufgelöst werden muß. Der im Klammern hochgestellte Index bezieht sich auf diese Fallunterscheidung und dient zur Unterscheidung von der zweiten Entwicklung:

$$G_{20}^{(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[\nu(y-y_0)] e^{-\nu|x-x_0|} \frac{d\nu}{\nu}. \quad (3.3)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht werden kann, also

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \frac{1}{\nu} (e^{\pm j\nu(w-w_0)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_0^*)}) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\nu} (e^{\pm j\nu(w-w_0)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_0^*)}) d\nu, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}$$

gilt (und die Differentiation nach  $y$  ebenfalls mit der Integration getauscht werden darf), erhält man für die Normalableitungen des Kerns

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20}^{(y)} &= \frac{\operatorname{sgn}(y-y_0)}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[\nu(x-x_0)] e^{-\nu|y-y_0|} d\nu, \\ \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20}^{(y)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sin[\nu(x-x_0)] e^{-\nu|y-y_0|} d\nu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der Nachweis der Gültigkeit der Annahme wird im folgenden Abschnitt bei der Betrachtung über Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität des Kerns geführt.

Die Normalableitungen der alternativen Darstellung lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_0} G_{20}^{(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sin[\nu(y - y_0)] e^{-\nu|x-x_0|} d\nu, \\ \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20}^{(x)} &= \frac{\operatorname{sgn}(x - x_0)}{2\pi} \int_0^\infty \cos[\nu(y - y_0)] e^{\mp\nu(w-w_0)} d\nu.\end{aligned}\tag{3.5}$$

### 3.2 Nachweis von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrabilität des Kerns

Die in Kapitel 2 definierte Kernfunktion  $G_{20}$  soll an dieser Stelle im Hinblick auf die folgenden beiden Fragestellungen untersucht werden:

1. Ist das Einsetzen von  $G_{20}$  in den zweiten GREEN'schen Satz (2.33) zur Gewinnung der Integraldarstellung des Vektorpotentials im Außenraum (Gleichung (2.37)) unter den in Abschnitt 2.3.1 genannten Voraussetzungen zulässig?
2. Darf die Reihenfolge von Differentiation und Integration in den Gleichungen (3.4) und (3.5) vertauscht werden, um die Normalenableitungen des Kerns zu berechnen?

Um die erwähnten Operationen durchführen zu dürfen, müssen die Kernfunktion und ihre FOURIERtransformierte folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. Die Funktion  $G_{20}$  muß stetig und mindestens zweimal stetig differenzierbar sein.
2. Das FOURIERintegral in den Gleichungen (3.4) und (3.5) muß integrierbar sein.

Diese Voraussetzungen erfüllt die Funktion  $G_{20}$  wegen ihrer Singularität für  $\vec{r} = \vec{r}_0$  auf den ersten Blick nicht; bei der Betrachtung des FOURIERintegrals kommt erschwerend die Tatsache hinzu, daß die obere Integrationsgrenze nicht im Endlichen liegt. Zum Nachweis der geforderten Eigenschaften muß daher die Integrationstheorie nach LEBESGUE herangezogen werden. Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich jedoch die geforderten Eigenschaften für die Kernfunktion nachweisen.

Laut [18], S. 98, ist eine Funktion  $g(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}} f(\vec{r}, \nu) d\nu$  in einem Punkt  $\vec{r}_1$  stetig, wenn die im Integranden auftauchende Funktion  $f$  folgenden Bedingungen genügt:

1. Für jedes feste  $\nu$  ist die Funktion  $f$  stetig im Punkt  $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ .
2. Für jedes feste  $\vec{r}$  ist  $f$  integrierbar über den  $\mathbb{R}^3$ .

3. Die Funktion  $f$  ist beschränkt.

Für die Differenzierbarkeit von  $g$  müssen folgende Forderungen an  $f$  erfüllt sein:

1. Für jedes feste  $\nu$  ist die Funktion  $f$  differenzierbar im Punkt  $\vec{r}_1 \in \mathbb{R}^3$ .
2. Für jedes feste  $\vec{r}$  ist  $f$  integrierbar über den  $\mathbb{R}^3$ .
3. Die Funktion  $f$  ist beschränkt.

Schränkt man nun den Definitionsbereich der Kernfunktion wie folgt ein:

$$G_{20} : \mathbb{R}^3 \setminus \{r_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{r}) \mapsto G_{20}(\vec{r}),$$

so erfüllt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{r_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{r}, \nu) \mapsto \frac{1}{\nu} e^{\pm j\nu(w-w_0)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_0^*)}$$

als Integrand des FOURIERintegrals die erste Bedingung. Weiterhin ist  $f$  bezüglich der Variable  $\nu$  integrierbar über  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Der Ausschluß dieser Menge vom LEBESGUE-Maß Null beeinflußt laut [18], S. 70, die Integrierbarkeit nicht, so daß auch die Bedingung 2 erfüllt wird. Auf dem eingeschränkten Definitionsbereich in  $\nu$  ist der Integrand auch beschränkt, so daß  $G_{20}$  in allen Punkten des  $\mathbb{R}^3$  mit Ausnahme von  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$  stetig ist.

Unter den angeführten Einschränkungen ist  $f$  differenzierbar, so daß auch die Differenzierbarkeit von  $G_{20}$  nachgewiesen ist.

Zum Nachweis der Integrierbarkeit betrachtet man nochmals die Funktion  $G_{20}$  mit ihrem modifizierten Definitionsbereich:

$$G_{20} : \mathbb{R}^3 \setminus \{r_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\vec{r}) \mapsto G_{20}(\vec{r}).$$

Auch an dieser Stelle wurde eine Menge vom LEBESGUE-Maß Null aus dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion ausgeschlossen. Auf dem neuen Definitionsbereich ist die Funktion  $G_{20}$  integrierbar, somit ist sie es auch auf dem ursprünglichen Definitionsbereich.

Damit sind Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit der Kernfunktion auf dem  $\mathbb{R}^3$  nachgewiesen. Die Forderungen an die Stetigkeit erfüllt  $G_{20}$  nur, sofern der Punkt  $\vec{r} = \vec{r}_0$  aus ihrem Definitionsbereich ausgeschlossen wird. Das Verhalten von  $G_{20}$  und der Ableitungen in genau diesem Punkt muß noch untersucht werden.

### 3.3 Nachweis der Singularität für den Kern und die Normalableitungen des Kerns

Untersucht man die Funktion

$$G_{20} = -\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0|$$

im Punkt  $\vec{r} = \vec{r}_0$ , erhält man einen singulären Beitrag. Der Beitrag der Kernfunktion selbst erweist sich nach [8, S.26] als schwach singulär. Der Beitrag der Normalableitung läßt sich als DIRAC-Distribution darstellen, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

Die folgende Untersuchung geschieht unter Verwendung der FOURIERtransformierten des Kerns (3.2) und der entsprechenden Ableitungen aus Gleichung (3.4). Betrachtet wird nun unter Annahme ebener Verhältnisse eine Linienladung  $\lambda$ , deren Quellpunktskoordinaten  $x_0, y_0$  lauten und die sich im Vakuum befindet:

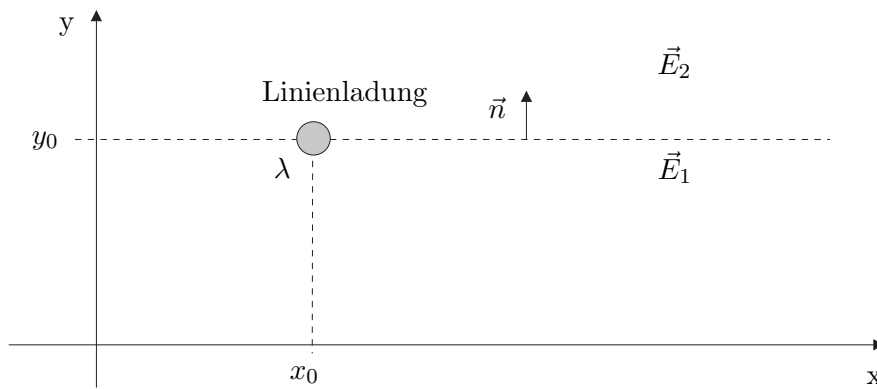


Abbildung 8: Linienladung  $\lambda$  bei  $x = x_0, y = y_0$

Das Potential dieser Ladungsanordnung entnimmt man der Literatur (z.B. [9]) :

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln |r| \quad \text{mit} \quad r = |r - r_0|.$$

In diese Beziehung wird nun die FOURIERentwicklung des logarithmischen Abstandes aus Gleichung (3.2) eingesetzt und man erhält:

$$\varphi = \frac{\lambda}{\epsilon} G_{20}^{(y)}$$

Die vorgegebene Ladung wird als Flächenladungsbedeckung  $\sigma$  auf der Fläche  $y = y_0 = const$  aufgefasst:

$$\sigma = \lambda \delta_1(x - x_0),$$

wobei hier durch  $\delta_1$  die eindimensionale DIRAC-Distribution bezeichnet wird.

Mit  $\vec{n} = \vec{e}_y$  und der Grenzbedingung (2.29) (siehe Seite 15) wird aus

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{\substack{y > y_0 \\ y \rightarrow y_0}} = -2 \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial G_{20}^{(y)}}{\partial y} =$$

zunächst:

$$\lambda \delta_1(x - x_0) = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon} \int_0^{\infty} \cos[\nu(x - x_0)] d\nu,$$

und anschließend die folgende Integraldarstellung für die DIRAC-Distribution entwickelt:

$$\delta_1(x - x_0) = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon} \int_0^{\infty} \cos[\nu(x - x_0)] d\nu.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den Betrachtungen in [10] überein, die dort anhand einer Untersuchung des Potentials einer Punktladung mit Hilfe einer [30] entnommenen Entwicklung für den reziproken Abstand erzielt wurden.

Durch Vergleich mit der Normalableitung des Kerns  $G_{20}^{(y)}$  (Gleichung (3.4)) für  $y > y_0$ ,  $y \rightarrow y_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial y_0} G_{20}^{(y)} \Big|_{y \rightarrow y_0} = \mp \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[\nu(x - x_0)] d\nu,$$

gelingt der Nachweis:

$$\frac{\partial}{\partial y_0} G_{20}^{(y)} \Big|_{y \rightarrow y_0} = \mp \frac{1}{2} \delta_1(x - x_0) \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}. \quad (3.6)$$

Die Rechnung für die  $x$ -gerichtete Ableitung verläuft analog.

Zur Verifikation des Ergebnisses wird nun geprüft, ob die gefundene Kernentwicklung der aus Gleichung (2.33) (für  $\Phi = 1$  und  $\Psi = G_{20}$ ) abgeleiteten Beziehung

$$\iint_S \Delta G_{20} dS_0 = \oint_{C=\partial S} \frac{\partial G_{20}}{\partial n_0} ds_0 = -1$$

genügt. Der Integrationsweg  $C$  des Konturintegrals verläuft dabei über zwei unendlich lange Geraden bei  $y_0 = y_{01} < y$  und  $y_0 = y_{02} > y$ . Unter Verwendung von Gleichung (3.4) erhält

man für die Normalenableitungen des Kerns:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\partial G_{20}}{\partial n_0} ds_0 &= + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_{20}}{\partial y_0} \Big|_{y_0=y_{01}<y} dx_0 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_{20}}{\partial y_0} \Big|_{y_0=y_{02}>y} dx_0, \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \cos[\nu(x-x_0)] e^{-\nu(y-y_{01})} d\nu - \int_0^{\infty} \cos[\nu(x-x_0)] e^{-\nu(y_{02}-y)} d\nu \right) dx_0 \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cos[\nu(x-x_0)] dx_0}_{=2\pi\delta_1(\nu)} (e^{-\nu(y-y_{01})} + e^{-\nu(y_{02}-y)}) d\nu \\
&= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} \delta_1(\nu) (e^{-\nu(y-y_{01})} + e^{-\nu(y_{02}-y)}) d\nu}_{=2} = -1
\end{aligned}$$

$$\oint_C \frac{\partial G_{20}}{\partial n_0} ds_0 = -1.$$

Damit ist gezeigt, daß die Kernentwicklung der Definitionsgleichung des Kerns genügt.

Durch diese Betrachtungen wurde nachgewiesen, daß die verwendete FOURIERtransformierte des logarithmischen Abstandes für  $\vec{r} = \vec{r}_0$  als DIRAC-Stoß dargestellt werden kann. Darüber hinaus erfüllt sie die Definitionsgleichung der Kernfunktion. Somit liefert die in Abschnitt 3.1.1 durchgeführte FOURIERtransformation der Kernfunktion eine Entwicklung, die alle für  $\vec{r} = \vec{r}_0$  gewünschten Eigenschaften aufweist.

Folglich ist die Verwendung von  $G_{20}$  und ihrer FOURIERtransformierten zulässig.





## Kapitel 4

# Reihenansatz für das BUCHHOLZ-Potential im Innenraum

In dieser Arbeit wird das Verhalten von Leiteranordnungen bei Erregung durch eingeprägte stationäre Wechselströme untersucht, die sich innerhalb des  $i$ -ten Leiters durch den komplex erweiterten Ansatz

$$I_i(t) = \Re \{ \underline{I}_i e^{j\omega t} \}, \quad \underline{I}_i = |I_i| e^{j\psi_e}$$

darstellen lassen. Hier wird der Phasenwinkel des Stromes zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit  $\psi_e$  bezeichnet. Die untersuchten Feldgrößen und Potentiale beschreiben den Zustand, der sich nach Einschalten der Wechselstromquelle für  $t \rightarrow \infty$  einstellt.

Für das BUCHHOLZ-Potential im Inneren des Leiters  $i$  gilt die Diffusionsgleichung (2.17). Die Lösung der Differentialgleichung im Leiterinneren erfordert eine Aufteilung des Potentials in orts- und zeitveränderliche Anteile.

Mit Hilfe des Ansatzes

$$W_i^{(i)}(x_i, y_i, t) = \Re \{ V_i(x_i, y_i) e^{j(\omega t + \psi_e)} \} \quad (4.1)$$

gelangt man auf die Differentialgleichung für die Ortsfunktionen  $V_i$ :

$$\Re \left\{ \left( \Delta V_i(x_i, y_i) - j\omega \mu_i \kappa_i V_i(x_i, y_i) \right) e^{j(\omega t + \psi_e)} \right\} = 0,$$

die der Gleichung (2.17) entspricht und die für alle  $t$  gelten muß. Folglich gehorcht der ortsabhängige Anteil des BUCHHOLZ-Potentials der HELMHOLTZgleichung:

$$\Delta V_i(x_i, y_i) - j\omega \kappa_i \mu_i V_i(x_i, y_i) = 0. \quad (4.2)$$

Im Folgenden wird auf die Kennzeichnung von komplexen Größen durch einen Unterstrich verzichtet. Alle betrachteten Größen werden als komplex angenommen, sofern sie im Text nicht ausdrücklich als reelle Größen benannt sind.

## 4.1 Ansatz für $V_i$ aus Separation

Zur Lösung der Stromverdrängungsgleichung für die Ortsfunktionen  $V_i$ , Gleichung (4.2), wird ein Produktansatz

$$V_i(x_i, y_i) = \Xi_i(x_i) \cdot Y_i(y_i)$$

gewählt, der auf zwei entkoppelte Differentialgleichungen in  $x_i$  und  $y_i$  führt:

$$\Delta V_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i^2} = j\omega\kappa_i\mu_i V_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Xi_i} \frac{d^2 \Xi_i}{dx_i^2} + \frac{1}{Y_i} \frac{d^2 Y_i}{dy_i^2} = j\omega\kappa_i\mu_i.$$

Betrachtet man die einzelnen Summanden der Differentialgleichung, so fällt auf, daß diese nur von jeweils einer Variablen abhängig sind. Daher können die auftretenden Terme der linken Seite nur Konstanten sein, so daß die Entkoppelung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung möglich ist. Hier sind zwei Lösungsmöglichkeiten gegeben:

$$\frac{1}{\Xi_i} \frac{d^2 \Xi_i}{dx_i^2} = -\alpha_{in}^2 \quad \wedge \quad \frac{1}{Y_i} \frac{d^2 Y_i}{dy_i^2} = \alpha_{in}^2 + j\omega\kappa_i\mu_i \quad (4.3)$$

und

$$\frac{1}{\Xi_i} \frac{d^2 \Xi_i}{dx_i^2} = \tilde{\alpha}_{in}^2 + j\omega\kappa_i\mu_i \quad \wedge \quad \frac{1}{Y_i} \frac{d^2 Y_i}{dy_i^2} = -\tilde{\alpha}_{in}^2, \quad (4.4)$$

unter Einschluß des Sonderfalles  $\alpha_{in} = 0$  bzw.  $\tilde{\alpha}_{in} = 0$ .

Die Elementarlösungen der Differentialgleichungen in Gleichung (4.3) sind:

$$\begin{array}{ll} \Xi_i \propto \sin(\alpha_{in}x_i) & \vee \quad \Xi_i \propto \cos(\alpha_{in}x_i), \\ Y_i \propto \sinh(\beta_{in}y_i) & \vee \quad Y_i \propto \cosh(\beta_{in}y_i), \end{array}$$

mit  $\beta_{in}^2 = \alpha_{in}^2 + j\omega\kappa_i\mu_i$ . Für Gleichung 4.4 erhält man entsprechend:

$$\begin{array}{ll} \Xi_i \propto \sinh(\tilde{\beta}_{in}x_i) & \vee \quad \Xi_i \propto \cosh(\tilde{\beta}_{in}x_i), \\ Y_i \propto \sin(\tilde{\alpha}_{in}y_i) & \vee \quad Y_i \propto \cosh(\tilde{\alpha}_{in}y_i), \end{array}$$

mit  $\tilde{\beta}_{in}^2 = \tilde{\alpha}_{in}^2 + j\omega\kappa_i\mu_i$ .

Man erhält also zwei Ansatzvarianten, die in jeweils einer Richtung Orthogonalfunktionen enthalten, mit denen die Anpassung des BUCHHOLZ-Potentials im Inneren an eine Potentialvorgabe auf dem Rand (bzw. an eine Vorgabe der Normalableitung des Potentials) möglich ist:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Xi_{in}(x_i) &= v_{Di1,n} \cos(\alpha_{in}x_i) + v_{Di2,n} \sin(\alpha_{in}x_i), \\ Y_{in}(y_i) &= v_{Di3,n} \cosh(\beta_{in}y_i) + v_{Di4,n} \sinh(\beta_{in}y_i) \end{aligned}$$

oder

$$(2) \quad \begin{aligned} \Xi_{in}(x_i) &= v_{Di5,n} \cosh(\tilde{\beta}_{in}x_i) + v_{Di6,n} \sinh(\tilde{\beta}_{in}x_i), \\ Y_{in}(y_i) &= v_{Di7,n} \cos(\tilde{\alpha}_{in}y_i) + v_{Di8,n} \sin(\tilde{\alpha}_{in}y_i). \end{aligned}$$

Hier bedeuten  $v_{Dip,n} \in \mathbb{C}, p = 1, \dots, 84$  komplexwertige Unbekannte.

Die Gesamtlösung für  $V_i$  erhält man durch Superposition aller Elementarlösungen:

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Xi_{i,n} \cdot Y_{i,n}}_{\stackrel{\text{def}}{=} V_{i,n}}.$$

Nach Einsetzen der Lösungen erhält man demnach als Ansatz:

$$V_i(x_i, y_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [v_{Di1,n} \cos(\alpha_{in}x_i) + v_{Di2,n} \sin(\alpha_{in}x_i)] [v_{Di3,n} \cosh(\beta_{in}y_i) + v_{Di4,n} \sinh(\beta_{in}y_i)] + [v_{Di5,n} \cosh(\tilde{\beta}_{in}x_i) + v_{Di6,n} \sinh(\tilde{\beta}_{in}x_i)] [v_{Di7,n} \cos(\tilde{\alpha}_{in}y_i) + v_{Di8,n} \sin(\tilde{\alpha}_{in}y_i)] \right\} \quad (4.5)$$

mit konstanten Koeffizienten  $v_{Dip,n} \in \mathbb{C}, p = 1, \dots, 8$ .

#### 4.1.1 Formulierung als DIRICHLET'sches Randwertproblem

Nutzt man den aus der Separation der Stromverdrängungsgleichung gewonnenen Ansatz dazu, ein rechteckförmiges Gebiet zu untersuchen, bei dem auf jeweils einem Randabschnitt das Vektorpotential vorgegeben und auf allen anderen zu Null gesetzt wird, so erhält man nach Superposition aller vier Teillösungen den nachstehendem Ansatz zur Lösung dieses DIRICHLET'schen Randwertproblems für das Vektorpotential im  $i$ -ten Leiter in Abhängigkeit von den lokalen Koordinaten  $(x_i, y_i)$  und unter Verwendung der Abmessungen des Gebiete ,  $a_i$  und  $b_i$  (s.a. Abbildung 3 auf Seite 6):

$$V_i(x_i, y_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [v_{i1,n} \sinh[\beta_{in}(b_i - y_i)] + v_{i3,n} \sinh(\beta_{in}y_i)] \frac{\sin(\alpha_{in}x_i)}{\sinh(\beta_{in}b_i)} + [v_{i4,n} \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - x_i)] + v_{i2,n} \sinh(\tilde{\beta}_{in}x_i)] \frac{\sin(\tilde{\alpha}_{in}y_i)}{\sinh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \right\}, \quad (4.6)$$

mit bekannten Konstanten  $\alpha_{in}, \beta_{in}, \tilde{\alpha}_{in}$  und  $\tilde{\beta}_{in}$ . Die im Ansatz enthaltenen Koeffizienten  $v_{i1,n}, v_{i2,n}, v_{i3,n}, v_{i4,n} \in \mathbb{C}$  sind unbekannt. Dieser Ansatz hat den Vorteil, daß das Potential auf jedem Randabschnitt durch einen Koeffizientensatz beschrieben werden kann. Das Vektorpotential muß jedoch an den Rändern des Leiters durch Sinusfunktionen nachgebildet werden. Erwartet wird aber aus Untersuchungen an anderen Geometrien, daß die größte Stromstärke und damit das Maximum des Betrags des Vektorpotentials an den Kanten des

Leiters auftreten wird, also genau dort, wo die Sinusfunktionen im Ansatz Nullstellen aufweisen. Ein weiterer Nachteil entsteht aus der Tatsache, daß die Bestimmung des in den Leiter eingepprägten Gesamtstromes  $I_i$  durch Anwendung der Beziehung  $I_i = \iint_{\Omega_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{\Omega}_i$  hier nicht zu einer einfachen Lösung führt. Weiterhin zeigt sich bei der Auswertung der Randintegralgleichung, daß diese Lösung zusammen mit der verwendeten Kernentwicklung zu analytisch nicht lösbaren Ausdrücken für die Koeffizienten der zu lösenden Matrixgleichung führt. Dieser Ansatz wird daher verworfen, obwohl er auf den ersten Blick die naheliegende Variante darstellt.

#### 4.1.2 Formulierung als NEUMANN'sches - Randwertproblem

Einen Alternativansatz gewinnt man durch Entwicklung eines Ansatzes für das NEUMANN-Problem, welches durch Vorgabe der Normalableitung des Vektorpotentials auf jeweils einem Randabschnitt definiert wird. Die Lösungen der vier Teilprobleme werden zur Gewinnung des Gesamtansatzes superponiert.

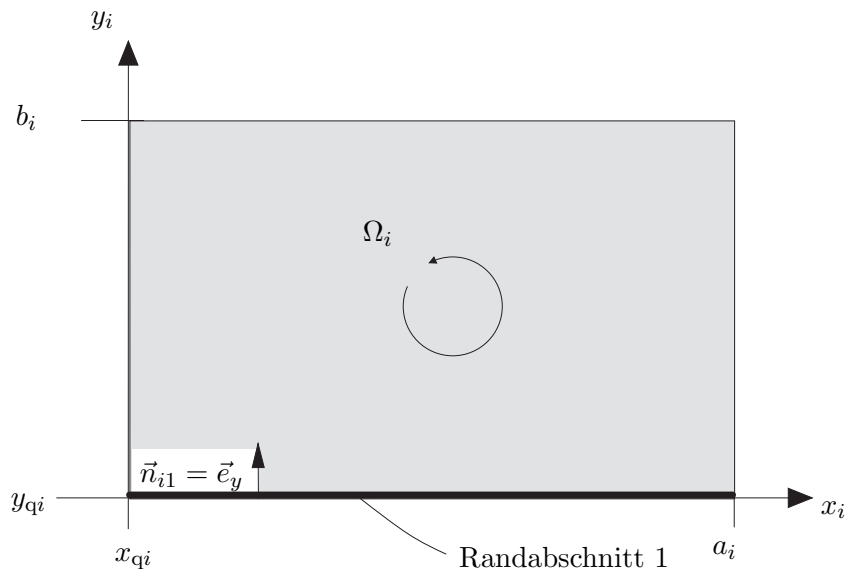


Abbildung 9: Verhältnisse auf Randabschnitt 1 von Leiter  $i$

Zur Bestimmung des ersten Teilansatzes gibt man auf Randabschnitt 1 von Leiter  $i$  (auf der  $y_i = 0$  und  $0 \leq x_i \leq a_i$  gilt) die Normalableitung des Vektorpotentials vor, während diese

auf allen anderen Seiten zu Null gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \text{grad}W^{(i)}|_{y_i=0} &= \frac{\partial}{\partial y}W^{(i)}|_{y_i=0} \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial y}W^{(i)}|_{y_i=b_i} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}W^{(i)}|_{x_i=0} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}W^{(i)}|_{x_i=a_i} &= 0.\end{aligned}$$

Man erhält nach Ableitung der Gleichung (4.5) und Einsetzen der Werte für  $x_i$  und  $y_i$  einen Ansatz für den Beitrag zum Potential, der durch Vorgabe auf Randabschnitt 1 entsteht und als  $V_{i,1}$  bezeichnet werden soll:

$$V_{i,1}(x_i, y_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{i,n} \cos(\alpha_{in}x_i) \cosh(\beta_{in}y_i) \right\}, c_{i,n} = \text{const} \in \mathbb{C}.$$

Da mit dem Gesamtansatz die Normalableitungen des Potentials auf dem ganzen Rand nachgebildet werden müssen, wiederholt man die Prozedur insgesamt viermal, wobei jeweils ein Randabschnitt eine Potentialvorgabe trägt. Die vier Einzelergebnisse werden superponiert.

Diese Methode führt auf

$$\begin{aligned}V_i(x_i, y_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [v_{i1,n} \cosh[\beta_{in}(y_i - b_i)] + v_{i3,n} \cosh(\beta_{in}y_i)] \frac{\cos(\alpha_{in}x_i)}{\cosh(\beta_{in}b_i)} + \right. \\ &\quad \left. + [v_{i4,n} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_i - a_i)] + v_{i2,n} \cosh(\tilde{\beta}_{in}x_i)] \frac{\cos(\tilde{\alpha}_{in}y_i)}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \right\}, \quad (4.7)\end{aligned}$$

mit unbekanntem komplexen Koeffizienten  $v_{ip,n} \in \mathbb{C}, p = 1, \dots, 4$ . Die Konstanten:

$$\alpha_{in} = \frac{n\pi}{a_i} \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_{in} = \frac{n\pi}{b_i}$$

sind bekannt und von der Geometrie der betrachteten Anordnung, den Materialparametern der Leiter und der Frequenz des erregenden Stromes abhängig. Sie entsprechen auch den gleichnamigen Konstanten in Gleichung (4.6).

Für die Normalableitungen erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= \sum_{n=0}^{\infty} -\alpha_{in} [v_{i1,n} \cosh(\beta_{in}(y_i - b_i)) + v_{i3,n} \cosh(\beta_{in}y_i)] \frac{\sin(\alpha_{in}x_i)}{\cosh(\beta_{in}b_i)} + \\ &\quad + \tilde{\beta}_{in} [v_{i4,n} \sinh(\tilde{\beta}_{in}(x_i - a_i)) + v_{i2,n} \sinh(\tilde{\beta}_{in}x_i)] \frac{\cos(\tilde{\alpha}_{in}y_i)}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_i}{\partial y_i} &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{in} [v_{i1,n} \sinh(\beta_{in}(y_i - b_i)) + v_{i3,n} \sinh(\beta_{in}y_i)] \frac{\cos(\alpha_{in}x_i)}{\cosh(\beta_{in}b_i)} - \\ &\quad - \tilde{\alpha}_{in} [v_{i4,n} \cosh(\tilde{\beta}_{in}(x_i - a_i)) + v_{i2,n} \cosh(\tilde{\beta}_{in}x_i)] \frac{\sin(\tilde{\alpha}_{in}y_i)}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)}. \quad (4.8)\end{aligned}$$

Damit sind Ansätze für das divergenzfreie Vektorpotential im Inneren und auf den Rändern eines einzelnen Leiters bekannt. Die Erweiterung auf  $N$  Leiter geschieht durch Aufsummierung der Vektorpotentiale im Inneren aller Leiter:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i.$$

## 4.2 Einfluss der Nullterme

Die Bedeutung der nullindizierten Funktion:

$$V_{i0}(x_i, y_i) = v_{i1,0} \frac{\cosh(\beta_{i0}(y_i - b_i))}{\cosh(\beta_{i0}b_i)} + v_{i3,0} \frac{\cosh(\beta_{i0}y_i)}{\cosh(\beta_{i0}b_i)} + v_{i4,0} \frac{\cosh(\tilde{\beta}_{i0}(x_i - a_i))}{\cosh(\tilde{\beta}_{i0}a_i)} + v_{i2,0} \frac{\cosh(\tilde{\beta}_{i0}x_i)}{\cosh(\tilde{\beta}_{i0}a_i)}$$

bedarf einer genaueren Untersuchung, da nur sie bei der Berechnung des in den Leiter eingepprägten Stromes über die Gleichung  $I_i = \iint_{\Omega_i} \vec{J} \cdot d\vec{\Omega}_i$  einen Beitrag liefert. Die Stromdichte innerhalb des Leiters wird dabei über Gleichung (2.19) und die Materialbeziehung  $\vec{J} = \kappa_i \vec{E}^{(i)}$  berechnet.

Verwendet man nämlich Gleichung (4.7) zur Darstellung der ortsabhängigen Anteile der Stromdichte, kann diese ebenfalls als Reihe von harmonischen Funktionen dargestellt werden. Bei der Integration über die Fläche des Leiters erhält man für alle Reihenglieder bis auf dasjenige mit Index 0 wegen

$$\int_0^c \cos\left(\frac{n\pi}{c}x_i\right) dx_i = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ c & n = 0 \end{cases}$$

den Wert Null als Ergebnis der Integration.

Berechnet man ausgehend von diesem Ansatz den in den Leiter  $i$  eingepprägten Gesamtstrom als

$$I_i = \iint_{\Omega_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{\Omega}_i, \quad \vec{\Omega}_i = \vec{e}_z \Omega_i,$$

erhält man unter Zuhilfenahme der Gleichungen (2.21) und (2.22):

$$I_i = -j\omega\kappa_i \iint_{\Omega_i} \vec{W}_i^{(i)} \cdot \vec{e}_z d\Omega_i = -j\omega\kappa_i \iint_{\Omega_i} W_i^{(i)} d\Omega_i.$$

Für den hier behandelten Fall rechteckiger Leiter wird das Flächenintegral zu

$$I_i = -j\omega\kappa_i \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} W_i^{(i)} dx_i dy_i;$$

anschließend wird für  $W^{(i)}$  der aus Gleichung (4.7) bekannte Reihenansatz eingesetzt und ausgewertet. Es verbleibt:

$$\begin{aligned}
 I_i &= -j\omega\kappa_i \int_0^{a_i} \int_0^{b_i} V_{i0} dx_i dy_i, \\
 &= -j\omega\kappa_i \left( \frac{a_i}{\beta_{i0}} \tanh(\beta_{i0} b_i) [v_{i1,0} + v_{i3,0}] + \frac{b_i}{\tilde{\beta}_{i0}} \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i) [v_{i4,0} + v_{i2,0}] \right).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Koeffizienten der nullindizierten Anteile weisen je nach Symmetrieeigenschaften des untersuchten Leitersystems ebenfalls Symmetrien auf, die vor Aufstellung des Gleichungssystems eingearbeitet werden können und zur Überprüfung der Ergebnisse dienen.





## Kapitel 5

# Randabschnittsintegralgleichungen

Ziel dieses Kapitels ist es, die in Kapitel 2 hergeleitete Integraldarstellung für das Vektorpotential im Außenraum (Gleichung (2.36)) in ein lineares Gleichungssystem zu überführen, dessen Lösung die Bestimmung der im Reihenansatz für das BUCHHOLZ-Potential im Inneren der  $N$  Leiter (Gleichung (4.7)) enthaltenen Koeffizientensätze  $v_{ip,n}, p = 1, \dots, 4$  ermöglicht.

Da die zu bearbeitenden Gleichungen im allgemeinen sehr unhandlich sind und daher der Überblick über die Vorgehensweise leicht verloren gehen kann, soll sie hier kurz beschrieben werden:

1. Die Integraldarstellung des Vektorpotentials im Außenraum in Gleichung (2.36) gilt für allgemeine Konturen  $C$ . Diese Gleichung wird unter Beachtung der Flächennormalen auf rechteckige Gebiete angewendet.
2. Durch Festlegung auf die (rechteckige) Kontur des Leitersystems ist es nun möglich, unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen aus Abschnitt 2.3 in einem ersten Schritt eine Integralbeziehung zwischen  $A^{(a)}$  und  $W^{(i)}$  zu finden.
3. Einsetzen des Reihenansatzes für  $W^{(i)}$  aus Gleichung (4.7) führt auf eine Reihendarstellung, mit der  $A^{(a)}$  durch eine Reihe von bekannten Funktionen dargestellt werden kann.  $A^{(a)}$  ist dabei eine Funktion des Aufpunktes.
4. Der Aufpunkt wird auf einen der vier Randabschnitte gelegt. Dadurch wird eine der beiden Koordinaten festgelegt, die andere kann Werte in einem Intervall annehmen.
5. Die Normalableitungen von  $A^{(a)}$  werden gebildet; anschließend wird der Aufpunkt auf einen Randabschnitt gelegt. Als Resultat dieser Operation verbleibt auf beiden Seiten der gewonnenen Randintegralgleichung eine Funktion, die von einer Ortskoordinate abhängig ist. Diese Funktionen werden nach Orthogonalfunktionen entwickelt. Endergebnis ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten.
6. Abschließend wird die Nebenbedingung Gleichung (4.9) in das lineare Gleichungssystem eingearbeitet. Das entstehende Gleichungssystem wird als Matrixgleichung formuliert.

## 5.1 Integraldarstellung von $A^{(a)}$ für Rechteckleiter

Zur weiteren Auswertung der Integraldarstellung von  $A^{(a)}$  ist die Bestimmung der Richtung der Normalenvektoren auf dem Rand  $C_i = \partial\Omega_i$  des Leiters  $i$  nötig. Die Numerierung der Kanten des Leiters  $i$  erfolgt dabei derart, daß beim Durchlaufen der Kontur  $C_i$  in Laufrichtung die Richtung des Vektors  $d\vec{r}$  und die Richtung des Normalenvektors auf  $\Omega_i$  ein Rechtssystem bilden.

Die Abbildung 10 veranschaulicht die Richtungen der Normalenvektoren auf der Kontur.

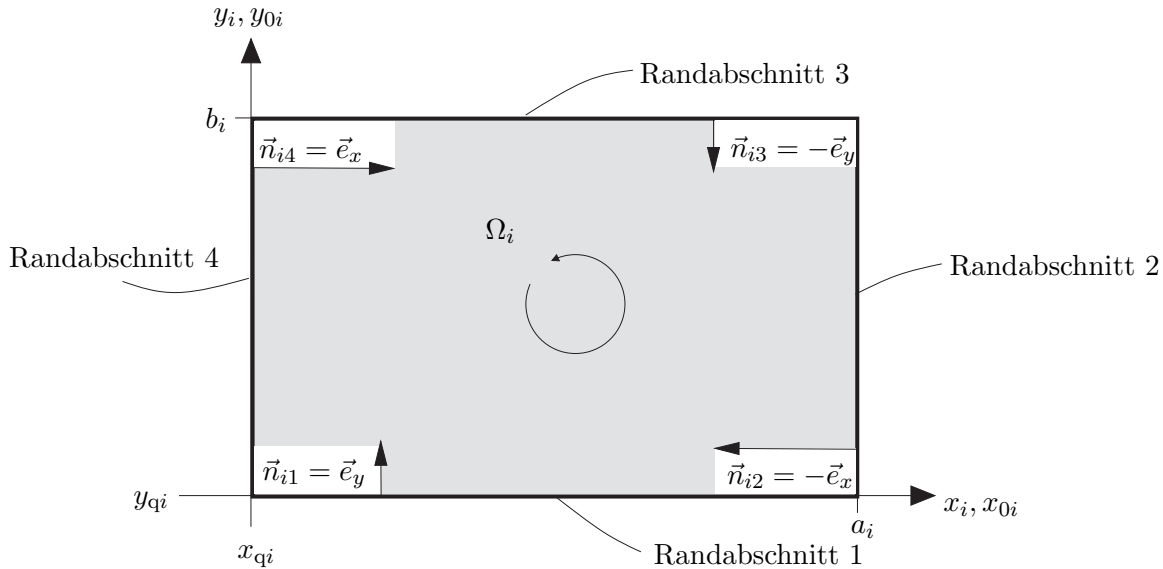


Abbildung 10: Normalenvektoren der Randabschnitte von Leiter  $i$

Bei der Integration entlang eines Konturabschnitts wird neben der Richtung des Normalenvektors, die Abb. 10 entnommen wird, eine Komponente des Quellpunktvektors festgelegt. Die andere Komponente kann nur in dem Bereich liegen, der durch die Abmessungen des Konturabschnitts vorgegeben ist. Die Nummer des jeweiligen Randabschnitts wird im folgenden in runden Klammern vorangestellt (z.B. RA1 für Randabschnitt 1):

$$(RA1) \quad x_{qi} \leq x_0 \leq x_{qi} + a_i, \quad y_0 = y_{qi}, \quad (5.1)$$

$$(RA2) \quad x_0 = x_{qi} + a_i, \quad y_{qi} \leq y_0 \leq y_{qi} + b_i, \quad (5.2)$$

$$(RA3) \quad x_{qi} \leq x_0 \leq x_{qi} + a_i, \quad y_0 = y_{qi} + b_i, \quad (5.3)$$

$$(RA4) \quad x_0 = x_{qi}, \quad y_{qi} \leq y_0 \leq y_{qi} + b_i. \quad (5.4)$$

Setzt man die zu den vier Abschnitten von  $C_i$  gehörenden Normalenvektoren und Integrationsgrenzen in Gleichung (2.37) ein und summiert anschließend die Beiträge aller Leiter auf,

erhält man:

$$\begin{aligned}
A^{(a)} = & \sum_{i=1}^N \left( \int_0^{a_i} \left( \left[ -A^{(a)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} + G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} A^{(a)} \right]_{y_0=y_{qi}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ A^{(a)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} - G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} A^{(a)} \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} \right) dx_{0i} + \right. \\
& \left. + \int_0^{b_i} \left( \left[ -A^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} + G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} A^{(a)} \right]_{x_0=x_{qi}} + \right. \right. \\
& \left. \left. \left[ A^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} - G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} A^{(a)} \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} \right) dy_{0i} \right) + A_e.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Auf den Randabschnitten der Leiter geht das Vektorpotential im Außenraum - der geltenden Grenzbedingung (Gleichung (2.31)) gehorchend - in das BUCHHOLZ-Potential im Innenraum über.

Die den Leitern zugeordneten Konstanten  $C_i$  liefern für den Fall, daß sich der Aufpunkt im Außenraum befindet, keinen Beitrag zum Vektorpotential:

$$\oint_{C_i} \text{grad} G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0 = 0; \tag{5.6}$$

hierzu wird das Konturintegral in vier Integrale über die Randabschnitte aufgeteilt. Anschließend werden die entsprechenden Normalenvektoren eingesetzt und die Integrale berechnet:

$$\begin{aligned}
& \oint_{C_i} \text{grad} G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0 = \\
& = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{x_{qi}}^{x_{qi}+a_i} \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \Big|_{y_0=y_{qi}} dx_0 + \int_{y_{qi}}^{y_{qi}+b_i} \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \Big|_{x_0=x_{qi}} dy_0 - \right. \\
& \quad \left. - \int_{x_{qi}}^{x_{qi}+a_i} \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \Big|_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_0 - \int_{y_{qi}}^{y_{qi}+b_i} \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \Big|_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_0 \right), \\
& = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{x_{qi}}^{x_{qi}+a_i} \left( \frac{-(y - y_{qi})}{(x - x_0)^2 + (y - y_{qi})^2} + \frac{(y - y_{qi} - b_i)}{(x - x_0)^2 + (y - y_{qi} - b_i)^2} \right) dx_0 + \right. \\
& \quad \left. + \int_{y_{qi}}^{y_{qi}+b_i} \left( \frac{-(x - x_{qi})}{(x - x_{qi})^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(x - x_{qi} - a_i)}{(x - x_{qi} - a_i)^2 + (y - y_0)^2} \right) dy_0 \right).
\end{aligned}$$

Nach geeigneter Substitution und mit Hilfe der Stammfunktion [3, S.38, Nr.57]

$$\int \frac{d\xi}{a^2 + \xi^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad a > 0, \quad a = \text{const},$$

gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_i} \text{grad}G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0 &= \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left( -\arctan\left(\frac{x-x_{qi}-a_i}{y-y_{qi}-b_i}\right) - \arctan\left(\frac{y-y_{qi}-b_i}{x-x_{qi}-a_i}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \arctan\left(\frac{x-x_{qi}}{y-y_{qi}-b_i}\right) + \arctan\left(\frac{y-y_{qi}-b_i}{x-x_{qi}}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \arctan\left(\frac{x-x_{qi}-a_i}{y-y_{qi}}\right) + \arctan\left(\frac{y-y_{qi}}{x-x_{qi}-a_i}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \arctan\left(\frac{x-x_{qi}}{y-y_{qi}}\right) - \arctan\left(\frac{y-y_{qi}}{x-x_{qi}}\right) \right).
\end{aligned}$$

Mit:

$$\arctan(\xi) + \arctan\left(\frac{1}{\xi}\right) = \text{sgn}(\xi) \frac{\pi}{2} \quad (5.7)$$

(aus [3, S.185]), erhält man demnach:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_i} \text{grad}G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0 &= -\frac{1}{2} \left( \underbrace{-\text{sgn}\left(\frac{x-x_{qi}-a_i}{y-y_{qi}-b_i}\right)}_{=c_1} + \underbrace{\text{sgn}\left(\frac{x-x_{qi}}{y-y_{qi}-b_i}\right)}_{=c_2} + \right. \\
&\quad \left. \underbrace{\text{sgn}\left(\frac{x-x_{qi}-a_i}{y-y_{qi}}\right)}_{=c_3} - \underbrace{\text{sgn}\left(\frac{x-x_{qi}}{y-y_{qi}}\right)}_{=c_4} \right).
\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der durch die Vorzeichenfunktion in Gleichung (5.7) nötigen Fallunterscheidungen in  $x$  und  $y$ :

Der Fall  $x_{qi} < x < x_{qi}+a$ ,  $y_{qi} < y < y_{qi}+b_i$  kommt nicht vor, da sich dieses Gebiet innerhalb

|                           |                             | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $\Sigma$ |
|---------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $x < x_{qi}$              | $y < y_{qi}$                | 1     | 1     | 1     | 1     | 0        |
| $x < x_{qi}$              | $y_{qi} < y < y_{qi} + b_i$ | 1     | 1     | -1    | -1    | 0        |
| $x < x_{qi}$              | $y_{qi} + b_i < y$          | -1    | -1    | -1    | -1    | 0        |
| $x_{qi} < x < x_{qi} + a$ | $y < y_{qi}$                | 1     | -1    | 1     | -1    | 0        |
| $x_{qi} < x < x_{qi} + a$ | $y_{qi} + b_i < y$          | -1    | 1     | -1    | 1     | 0        |
| $x_{qi} + a_i < x$        | $y < y_{qi}$                | -1    | -1    | -1    | -1    | 0        |
| $x_{qi} + a_i < x$        | $y_{qi} < y < y_{qi} + b_i$ | -1    | 1     | -1    | 1     | 0        |
| $x_{qi} + a_i < x$        | $y_{qi} + b_i < y$          | 1     | 1     | 1     | 1     | 0        |

Tabelle 1: Auswertung von  $\oint_{C_i} \text{grad}G_{20} \cdot \vec{n}_0 ds_0$

des  $i$ -ten Leiters befindet.

Legt man den Aufpunkt auf einen Randabschnitt des  $i$ -ten Leiters, liefert das zu bestimmende Integral aufgrund der Singularität der Kernableitung einen Beitrag, der für den Fall, daß

der Spannungsabfall über einem Stück Leiter vorgegeben wird, den Störvektor des linearen Gleichungssystems bildet. Für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle, in denen die Erregung durch externe oder in den Leiter eingeprägte Ströme gegeben ist, fällt der Beitrag aus dem Störvektor heraus und wird daher nicht weiter mitgeführt.

Unter Ausnutzung des Beitrags der Konstanten und unter Beachtung der Grenzbedingungen ergibt sich die Integraldarstellung für  $A^{(a)}$ :

$$\begin{aligned}
A^{(a)} = & \sum_{i=1}^N \left( \int_0^{a_i} \left( \left[ -W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} + \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} W_i^{(i)} \right]_{y_0=y_{qi}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} - \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} W_i^{(i)} \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} \right) dx_{0i} + \right. \\
& \left. + \int_0^{b_i} \left( \left[ -W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} + \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} W_i^{(i)} \right]_{x_0=x_{qi}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} - \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} W_i^{(i)} \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} \right) dy_{0i} + \tilde{C}_i \right) + A_e.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Zur Erfassung des durch einen externen Strom erregten Vektorpotentials  $A_e$  wird ein linienförmiger Leiter betrachtet, der bei  $\vec{r}_e = \vec{e}_x x_e + \vec{e}_y y_e$  angeordnet ist und den Gesamtstrom  $I_e$  führt. Andere externe Stromverteilung lassen sich ggf. durch Aufintegration aus diesem Potential herleiten. Wegen

$$\vec{J}_e = \vec{e}_z I_e \delta_2(\vec{r} - \vec{r}_e)$$

ergibt sich aus Gleichung (2.34):

$$A_e = +\mu_a I_e \oint_{C_i} G_{20}(x, x_0 = x_e, y, y_0 = y_e) ds_0 = -\frac{\mu_a I_e}{4\pi} \ln((x - x_e)^2 + (y - y_e)^2).$$

## 5.2 Reihendarstellung für $A^{(a)}$

Im nächsten Schritt wird für  $W^{(i)}$  in Gleichung (5.8) der mit dem Separationsverfahren gewonnene Reihenansatz aus Gleichung (4.7) eingesetzt. Die zu den Koeffizientensätzen gehörigen

Integralausdrücke werden zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
A^{(a)}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_{i1,n} \left\{ \int_0^{a_i} (-\cos(\alpha_{in}x_{0i})) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}} dx_{0i} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_{0i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}} dx_{0i} - \\
& - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - b_i)] \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}} dy_{0i} + \\
& \left. + \frac{(-1)^n}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - b_i)] \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_{0i} \right\} + \\
& + v_{i3,n} \left\{ \left( -\frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \right) \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}} dx_{0i} + \right. \\
& + \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_{0i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_{0i} - \\
& - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \int_0^{b_i} \cosh(\beta_{in}y_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}} dy_{0i} + \\
& \left. + \frac{(-1)^n}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \int_0^{b_i} \cosh(\beta_{in}y_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_{0i} \right\} + \\
& + v_{i4,n} \left\{ \left( -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \right) \int_0^{a_i} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - a_i)] \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}} dx_{0i} + \right. \\
& + \frac{(-1)^n}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \int_0^{a_i} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - a_i)] \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_{0i} + \\
& + \int_0^{b_i} (-\cos(\tilde{\alpha}_{in}y_{0i})) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}} dy_{0i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in}a_i) \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in}y_{0i}) \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}} dy_{0i} + \\
& \left. + \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in}y_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_{0i} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_{i2,n} \left\{ \left( -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in} a_i)} \int_0^{a_i} \cosh(\tilde{\beta}_{in} x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}} dx_{0i} + \right. \right. \\
& + \frac{(-1)^n}{\cosh(\tilde{\beta}_{in} a_i)} \int_0^{a_i} \cosh(\tilde{\beta}_{in} x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} dx_{0i} - \\
& - \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in} a_i)} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}} dy_{0i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in} a_i) \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \left[ \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_{0i} + \\
& \left. \left. + \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |\vec{r} - \vec{r}_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} dy_{0i} \right\} - \right. \\
& \left. + \tilde{C}_i \right) - \frac{1}{4\pi} \mu_a I_e \ln \left( (x - x_e)^2 + (y - y_e)^2 \right).
\end{aligned}$$

Fasst man die in geschweiften Klammern stehenden Integralausdrücke der letzten Gleichung zusammen, erhält man nach Umsortierung der Koeffizienten die folgende Reihendarstellung für das Vektorpotential im Außenraum:

$$\begin{aligned}
A^{(a)}(x, y) = & \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \left( f_{(i1),n}^{(a)}(x, y) v_{i1,n} + f_{(i2),n}^{(a)}(x, y) v_{i2,n} + \right. \\
& \left. + f_{(i3),n}^{(a)}(x, y) v_{i3,n} + f_{(i4),n}^{(a)}(x, y) v_{i4,n} \tilde{C}_i \right) - \frac{1}{4\pi} \mu_a I_e \ln \left( (x - x_e)^2 + (y - y_e)^2 \right). \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Die auftretenden Funktionen  $f_{(ip),n}^{(a)}(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $p = 1, \dots, 4$  können hier durch analytische oder numerische Integration bestimmt werden. Der Auswertung der dabei zu berechnenden Integrale widmet sich Kapitel 6. Die Zusammenfassung wird an dieser Stelle vorgenommen, um einen möglichst guten Überblick über das angewandte Verfahren zu gewährleisten, da die folgenden Berechnungen für alle vier Randabschnitte vorgenommen werden müssen und daher auf jeweils vier Gleichungen führen, die einzeln aufgeführt werden müssen.

### 5.3 Überführung in eine Randintegralgleichung für $W^{(i)}$

Die weitere Rechnung geht von Gleichung (5.9) aus.

Eine Komponente des Aufpunktvektors ( $x$  oder  $y$ ) wird auf einen der vier Randabschnitte von Leiter  $k$  festgelegt, also:

$$(RA1) \quad x_{qk} \leq x \leq x_{qk} + a_k, \quad y = y_{qk}, \quad (5.10)$$

$$(RA2) \quad x = x_{qk} + a_k, \quad y_{qk} \leq y \leq y_{qk} + b_k, \quad (5.11)$$

$$(RA3) \quad x_{qk} \leq x \leq x_{qk} + a_k, \quad y = y_{qk} + b_k, \quad (5.12)$$

$$(RA4) \quad x = x_{qk}, \quad y_{qk} \leq y \leq y_{qk} + b_k. \quad (5.13)$$

Für Aufpunkte auf dem Rand eines Leiters liefern die Kernfunktion  $G_{20}$  und ihre Normalableitungen Singularitätsbeiträge. Wie in [12] nachgewiesen wurde, sind die Singularitäten aber bereits in der verwendeten Entwicklung nach FOURIER (Gleichung (3.2)) enthalten und müssen nicht gesondert berücksichtigt werden.

Nun wird die Normalenableitung von  $A^{(a)}$  auf dem jeweiligen Randabschnitt berechnet; diese lautet:

$$(RA1) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} A^{(a)}|_{y=y_{qk}} = + \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}|_{y=y_{qk}}, \quad (5.14)$$

$$(RA2) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} A^{(a)}|_{x=x_{qk}+a_k} = - \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}|_{x=x_{qk}+a_k}, \quad (5.15)$$

$$(RA3) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} A^{(a)}|_{y=y_{qk}+b_k} = - \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}|_{y=y_{qk}+b_k}, \quad (5.16)$$

$$(RA4) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} A^{(a)}|_{x=x_{qk}} = + \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}|_{x=x_{qk}}. \quad (5.17)$$

Bei dieser Differentiation nach Ortskoordinaten verschwinden die Konstanten  $\tilde{C}_i$ , eine weitergehende physikalische Interpretation verzichtet dieser Tatsache ist in dieser Arbeit nicht enthalten.

Die Normalableitung von  $A^{(a)}$  wird dann zur Auswertung der Orthogonalität mit  $\cos(\alpha_{km}x_k)$  (bzw. auf  $y$ -gerichteten Randabschnitten mit  $\cos(\tilde{\alpha}_{km}y_k)$ ) multipliziert und das Integral  $\int_0^{a_k} \dots dx_k$  (entsprechend  $\int_0^{b_k} \dots dy_k$ ) gebildet.

Für die Entwicklungskoeffizienten der Orthogonalreihen  $c_{(ip,kq)nm}$  muß also unterschieden werden, ob sich der Aufpunkt auf einem  $x$ - oder einem  $y$ -gerichteten Randabschnitt befindet. Daher wird folgendes definiert:

$$c_{(ip,kq),nm} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{\partial}{\partial y} f_{(ip),n}^{(a)}(x_k + x_{qk}, y = \text{const}) dx_k,$$

für  $x$ -gerichteten Randabschnitte ( $q = 1 \Rightarrow y = y_{qk}$  oder  $q = 3 \Rightarrow y = y_{qk} + b_k$ ) und  $p = 1 \dots 4$ .

Für  $y$ -gerichteten Randabschnitte soll gelten:

$$c_{(ip,kq),nm} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km}y_k) \frac{\partial}{\partial x} f_{(ip),n}^{(a)}(x = \text{const}, y_k + y_{qk}) dy_k,$$



mit  $q = 2 \Rightarrow x = x_{qk} + a_k$  oder  $q = 4 \Rightarrow x = x_{qk}$ ,  $p = 1 \dots 4$ .

Die Koeffizienten des erregenden Potentials werden wie folgt abgekürzt:

$$d_{(kq),m} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\mu_a I_e}{4\pi} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \ln((x_k + x_{qk} - x_e)^2 + (y - y_e)^2) dx_k, q = 1 \vee q = 3$$

$$d_{(kq),m} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\mu_a I_e}{4\pi} \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \ln((x - x_e)^2 + (y_k + y_{qk} - y_e)^2) dy_k, q = 1 \vee q = 3,$$

jeweils für  $p = 1 \dots 4$ .

Für den Fall  $i = k$  und  $p = q$  müssen weitere Anteile an den Koeffizienten berücksichtigt werden. Daher werden diese Koeffizienten mit einer Tilde gekennzeichnet.

Unter Verwendung dieser Konvention erhält man für die rechte Seite von Gleichung (5.9):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}} dx_k = d_{(k1),m} + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{c}_{(i1),(k1),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k1),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k1),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k1),nm} v_{i4,n}), \\ (2) \quad & \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k = d_{(k2),m} + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k2),nm} v_{i1,n} + \tilde{c}_{(i2),(k2),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k2),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k2),nm} v_{i4,n}), \\ (3) \quad & \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k = d_{(k3),m} + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k3),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k3),nm} v_{i2,n} + \tilde{c}_{(i3),(k3),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k3),nm} v_{i4,n}), \\ (4) \quad & \int_0^{b_k} \cos(\alpha_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}} dy_k = d_{(k4),m} + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k4),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k4),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k4),nm} v_{i3,n} + \tilde{c}_{(i4),(k4),nm} v_{i4,n}). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Konstanten  $c_{(ip)(kq),nm}$  mit  $p, q = 1, \dots, 4$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{c}_{(ip)(kp),nm}$  mit  $p = 1 \dots 4$ , und  $d_{(kp),n}$ ,  $p = 1, \dots, 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$  können wiederum bestimmt werden.

Bildet man nun durch Anwendung der Operatoren  $\vec{e}_x \cdot \text{grad}$  bzw.  $\vec{e}_y \cdot \text{grad}$  die Normalableitungen der linken Seite der Gleichung (5.9), gehen diese mit Gleichung (2.30) in die Normalableitungen des BUCHHOLZ-Potentials über. Für diese kann die Reihendarstellung (4.8)

verwendet werden. Es verbleibt pro Seite jeweils eine Reihe mit einem Koeffizientensatz:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k1,n} \beta_{km} \tanh(\beta_{kn} b_k) \cos(\alpha_{kn} x_k), \\
(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}+a_k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k2,n} \tilde{\beta}_{km} \tanh(\tilde{\beta}_{kn} a_k) \cos(\tilde{\alpha}_{kn} y_k), \\
(3) \quad \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}+b_k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k3,n} \beta_{km} \tanh(\beta_{kn} b_k) \cos(\alpha_{kn} x_k), \\
(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k4,n} \tilde{\beta}_{km} \tanh(\tilde{\beta}_{kn} a_k) \cos(\tilde{\alpha}_{kn} y_k).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelation für Kosinusfunktionen, die man der Gleichung (E.2) entnimmt, erhält man unter Verwendung des KRONECKER-Symbols für

$$\begin{aligned}
(1) \quad \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}} dx_k &= - \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k1,n} \beta_{km} \tanh(\beta_{kn} b_k) \frac{a_k}{2} (1 + \delta_{0m}), \\
(2) \quad \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k &= \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k2,n} \tilde{\beta}_{km} \tanh(\tilde{\beta}_{kn} a_k) \frac{b_k}{2} (1 + \delta_{0m}), \\
(3) \quad \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x_k + x_{qk}, y)|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k &= \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k3,n} \beta_{km} \tanh(\beta_{kn} b_k) \frac{a_k}{2} (1 + \delta_{0m}), \\
(4) \quad \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y_k + y_{qk})|_{x=x_{qk}} dy_k &= - \frac{\mu_a}{\mu_i} v_{k4,n} \tilde{\beta}_{km} \tanh(\tilde{\beta}_{kn} a_k) \frac{b_k}{2} (1 + \delta_{0m}).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Setzt man das Ergebnis aus (5.20) in Gleichung (5.18) ein, ergibt sich unter Verwendung der folgenden Definitionen:

$$c_{(ip)(kp),nn} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{c}_{(ip)(kp),nn} + \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{km} \tanh(\beta_{kn} b_k) \frac{a_k}{2} (1 + \delta_{0m}), \quad p = 1, 3 \quad \text{und}$$

$$c_{(ip)(kp),nn} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{c}_{(ip)(kp),nn} + \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{km} \tanh(\tilde{\beta}_{kn} a_k) \frac{b_k}{2} (1 + \delta_{0m}), \quad p = 2, 4.$$

das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k1),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k1),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k1),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k1),nm} v_{i4,n}) + \\
& \quad \quad \quad + d_{(k1),m} = 0, \\
(2) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k2),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k2),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k2),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k2),nm} v_{i4,n}) + \\
& \quad \quad \quad + d_{(k2),m} = 0, \\
(3) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k3),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k3),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k3),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k3),nm} v_{i4,n}) + \\
& \quad \quad \quad + d_{(k3),m} = 0, \\
(4) \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} (c_{(i1),(k4),nm} v_{i1,n} + c_{(i2),(k4),nm} v_{i2,n} + c_{(i3),(k4),nm} v_{i3,n} + c_{(i4),(k4),nm} v_{i4,n}) + \\
& \quad \quad \quad + d_{(k4),m} = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Dieses System von algebraischen Gleichungen ist für alle  $m \in \mathbb{N}$  gültig. Bricht man die Reihen nach den ersten  $M$  Gliedern ab, erhält man ein lineares Gleichungssystem aus  $4M$  Gleichungen zur Bestimmung der  $4M$  Unbekannten im Reihenansatzes für das BUCHHOLZ-Potential innerhalb von Leiter  $k$ .

## 5.4 Berücksichtigung des eingepprägten Stromes

Mit dem aus Gleichung (5.21) entwickelten Gleichungssystem sind  $4M$  Gleichungen für  $4M$  Unbekannte vorhanden. Allerdings muß außerdem die Gleichung (4.9) berücksichtigt werden, da der Gesamtstrom im  $i$ -ten Leiter bekannt ist. Da mit dieser zusätzlichen Gleichung eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist, ist eine vertiefte Betrachtung der Gleichungen nötig, die aus den Gleichungen (5.18) und (5.20) resultieren, wenn der dort verwendete Index  $m$  den Wert Null annimmt.

Für  $m = 0$  berechnet man in Gleichung (5.18) die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \int_0^{a_k} \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x, y)|_{y=y_{qk}} dx_k, \\
(2) \quad & \int_0^{b_k} \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y)|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k, \\
(3) \quad & \int_0^{a_k} \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x, y)|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k, \\
(4) \quad & \int_0^{b_k} \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y)|_{x=x_{qk}} dy_k,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

also jeweils die Wegintegrale der Normalableitungen des BUCHHOLZ-Potentials auf dem jeweiligen Randabschnitt (da die Kosinusfunktionen, mit denen die Normalableitungen zur Auswertung der Orthogonalität multipliziert werden, wegen  $m = 0$  für alle  $x_k$  den Wert 1 annehmen).

Die bei der Herleitung der Gleichung (4.9) verwendete Beziehung

$$I_i = \iint_{\Omega_i} \vec{J} \cdot \vec{e}_z d\Omega_i$$

kann man nun unter Hinzuziehung der integralen Form der Gleichung (2.2):

$$\oint_{C_i=\partial\Omega_i} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Omega_i} \vec{J} \cdot \vec{e}_z d\Omega_i,$$

folgendermaßen umformulieren:

$$I_i = \oint_{C_i=\partial\Omega_i} \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (5.23)$$

Mit  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_i} \text{rot} \vec{W}^{(i)}$  kann man die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke durch die Normalableitung des Vektorpotentials ausdrücken:

$$\mu_i \vec{H} = \nabla \times \vec{W}^{(i)} = \nabla \times W^{(i)} \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & W^{(i)} \end{vmatrix} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial y} W^{(i)} - \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial x} W^{(i)}.$$

Somit findet man für die Integrale in Gleichung (5.22):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{\mu_i} \int_0^{a_k} \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x, y)|_{y=y_{qk}} dx_k = \int_0^{a_k} \vec{H}|_{y=y_{qk}} dx_k, \\ (2) \quad & \frac{1}{\mu_i} \int_0^{b_k} \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y)|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k = \int_0^{b_k} \vec{H}|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k, \\ (3) \quad & \frac{1}{\mu_i} \int_0^{a_k} \frac{\partial}{\partial y} A^{(a)}(x, y)|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k = \int_0^{a_k} \vec{H}|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k, \\ (4) \quad & \frac{1}{\mu_i} \int_0^{b_k} \frac{\partial}{\partial x} A^{(a)}(x, y)|_{x=x_{qk}} dy_k = \int_0^{b_k} \vec{H}|_{x=x_{qk}} dy_k, \end{aligned} \quad (5.24)$$

woraus man durch Addition bzw. Subtraktion aller vier Gleichungen zu:

$$\int_0^{a_k} \vec{H}|_{y=y_{qk}} dx_k + \int_0^{b_k} \vec{H}|_{x=x_{qk}+a_k} dy_k - \int_0^{a_k} \vec{H}|_{y=y_{qk}+b_k} dx_k - \int_0^{b_k} \vec{H}|_{x=x_{qk}} dy_k = \oint_{\Omega_i} \vec{H} d\vec{s}, \quad (5.25)$$

also auf das Umlaufintegral in Gleichung (5.23) gelangt. Die vier den mit Null indizierten Orthogonalfunktionen des Reihenansatzes für das BUCHHOLZ-Potential zugeordneten Gleichungen und die in Gleichung (4.9) formulierte Nebenbedingung sind also linear voneinander

abhängig. Bei der weiteren Bearbeitung wird daher eine Unbekannte (in diesem Fall  $v_{i4,0}$ ) durch die anderen drei nullindizierten Koeffizienten  $v_{i1,0}$ ,  $v_{i2,0}$  und  $v_{i3,0}$  und den eingprägten Strom  $I_i$  ausgedrückt:

$$v_{i4,0} = -\frac{a_i \tilde{\beta}_{i0} \tanh(\beta_{i0} b_i)}{b_i \beta_{i0} \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} [v_{i1,0} + v_{i3,0}] - v_{i2,0} + \frac{\tilde{\beta}_{i0}}{-j\omega \kappa_i \mu_i b_i \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} I_i, \quad (5.26)$$

wie aus Gleichung (4.9) bekannt. Mit  $-j\omega \kappa_i \mu_i = \beta_{i0} = \tilde{\beta}_{i0}$  vereinfacht sich die Gleichung weiter:

$$v_{i4,0} = -\frac{a_i \tanh(\beta_{i0} b_i)}{b_i \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} [v_{i1,0} + v_{i3,0}] - v_{i2,0} + \frac{1}{\beta_{i0} b_i \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} I_i. \quad (5.27)$$

## 5.5 Formulierung der Matrixgleichung

Die Gleichungen (5.21) und (5.27) werden im aktuellen Abschnitt eine Matrixgleichung überführt. Die aufgestellten Matrizen und Störvektoren können dazu verwendet werden, Matrixgleichungen für Mehrleitersysteme mit externer Erregung und eingepprägten Strömen durch Zusammenstellen der Untermatrizen für Einzelleiter zu formulieren.

Demnach wird zunächst der Beitrags eines Leiters untersucht, wobei zwischen Erregung durch externe Stromfäden und eingepprägte Ströme unterschieden wird.

### 5.5.1 Matrixgleichung für Einzelleiter

Für Systeme, die nur aus einem leitenden Gebiet bestehen, muß in Gleichung (5.21) für die Indizes  $i$  und  $k$  jeweils  $i = k = 1$  eingesetzt werden.

#### 5.5.1.1 Erregung durch externe Ströme

Zur Unterscheidung von dem allgemeinen Fall wird bei allen verwendeten Vektoren und Matrizen der Index (e) in Klammern hinzugefügt.

Fasst man die Koeffizienten  $v_{ip,n}, p = 1, \dots, 4, n \in \mathbb{N}$  und  $d_{kp,n}, p = 1, \dots, 4, n \in \mathbb{N}$  als Lösungs- bzw. Störvektor eines linearen Gleichungssystems auf:

$$\vec{v}_i^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_{i1,0} \\ \vdots \\ v_{i1,M} \\ v_{i3,0} \\ \vdots \\ v_{i3,M} \\ v_{i4,0} \\ \vdots \\ v_{i4,M} \\ v_{i2,0} \\ \vdots \\ v_{i2,M} \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_k^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} d_{k1,0} \\ \vdots \\ d_{k1,M} \\ d_{k3,0} \\ \vdots \\ d_{k3,M} \\ d_{k4,0} \\ \vdots \\ d_{k4,M} \\ d_{k2,0} \\ \vdots \\ d_{k2,M} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

kann Gleichung (5.21) unter Verwendung der Matrix  $\Lambda_{11}^{(e)}$ , die in Gleichung (5.29) definiert ist, in die folgende Form gebracht werden:

$$\Lambda_{11}^{(e)} \cdot \vec{v}_1 = \vec{d}_k^{(e)};$$

$$\begin{array}{c}
\left[ \begin{array}{c|c|c|c}
\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,1),0n} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,1),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,1),0n} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,1),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,1),0n} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,1),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,1),0n} \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,1),nn} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,1),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,1),nn} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,1),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,1),nn} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,1),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,1),nn} \\
\hline
\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,3),0n} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,3),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,3),0n} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,3),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,3),0n} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,3),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,3),0n} \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,3),nn} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,3),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,3),nn} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,3),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,3),nn} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,3),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,3),nn} \\
\hline
\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,4),0n} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,4),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,4),0n} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,4),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,4),0n} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,4),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,4),0n} \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,4),nn} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,4),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,4),nn} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,4),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,4),nn} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,4),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,4),nn} \\
\hline
\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,2),0n} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,2),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,2),0n} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,2),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,2),0n} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,2),00} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,2),0n} \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,1),(1,2),nn} & \mathcal{C}_{(1,3),(1,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,3),(1,2),nn} & \mathcal{C}_{(1,4),(1,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,4),(1,2),nn} & \mathcal{C}_{(1,2),(1,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(1,2),(1,2),nn}
\end{array} \right] = \mathbf{\Lambda}_{11}^{(e)} \quad (5.29)
\end{array}$$

Systemmatrix für Einzelleiter bei externer Erregung

hierbei ist darauf zu achten, daß die Integration der Stromdichte im untersuchten Leiter gemäß Gleichung (4.9) den Wert Null ergeben muß. Diese Bedingung ist durch den Störvektor zu erfüllen.

Daher ist zu fordern, daß die Addition der Elemente  $d_{11,0}$ ,  $d_{13,0}$ ,  $d_{14,0}$  und  $d_{12,0}$  Null ergibt:

$$d_{11,0} + d_{13,0} + d_{14,0} + d_{12,0} = 0.$$

Im vorliegenden Fall (rein externe Erregung) ist eine Zusammenfassung in Untermatrizen  $\gamma_{(i,p),(k,q)} \in \mathbb{C}^{n+1 \times n}$  möglich, die folgt definiert sind:

$$\gamma_{(i,p),(k,q)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c_{(i,p),(k,q),00} & \cdots & c_{(i,p),(k,q),0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(i,p),(k,q),n0} & \cdots & c_{(i,p),(k,q),nn} \end{bmatrix},$$

in denen die zum Koeffizientensatz  $v_{i1}$  gehörenden Konstanten zusammengefasst sind, die für Aufpunkte auf Seite  $q$  des Leiters  $k$  berechnet werden.

Die Matrix  $\Lambda_{1,1}$ :

$$[\Lambda_{1,1}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \gamma_{(1,1),(1,1)} & \gamma_{(1,2),(1,1)} & \gamma_{(1,3),(1,1)} & \gamma_{(1,4),(1,1)} \\ \gamma_{(1,1),(1,2)} & \gamma_{(1,2),(1,2)} & \gamma_{(1,3),(1,2)} & \gamma_{(1,4),(1,2)} \\ \gamma_{(1,1),(1,3)} & \gamma_{(1,2),(1,3)} & \gamma_{(1,3),(1,3)} & \gamma_{(1,4),(1,3)} \\ \gamma_{(1,1),(1,4)} & \gamma_{(1,2),(1,4)} & \gamma_{(1,3),(1,4)} & \gamma_{(1,4),(1,4)} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

umfasst Untermatrizen, die sich durch Permutation der Lage von Auf- und Quellpunkt auf jeweils einem Randabschnitt von Leiter  $k$  bzw.  $i$  ergeben. Die Werte für Auf- und Quellpunkt bei der Berechnung der Untermatrizen  $\gamma$  können der Tabelle 2 entnommen werden.

|                        |                        |                        |                        |                      |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| $\gamma_{(1,1),(1,1)}$ | $\gamma_{(1,2),(1,1)}$ | $\gamma_{(1,3),(1,1)}$ | $\gamma_{(1,4),(1,1)}$ | $y_0 = y_{q1}$       |
| $\gamma_{(1,1),(1,2)}$ | $\gamma_{(1,2),(1,2)}$ | $\gamma_{(1,3),(1,2)}$ | $\gamma_{(1,4),(1,2)}$ | $x_0 = x_{q1} + a_1$ |
| $\gamma_{(1,1),(1,3)}$ | $\gamma_{(1,2),(1,3)}$ | $\gamma_{(1,3),(1,3)}$ | $\gamma_{(1,4),(1,3)}$ | $y_0 = y_{q1} + b_1$ |
| $\gamma_{(1,1),(1,4)}$ | $\gamma_{(1,2),(1,4)}$ | $\gamma_{(1,3),(1,4)}$ | $\gamma_{(1,4),(1,4)}$ | $x_0 = x_{q1}$       |
| $y = y_{q1}$           | $x = x_{q1} + a_1$     | $y = y_{q1} + b_1$     | $x = x_{q1}$           |                      |

Tabelle 2: Werte von Auf- und Quellpunktsvektor für verschieden Randabschnitte

Bei Wahl dieser Darstellung ist darauf zu achten, daß durch die nullindizierten Gleichung und der Störvektor die Nebenbedingung (5.25) bzw. (4.9) implizit erfüllt werden muß.



### 5.5.1.2 Erregung durch in den Leiter eingeprägte Ströme

Bei Erregung des Leitersystems durch einen in den betrachteten Leiter eingepprägten Strom ist eine Modifikation der Matrix, des Lösungs- und des Störvektors nötig.

Bedingt durch die lineare Abhängigkeit der vier Gleichungen, die durch die Zeilen 1,  $N$ ,  $2N$  und  $3N$  der Matrix repräsentiert werden, fällt ein Koeffizient weg; er wird durch die anderen drei nullindizierten Koeffizienten ausgedrückt. In der Matrix fällt folglich eine Zeile weg ( $\Gamma \in (4N - 1) \times (4N - 1)$ ). Alle Ausdrücke in den Spalten 1,  $N + 1$  und  $2N + 1$  werden modifiziert.

Die modifizierten Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{d}$  nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\vec{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \tilde{v}_{i1,0} \\ v_{i1,1} \\ \vdots \\ v_{i1,M} \\ \tilde{v}_{i3,0} \\ v_{i3,1} \\ \vdots \\ v_{i3,M} \\ \tilde{v}_{i4,0} \\ v_{i4,1} \\ \vdots \\ v_{i4,M} \\ \tilde{v}_{i2,1} \\ v_{i2,1} \\ \vdots \\ v_{i2,M} \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \tilde{d}_{k1,0} \\ d_{k1,1} \\ \vdots \\ d_{k1,M} \\ \tilde{d}_{k3,0} \\ d_{k3,1} \\ \vdots \\ d_{k3,M} \\ \tilde{d}_{k4,0} \\ d_{k4,1} \\ \vdots \\ d_{k4,M} \\ \tilde{d}_{k2,1} \\ d_{k2,1} \\ \vdots \\ d_{k2,M} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Da in Gleichung (5.27)  $v_{12,0}$  durch  $v_{14,0}$  und den eingepprägten Strom ausgedrückt wird, müssen die Einträge in den Spalten 1,  $N + 1$  und  $2N + 1$  der Matrix und der Störvektor wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{(i,p),(i,q),n0} &= c_{(i,p),(i,q),n0} - \frac{a_i \tanh(\beta_{i0} b_i)}{b_i \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} c_{(i,2),(k,q)}, \quad p = 1 \text{ oder } 3, \\ \tilde{c}_{(i,4),(i,q),n0} &= c_{(i,2),(i,q),n0} - c_{(i,4),(k,q)}, \\ \tilde{d}_{kp,n} &= d_{kp,n} - \frac{1}{\beta_{i0} b_i \tanh(\tilde{\beta}_{i0} a_i)} I_i. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die Lösung des linearen Matrixgleichung

$$\mathbf{\Lambda}_{11} \cdot \vec{v}_1 = d_1$$

liefert dann die gesuchten Koeffizienten.

|  |                                |                                |                                |  |                                |                                |                                |  |                                |                                |                                |                                |          |                                |
|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|----------|--------------------------------|
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,1),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,1),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,1),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,1),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,1),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,1),0n}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,1),01}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,1),0n}$ |
| $\vdots$                               | $\ddots$                       | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                               | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                               | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                       |                                |          |                                |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,1),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,1),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,1),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,1),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,1),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,1),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,1),nn}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,1),n1}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,1),nn}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,3),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,3),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,3),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,3),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,3),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,3),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,3),0n}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,3),01}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,3),0n}$ |
| $\vdots$                               | $\ddots$                       | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                               | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                               | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                       |                                |          |                                |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,3),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,3),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,3),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,3),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,3),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,3),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,3),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,3),nn}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,3),n1}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,3),nn}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,4),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,4),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,4),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,4),0n}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,4),00}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),01}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,4),0n}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,4),01}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,4),0n}$ |
| $\vdots$                               | $\ddots$                       | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                               | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                               | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                       |                                |          |                                |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,1),(1,4),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,4),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,3),(1,4),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,4),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,4),nn}$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(1,4),(1,4),n0}$ | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,4),n1}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,4),nn}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,4),n1}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,4),nn}$ |
| $\vdots$                               | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),10}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),1n}$ | $\ddots$                               | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,2),10}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,2),1n}$ | $\vdots$                               | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,2),10}$ | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,2),1n}$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,2),11}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,2),1n}$ |
| $\vdots$                               | $\ddots$                       | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                               | $\vdots$                       | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                               | $\vdots$                       | $\ddots$                       | $\vdots$                       |                                |          |                                |
| $\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),n0}$         | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,1),(1,2),nn}$ |                                | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,2),n0}$         | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,3),(1,2),nn}$ |                                | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,2),n0}$         | $\ddots$                       | $\mathcal{C}_{(1,4),(1,2),nn}$ |                                | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,2),n1}$ | $\ddots$ | $\mathcal{C}_{(1,2),(1,2),nn}$ |

 $\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{11}^{(i)}$ 

(5.32)

## 5.5.2 Matrixgleichung für Mehrleitersysteme

Für Systeme, die aus mehreren Leitern aufgebaut sind, bietet sich die durchgehende Verwendung des Modells an, welches in den Leiter eingeprägte Ströme zuläßt.

Verwendet man nun Lösungs- und Störvektor aus Gleichung (5.31) und definiert man die Untermatrix  $\Lambda_{ik}$  wie in Gleichung (5.34) vorgenommen, gelangt man zur Matrixgleichung für Mehrleitersysteme aus  $N$  Leitern:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N1} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{\Gamma}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_N \end{bmatrix}}_{= \vec{v}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{d}_1 \\ \vdots \\ \vec{d}_N \end{bmatrix}}_{= \vec{d}} = 0. \quad (5.35)$$

In dieser Gleichung repräsentieren die Untermatrizen  $\Lambda_{ik}$  den Einfluß, den der Leiter  $i$  (auf dem sich der Quellpunkt befindet) auf die Stromverteilung in Leiter  $k$  (auf den der Aufpunkt gelegt wurde) ausübt. Die Lage von Auf- und Quellpunkt wurde in Tabelle 3 nochmals aufgeführt:

|                          |                          |          |                            |                           |
|--------------------------|--------------------------|----------|----------------------------|---------------------------|
| $\Lambda_{11}$           | $\Lambda_{12}$           | $\cdots$ | $\Lambda_{1N}$             | Quellpunkt auf Leiter 1   |
| $\Lambda_{11}$           | $\Lambda_{12}$           | $\cdots$ | $\Lambda_{1N}$             | Quellpunkt auf Leiter 2   |
| $\vdots$                 |                          | $\vdots$ | $\vdots$                   |                           |
| $\Lambda_{N1}$           | $\Lambda_{N2}$           | $\cdots$ | $\Lambda_{NN}$             | Quellpunkt auf Leiter $N$ |
| Aufpunkt auf<br>Leiter 1 | Aufpunkt auf<br>Leiter 2 | $\cdots$ | Aufpunkt auf<br>Leiter $N$ |                           |

Tabelle 3: Werte von Auf- und Quellpunktsvektor für Mehrleitersysteme

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,1),00} \mathcal{C}_{(i,1),(k,1),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,1),0n}$<br>$\vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,1),00} \mathcal{C}_{(i,3),(k,1),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,1),0n}$<br>$\ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,1),00} \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,1),0n}$<br>$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$ | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,1),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,1),0n}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,1),n0} \mathcal{C}_{(i,1),(k,1),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,1),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,1),n0} \mathcal{C}_{(i,3),(k,1),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,1),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,1),n0} \mathcal{C}_{(i,1),(k,1),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,1),nn}$  | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,1),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(i,1),nn}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,3),00} \mathcal{C}_{(i,1),(k,3),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,3),0n}$<br>$\vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,3),00} \mathcal{C}_{(i,3),(k,3),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,3),0n}$<br>$\ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,3),00} \mathcal{C}_{(i,4),(k,3),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,3),0n}$<br>$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$ | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,3),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,3),0n}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,3),n0} \mathcal{C}_{(i,1),(k,3),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,3),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,3),n0} \mathcal{C}_{(i,3),(k,3),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,3),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,3),n0} \mathcal{C}_{(i,4),(k,3),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,3),nn}$  | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,3),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,3),nn}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,4),00} \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),0n}$<br>$\vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,4),00} \mathcal{C}_{(i,3),(k,4),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,4),0n}$<br>$\ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$ | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,4),00} \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,4),0n}$<br>$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$ | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,4),01} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,4),0n}$ |
| $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,1),(k,4),n0} \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,4),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,3),(k,4),n0} \mathcal{C}_{(i,3),(k,4),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,4),nn}$  | $\tilde{\mathcal{C}}_{(i,4),(k,4),n0} \mathcal{C}_{(i,4),(k,4),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,4),nn}$  | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,4),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,4),nn}$ |
| $\mathcal{C}_{(i,1),(k,2),10} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,2),1n}$<br>$\vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots$                                      | $\mathcal{C}_{(i,3),(k,2),10} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,2),1n}$<br>$\ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$                                      | $\mathcal{C}_{(i,4),(k,2),10} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,2),1n}$<br>$\vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots$                                      | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,2),11} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,2),1n}$ |
| $\mathcal{C}_{(i,1),(k,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(i,1),(k,2),nn}$   | $\mathcal{C}_{(i,3),(k,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(i,3),(k,2),nn}$   | $\mathcal{C}_{(i,4),(k,2),n0} \cdots \mathcal{C}_{(i,4),(k,2),nn}$   | $\mathcal{C}_{(i,2),(k,2),n1} \cdots \mathcal{C}_{(i,2),(k,2),nn}$ |

$\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ik}^{(i)}$

(5.34)

## Kapitel 6

# Auswertung auftretender Integrale

### 6.1 Analytische Auswertung

Zur Berechnung der Funktionen in Gleichung (5.9), die zur Berechnung des Vektorpotentials im Außenraum nötig sind, werden vier Integralausdrücke (und zwei weitere, die sich durch Differentiation aus diesen vier ergeben) benötigt. Da für die Logarithmusfunktion im Integranden zwei verschiedene Kernentwicklungen zu Einsatz kommen, müssen 8 Varianten berechnet werden. Verwendet man die so erhaltenen Ausdrücke in der weiteren Rechnung, so sind die erhaltenen Ausdrücke nach Orthogonalfunktionen (hier: Kosinusfunktionen) zu entwickeln.

Unter Verwendung der Fouriertransformierten des logarithmischen Abstandes als Kernentwicklung ist eine rein analytische Berechnung der Integrale möglich. Sie wird hier bis zur Rückführung der Integralausdrücke auf die Funktionen  $R$  und  $T$  durchgeführt; die Rückführung dieser Funktionen auf die komplexwertige Exponentialintegralfunktion  $E_1(z)$  wird aus Platzgründen in Anhang A durchgeführt.

Die Funktionen  $T_{\pm}$  und  $R_{\pm}$  sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 R_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \\
 &= \int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu c_1}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu c_2}) \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm e^{-j\nu(-w^*)} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu(-c_1^*)}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu(-c_2^*)}) \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ \nu \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \beta} + \frac{1}{\nu - \beta} \right] \right\} d\nu, \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
T_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \\
&\int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} (1 - (1 - \delta_{0,c1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu c_1}) (1 - (1 - \delta_{0,c2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu c_2}) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm e^{-j\nu(-w^*)} (1 - (1 - \delta_{0,c1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu(-c_1^*)}) (1 - (1 - \delta_{0,c2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu(-c_2^*)}) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \nu \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \beta} + \frac{1}{\nu - \beta} \right] \right\} d\nu. \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Für ihre Argumente gilt:  $w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ .

## 6.1.1 Funktionen in der Reihendarstellung von $A^{(a)}$

### 6.1.1.1 Definition

Für die gesamte analytische Auswertung wird dabei die in den Kapiteln 4 und 5 eingeführte Nomenklatur verwendet, die die lokalen und globalen Koordinaten mit Hilfe der Lagevektoren verbindet:

$$\begin{aligned}
x &= x_{qi} + x_i, & x_0 &= x_{qi} + x_{0i} \\
y &= y_{qi} + y_i, & y_0 &= y_{qi} + y_{0i} \\
w &= x + jy, & w_0 &= x_0 + jy_0;
\end{aligned} \quad (6.3)$$

entsprechend für  $x_{qk}, x_k, y_{qk}$  und  $y_k$ .

Unter Verwendung dieser Kovention lauten die gesuchten Funktionen:

$$d_1(x, y, y_0, i, n) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) \ln |w - w_0| dx_{0i}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
d_2(x, y, i, n, \eta) &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{b_i} \left( \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |w - w_0| \right]_{x_0=x_{qi}} - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |w - w_0| \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} \right) dy_{0i}, \quad \eta \in \mathbb{R} \quad (6.5)
\end{aligned}$$

$$d_3(x, y, x_0, i, n) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \ln |w - w_0| dy_{0i} \quad (6.6)$$

und

$$d_4(x, y, i, n, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_i} \left( \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=y_{qi}} - \right. \\ \left. - (-1)^n \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} \right) dx_{0i}, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

Die Funktionen  $d_2$  und  $d_4$  fassen bewußt zwei Integralausdrücke zusammen, da dadurch bereits im ersten Schritt der Rechnung eine Zusammenfassung gleichartiger Ausdrücke möglich wird.

Zusätzlich wird die Ableitungen von  $d_1$  nach  $y_0$  und die Ableitung von  $d_3$  nach  $x_0$  benötigt. Da die Differentiation nach der globalen Variable  $x_0$  mit der nach den lokalen Variable  $x_{0i}$  übereinstimmt, wird im Folgenden  $\frac{\partial}{\partial y_{0i}} d_1$  berechnet (und entsprechend  $\frac{\partial}{\partial x_{0i}} d_3$ ).

Für den in allen Integralausdrücken vorkommende Logarithmus stehen zwei Kernentwicklungen (Gleichungen 3.2 und 3.3 auf Seite 28) zur Verfügung. Um die jeweils verwendete Entwicklung zu kennzeichnen, wird in Anlehnung an Kapitel 3 die in im Fourierintegral enthaltene Fallunterscheidung durch einen hochgestellten Index gekennzeichnet. So bezeichnet  $d_1^{(y)}$  die Funktion  $d_1$ , bei der die Kernentwicklung mit Fallunterscheidung in  $y$ -Richtung verwendet (Gleichung (3.2)) wurde.

### 6.1.1.2 Die Funktion $d_1$

In einem ersten Schritt wird die Entwicklung für den Kern mit Fallunterscheidung in  $y$ -Richtung aus Gleichung (3.4) in das Integral in 6.4 eingesetzt:

$$d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) \int_0^{\infty} (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i}-x_{0i})} + \\ + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i}-x_{0i})}) \frac{d\nu}{\nu} dx_{0i}, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}.$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Ausklammern aller an der Integration  $dx_{0i}$  nicht beteiligten Faktoren liefert:

$$d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) e^{\mp j\nu x_{0i}} dx_{0i} + \\ + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) e^{\pm j\nu x_{0i}} dx_{0i}) \frac{d\nu}{\nu} \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}.$$

Die Lösungen für die beiden Integrale  $dx_{0i}$  mit  $\alpha_{in} = \frac{n\pi}{a_i}$  sind bekannt:

$$\int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} \xi) e^{\pm j\nu \xi} d\xi = \pm \frac{j}{2} [1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right], \quad (6.8)$$

und man erhält

$$d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \mp \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i})) \left[ \frac{1}{\nu+\alpha_{in}} + \frac{1}{\nu-\alpha_{in}} \right] \frac{d\nu}{\nu}, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}. \quad (6.9)$$

Unter Verwendung der folgenden Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right] = -\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right], \quad a \neq 0, \quad (6.10)$$

läßt sich das Ergebnis

$$d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \pm \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i})) \frac{1}{\alpha_{in}} \left[ \frac{1}{\nu+\alpha_{in}} - \frac{1}{\nu-\alpha_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}$$

mit der Funktion  $T_-$  wie folgt formulieren:

$$d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \pm \frac{j}{16\pi\alpha_{in}} T_- (\mp (w - w_{qi} - jy_{0i}), \pm a_i, 0, \alpha_{in}, 0, \alpha_{in}).$$

Die Rechnung unter Verwendung der alternativen Kernentwicklung geht von

$$d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w-w_{qi}-jy_{0i}-x_{0i})} + e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i}-x_{0i})}) \frac{d\nu}{\nu} dx_{0i} \quad \begin{array}{l} x \geq x_0 \\ x \leq x_0 \end{array}$$

aus und ergibt nach Umstellung:

$$d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} + e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})}) \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x_{0i}) e^{\pm \nu x_{0i}} dx_{0i} \frac{d\nu}{\nu}, \quad \begin{array}{l} x \geq x_0 \\ x \leq x_0 \end{array}.$$

Die Lösung für das innere Integral lautet für  $\alpha_{in} = \frac{n\pi}{a_i}$ :

$$\int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} \xi) e^{\pm \nu \xi} d\xi = \mp \frac{1}{2} [1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}] \left[ \frac{1}{\nu + j\alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - j\alpha_{in}} \right], \quad (6.11)$$

sodaß der gesuchte Ausdruck

$$d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \mp \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} + e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})}) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \cdot \left[ \frac{1}{\nu + j\alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - j\alpha_{in}} \right] \frac{d\nu}{\nu}, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}. \quad (6.12)$$



bzw., wieder mit der Partialbruchzerlegung (6.10) auf

$$d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \pm \frac{1}{8\pi j \alpha_{in}} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w - w_{qi} - jy_{0i})} + e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + jy_{0i})}) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \cdot \left[ \frac{1}{\nu + j \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - j \alpha_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array} \quad (6.13)$$

führt. Als Endergebnis findet man:

$$d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) = \pm \frac{1}{16\pi j \alpha_{in}} T_+ (\mp j(w - w_{qi} - jy_{0i}), \pm j a_i, 0, j \alpha_{in}, 0, j \alpha_{in}).$$

Für die noch zu lieferende Ableitung von  $d_1$  nach  $y_{0i}$  findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{0i}} d_1^{(y)}(x, y, y_{0i}, i, n) &= -\frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\pm j \nu(w - w_{qi} - jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j \nu a_i}) - \\ &\quad - e^{\mp j \nu(w^* - w_{qi}^* + jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j \nu a_i})) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}, \\ &= -\frac{j}{16\pi} R_- (\mp (w - w_{qi} - jy_{0i}), \pm a_i, 0, \alpha_{in}, 0, \alpha_{in}), \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_{0i}} d_1^{(x)}(x, y, y_{0i}, i, n) &= -\frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w - w_{qi} - jy_{0i})} - e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + jy_{0i})}) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \cdot \left[ \frac{1}{\nu + j \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - j \alpha_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array} \\ &= -\frac{j}{16\pi} R_- (\mp j(w - w_{qi} - jy_{0i}), \pm j a_i, 0, j \alpha_{in}, 0, j \alpha_{in}). \end{aligned}$$

Für den Fall  $\alpha_{km} = \alpha_{in} = 0$  liefert die Verwendung der Kernentwicklung kein brauchbares Ergebnis. Stattdessen kann die Kernfunktion direkt integriert werden.

Hier nimmt Gleichung (6.4) die Form

$$d_1(x, y, y_{0i}, i, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_i} \ln |w - w_{qi} + x_{0i} + jy_{0i}| dx_{0i}, \quad (6.14)$$

an. Mit

$$\ln |w| = \Re \{ \ln(w) \}, \quad w \in \mathbb{C},$$

und dem aus [3, Nr. 465] entnommenen Integral

$$\int \ln(\xi) d\xi = \xi(\ln(\xi) + 1) \quad (6.15)$$

erhält man:

$$d_1(x, y, y_{0i}, i, 0) = -\frac{1}{2\pi} \Re \left\{ (w - w_{qi} - jy_{0i} - a_i) \ln(w - w_{qi} - jy_{0i} - a_i) - (w - w_{qi} - jy_{0i}) \ln(w - w_{qi} - jx_{0i}) - a_i \right\}. \quad (6.16)$$

### 6.1.1.3 Die Funktion $d_2$

Auch hier wird zunächst die Ableitung der Kernentwicklung der Gleichung (3.4) entnommen und in den Ausdruck eingesetzt. Anschließend wird sortiert und geeignet ausgeklammert:

$$\begin{aligned}
d_2^{(y)}(x, y, i, n, \eta) &= \mp \frac{j}{4\pi} \int_0^{b_i} \left( \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})}) d\nu - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i-jy_{0i})} - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i+jy_{0i})}) d\nu \right) dy_{0i}, \quad \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}, \\
&= \mp \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \right) \\
&\quad \cdot \int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] e^{\pm \nu y_{0i}} dy_{0i} d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Die inneren Integrale werden unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(x - \eta)] e^{\pm \nu x} dx &= \frac{1}{2} \left\{ (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right\} \quad (6.17)
\end{aligned}$$

gelöst. Weiteres Ausklammern und Zusammenfassen führt auf

$$\begin{aligned}
&= \mp \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \right) \\
&\quad \cdot \left( (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix},
\end{aligned}$$

und die folgende Rückführung auf  $R$  und  $T$ :

$$\begin{aligned}
d_2^{(y)}(x, y, i, n, \eta) &= \mp \frac{j}{16\pi} \left( \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] T_- (\mp (w - w_{qi} - jb_i), \pm a_i, 0, \beta_{in}, 0, \alpha_{in}) + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\beta_{in}\eta) T_- (\mp (w - w_{qi}), \pm a_i, 0, \beta_{in}, 0, \alpha_{in}) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] R_- (\mp (w - w_{qi} - jb_i), \pm a_i, 0, \beta_{in}, 0, \alpha_{in}) \mp \right. \\
&\quad \left. \mp \cosh(\beta_{in}\eta) R_- (\mp (w - w_{qi}), \pm a_i, 0, \beta_{in}, 0, \alpha_{in}) \right), \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Verwendet man die alternative Kernentwicklung, läßt sich

$$\begin{aligned}
d_2^{(x)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^{b_i} \left( \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\mp\nu(w-w_{qi}-jy_{0i})} + e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i})}) d\nu - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\mp\nu(w-w_{qi}-a_i-jy_{0i})} + e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i+jy_{0i})}) d\nu \right) dy_{0i}, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}, \\
&= \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left( e^{\mp\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\pm\nu a_i}) \int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] e^{\pm j\nu y_{0i}} dy_{0i} + \right. \\
&\quad \left. + e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm\nu a_i}) \int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(y_{0i} - \eta)] e^{\mp j\nu y_{0i}} dy_{0i} \right) d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array},
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(x - \eta)] e^{\pm j\nu x} dx &= \frac{j}{2} \left\{ (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \right\}. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
&= \pm \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (1 - (-1)^n e^{\pm\nu a_i}) \left( (e^{\mp\nu(w-w_{qi}-jb_i)} + e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*+jb_i)}) \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] + \right. \\
&\quad \left. + (e^{\mp\nu(w-w_{qi})} + e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*)}) \sinh(\beta_{in}\eta) \right) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \pm \\
&\quad \pm \left( (e^{\mp\nu(w-w_{qi}-jb_i)} - e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*+jb_i)}) \cosh[\beta_{in}b_i - \eta] - \right. \\
&\quad \left. - (e^{\mp\nu(w-w_{qi})} - e^{\mp\nu(w^*-w_{qi}^*)}) \cosh(\beta_{in}\eta) \right) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}
\end{aligned}$$

umformen. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
d_2^{(x)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{j}{16\pi} \left( \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] T_+ (\mp(w - w_{qi} - jb_i), \pm ja_i, 0, j\beta_{in}, 0, j\alpha_{in}) + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\beta_{in}\eta) T_+ (\mp(w - w_{qi}), \pm ja_i, 0, j\beta_{in}, 0, j\alpha_{in}) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] R_- (\mp(w - w_{qi} - jb_i), \pm ja_i, 0, j\beta_{in}, 0, j\alpha_{in}) \mp \right. \\
&\quad \left. \mp \cosh(\beta_{in}\eta) R_- (\mp(w - w_{qi}), \pm ja_i, 0, j\beta_{in}, 0, j\alpha_{in}) \right), \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

### 6.1.1.4 Die Funktion $d_3$

Wird Gleichung (3.2) zur Bestimmung von  $d_3$  verwendet:

$$\begin{aligned}
 d_3^{(y)}(x, y, x_{0i}, i, n) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i}-x_{0i})} + \\
 &\quad + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i}-x_{0i})}) \frac{d\nu}{\nu} dy_{0i} \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array}, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) \cdot \\
 &\quad \cdot \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) e^{\pm \nu y_{0i}} dy_{0i} \frac{d\nu}{\nu}, \quad \begin{array}{l} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{array},
 \end{aligned}$$

ergibt sich mit den Gleichungen (6.11) und (6.10):

$$\begin{aligned}
 d_3^{(y)}(x, y, x_{0i}, i, n) &= \pm \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu b_i}) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{j\tilde{\alpha}_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - j\tilde{\alpha}_{in}} \right] d\nu \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{array}, \\
 &= \mp \frac{j}{16\pi\tilde{\alpha}_{in}} T_+ \left( \mp (w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j b_i, 0, j\tilde{\alpha}_{in}, 0, j\tilde{\alpha}_{in} \right), \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{array},
 \end{aligned}$$

bzw. für

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} d_3^{(y)}(x, y, x_{0i}, i, n) = -\frac{j}{16\pi} R_- \left( \mp (w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j b_i, 0, j\tilde{\alpha}_{in}, 0, j\tilde{\alpha}_{in} \right), \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{array}.$$

Alternativ wird

$$\begin{aligned}
 d_3^{(x)}(x, y, x_{0i}, i, n) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) \int_0^\infty (e^{\mp j\nu(w-w_{qi}-jy_{0i}-x_{0i})} + \\
 &\quad + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jy_{0i}-x_{0i})}) \frac{d\nu}{\nu} dy_{0i}, \quad \begin{array}{l} x \geq x_0 \\ x \leq x_0 \end{array}, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (e^{\mp j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) e^{\pm j\nu y_{0i}} dy_{0i} + \\
 &\quad + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})} \int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} y_{0i}) e^{\mp j\nu y_{0i}} dy_{0i} \frac{d\nu}{\nu}, \quad \begin{array}{l} x \geq x_0 \\ x \leq x_0 \end{array},
 \end{aligned}$$

mit Gleichung (6.8) und Gleichung (6.10) zu

$$\begin{aligned}
d_3^{(x)}(x, y, x_{0i}, i, n) &= \mp \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (e^{\mp j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu b_i}) - \\
&\quad - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu b_i})) \frac{1}{\tilde{\alpha}_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i, \\ x \leq x_{qi} \end{array}, \\
&= \mp \frac{j}{16\pi \tilde{\alpha}_{in}} T_- \left( \mp j(w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j b_i, 0, \tilde{\alpha}_{in}, 0, \tilde{\alpha}_{in} \right), \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i, \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

Für  $n = 0$  wird  $\tilde{\alpha}_{i0} = 0$ . Die Gleichung (6.6) ergibt mit

$$d_3(x, y, x_0, i, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{b_i} \ln |w - w_0| dy_0$$

das zu Gleichung (6.16) analoge Ergebnis:

$$\begin{aligned}
d_3(x, y, x_{0i}, i, 0) &= -\frac{1}{2\pi} \Re \left\{ j \left( (w - x_{qi} - x_{0i} - j b_i) \ln(w - x_{qi} - x_{0i} - j b_i) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (w - x_{qi} - x_{0i}) \ln(w - w_{qi} - x_{0i} - j b_i) \right) \right\}. \quad (6.19)
\end{aligned}$$

Die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_{0i}} d_3^{(x)}$  lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} d_3^{(x)}(x, y, x_{0i}, i, n) = R_- \left( \mp j(w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j b_i, 0, \tilde{\alpha}_{in}, 0, \tilde{\alpha}_{in} \right), \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i, \\ x \leq x_{qi} \end{array} - \frac{j}{8\pi}$$

#### 6.1.1.5 Die Funktion $d_4$

Für die letzte gesuchte Funktion findet man

$$\begin{aligned}
d_4^{(y)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^{a_i} \left( \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) d\nu - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-j b_i-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+j b_i x_{0i})}) d\nu \right) dx_{0i}, \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i, \\ y \leq y_{qi} \end{array}, \\
&= \pm \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu b_i}) \left( \int_0^{a_i} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] e^{\mp j\nu x_{0i}} dx_{0i} \right) + \right. \\
&\quad \left. + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu b_i}) \left( \int_0^{a_i} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] e^{\pm j\nu x_{0i}} dx_{0i} \right) \right) d\nu, \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i, \\ y \leq y_{qi} \end{array},
\end{aligned}$$

mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
d_4^{(y)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty (1 - (-1)^n e^{\mp \nu b_i}) \\
&\quad \left( \left( (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)}) \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)}) \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) \right) \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\beta}_{in}} - \frac{1}{\nu - j\tilde{\beta}_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \pm \left( (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)}) \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] - \right. \\
&\quad \left. \left. - (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)}) \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) \right) \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\beta}_{in}} + \frac{1}{\nu - j\tilde{\beta}_{in}} \right] \right) d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i, \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}, \\
&= \pm \frac{j}{16\pi} \left( \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] T_+ (\mp (w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, 0, j\tilde{\beta}_{in}, 0, j\tilde{\beta}_{in}) - \right. \\
&\quad - \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) T_+ (\mp (w - w_{qi}), \mp b_i, 0, j\tilde{\beta}_{in}, 0, j\tilde{\beta}_{in}) \mp \\
&\quad \mp \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] R_- (\mp (w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, 0, j\tilde{\beta}_{in}, 0, j\tilde{\beta}_{in}) \pm \\
&\quad \left. \pm \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) R_- (\mp (w - w_{qi}), \mp b_i, 0, j\tilde{\beta}_{in}, 0, j\tilde{\beta}_{in}) \pm \right), \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i, \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Auch hier muß noch die andere mögliche FOURIERtransformierte herangezogen werden. Ihre Verwendung führt auf

$$\begin{aligned}
d_4^{(x)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{j}{4\pi} \int_0^{a_i} \left( \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w-w_{qi}-x_{0i})} - e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) d\nu - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w-w_{qi}-jb_i-x_{0i})} - e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*+jb_i-x_{0i})}) d\nu \right) dx_{0i}, \quad \begin{matrix} x \geq x_0, \\ x \leq x_0 \end{matrix}, \\
&= \pm \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \left( (e^{\mp \nu(w-w_{qi})} ((1 - (-1)^n) e^{\pm j\nu b_i}) - e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*)} ((1 - (-1)^n) e^{\mp j\nu b_i})) \right. \\
&\quad \left. \int_0^{a_i} \cosh[\tilde{\beta}_{in}(x_{0i} - \eta)] e^{\pm \nu x_{0i}} d\nu \right) dx_{0i}, \quad \begin{matrix} x \geq x_0, \\ x \leq x_0 \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Auswerten der inneren Integrale mit Gleichung (6.17) ergibt

$$\begin{aligned}
d_4^{(x)}(x, y, i, n, \eta) &= \pm \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty \left( (e^{\mp \nu(w-w_{qi})} ((1 - (-1)^n) e^{\pm j\nu b_i}) - e^{\mp \nu(w^*-w_{qi}^*)} ((1 - (-1)^n) e^{\mp j\nu b_i})) \right. \\
&\quad \left\{ (\sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} - \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \right\} d\nu \quad \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i, \\ x \leq x_{qi} \end{matrix}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
d_4^{(x)}(x, y, i, n, \eta) = & \pm \frac{j}{16\pi} \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] T_- (\mp j(w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, 0, \tilde{\beta}_{in}, 0, \tilde{\beta}_{in}) + \\
& + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) T_- (\mp j(w - w_{qi}), \mp b_i, 0, \tilde{\beta}_{in}, 0, \tilde{\beta}_{in}) \pm \\
& \pm \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] R_- (\mp j(w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, 0, j\tilde{\beta}_{in}, 0, \tilde{\beta}_{in}) \mp \\
& \mp \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) R_- (\mp j(w - w_{qi}), \mp b_i, 0, \tilde{\beta}_{in}, 0, \tilde{\beta}_{in}) \Big)_{\substack{x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi}}}.
\end{aligned}$$

### 6.1.1.6 Bestimmung der Funktionen der Reihendarstellung

Mit Hilfe der Ergebnisse für die Funktionen  $d_1, d_2, d_3$  und  $d_4$  lassen sich nun die Funktionen  $f$  darstellen, die in der Reihendarstellung von  $A^{(a)}$  Gleichung (5.9) verwendet werden.

$$\begin{aligned}
f_{(i1),n}^{(a)}(x, y) = & -\frac{\partial}{\partial y_0} d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}} + \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \frac{\partial}{\partial y_0} d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}+b_i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}} - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} d_2^{(y)}|_{\eta=b_i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{(i3),n}^{(a)}(x, y) = & -\frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \frac{\partial}{\partial y_0} d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}} + \frac{\partial}{\partial y_0} d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}+b_i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) d_1^{(y)}|_{y_0=y_{qi}+b_i} - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} d_2^{(y)}|_{\eta=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{(i4),n}^{(a)}(x, y) = & -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} d_4^{(x)}|_{\eta=a_i} - \frac{\partial}{\partial x_0} d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}} + \\
& + \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \frac{\partial}{\partial x_0} d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}+a_i} - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in}a_i) d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}},
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_{(i2),n}^{(a)}(x, y) = & -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} d_4^{(x)}|_{\eta=0} - \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \frac{\partial}{\partial x_0} d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_0} d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}+a_i} - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in}a_i) d_3^{(x)}|_{x_0=x_{qi}+a_i}.
\end{aligned}$$

### 6.1.2 Entwicklung nach Orthogonalfunktionen

Im nächsten Schritt werden die Funktionen  $d_1$  bis  $d_4$  nach Orthogonalfunktionen entwickelt. Da bei dieser Rechnung jeweils eine Komponente des Ortsvektors fest vorgegeben ist, während über die verbleibende Komponente integriert wird, ist es nicht nötig, alle 16 Ausdrücke aus

Abschnitt 6.1.1 zu berechnen. Man kann sich darauf beschränken, die Funktionen, die eine Fallunterscheidung in  $y$  beinhalten, für feste Werte von  $y$  nach Kosinusfunktionen zu entwickeln, die von  $x$  abhängig sind. Funktionen mit Fallunterscheidung in  $x$  werden dementsprechend nach von  $y$  abhängigen Kosinusfunktionen entwickelt.

### 6.1.2.1 Die Funktion $D_1^{(y)}$

Hier wird zunächst die  $y$ -Komponente des Aufpunktes festgelegt:  $y = y_{qk}$  oder  $y = y_{qk} + b_k$ . Die gesuchte Funktion ist über  $D_1^{(y)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} d_1^{(y)} dx_k$  definiert.

Die Berechnung der Ableitung nach  $y$  ergibt  $\frac{\partial}{\partial y} = \mp \nu$ :

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, n, k, m) = -\frac{j}{8\pi} \int_0^{a_k} \left( \cos(\alpha_{km} x_k) \int_0^\infty \left\{ e^{\pm j\nu(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) - e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* - jy_k + jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \right\} \cdot \frac{\nu}{\alpha_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] d\nu \right) dx_k, \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}$$

woraus man durch nochmalige Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Ausklammern

$$D_1^{(y)} = -\frac{j}{8\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k - e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* - jy_k + jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \cdot \frac{\nu}{\alpha_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \right) d\nu, \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}$$

erhält. Nach einer abschließenden Auswertung der Integrale mit Gleichung (6.8) läßt sich das Resultat

$$D_1^{(y)} = \pm \frac{1}{16\pi\alpha_{in}} \int_0^\infty \left[ \left( e^{\pm j\nu(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) + e^{\mp j\nu(w_{qk} - w_{qi} - jy_k + jy_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k}) \right) \cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] \right] d\nu, \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}$$

unter Verwendung der zusammenfassenden Funktion  $R_-$  wie folgt ausdrücken:

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, n, k, m) = \pm \frac{1}{16\pi\alpha_{in}} T_+(\mp(x_{qk} - x_{qi} + jy_k - jy_{0i}), \pm a_i, \mp a_k, \alpha_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}), \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix} \quad (6.20)$$

Damit ist eine Lösung für den ersten Integralausdruck gefunden.



Die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial y_{0i}}$  dieses Ausdrucks liefert:

$$\frac{\partial}{\partial y_{0i}} D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, n, k, m) = -\frac{1}{16\pi} R_+(\mp(x_{qk} - x_{qi} + jy_k - jy_{0i}), \pm a_i, \mp a_k, \alpha_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}), \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}.$$

Für  $\alpha_{in} = 0, \alpha_{km} \neq 0$  muss statt Gleichung (6.13) die Gleichung (6.12) verwendet werden. Der weitere Rechenweg bleibt gleich und führt auf:

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, 0, k, m) = \pm \frac{1}{16\pi\alpha_{km}} R_+(\mp(x_{qk} - x_{qi} + jy_k - jy_{0i}), \mp a_k, 0, \alpha_{km}, 0, \alpha_{km}), \begin{matrix} y \geq y_0 \\ y \leq y_0 \end{matrix}. \quad (6.21)$$

Somit verbleibt nur noch der Fall  $n = m = 0 \Rightarrow \alpha_{in} = 0, \alpha_{km} = 0$ . Ausgehend von Gleichung (6.16) ergibt

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, 0, k, 0) = \int_0^{a_k} \frac{\partial}{\partial y} d_1^{(y)}(y, y_{0i}, i, 0) dx_k,$$

wieder mit Gleichung (6.15):

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, 0, k, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_k} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\ln(w - w_{qi} - jy_{0i}) - \ln(w - w_{qi})) \right] dx_k,$$

und als Endergebnis

$$D_1^{(y)}(y_k, y_{0i}, i, 0, k, 0) = -\frac{1}{2\pi} \Re \left\{ (w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jy_{0i}) \ln(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jy_{0i}) - \right. \\ \left. - (w_{qk} - w_{qi} - jy_{0i}) \ln(w_{qk} - w_{qi} - jy_{0i}) - \right. \\ \left. - (w_{qk} - w_{qi} + jy_k) \ln(w_{qk} - w_{qi} + jy_k) + (w_{qk} - w_{qi}) \ln(w_{qk} - w_{qi}) \right\}. \quad (6.22)$$

### 6.1.2.2 Die Funktion $D_2^{(y)}$

Für diese Funktion, die definitionsgemäß  $D_2^{(y)}(y_k, i, n, k, m, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} d_2^{(y)} dx_k$  lautet, findet man nach Bilden der Ableitung:

$$D_2^{(y)}(y_k, i, n, k, m, \eta) = \frac{j}{8\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w_{qk} - w_{qi} + jy_k)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k - \right. \\ \left. - e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* - jy_k)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \right) \cdot \\ \cdot \left( (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \pm \right. \\ \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \nu d\nu, \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.$$

Auflösen der Integrale liefert

$$\begin{aligned}
&= \mp \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) + \right. \\
&\quad \left. + e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k}) \right) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left( (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \nu d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix},
\end{aligned}$$

und erlaubt die Darstellung durch  $R$  und  $T$ :

$$\begin{aligned}
&= \mp \frac{1}{16\pi} \left( \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] T_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jb_i), \pm a_i, \mp a_k, \beta_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}) + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\beta_{in}\eta) T_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k), \pm a_i, \mp a_k, \beta_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] R_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - jb_i), \pm a_i, \mp a_k, \beta_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}) \mp \right. \\
&\quad \left. \mp \cosh(\beta_{in}\eta) R_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k), \pm a_i, \mp a_k, \beta_{in}, \alpha_{km}, \alpha_{in}) \right), \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

### 6.1.2.3 Die Funktion $D_3^{(y)}$

Für  $D_3^{(y)}(x, i, n, k, m) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} d_3^{(y)} dx_k$  erhält man nach Differentiation und Sortieren:

$$\begin{aligned}
D_3^{(y)}(y, x_{0i}, i, n, k, m) &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}+jy_k-x_{0i})} \left( \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k \right) + \right. \\
&\quad \left. + e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* - jy_k - x_{0i})} \left( \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \right) \right) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu b_i}) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\nu}{j\tilde{\alpha}_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - j\tilde{\alpha}_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}, \\
&= \mp \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}+jy_k-x_{0i})} (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) - \right. \\
&\quad \left. - e^{\mp j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* - jy_k - x_{0i})} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k}) \right) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu b_i}) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{\nu}{j\tilde{\alpha}_{in}} \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - j\tilde{\alpha}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet für  $n \neq 0$ :

$$D_3^{(y)}(y, x_{0i}, i, n, k, m) = \mp \frac{1}{16\pi\tilde{\alpha}_{in}} \cdot T_-(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - x_{0i}), \pm jb_i, \mp a_k, j\tilde{\alpha}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}), \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix},$$

für  $n = 0, m \neq 0$ :

$$D_3^{(y)}(y, x_{0i}, i, 0, k, m) = \mp \frac{1}{16\pi\tilde{\alpha}_{km}} T_-(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - x_{0i}), \mp a_k, 0, \alpha_{km}, 0, \alpha_{km}), \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix},$$

und für  $n = 0, m = 0$ :

$$D_3^{(y)}(y_k, x_{0i}, i, 0, k, 0) = -\frac{1}{2\pi} \Re \left\{ j(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - x_{0i}) \ln(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - x_{0i}) - \right. \\ \left. - (w_{qk} - w_{qi} - x_{0i}) \ln(w_{qk} - w_{qi} - x_{0i}) - \right. \\ \left. - (w_{qk} - w_{qi} + jy_k) \ln(w_{qk} - w_{qi} + jy_k) + (w_{qk} - w_{qi}) \ln(w_{qk} - w_{qi}) \right\}. \quad (6.23)$$

Die noch zu liefernde Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_{0i}} D_3^{(y)}$  ergibt hier:

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} D_3^{(y)} = -\frac{1}{16\pi} R_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - x_{0i}), \pm jb_i, \mp a_k, j\tilde{\alpha}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}), \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.$$

#### 6.1.2.4 Die Funktion $D_4^{(y)}$

Die Funktion

$$D_4^{(y)}(y, i, n, k, m, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km} x_k) \frac{\partial}{\partial y} d_4^{(y)} dx_k$$

läßt sich nach Auswertung der Integrale zunächst als

$$D_4^{(y)}(y, i, n, k, m, \eta) = \pm \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty (1 - (-1)^n e^{\mp \nu b_i}) \\ \left( \left( (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k})) \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] + \right. \right. \\ \left. \left. + (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) - e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k})) \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) \right) \cdot \right. \\ \left. \nu \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\beta}_{in}} + \frac{1}{\nu - j\tilde{\beta}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] \pm \right. \\ \left. \pm \left( (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k})) \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] - \right. \right. \\ \left. \left. - (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^m e^{\pm j\nu a_k}) + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu a_k})) \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) \right) \cdot \right. \\ \left. \left. \nu \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\beta}_{in}} - \frac{1}{\nu - j\tilde{\beta}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] \right) \right) d\nu, \quad \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix},$$

und dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
D_4^{(y)}(y, i, n, k, m, \eta) = & \\
= \pm \frac{1}{16\pi} & \left( \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] T_-(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - a_i), \mp a_i, \mp a_k, j\tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}) + \right. \\
& + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) T_-(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k), \mp a_i, \mp a_k, j\tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}) \mp \\
& \mp \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] R_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k - a_i), \mp a_i, \mp a_k, j\tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}) \mp \\
& \left. \mp \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) R_+(\mp(w_{qk} - w_{qi} + jy_k), \mp a_i, \mp a_k, j\tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, j\tilde{\alpha}_{in}) \right), \quad \begin{array}{l} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

Damit sind alle Rechnungen durchgeführt, die für feste  $y$  notwendig waren. Die folgenden vier Unterabschnitte behandeln die Entwicklung für feste Wert von  $x$ . Da die Rechnung analog zu den bereits durchgeführten Betrachtungen verläuft, werden nur die Ergebnisse aufgeführt.

### 6.1.2.5 Konstanten für Aufpunkte auf $y$ -gerichteten Randabschnitten

Für die  $x$ -Komponente des Aufpunktvektors wird ein fester Wert vorgegeben:  $x = y_{qk}$  oder  $x = y_{qk} + a_k$ .

Für  $D_1^{(x)}(x, y_{0i}, i, n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} d_1^{(x)} dy_k$

$$\begin{aligned}
D_1^{(x)}(x, y_{0i}, i, n, k, m) = & -\frac{1}{8\pi j \alpha_{in}} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - jy_{0i})} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\mp j \nu y_k} dy_k \right) + \\
& + e^{\mp \nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* + x_k + jy_{0i})} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\pm j \nu y_k} dy_k \right)) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}). \\
& \cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + j \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - j \alpha_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
D_1^{(x)}(x_k, y_{0i}, i, n, k, m) = & \pm \frac{1}{16\pi \alpha_{in}} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - jy_{0i})} (1 - (-1)^m e^{\mp j \nu b_k}) - \\
& - e^{\mp \nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* + x_k + jy_{0i})} (1 - (-1)^m e^{\pm j \nu b_k})) (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}). \\
& \cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + j \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - j \alpha_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array},
\end{aligned}$$

bzw. mit  $R$  und  $T$ :

$$= \pm \frac{1}{16\pi \tilde{\alpha}_{in}} T_-(\mp j(w_{qk} - w_{qi} + y - jy_{0i}), \pm ja_i, \mp b_k, j\alpha_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j\alpha_{in}), n \neq 0, m \neq 0.$$

Für den verbleibenden Fall  $n = 0, m \neq 0$  erhält man:

$$= \mp \frac{j}{16\pi \tilde{\alpha}_{km}} T_{-}(\mp j(w_{qk} - w_{qi} + y - jy_{0i}), \mp b_k, 0, \tilde{\alpha}_{km}, 0, \tilde{\alpha}_{km});$$

für  $n = 0, m = 0$ : für kann Gleichung (6.22) verwendet werden.

Das Ergebnis für die Ableitung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial y_{0i}} D_1^{(x)}(x_k, x_{0i}, i, n, k, m) = -\frac{1}{16\pi} R_{+}(\mp j(w_{qk} - w_{qi} + y - jy_{0i}), \pm ja_i, \mp b_k, j\alpha_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j\alpha_{in})$$

Den nächste Matrixkoeffizient,  $D_2^{(x)}(x, i, n, k, m, \eta) = \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} d_2^{(x)} dy_k$ , berechnet man zu:

$$\begin{aligned} D_2^{(x)}(x, i, n, k, m, \eta) &= -\frac{j}{8\pi} \int_0^{\infty} \left( \left( e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k)} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\mp j\nu y_k} dy_k \right) + \right. \right. \\ &+ e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + x_k)} \left. \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\pm j\nu y_k} dy_k \right) \right) \left( \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta) \right) \cdot \\ &\cdot (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \nu \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \mp \\ &\mp \left( e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k)} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\mp j\nu y_k} dy_k \right) - \right. \\ &- e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + x_k)} \left. \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\pm j\nu y_k} dy_k \right) \right) \left( \cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} + \cosh(\beta_{in}\eta) \right) \cdot \\ &\cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2^{(x)}(x, i, n, k, m, \eta) &= -\frac{j}{8\pi} \int_0^{\infty} (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \left( \left( e^{\mp \nu(w - w_{qi} - jb_i)} (1 - (-1)^m e^{\mp j\nu b_k}) - \right. \right. \\ &- e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + jb_i)} e^{\pm j\nu b_k} \left. \right) \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] + \\ &+ \left( e^{\mp \nu(w - w_{qi})} e^{\mp j\nu b_k} - e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^*)} e^{\pm j\nu b_k} \right) \sinh(\beta_{in}\eta) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \pm \\ &\pm \left( \left( e^{\mp \nu(w - w_{qi} - jb_i)} e^{\mp j\nu b_k} \right) + e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + jb_i)} e^{\pm j\nu b_k} \right) \cosh[\beta_{in} b_i - \eta] - \\ &- \left( e^{\mp \nu(w - w_{qi})} e^{\mp j\nu b_k} \right) + e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^*)} e^{\pm j\nu b_k} \left. \right) \cosh(\beta_{in}\eta) \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \nu d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mp \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty (1 - (-1)^n e^{\pm \nu a_i}) \left( (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k)} (1 - (-1)^m e^{\mp j \nu b_k}) - \right. \\
&- e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + x_k)} (1 - (-1)^m e^{\pm j \nu b_k})) (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j \nu b_i} + \sinh(\beta_{in} \eta)) \cdot \\
&\cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + j \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j \beta_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \mp \\
&\mp (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi})} (1 - (-1)^m e^{\mp j \nu b_k}) + \\
&+ e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^*)} (1 - (-1)^m e^{\pm j \nu b_k})) (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j \nu b_i} + \cosh(\beta_{in} \eta)) \cdot \\
&\quad \cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + j \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j \beta_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \Big) d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(x)}(x, i, n, k, m, \eta) = \\
&\mp \frac{1}{16\pi} \left( \sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] T_- (\mp (w - w_{qi} - j b_i), \pm j a_i, \pm b_k, j \beta_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j \alpha_{in}) + \right. \\
&\quad \left. + \sinh(\beta_{in} \eta) T_- (\mp (w - w_{qi}), \pm j a_i, \pm b_k, j \beta_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j \alpha_{in}) \pm \right. \\
&\quad \left. \mp \cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] R_+ (\mp (w - w_{qi} - j b_i), \pm j a_i, \pm b_k, j \beta_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j \alpha_{in}) \pm \right. \\
&\quad \left. \mp \cosh(\beta_{in} \eta) R_+ (\mp (w - w_{qi}), \pm j a_i, \pm b_k, j \beta_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, j \alpha_{in}) \right), \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis für  $D_3^{(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} d_3^{(x)} dy_k$

$$\begin{aligned}
D_3^{(x)}(x_k, x_{0i}, i, n, k, m) = \frac{j}{8\pi \tilde{\alpha}_{in}} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j \nu b_i}) (\int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} x_k) e^{\mp j \nu y_k} dy_k) - \\
- e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j \nu b_i}) (\int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} x_k) e^{\pm j \nu y_k} dy_k)) \cdot \\
\cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{in}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

lautet mit

$$\begin{aligned}
D_3^{(x)}(x_k, x_{0i}, i, n, k, m) = \pm \frac{1}{4\pi \tilde{\alpha}_{in}} \int_0^\infty (e^{\mp \nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\pm j \nu b_i}) (1 - (-1)^m e^{\mp j \nu b_k}) + \\
+ e^{\mp \nu(w^* - w_{qi}^* + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j \nu b_i}) (1 - (-1)^m e^{\pm j \nu b_k})) \cdot \\
\cdot \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] d\nu, \quad \begin{array}{l} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{array}.
\end{aligned}$$

für  $n \neq 0, m \neq 0$ :

$$= \pm \frac{1}{16\pi\tilde{\alpha}_{in}} T_+ \left( \mp j(w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j\tilde{b}_i, \mp j\tilde{b}_k, \tilde{\alpha}_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, \tilde{\alpha}_{in} \right), \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{matrix},$$

und für  $n = 0, m \neq 0$ :

$$= \pm \frac{1}{16\pi\tilde{\alpha}_{km}} T_+ \left( \mp j(w - w_{qi} - x_{0i}), \mp j\tilde{b}_k, 0, \tilde{\alpha}_{km}, 0, \tilde{\alpha}_{km} \right), \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{matrix}.$$

Für den Fall  $n = 0, m = 0$  wird auf Gleichung (6.23) verwiesen.

Die Ableitung von  $D_3^{(x)}(x_k, x_{0i}, i, 0, k, 0)$  liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x_{0i}} D_3^{(y)}(x_k, x_{0i}, i, 0, k, 0) = -\frac{1}{16\pi} R_+ \left( \mp j(w - w_{qi} - x_{0i}), \pm j\tilde{b}_i, \mp j\tilde{b}_k, \tilde{\alpha}_{in}, \tilde{\alpha}_{km}, \tilde{\alpha}_{in} \right), \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{matrix},$$

Für den letzten Koeffizienten  $D_4^{(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) \frac{\partial}{\partial x} d_4^{(x)} dy_k$  findet man

$$\begin{aligned} d_4^{(x)}(x_k, x_{0i}, i, n, k, m, \eta) &= -\frac{j}{8\pi} \int_0^\infty \left( (e^{\mp j\nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - x_{0i})} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\mp j\nu y_k} dx_k \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\mp j\nu(w^* - w_{qi}^* + x_k - x_{0i})} \left( \int_0^{b_k} \cos(\tilde{\alpha}_{km} y_k) e^{\pm j\nu y_k} dx_k \right) \right) ((1 - (-1)^n) e^{\pm \nu a_i}) \\ &\quad \left\{ (\sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm (\cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} - \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \right\} d\nu \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4^{(x)}(x_k, y, i, n, k, m, \eta) &= \mp \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty \left( (e^{\mp j\nu(w_{qk} - w_{qi} + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu b_i}) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\mp j\nu(w^* - w_{qi}^* + x_k - x_{0i})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu b_i}) \right) ((1 - (-1)^n) e^{\pm \nu a_i}) \\ &\quad \left\{ (\sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} - \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm (\cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} - \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta)) \right. \\ &\quad \left. \nu \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\beta}_{in}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\beta}_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \tilde{\alpha}_{km}} + \frac{1}{\nu - \tilde{\alpha}_{km}} \right] \right\} d\nu \begin{matrix} x \geq x_{qi} + a_i \\ x \leq x_{qi} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4^{(x)} = & \mp \frac{1}{16\pi} \left( \sinh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] T_+ (\mp (w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, \pm b_k, \tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, \tilde{\beta}_{in}) + \right. \\
& + \sinh(\tilde{\beta}_{in}\eta) T_+ (\mp (w - w_{qi}), \mp b_i, \pm b_k, \tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, \tilde{\beta}_{in}) \mp \\
& \mp \cosh[\tilde{\beta}_{in}(a_i - \eta)] R_+ (\mp (w - w_{qi} - a_i), \mp b_i, \pm b_k, \tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, \tilde{\beta}_{in}) \pm \\
& \left. \pm \cosh(\tilde{\beta}_{in}\eta) R_+ (\mp (w - w_{qi}), \mp b_i, \pm b_k, \tilde{\beta}_{in}, \alpha_{km}, \tilde{\beta}_{in}) \pm \right), \begin{matrix} y \geq y_{qi} + b_i \\ y \leq y_{qi} \end{matrix}.
\end{aligned}$$

### 6.1.2.6 Darstellung der Matrixkoeffizienten

Die Koeffizienten der Systemmatrix 5.18 (S. 51) können nun mit Hilfe der Integralausdrücke aus Unterabschnitt 6.1.2 ausgedrückt werden. Hierbei ist darauf zu achten, daß die Werte von  $q$ , die die Nummer des Randabschnittes angeben, auf dem der Aufpunkt liegt, natürlich entweder  $x$  oder  $y$  fest vorgeben. Welcher Werte verwendet werden muß, läßt sich der folgenden Tabelle entnehmen:

| q | x              | y              |
|---|----------------|----------------|
| 1 |                | $y_{qk}$       |
| 2 | $x_{qk} + a_k$ |                |
| 3 |                | $y_{qk} + b_k$ |
| 4 | $x_{qk}$       |                |

Tabelle 4: Lage des Aufpunktes in Abhängigkeit von der Nummer des Randabschnitts

$$\begin{aligned}
c_{(i1),(kq),nm} = & -\frac{\partial}{\partial y_0} D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}} + \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \frac{\partial}{\partial y_0} D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}+b_i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}} - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} D_2^{(y)}|_{y,\eta=b_i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{(i3),(kq),nm} = & -\frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} \frac{\partial}{\partial y_0} D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}} + \frac{\partial}{\partial y_0} D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}+b_i} - \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \beta_{in} \tanh(\beta_{in}b_i) D_1^{(y)}|_{y,y_0=y_{qi}+b_i} - \frac{1}{\cosh(\beta_{in}b_i)} D_2^{(y)}|_{y,\eta=0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{(i4),(kq),nm} = & -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} D_4^{(x)}|_{x,\eta=a_i} - \frac{\partial}{\partial x_0} D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{qi}} + \\
& + \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \frac{\partial}{\partial x_0} D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{qi}+a_i} - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in}a_i) D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{qi}},
\end{aligned}$$



und

$$c_{(i2,n)}(x, y) = -\frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} D_4^{(x)}|_{x,\eta=0} - \frac{1}{\cosh(\tilde{\beta}_{in}a_i)} \frac{\partial}{\partial x_0} D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{q_i}} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_0} D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{q_i}+a_i} - \frac{\mu_a}{\mu_i} \tilde{\beta}_{in} \tanh(\tilde{\beta}_{in}a_i) D_3^{(x)}|_{x,x_0=x_{q_i}+a_i}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist damit die Systemmatrix bestimmt.

## 6.2 Numerische Integration

Die in diesem Kapitel betrachteten Funktionen  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_3$  weisen zwei Eigenschaften auf, die eine numerische Behandlung erschweren. Zum einen enthalten Sie in ihren Integranden für  $w = w_0$  eine Singularität, zum anderen oszillieren sie stark, insbesondere für große Ordnungszahlen  $n$ . Diese Tatsachen bedingen den Einsatz besonderer Methoden bei der numerischen Integration.

### 6.2.1 Auszuwertende Ausdrücke

Vor Durchführung der numerischen Integration empfiehlt es sich, die auftretenden Integralausdrücke zu definieren und durch analytische Vorbehandlung (Anwendung der partiellen Integration) in eine Form zu bringen, die die Approximation erleichtert.

Der ersten Integralausdruck entspricht dabei der Ableitung der oben definierten Funktion  $d_1$ :

$$d_1^{(\text{num})} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_k} \left[ \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=c_1} dx_{0i} \right\} \right]_{y=c_2} dx_k, \quad (6.24)$$

der zweite einem Teil von  $d_2$

$$d_2^{(\text{num})} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_k} \left[ \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^{b_i} \cosh(\beta_{in}y_0) \left[ \frac{\partial}{\partial x_0} \ln |w - w_0| \right]_{x_0=c_1} - \right\} dy_{0i} \right]_{y=c_2} dx_k. \quad (6.25)$$

Der dem Integralausdruck  $d_1$  entsprechende Ausdruck benötigt dabei keine vorherige Umformulierung.

Die Vorbetrachtungen geschehen exemplarisch für  $d_1^{(\text{num})}$ . Die Behandlung der beiden anderen Funktionen geschieht analog.

Zuerst wird ein Tausch der Integrationsreihenfolge vorgenommen. Den Ergebnissen aus Kapitel 3 zufolge ist dieser Tausch zulässig. Immer unter Beachtung der Zusammenhänge zwischen lokalen und globalen Koordinaten aus Gleichung (6.3) gilt:

$$\begin{aligned}
d_1^{(\text{num})} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_k} \left[ \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=c_1} dx_{0i} \right\} \right]_{y=c_2} dx_k, \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{a_i} \left[ \cos(\alpha_{in}x_{0i}) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=c_1} dx_k \right\} \right]_{y=c_2} dx_{0i}.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

In einem nächsten Schritt wird die Differentiation im Integranden unter Verwendung von  $\ln |w| = \Re \{ \ln(w) \}$  durchgeführt:

$$\int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=c_1} dx_k = \Re \left\{ \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{j}{(x - x_0) + j(y - y_0)} dx_k \right\};$$

anschließend erfolgt eine Auswertung von  $\int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \left[ \frac{\partial}{\partial y_0} \ln |w - w_0| \right]_{y_0=c_1} dx_k$  durch partielle Integration, wobei  $y = 0$  bzw.  $y = a_k$  zu berücksichtigen sind:

$$\begin{aligned}
\Re \left\{ \int_0^{a_k} \cos(\alpha_{km}x_k) \frac{j}{(x - x_0) + j(y - y_0)} dx_k \right\} &= -\frac{1}{\alpha_{km}} \Re \left\{ \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km}x_k) \ln(w - w_0) dx_k \right. \\
&\quad \left. + j \left[ \frac{\sin(\alpha_{km}x_k)}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \right]_{x_k=0}^{x_k=a_k} \right\}.
\end{aligned}$$

Bei der Auswertung des zweiten Summanden ergibt sich mit  $\sin(\alpha_{km}x_k) \approx x_k$  für  $x_k \rightarrow 0$  zum einen:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\sin(\alpha_{km}x_k)}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \right]_{x_k=a_k} &\approx \lim_{x_k \rightarrow 0} \frac{a_k - x_k}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \\
&= \begin{cases} +1 & \text{für } x = x_{qk} + a_k \text{ und } y = y_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

zum anderen:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\sin(\alpha_{km}x_k)}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \right]_{x_k=0} &\approx \lim_{x_k \rightarrow 0} \frac{x_k}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \\
&= \begin{cases} -1 & \text{für } x = x_{qk} \text{ und } y = y_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

sodaß man für

$$j \left[ \frac{\sin(\alpha_{km}x_k)}{(x - x_0) + j(y - y_0)} \right]_{x_k=0}^{x_k=a_k} = \begin{cases} -j & \text{für } x = x_{qk} \text{ und } y = y_0 \\ +j & \text{für } x = x_{qk} + a_k \text{ und } y = y_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält. Dieser rein imaginäre Faktor fällt bei der Realteilbildung weg.

Im folgenden werden nun verschiedene Verfahren vorgestellt, mit denen das gesuchte Integral vom Typ

$$\int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km}x_k) \ln(w - w_0) dx_k \quad (6.27)$$

numerisch ausgewertet werden kann.

### 6.2.2 GAUSS-LEGENDRE-Quadratur

Einer der einfachsten Ansätze sieht vor, die zu integrierende Funktion durch ein Polynom zu approximieren und das Integral über das Polynom zu integrieren. Mittel der Wahl ist hier die GAUSS-LEGENDRE-Quadratur [2, Nr. 25.4.9, S. 887], bei der LEGENDRE-Polynome des Grades  $N$  ( $P_N(x)$ ) zur Näherung des Integranden verwendet werden. Als Stützstellen wählt man die Nullstellen dieses Polynoms im Intervall  $[-1, 1]$  [40, S. 349 ff].

Dieses Verfahren liefert relativ große Fehler, da das Polynom in der Nähe der Singularität zum Teil stark von der Originalfunktion abweicht. Zusätzlich werden für Originalfunktionen mit vielen Nullstellen Polynome hoher Ordnungen benötigt, da ansonsten die Oszillation der Funktion nicht ausreichend erfasst wird. Dies führt auf hohen numerischen Aufwand und sehr lange Rechenzeiten. Diese Methode wird daher für die Behandlung des beschriebenen Integrationsproblems verworfen.

### 6.2.3 GAUSS-LEGENDRE-Quadratur zwischen zwei Nullstellen mit gesonderter Behandlung der Singularität

Zur Verfeinerung des Quadraturverfahrens wird das Gesamtintegral in mehrere Unterintervalle aufgeteilt, die z.B. durch die Nullstellen des Integranden oder seiner ersten Ableitung begrenzt werden. Zusätzlich wird zur Abspaltung der Singularität im Integranden der Wert der oszillierenden Teilfunktion an der Unstetigkeitsstelle subtrahiert. Man erhält dann für das innere Integral (unter Berücksichtigung von Gleichung (6.3)):

$$\begin{aligned} \int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_{0i}) [\ln|x - x_{qi} - x_{0i}|] dx_{0i} &= \\ &= \int_0^{a_i} \left[ \sin(\alpha_{in}x_{0i}) - \sin(\alpha_{in}x_i) \right] \ln|(x_i - x_{0i})| dx_{0i} + \\ &\quad + \sin(\alpha_{in}x_i) \int_0^{a_i} \ln|(x_i - x_{0i})| dx_{0i} \end{aligned}$$

Als Beispiel ist in Abbildung 11 die Funktion  $f(x) = \ln|x - \pi| \sin(10x) - 1$  im Intervall  $[0, 2\pi]$  dargestellt. Wie man sieht, enthält diese Funktion keine Singularität mehr.

Es wird zur numerischen Auswertung in Teilintegrale aufgeteilt, deren Grenzen die jeweiligen Nullstellen sind, die in der Abbildung zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten mit  $x_{zi}$  bezeichnet sind.

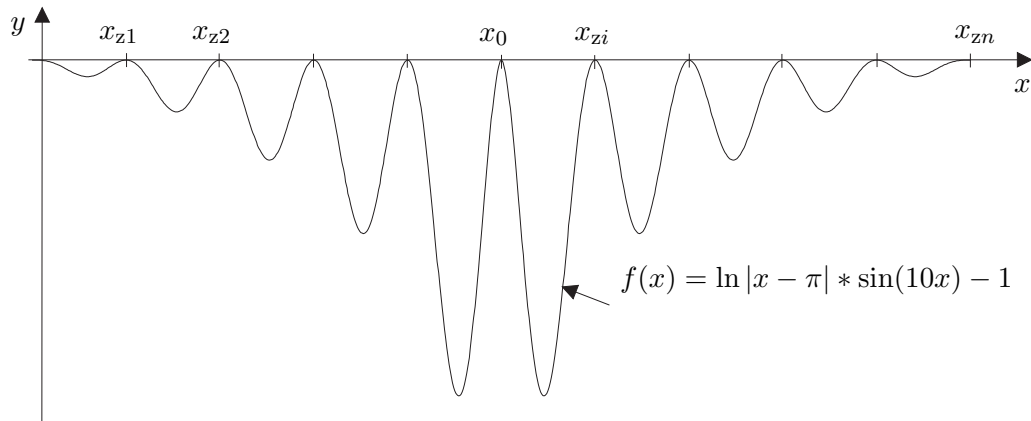


Abbildung 11: Abspaltung der Singularität

Für die Lösung des zweiten Teilintegrales, welches die Singularität enthält, sind zwei Wege gangbar: es ist auf dem Umweg über die komplexe Darstellung des Logarithmus analytisch lösbar oder kann mit Hilfe der Methoden, die in Abschnitt 6.2.4 beschrieben werden, numerisch approximiert werden.

Gegenüber der direkt angewendeten GAUSS-LEGENDRE-Quadratur ergeben sich dadurch zwei Verbesserungen:

- Der Einfluß der Singularität wird aus dem Originalintegral entfernt und gesondert behandelt.
- Durch die Aufteilung in mehrere Teilintervalle werden Rundungsfehler vermieden, die ansonsten Aufgrund der Fließkomma-Addition von stark unterschiedlichen Zahlen auftreten würden.

Als Nachteile sind die zeitaufwendige Nullstellensuche und die damit verbundenen langen Rechenzeiten zu nennen, die bei stark oszillierenden Integranden und angestrebter hoher Genauigkeit durch den Umstand nochmals verlängert werden, daß sehr viele Teilintegrale berechnet werden müssen.

### 6.2.4 FILON-Quadratur

Eine deutliche kürzere Bearbeitungszeit benötigt das im folgenden vorgestellte Verfahren, das im wesentlichen [24] entnommen wurde. Die zu integrierende Funktion wird hier in drei Teile zerlegt:

- 1) einen hochoszillierenden nichtsingulären Anteil  $I_u$  im Intervall  $[0, x_{su}]$

- 2) den nichtoszillierenden singulären Anteil  $I_{\text{sing}}$  im Intervall  $[x_{\text{su}}, x_{\text{so}}]$
- 3) einen zweiten hoch-oszillierenden nichtsingulären Anteil  $I_o$  im Intervall  $[x_{\text{su}}, a]$

Die relevanten Bezeichnungen können der Abbildung 12 entnommen werden.

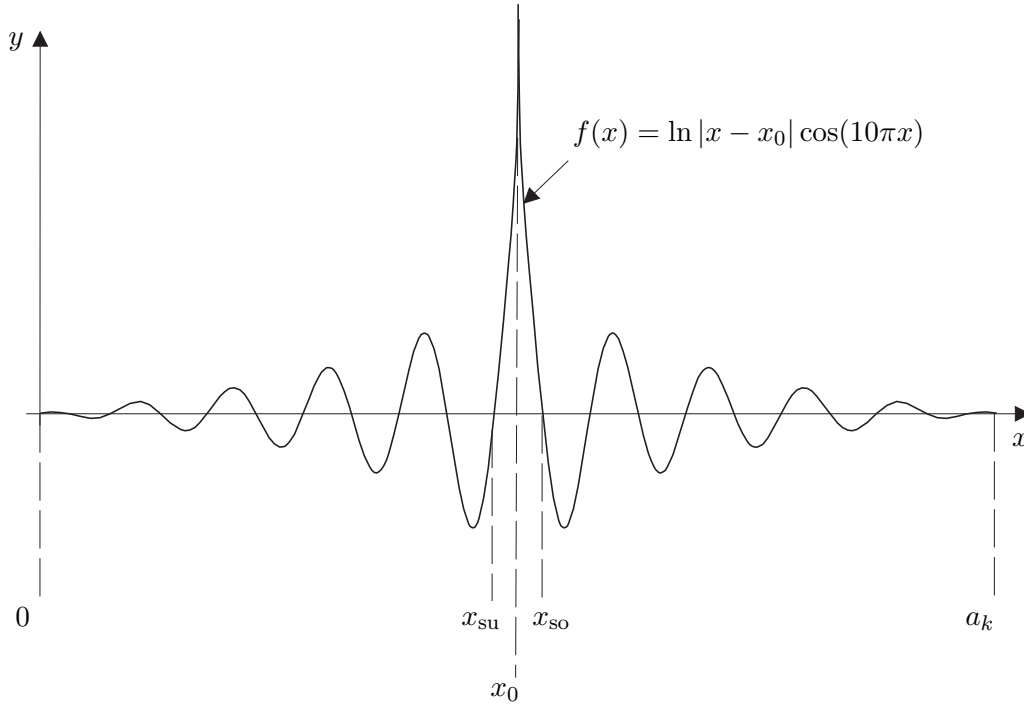


Abbildung 12: Unterteilung in oszillierende und singuläre Teilintegrale

Für die oszillierenden Anteile 1 und 3 wird eine FILON-Quadratur zur Integration verwendet. Der nicht-oszillierende Anteil mit der Singularität wird wie in Abschnitt 6.2.4 beschrieben bearbeitet.

Man erhält nach Aufteilung des Integrales in drei Teile demnach folgende Ausdrücke, deren Integrationsgrenzen durch Substitution auf das Intervall  $[0, 1]$  transformiert werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) \ln(w - w_0) dx_k = \\
 & = \int_0^{x_{\text{su}}} \sin(\alpha_{km} x_k) \ln(w - w_0) dx_k + \int_{x_{\text{su}}}^{x_{\text{so}}} \sin(\alpha_{km} x_k) \ln(w - w_0) dx_k + \\
 & \quad + \int_{x_{\text{so}}}^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) \ln(w - w_0) dx_k = \\
 & = \underbrace{\int_0^1 \sin(\alpha_{km} x') \ln(w' - w_0) dx'}_{I_u} + I_{\text{sing}} + \underbrace{\int_0^1 \sin(\alpha_{km} x'') \ln(w'' - w_0) dx_k}_{I_o},
 \end{aligned}$$

mit

$$x' = \frac{x_k}{x_{\text{su}}}, \quad x'' = \frac{x_k - x_{\text{so}}}{x_{\text{so}}}, \quad w' = x' + jy, w'' = x'' + jy.$$

Letztendlich verbleibt ein Ausdruck der Art:

$$\int_0^1 \sin(\alpha\xi) \ln(\xi - \xi_0) d\xi, \quad \xi_0 = \text{const}, \quad (6.28)$$

für die numerische Auswertung.

Bei einer FILON-Quadratur wird im Gegensatz zum oben erläuterten Verfahren nach GAUSS-LEGENDRE nur der nicht-oszillierende Anteil des Integranden, also die Logarithmusfunktion, durch ein Polynom des Grades  $n - 1$  approximiert:

$$\ln(\xi - \xi_0) \approx \sum_{k=1}^N l_k(\xi - \xi_0) \ln(c_k),$$

wobei hier durch  $l_k$  das  $k$ -te Polynom der LAGRANGEinterpolation bezeichnet wird, für das

$$l_k(c_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n$$

gilt und das wie folgt dargestellt werden kann:

$$l_k(\xi) = \frac{(\xi - c_0)(\xi - c_1) \cdots (\xi - c_n)}{(c_k - c_0)(c_k - c_1) \cdots (c_k - c_n)}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Als Stützstellen  $c_k$  der numerischen Integration verwendet man die GAUSS-Punkte, also Nullstellen  $1, \dots, n$  des LEGENDRE-Polynoms  $P_N$ , die im Intervall  $[0, 1]$  liegen [24, S.16].

Als Ergebnis für das Integral in Gleichung (6.28) läßt sich formulieren:

$$\int_0^1 \sin(\alpha\xi) \ln(\xi - \xi_0) d\xi = \sum_{k=1}^N b_k(\alpha) \ln(c_k - \xi_0),$$

mit bekannten Gewichtungsfaktoren  $b_k$ :

$$b_k(\alpha) = \int_0^1 l_k(\xi) \cos(\eta\xi) d\xi.$$

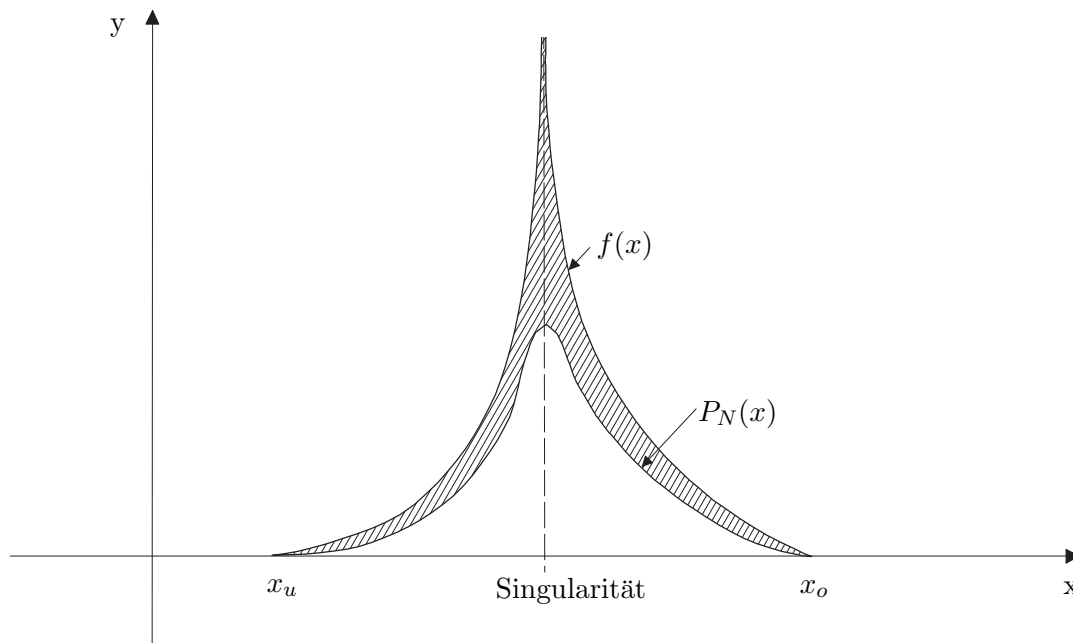


Abbildung 13: Approximation einer singulären Funktion durch ein LEGENDRE-Polynom

### 6.2.5 Numerische Behandlung der singulären Integrale

Die numerische Integration mit Hilfe der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur basiert auf der Approximation einer beliebigen Funktion  $f(x)$  durch ein LEGENDRE-Polynom  $P_N(x)$ . Es ist leicht einzusehen, daß eine derartige Approximation im allgemeinen keine hinreichend genauen Ergebnisse mehr erzielen kann, wenn über eine Funktion zu integrieren ist, die eine Singularität im Integrationsintervall  $[x_u, x_o]$  enthält. Abbildung 13 veranschaulicht das Problem für den eindimensionalen Fall.

Die schraffierte Fläche zwischen der Funktion  $f(x)$  und dem Polynom  $P_N(x)$  repräsentiert den Fehler der numerischen Integration. Eine Möglichkeit, diesen Fehler erheblich zu reduzieren, liegt in einer nichtlinearen Variablentransformation. In [13] wurde eine Transformation mit Hilfe der Fehlerfunktion  $ERF(x)$  vorgestellt und deren Ergebnisse mit anderen Transformationen verglichen, die z.B. die TANH-Funktion für die Transformation verwenden. Wie sich zeigt, liefert die ERF-Transformation für Funktionen mit logarithmischer Singularität bereits bei vergleichsweise geringer Stützstellenzahl sehr genaue Ergebnisse. Ursache für die Reduzierung des numerischen Fehlers ist die Deformation der zu integrierenden Funktion in einer Weise, die die Ausprägung der Singularität erheblich abgemildert. Abbildung 14 veranschaulicht das Prinzip.

Die Fehlerfunktion  $ERF(\xi)$  ist folgendermaßen definiert [2, Nr. 7.1.1, S. 297]:

$$ERF(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt;$$

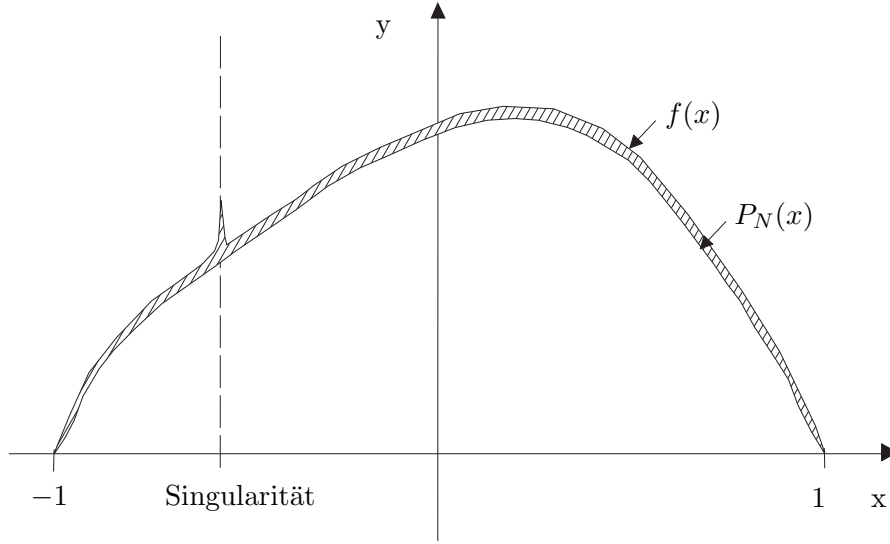


Abbildung 14: Verlauf der Funktionen nach der ERF-Transformation

sie kann mit Hilfe der wie folgt definierten Funktion  $F(\xi)$ :

$$F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \xi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\xi^2)^k}{(2k+1)!!} \quad (6.29)$$

wie folgt ausgedrückt werden:

$$\text{ERF}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} F(\xi). \quad (6.30)$$

Für das gesuchte Integral findet man somit die von den Faktoren  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  und  $\gamma_k$  abhängige Darstellung:

$$\int_0^1 \ln(x) \cos(\tilde{\eta}x) dx = \sum_{k=1}^{N/2} \gamma_k (\alpha_k (\ln(x) \cos(\tilde{\eta}x)) \Big|_{x=\alpha_k} + \beta_k (\ln(x) \cos(\tilde{\eta}x)) \Big|_{x=\beta_k}),$$

wobei  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  und  $\gamma_k$  bekannt sind:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{F\{qc_k\}}{F\{q\}} \cdot e^{q^2 - (qc_k)^2} \right],$$

$$\beta_k = \frac{\int_0^q e^{-t^2} dt}{2F(q)} e^{q^2},$$

$$\gamma_k = \frac{w_i q}{2F(q)} e^{q^2 - (qc_k)^2}.$$



Der hier auftretenden Transformationsparameter  $q \in \mathbb{N}$  ist frei wählbar. Sein Wert wird aufgrund der in [13] präsentierten Ergebnisse bestimmt.

### 6.2.6 Kontrolle durch Anwendung der NAG-Routinen

Die mit Hilfe der angeführten Quadraturverfahren erzielten Ergebnisse wurden durch den Einsatz von Routinen zur numerischen Integration überprüft, die im NAG-Paket [34] enthalten sind. Zum Einsatz kamen die Routinen D01AKF, die ein adaptives Quadraturverfahren für oszillierende Funktionen einer Unbekannten bei festen Integrationsgrenzen bereitstellt, und D01ALF, in der ein Quadraturverfahren für Funktionen einer Unbekannten mit  $n$  vorher bekannten Singularitäten bei festen Integrationsgrenzen implementiert wurde.

Damit stehen geeignete Quadraturverfahren für die hochoszillierenden Anteile des Integrals in Gleichung (6.27) sowie für das Teilintegral, welches die Singularität enthält, zur Verfügung. Diese Methoden werden parallel zu der beschriebenen analytischen Auswertung verwendet. Das folgenden Kapitel enthält einen Vergleich der beiden Lösungswege in Bezug auf Genauigkeit und Rechenzeit.



# Kapitel 7

## Beispiele

Dieses Kapitel dient dazu, die Ergebnisse aufzuführen, die mit der gekoppelten Randintegralgleichungs-/ Separationsmethode erzielt wurden.

### 7.1 Einzelleiter

#### 7.1.1 Homogenes äußeres Magnetfeld

Zur Verifikation der Ergebnisse bietet es sich an, zunächst das Verhalten eines Leiters mit quadratischem Querschnitt zu untersuchen, der in ein homogenes äußeres Magnetfeld eingebracht wird. Dieser Fall wurde in [16] veröffentlicht.

Anhand eines Einzelleiters im einem homogenen Magnetfeld wird auch das Eindringverhalten des Feldes in Abhängigkeit von Frequenz und Permeabilität des Leitermaterials untersucht. Dazu wurde zunächst ein Normierungswert für das BUCHHOLZ-Potential berechnet. Für ein örtlich nicht veränderliches Magnetfeld erhält man im Leiter wegen

$$H_t = \frac{\partial W^{(i)}}{\partial n}$$

ein linear ansteigendes Vektorpotential.  $W^{(i)}$  wird nun so gewählt, daß die Linie  $W^{(i)} = 0$  mit der Symmetrieachse des Leiters übereinstimmt, und man definiert den Normierungswert als:

$$W_0 = |\bar{W}|_{\omega=0},$$

also als den Mittelwert des Betrags des Vektorpotentials bei  $\omega = 0$ . Auf diesen Wert  $W_0$  wird nun jeweils das Mittel der Beträge von  $W^{(i)}$  bei unterschiedlichen  $\omega$  und  $\mu_i$  bezogen:

Die Untersuchung der Abhängigkeit der Eindringtiefe von der Leitfähigkeit führt auf denselben Zusammenhang wie bei der Frequenz und bestätigt das Modell.

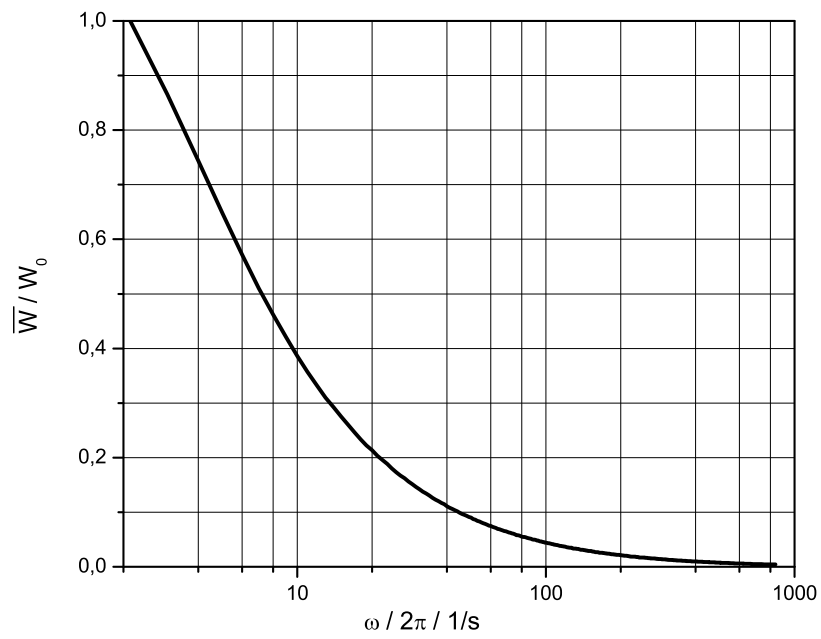


Abbildung 15: Eindringverhalten eines externen Magnetfeldes über  $\omega$

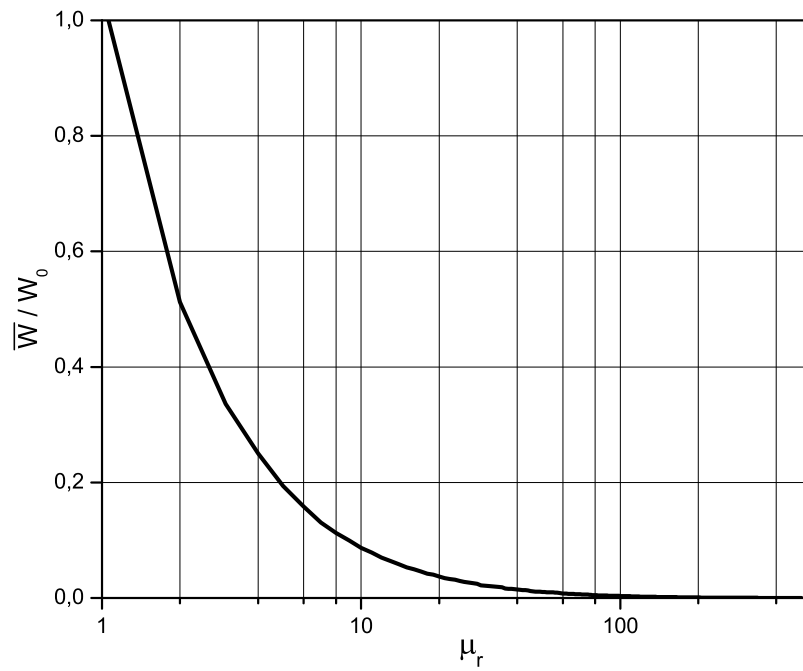


Abbildung 16: Eindringverhalten eines externen Magnetfeldes über  $\mu_i$

### 7.1.2 Einzelleiter im Feld einer erregenden Stromschleife

Es ist möglich, die Untersuchung auf die Fälle anzuwenden, in denen eine externe Stromschleife das erregende äußere Feld erzeugt.

Die Ergebnisse für diese Konfiguration wurden dazu verwendet, die Abschirmwirkung einer Platte aus leitfähigem permeablen zu berechnen und in [17] zu publizieren. An diesem Modells wurde weiterhin die in Abschnitt 6.2 beschriebenen Verfahren zur Lösung der Randintegralgleichung für das Wirbelstromproblem durch numerische Integration getestet und mit der vorliegenden analytischen Lösung verglichen [1].

Von weiteren Beispielen zu dieser Konfiguration wird hier daher abgesehen.

### 7.1.3 Einzelleiter mit eingepprägten Strom

In einem nächsten Schritt werden Einzelleiter mit verschiedener Geometrie bzw. aus unterschiedlichen Materialien untersucht, in die Ströme verschiedener Frequenz eingepprägt werden. Die Rückleitung des Stroms erfolgt idealisiert über die unendlich ferne Hülle und beeinflusst die Felder im Leiter nicht.

#### 7.1.3.1 Quadratischer Einzelleiter bei $f = 50$ Hz

Die Abbildungen 17 und 18 zeigen den Verlauf von Real- und Imaginärteil des Vektorpotentials in einem quadratischen Einzelleiter mit  $a = b = 0,2$  m Kantenlänge, der von einem Strom  $\underline{I} = 100 \text{ A } e^{j0^\circ}$  durchflossen wird. Als Kreisfrequenz des Stromes wurde  $\omega = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}$  gewählt. Der Leiter besteht aus Kupfer; dementsprechend gilt für die Leitfähigkeit  $\kappa_1 = 58 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  und für die Permeabilität  $\mu_1 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ .

In Abbildung 19 ist der Betrag des Vektorpotentials aufgetragen.

Die an den Rändern gegenüber der Mitte erhöhten Werte resultieren aus dem Skineneffekt.

#### 7.1.3.2 Rechteckleiter bei $f = 50$ Hz

Betrachtet man nun einen Leiter, bei dem die eine Kantenlänge auf  $a = 0,4$  m verdoppelt wurde, während alle anderen Größen gegenüber dem Leiter mit quadratischem Querschnitt aus Unterabschnitt 7.1.3.1 nicht verändert wurden:

$$b = 0,2 \text{ m}, |I_i| = 100 \text{ A}, \omega = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}, \kappa_1 = 58 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \mu_1 = \mu_0,$$

erkennt man, daß die Felder an der schmalen Seite gegenüber dem Leiter mit quadratischem Querschnitt vermindert sind. Die Abbildungen 20, 21 und 22 zeigen Realteil, Imaginärteil und Betrag des Vektorpotentials für diese Leiterkonfiguration.

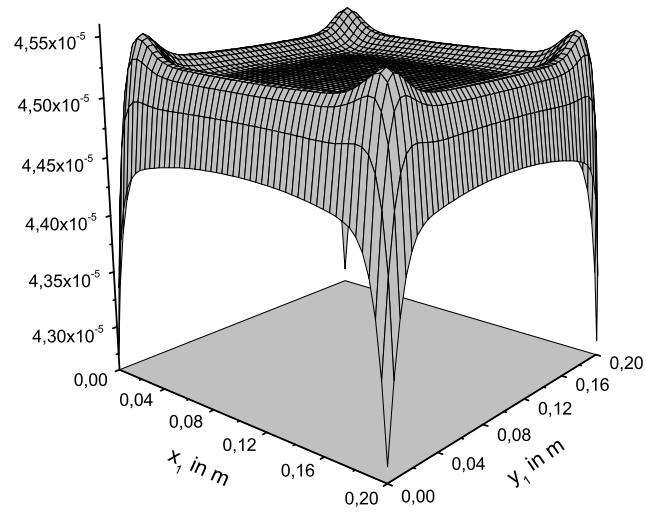


Abbildung 17:  $\Re \{W^{(i)}\}$  im Einzelleiter in  $\frac{V_s}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=b= 0,2$  m, Material: Kupfer

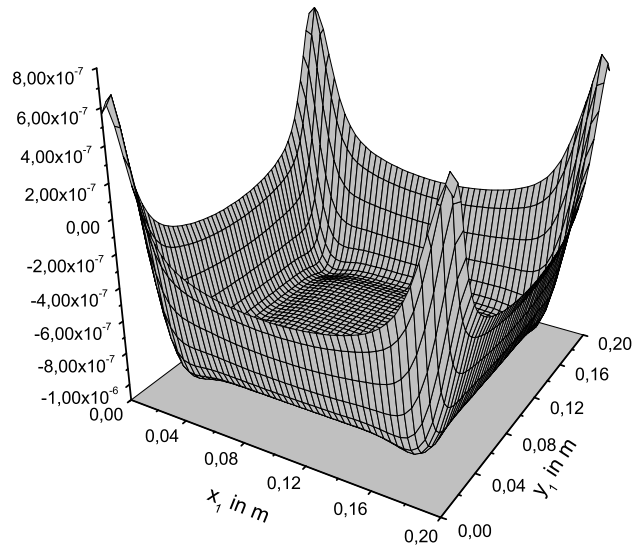


Abbildung 18:  $\Im m \{W^{(i)}\}$  im Einzelleiter in  $\frac{V_s}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=b= 0,2$  m, Material: Kupfer

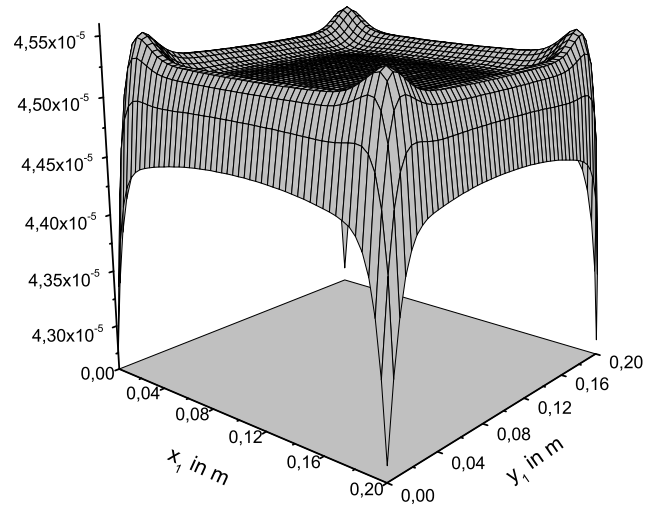


Abbildung 19:  $|W^{(i)}|$  im Einzelleiter in  $\frac{V_S}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=b= 0,2$  m, Material: Kupfer

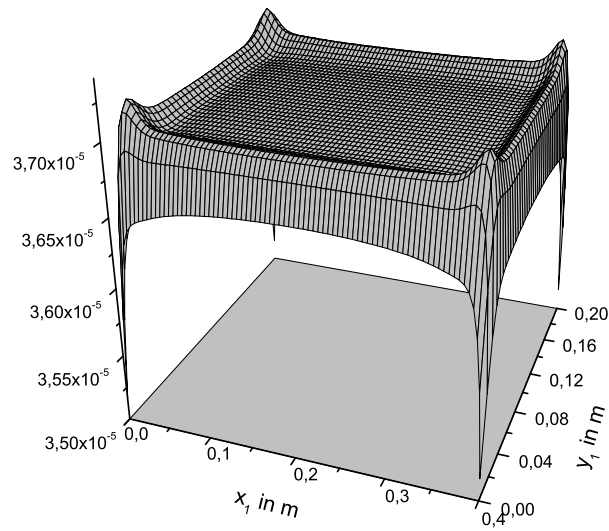


Abbildung 20:  $\Re \{W^{(i)}\}$  im Einzelleiter in  $\frac{V_S}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=0,4$  m,  $b= 0,2$  m, Material: Kupfer

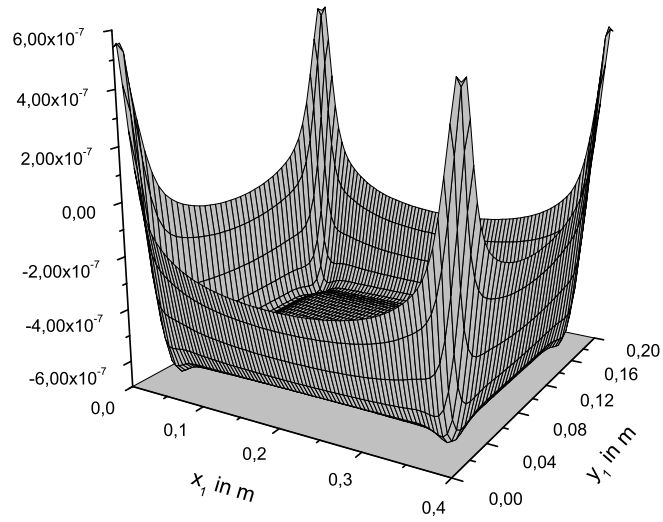


Abbildung 21:  $\Im\{W^{(i)}\}$  im Einzelleiter in  $\frac{Vs}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=0,4$  m,  $b= 0,2$  m, Material: Kupfer

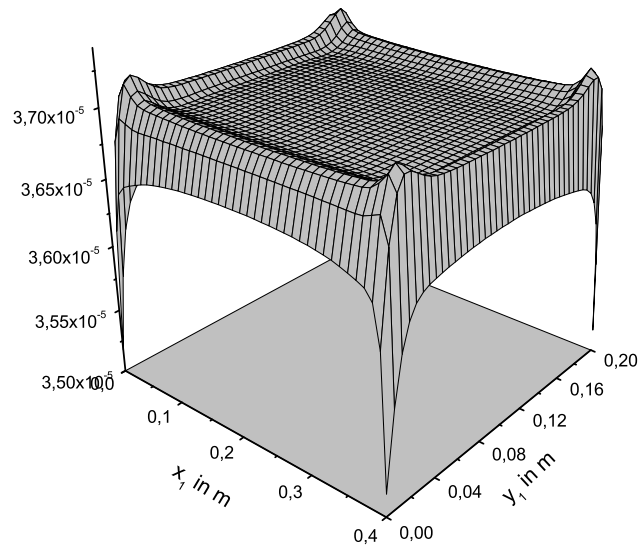


Abbildung 22:  $|W^{(i)}|$  im Einzelleiter in  $\frac{Vs}{m}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a=0,4$  m,  $b= 0,2$  m, Material: Kupfer



### 7.1.3.3 Skin-Effekt

Im folgenden wurde der Einfluß des Skin-Effekts nachgewiesen. In Abbildung 23 ist der Betrag der Stromdichte des Beispiels aus Unterabschnitt 7.1.3.1 aufgetragen, um den direkten Vergleich mit den folgenden Beispielen zu erleichtern.

Die resultierende Stromdichte bei Änderung der Frequenz auf  $\omega = 2\pi \cdot 100 \frac{1}{s}$  ist in Abbildung 24 dargestellt.

Abbildung zeigt  $|J|$  für einen Leiter aus Kobalt; die Leitfähigkeit dieses Materials beträgt  $\kappa_i = 1 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$ , die relative Permeabilität  $\mu_{ri} = 600$ .

In Abbildung 26 wird  $|J|$  für den Rechteckleiter aus Unterabschnitt 7.1.3.2 dargestellt.

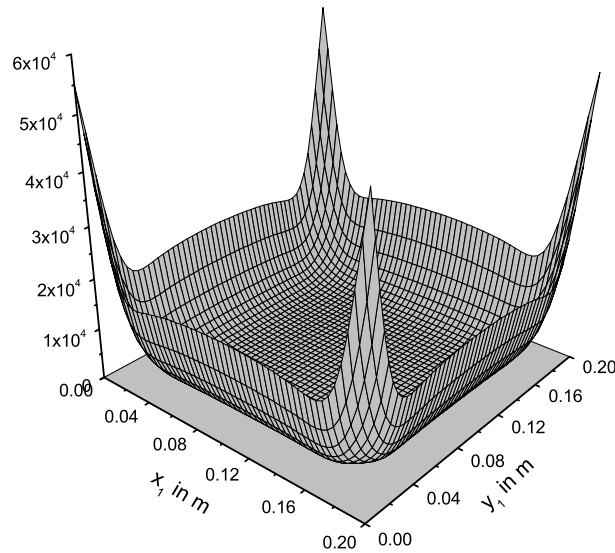


Abbildung 23:  $|\vec{J}_i|$  in  $\frac{A}{m^2}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a = b = 0,2$  m, Material: Kupfer

Bei der Simulation des Verhaltens eines Leiters mit geändertem Materialverhalten ist das Produkt aus Frequenz, Permeabilität und Leitfähigkeit sowie der Quotient der Permeabilitäten in Außen- und Innenraum entscheidend. Dieses Produkt beträgt für den Leiter in Abbildung 23  $\omega\kappa_{Cu}\mu_{Cu} = 2,32 \cdot 10^3 \frac{1}{m^2}$ , für Abbildung 24 und für den aus Kobalt bestehenden Leiter in Abbildung 25  $\omega\kappa_{Co}\mu_{Co} = 986,9 \cdot 10^3 \frac{1}{m^2}$ . Wie erwartet wird die Stromüberhöhung an den Rändern mit wachsenden Werten für  $\omega\kappa\mu$  größer, bis der Stromfluß nur noch als dünner Belag auf den Leiterrändern stattfindet.

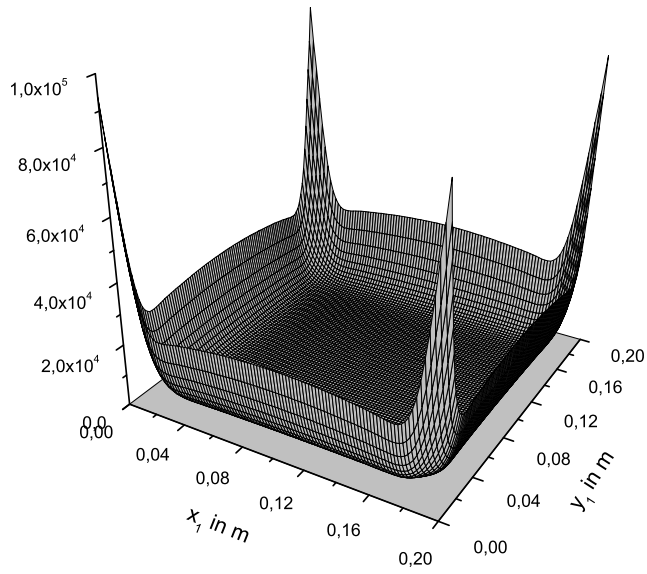


Abbildung 24:  $|\vec{J}_i|$  in  $\frac{A}{m^2}$ ,  $f = 100$  Hz,  $a = b = 0,2$  m, Material: Kupfer

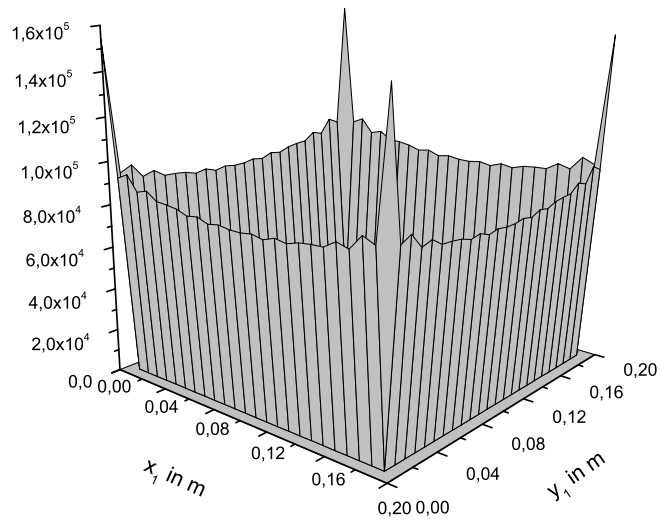


Abbildung 25:  $|\vec{J}_i|$  in  $\frac{A}{m^2}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a = b = 0,2$  m, Material: Kobalt

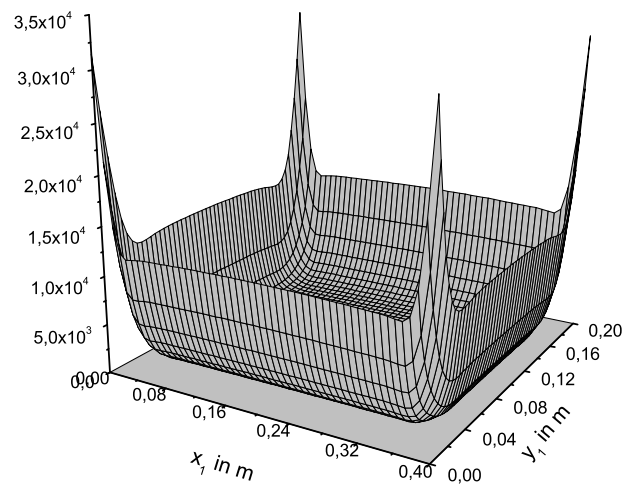


Abbildung 26:  $|\vec{J}_i|$  in  $\frac{A}{m^2}$ ,  $f = 50$  Hz,  $a = 0,4$  m,  $b = 0,2$  m, Material: Kupfer

## 7.2 Systeme aus mehreren Leitern

Da zu dem im letzten Abschnitt nachgewiesenen Effekt der Stromverdrängung bei Systemen aus mehreren Leitern der Proximity-Effekt hinzukommt, sollen auch solche Systeme untersucht werden.

Die hier gewählten Konfigurationen der Leitungssysteme sind an technisch sinnvollen Aufbauten bei Stromschienen angelehnt. Aufgrund dessen sind die Abmessungen der einzelnen Stromschienen jeweils gleich. Weiterhin begründet dies die symmetrische Anordnung der Leiter bei den Drehstromsystemen für den Abstand zwischen den Leitern wird der Buchstabe  $d$  gewählt.

Alle in diesem Abschnitt untersuchten Leiteranordnungen werden von Strömen mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi 50 \frac{1}{s}$  durchflossen. Die Leiter haben einen quadratischen Querschnitt mit einer Kantenlänge von  $a = b = 0,2 \text{ m}$ .

### 7.2.1 Doppelleitung

Zunächst wird eine Doppelleitung betrachtet, deren Leiter im Abstand  $d$  voneinander angeordnet sind. Die Leiter führen den Strom  $\underline{I} = I_0 e^{j0}$  bzw.  $-\underline{I} = I_0 e^{j\pi}$ .

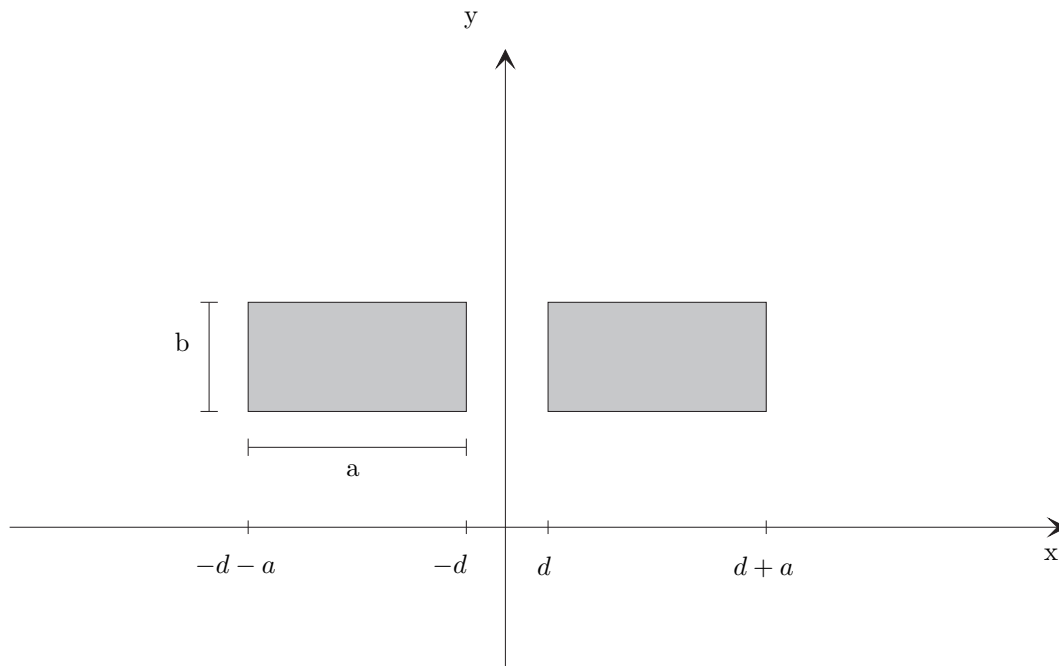


Abbildung 27: Doppelleitung

Mit den in Abbildung 27 gewählten Bezeichnungen wurde ein System aus zwei Kupferleitern mit  $a = b = 0,2 \text{ m}$  im Abstand  $d = 0,1 \text{ m}$  bei  $|I_i| = 100 \text{ A}$  untersucht.

In den Abbildungen 28 und 29 sind Real- und Imaginärteil des ersten untersuchten Systems mit  $d = 10$  cm aufgetragen. Bei der Darstellung des Realteils wurde der Betrag gebildet, um die Symmetrien der Werte in den beiden Leitern besser herauszuarbeiten. Für dem in Abbildung 30 dargestellten Betrag von  $W^{(i)}$  fällt die unsymmetrische Verteilung mit Überhöhung an jeweils den Rändern auf, die dem anderen Leiter am nächsten liegen.

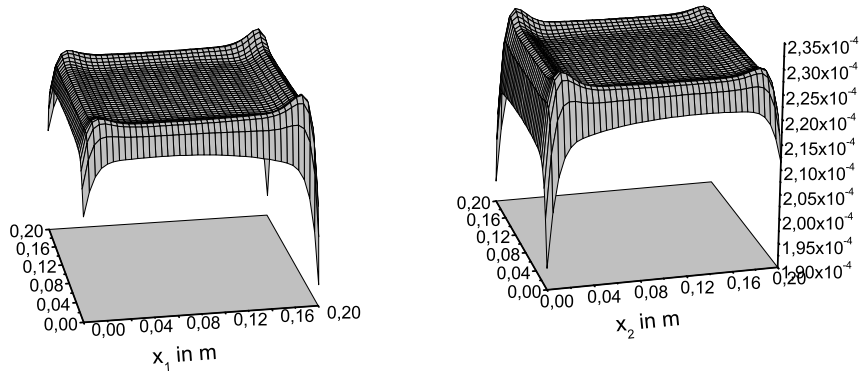


Abbildung 28:  $|\Re \{W^{(i)}\}|$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,1$  m

Um die Wirkung des Proximity-Effektes deutlicher zu machen, wurde im folgenden Beispiel der Abstand der beiden Leiter auf  $d = 5$ cm bei ansonsten gleichen Werten für Geometrie, Materialien und Erregung reduziert. Die Abbildungen zeigen wiederum Realteil (Abbildung 31), Imaginärteil (Abbildung 32) und Betrag des Vektorpotentials (Abbildung 33) im jeweiligen Leiter.

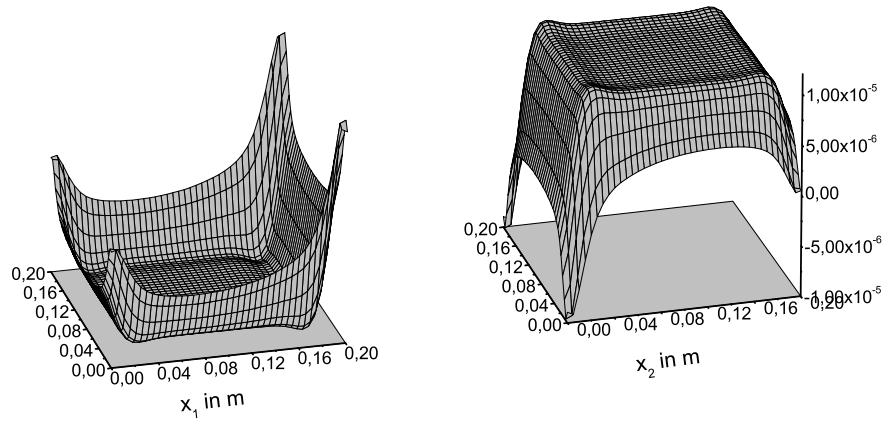


Abbildung 29:  $\Im\{W^{(i)}\}$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,1$  m

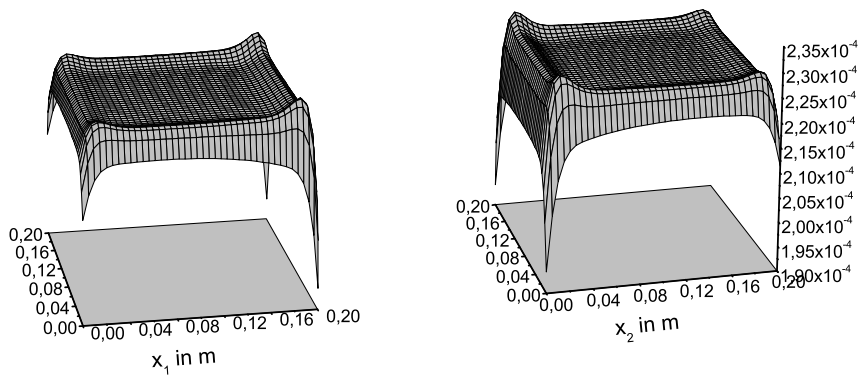


Abbildung 30:  $|W^{(i)}|$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,1$  m

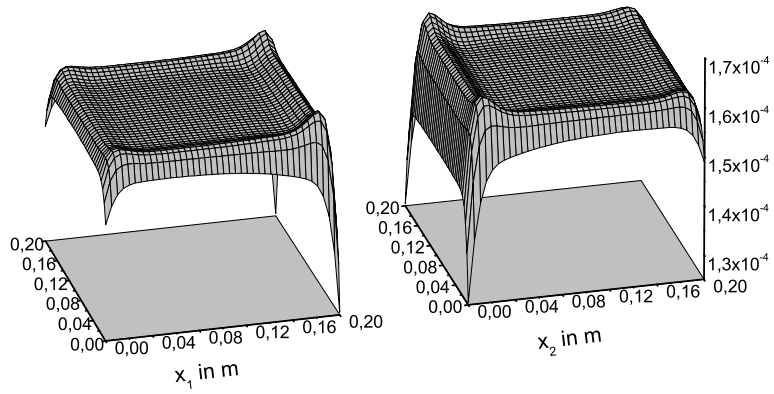


Abbildung 31:  $|\Re \{W^{(i)}\}|$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,05$  m

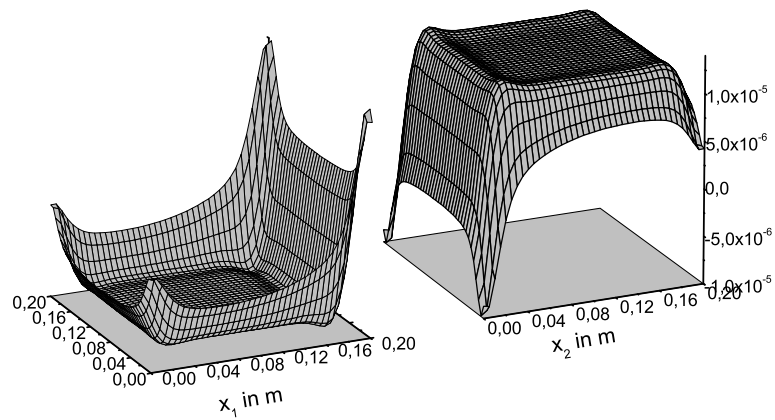


Abbildung 32:  $\Im m \{W^{(i)}\}$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,05$  m

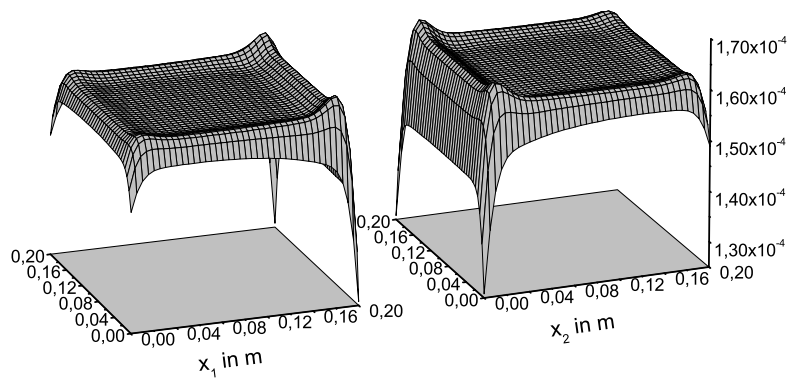


Abbildung 33:  $\text{abs}(W^{(i)})$  im Zweileitersystem,  $f = 50$  Hz,  $d = 0,05$  m



## 7.2.2 Drehstromsystem

Technisch besonders relevant sind Drehstromsysteme, bei denen drei Leiter verwendet werden, in die Ströme gleichen Betrages eingepreßt sind, die zueinander jeweils um  $120^\circ$  phasenverschoben sind, also:

$$I_1 = I_0 e^{j0}, \quad I_2 = I_0 e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad I_3 = I_0 e^{+j\frac{2\pi}{3}}.$$

In der Abbildung 34 ist der Aufbau des untersuchten Systems dargestellt. Die Abmessungen

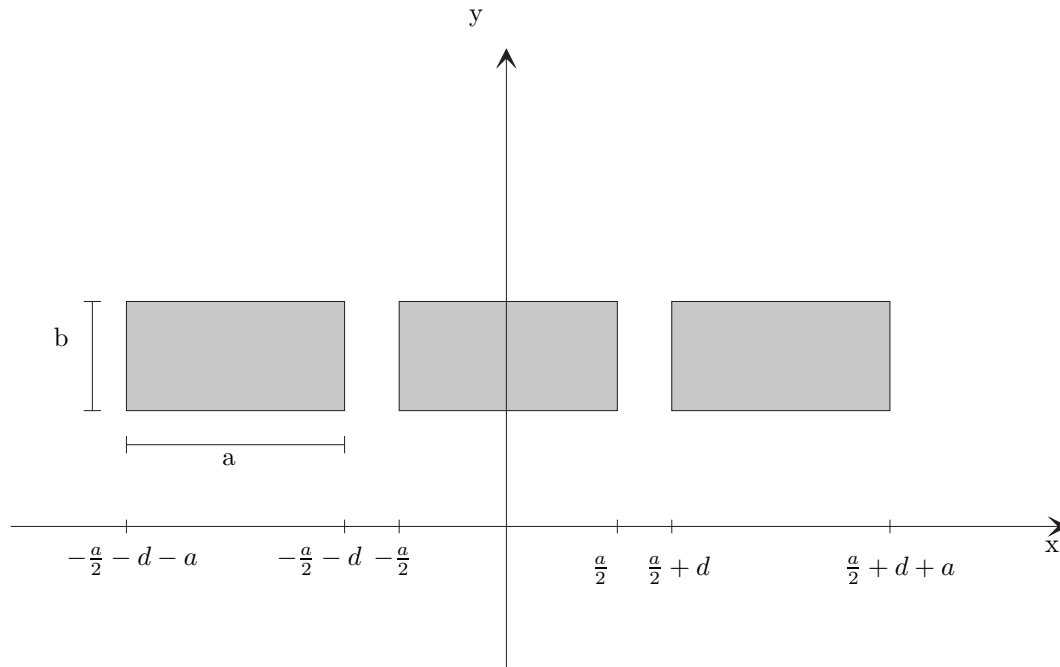


Abbildung 34: Drehstromsystem 1

der Leiter betragen  $a_1 = a_2 = a_3 = 0.2 \text{ m}$ ,  $d = 0.2 \text{ m}$  bei einem Strom mit  $|I_i| = 100 \text{ A}$ . Alle Leiter bestehen aus Kupfer.

Real- und Imaginärteil des Vektorpotentials im linken Leiter finden sich in den Abbildungen 35 und 36.

Die Abbildungen 37, 38 zeigen  $\Re\{W_2\}$  und  $\Im\{W_2\}$ , also den Verlauf des Vektorpotentials im mittleren Leiter.

Die verbleibenden Größen  $\Re\{W_3\}$  und  $\Im\{W_3\}$  sind in den Abbildungen 39 und 40 dargestellt.

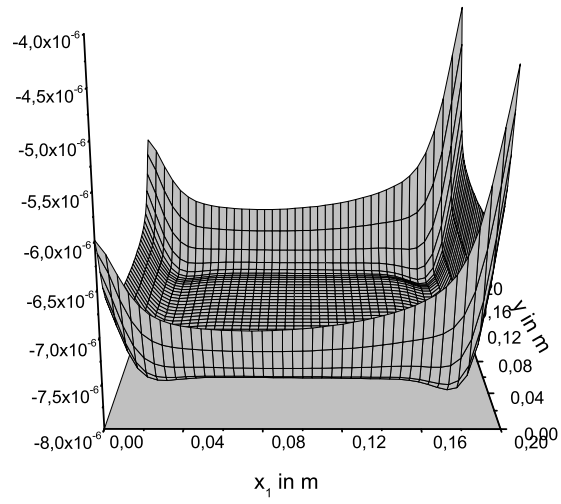


Abbildung 35:  $\Re \{W_1^{(i)}\}$  in  $\frac{V_s}{m}$  im linken Leiter

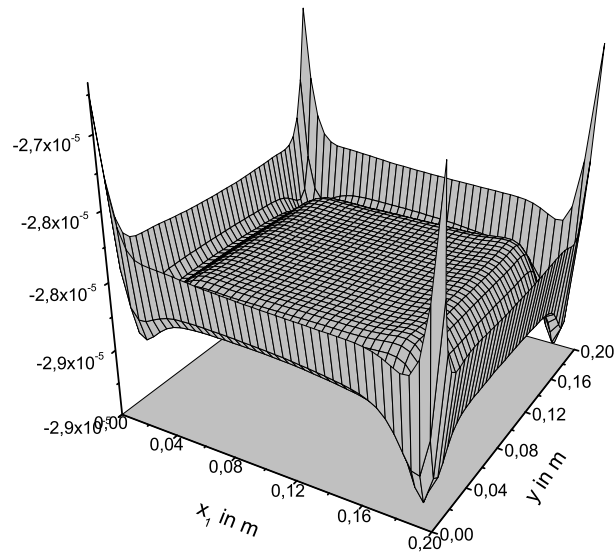


Abbildung 36:  $\Im \{W_1^{(i)}\}$  in  $\frac{V_s}{m}$  im linken Leiter

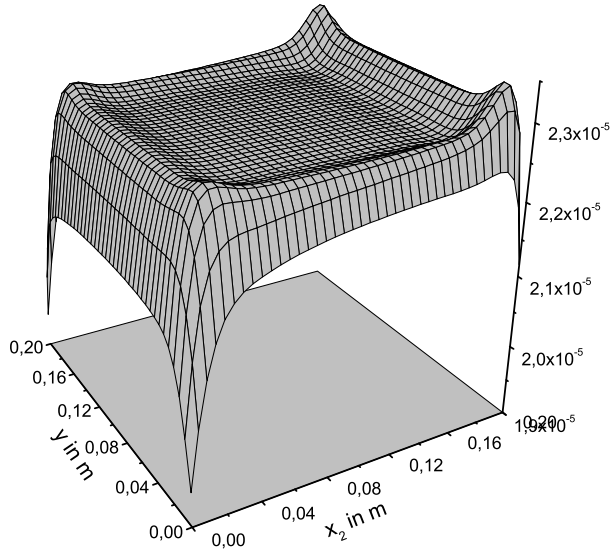


Abbildung 37:  $\Re \{W_2^{(i)}\}$  in  $\frac{Vs}{m}$  im mittleren Leiter

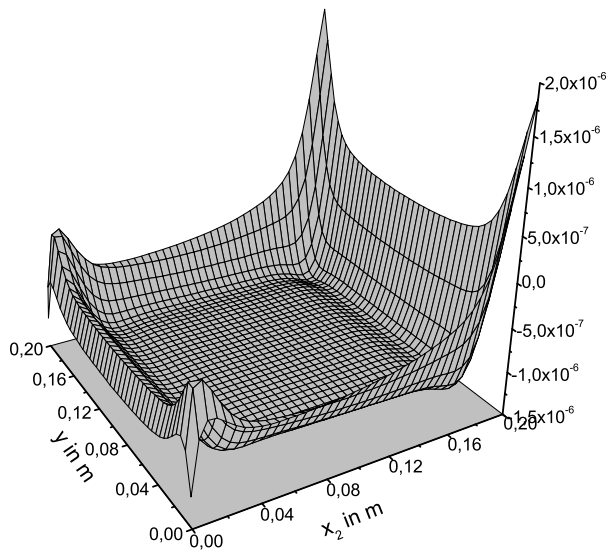


Abbildung 38:  $\Im \{W_2^{(i)}\}$  in  $\frac{Vs}{m}$  im mittleren Leiter

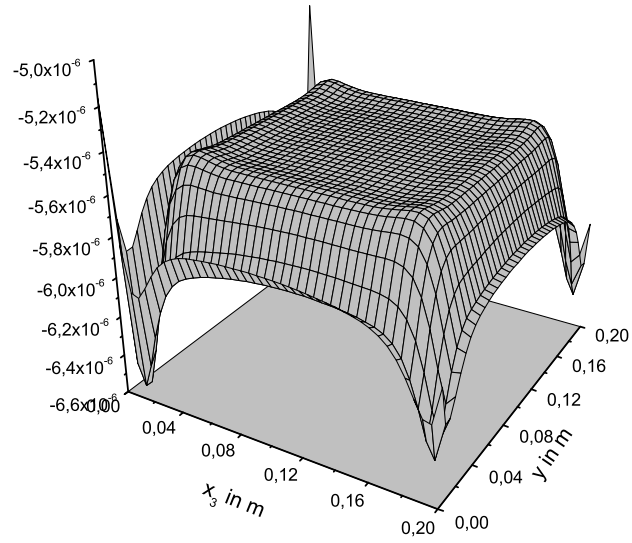


Abbildung 39:  $\Re \{W_3^{(i)}\} \frac{V_S}{m}$  im rechten Leiter

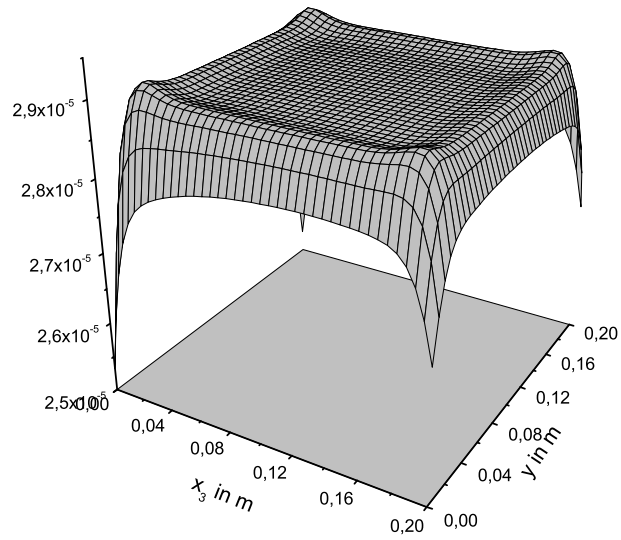


Abbildung 40:  $\Im \{W_3^{(i)}\}$  in  $\frac{V_S}{m}$  im rechten Leiter

### 7.3 Vergleich analytische Lösung / numerische Lösung

Das Vorliegen einer analytischen Lösung zur Bestimmung der Koeffizienten der Systemmatrix der oben beschriebenen Leiteranordnungen wurde genutzt, um die ebenfalls entwickelten numerischen Quadraturverfahren mit einer Referenzlösung zu versehen. Für die Ermittlung

|                  | Anzahl<br>Orthogonalfunktionen | Rechenzeit<br>analytisch | Rechenzeit numerisch |           |
|------------------|--------------------------------|--------------------------|----------------------|-----------|
|                  |                                |                          | $10^{-4}$            | $10^{-7}$ |
| Einleitersystem  | 40                             | 333,2 s                  | 3401 s               | 9612 s    |
| Einleitersystem  | 80                             | 1058,5 s                 | 15871 s              | 52500 s   |
| Einleitersystem  | 120                            | 2201,1 s                 | 55018 s              | 175670 s  |
| Zweileitersystem | 100                            | 7198,4 s                 | 179000 s             | 575500 s  |
| Drehstromsystem  | 100                            | 14991,3 s                | 374000 s             | 1198000 s |

Tabelle 5: Genauigkeit und Rechenzeiten

der Rechenzeiten wurde ein PC verwendet, der mit einem AMD Athlon 64 Prozessor 3500+ (2.2 GHz) und 2,0 GByte RAM ausgerüstet war.



# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Verfahren stellt eine Methode zur Berechnung der stationären Stromverdrängung innerhalb einer ebenen Anordnung mehrerer Massivleiter mit rechteckigem Querschnitt dar. Das entwickelte Lösungsverfahren erlaubt es, die Stromverteilung im Inneren der Leiter als Reihe analytischer Funktionen darzustellen. Die mit diesem Verfahren ermittelten Lösungen können aufgrund der hohen Genauigkeit der Ergebnisse als Referenzlösung für numerische Verfahren dienen.

Bei der Entwicklung der Lösung empfiehlt sich eine schrittweise Vorgehensweise: mit Hilfe der Differentialgleichungen, die das Verhalten des Vektorpotentials im stromdichtefreien Außenraum und das des modifizierten Vektorpotentials im Inneren eines Leiters beschreiben, werden Ansätze für die beiden Potentialfunktionen entwickelt.

Da sich zur Herleitung eines Ansatzes für das Vektorpotential im Inneren eines Leiters die Verwendung eines lokalen kartesischen Koordinatensystems anbietet, ist eine Bearbeitung eines beliebigen Mehrleitersystems im „Baukastenprinzip“ möglich; auch die Überlagerung ist aufgrund der Verwendung kartesischer Koordinaten unproblematisch.

Die im Inneren der Leiter geltenden Differentialgleichungen werden durch Separation gelöst und liefern für die Potentiale im Inneren Reihenansätze aus Orthogonalfunktionen. Die Verknüpfung der Teilansätze geschieht dann über die Ränder der Leiter; diese stellen die äußere Berandung des stromdichtefreien Außenraums dar. Für die Potentialfunktionen auf den Randabschnitten findet man vier Randabschnittsintegralgleichungen, die anschließend durch Anwendung der Orthogonalitätsrelation in ein lineares Gleichungssystem überführt werden.

Um für die bearbeiteten Leiteranordnungen eine rein analytische Lösung zu gewinnen, ist ein hoher analytischer Aufwand erforderlich. Bereits bei der Untersuchung der dem Problem angepaßten Kernfunktion - der logarithmischen Abstandsfunktion - zeigt sich, daß zur Auflösung der enthaltenen Betragsfunktion eine erste Fallunterscheidung in Abhängigkeit von der Lage von Auf- und Quellpunkt zueinander notwendig ist. Da eine rein analytische Lösung angestrebt wird, muss eine geeignete Entwicklung für den Kern gefunden werden. Die gewählte Lösung verwendet die FOURIERtransformierte der Kernfunktion, wobei zu beachten ist, daß die Transformation nach FOURIER für Funktionen zweier Variablen eine weitere Fallunterscheidung erforderlich macht.

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems macht sich erschwerend bemerkbar, daß der Rand der betrachteten Leiter nur stückweise glatt ist und jeder der vier Randabschnitte eines Rechteckleiters nur ein Viertel der benötigten Gleichungen liefert.

Das vorgestellte Verfahren liefert eine analytische Lösung; bei der Berechnung der Lösungsfunktionen muß allerdings zusätzlich ein großer numerischer Aufwand betrieben werden. Besonders die numerische Berechnung der Exponentialintegralfunktion für komplexe Argumente ist mit vertretbarem zeitlichen Aufwand nur durch die Benutzung verschiedener Darstellungen möglich, die jeweils für verschiedene Bereiche der komplexen Ebene Gültigkeit besitzen. Weiterhin werfen die analytischen Eigenschaften dieser Funktion, im besonderen die *branch discontinuity* auf der negativ-reellen Achse, Probleme bei der Behandlung auf, die in der Regel nur mit Hilfe der Funktionentheorie und durch mehrfache Fallunterscheidungen überwunden werden können.



# A Rückführung der Funktionen $R$ und $T$ auf die Exponentialintegralfunktion

Um eine übersichtlichere Darstellung der Ergebnisse für die Matrixkoeffizienten bzw. der Funktionsausdrücke zur Berechnung des Vektorpotentials zu gewährleisten, wurden in Kapitel 6 zwei Hilfsfunktionen  $R$  und  $T$  eingeführt:

$$\begin{aligned}
 R_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) = & \\
 & \int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu c_1}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu c_2}) \pm \right. \\
 & \left. \pm e^{-j\nu(-w^*)} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu(-c_1^*)}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu(-c_2^*)}) \right\} \\
 & \cdot \left\{ \nu \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \beta} + \frac{1}{\nu - \beta} \right] \right\} d\nu,
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 T_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) = & \\
 & \int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu c_1}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu c_2}) \pm \right. \\
 & \left. \pm e^{-j\nu(-w^*)} (1 - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) e^{-j\nu(-c_1^*)}) (1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) e^{-j\nu(-c_2^*)}) \right\} \\
 & \cdot \left\{ \nu \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \beta} + \frac{1}{\nu - \beta} \right] \right\} d\nu.
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\delta_{a,b}$  bezeichnet das KRONECKER-Symbol:

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases},$$

für die Argumente der Funktionen  $R$  und  $T$  gilt  $w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ .

Das Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Klammersausdrücke in den ersten beiden Zeilen läßt - für bestimmte  $w$  - die Argumente der  $e$ -Funktionen zu Null werden, was aufgrund der Eigenschaften der Exponentialintegralfunktion zu Diskontinuitäten führen kann. Diese Fälle müssen bei der weiteren Auflösung der Funktionen gesondert behandelt werden. Aus

[8] ist bekannt, daß die dort eingeführten Funktionen:

$$H(w, \alpha) = \int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \right\} d\nu, \quad w, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.1})$$

und

$$M(w, \alpha) = \int_0^{\infty} \left\{ e^{-j\nu w} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \right\} d\nu, \quad w, \alpha \in \mathbb{C}, \quad (\text{A.2})$$

durch die komplexwertige Exponentialintegralfunktion  $E_1(w)$  ausdrücken kann. Dieses ist nur unter Einschränkung des Definitionsbereiches der Funktionen auf

$$-\pi < \arg(w) < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(\alpha) < \frac{\pi}{2}$$

möglich.

Aus Platzgründen werden zwei weitere, mit diesen direkt zusammenhängende Funktionen  $\tilde{H}$  und  $\tilde{M}$  eingeführt, die den in  $T$  und  $R$  auftretenden Ausdrücken besser entsprechen:

$$\tilde{H}_{\pm}(w, \alpha) = \int_0^{\infty} \left\{ (e^{-j\nu w} \pm e^{-j\nu(-w^*)}) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \right\} d\nu$$

$$\tilde{M}_{\pm}(w, \alpha) = \int_0^{\infty} \left\{ (e^{-j\nu w} \pm e^{-j\nu(-w^*)}) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \right\} d\nu \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

## A.1 Die Funktion $T(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$

### A.1.1 $T_{\pm}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Für  $T_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$  erhält mit Hilfe der für  $\alpha \neq \beta$  gültigen Partialbruchzerlegung

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] \left[ \frac{1}{\nu + b} - \frac{1}{\nu - b} \right] = -\frac{2b}{b^2 - a^2} \left( a \left[ \frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu - a} \right] - b \left[ \frac{1}{\nu + b} - \frac{1}{\nu - b} \right] \right)$$

zunächst für  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$  das Resultat:

$$\begin{aligned} T_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) = & \\ & = \frac{-\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{H}_{\pm}(w, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{H}_{\pm}(w + c_1, \alpha) - \right. \\ & \quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_{\pm}(w + c_2, \alpha) + \\ & \quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \alpha) \right) + \\ & + \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{H}_{\pm}(w, \beta) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{H}_{\pm}(w + c_1, \beta) - \right. \\ & \quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_{\pm}(w + c_2, \beta) + \\ & \quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \beta) \right), \quad \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in Gleichung (A.3) schließt den Fall  $\alpha = 0$  ein; für  $\beta = 0$  erhält man Null.

Für  $\alpha = \beta$  wird die Zerlegung

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right] \left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] = -a \left[ \frac{1}{(\nu+a)^2} + \frac{1}{(\nu-a)^2} \right] + \left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right]$$

benötigt. Berücksichtigt man, daß sich Ausdrücke der Art  $\int_0^\infty \left[ \frac{1}{(\nu+\alpha)^2} + \frac{1}{(\nu-\alpha)^2} \right] e^{-j\nu w} d\nu$  mit Hilfe von partieller Integration und Substitution zu

$$\int_0^\infty \left[ \frac{1}{(\nu+\alpha)^2} + \frac{1}{(\nu-\alpha)^2} \right] e^{-j\nu w} d\nu = -jw \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\nu+\alpha} - \frac{1}{\nu-\alpha} \right] e^{-j\nu w} d\nu$$

umformen lassen, erhält man für

$$\begin{aligned} T_\pm(w, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\ &= -\alpha \left( -jwM(w, \alpha) \pm jw^*M(-w^*, \alpha) - \right. \\ &\quad - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (-j(w+c_1)M(w+c_1, \alpha) \pm j(w^*+c_1^*)M(-w^*-c_1^*, \alpha)) - \\ &\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) (-j(w+c_2)M(w+c_2, \alpha) \pm j(w^*+c_2^*)M(-w^*-c_2^*, \alpha)) - \\ &\quad \left. - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_1) (-j(w+c_1+c_2)M(w+c_1+c_2, \alpha) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm j(w^*+c_1^*+c_2^*)M(-w^*-c_1^*-c_2^*, \alpha)) - \right) + \\ &+ \left( \tilde{H}_\pm(w, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{H}_\pm(w+c_1, \alpha) - \right. \\ &\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_\pm(w+c_2, \alpha) + \\ &\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{H}_\pm(w+c_1+c_2, \alpha) \right). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Diese Ergebnisse gelten für alle  $w, c_1, c_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , da der Fall, daß die Argumente der Exponentialfunktionen zu Null werden, keine Auswirkungen auf die Funktion  $T$  hat, wie die

folgenden beiden Rechnungen zeigen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] d\nu &= \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} + \int_{\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu} - \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} - \int_{-\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu}, \\ &= \int_{\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu} - \int_{-\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu}, \\ &= \int_{\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu} - \int_{\alpha}^0 \frac{d\nu}{\nu}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] d\nu = 0,$$

und:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(\nu + \alpha)^2} + \frac{1}{(\nu - \alpha)^2} \right] d\nu &= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} + \int_{-\alpha}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2}, \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \left[ -\frac{1}{\nu} \right]_{\nu=\alpha}^{\nu=\varepsilon} + \left[ -\frac{1}{\nu} \right]_{\nu=\alpha}^{\nu=-\varepsilon} \right), \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{-(\alpha)}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(\nu + \alpha)^2} + \frac{1}{(\nu - \alpha)^2} \right] d\nu = 0,$$

Der Fall  $\alpha = \beta = 0$  liefert die triviale Lösung.

### A.1.2 Modifikationen für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Für komplexwertige Argumente  $\underline{\alpha} = \alpha e^{j \arg(\alpha)}$  bzw.  $\underline{\beta} = \beta e^{j \arg(\beta)}$  müssen die Ergebnisse in den Gleichungen (A.3) und (A.3) modifiziert werden.

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \underline{\alpha}} - \frac{1}{\nu - \underline{\alpha}} \right] d\nu &= \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} + \int_{\alpha e^{j \arg(\alpha)}}^0 \frac{d\nu}{\nu} - \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} - \int_{\alpha e^{j(\arg(\alpha) \pm \pi)}}^0 \frac{d\nu}{\nu} \\ &= \int_{\alpha e^{j \arg(\alpha)}}^0 \frac{d\nu}{\nu} - \int_{\alpha e^{j \arg(\alpha) \pm \pi}}^0 \frac{d\nu}{\nu} \\ &= \pm j\pi. \end{aligned}$$

ergibt im Gegensatz zum Fall  $\alpha \in \mathbb{R}$  nicht Null. Das Vorzeichen des Ergebnisses richtet sich nach dem Wert des Imaginärteils von  $\underline{\alpha}$ . Da darauf geachtet werden muss, daß der Imaginärteil der komplexwertige Logarithmusfunktion nur einen Wertbereich von  $[-\pi, +\pi]$  besitzt, muß

für  $\ln(-\underline{\alpha})$  der Wert  $\pi$  entweder addiert oder subtrahiert werden. Mit diesen Ausführungen erhält man demnach für

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \underline{\alpha}} - \frac{1}{\nu - \underline{\alpha}} \right] d\nu = -\operatorname{sgn}(\Im(\underline{\alpha}))j\pi.$$

Der Ausdruck  $\operatorname{sgn}(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  bezeichnet hier die Vorzeichenfunktion, die wie folgt definiert ist:

$$\operatorname{sgn}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \xi < 0 \\ 0 & \xi = 0, \\ +1 & \xi > 0 \end{cases}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Daher muss für den Fall, daß das Argument der Funktion  $\tilde{H}_+(w)$  in (A.3) und (A.3) zu Null wird, der Wert

$$\tilde{H}_+(0) = \mp j2\pi$$

eingesetzt werden.

Für  $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$  ist wegen

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(\nu + \underline{\alpha})^2} + \frac{1}{(\nu - \underline{\alpha})^2} \right] d\nu = 0$$

keine weitere Modifikation nötig.

## A.2 Die Funktion $R(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$

Bei der weiteren Bearbeitung der Funktion  $R$  müssen mehrere Fallunterscheidungen getroffen werden, da eine Null im Exponenten einer  $e$ -Funktion zu einem oder mehreren Ausdrücken der Art  $\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] e^{-j\nu w} d\nu$  führt, die wegen

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} + \frac{1}{\nu - \alpha} \right] d\nu = -2(\ln \alpha - j\operatorname{sgn}(\Im(\alpha))\frac{\pi}{2} + \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R))$$

für jeden dieser Fälle einzeln betrachtet werden müssen. Diese einzeln zu behandelnden Fälle entnimmt man der Tabelle 5.

Es läßt sich zeigen, daß die Funktion  $R$  sich immer in einen endlichen Teil  $\overline{R}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma)$  und einen weiteren Teil Teil  $\hat{R}(w, c_1, c_2, \beta, \gamma)$  aufteilen läßt, der singulär wird, aber nicht vom Parameter  $\alpha$  abhängig ist.

|    |                         |                    |                 |
|----|-------------------------|--------------------|-----------------|
| 1  | $\alpha \neq \beta$     | $w \neq 0$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 2  | $\alpha \neq \beta$     | $w = 0$            | $c_1 \neq -c_2$ |
| 3  | $\alpha \neq \beta$     |                    | $c_1 = -c_2$    |
| 4  | $\alpha \neq \beta$     | $w = -c_1 \neq 0$  | $c_1 \neq -c_2$ |
| 5  | $\alpha \neq \beta$     | $w = -c_2$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 6  | $\alpha \neq \beta$     | $w = -c_1 = -c_2$  | $c_1 = c_2$     |
| 7  | $\alpha \neq \beta$     | $w = -(c_1 + c_2)$ |                 |
| 8  | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w \neq 0$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 9  | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w = 0$            | $c_1 \neq -c_2$ |
| 10 | $\alpha = \beta \neq 0$ |                    | $c_1 = -c_2$    |
| 11 | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w = -c_1$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 12 | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w = -c_2$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 13 | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w = -c_1 = -c_2$  | $c_1 = c_2$     |
| 14 | $\alpha = \beta \neq 0$ | $w = -(c_1 + c_2)$ |                 |
| 15 | $\alpha = \beta = 0$    | $w \neq 0$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 16 | $\alpha = \beta = 0$    | $w = 0$            | $c_1 \neq -c_2$ |
| 17 | $\alpha = \beta = 0$    |                    | $c_1 = -c_2$    |
| 18 | $\alpha = \beta = 0$    | $w = -c_1$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 19 | $\alpha = \beta = 0$    | $w = -c_2$         | $c_1 \neq -c_2$ |
| 20 | $\alpha = \beta = 0$    | $w = -c_1 = -c_2$  | $c_1 = c_2$     |
| 21 | $\alpha = \beta = 0$    | $w = -c_1 - c_2$   |                 |

Tabelle 6: Fallunterscheidungen bei der Auswertung der Funktion  $R_+$

Generell kommt für den Fall, daß die für die Variablen im Argument von  $R$   $\alpha \neq \beta$  gilt, die Partialbruchzerlegung

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right] \left[ \frac{1}{\nu+b} + \frac{1}{\nu-b} \right] = \frac{2}{b^2-a^2} \left( -a^2 \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right] + b^2 \left[ \frac{1}{\nu+b} + \frac{1}{\nu-b} \right] \right)$$

zum tragen. Für den Fall  $\alpha = \beta \neq 0$  verwendet man

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right]^2 = -a \left[ \frac{1}{(\nu+a)^2} - \frac{1}{(\nu-a)^2} \right] + 2 \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right].$$

Beide Partialbruchzerlegungen gelten für  $\alpha, \beta \in C$ .

### A.2.1 $R_{\pm}$ für $\alpha \neq \beta$

**Fall 1.** Zunächst für  $\alpha \neq \beta, w \neq 0, w \neq -c_1, w \neq -c_2, w \neq -(c_1 + c_2)$ . Hier liefert die

Funktion  $R_{\pm}$  den Wert:

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(w, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \alpha) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \alpha) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \alpha) \right) + \\
&+ \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(w, \beta) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \beta) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \beta) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \beta) \right), \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Für  $w = 0, c_1 \neq c_2$  erhält man den **Fall 2**:

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(0, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \alpha) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \alpha) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \alpha) - \\
&\quad \left. - (1 \pm 1) 2 \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im \alpha) \frac{\pi}{2} \right) \right) + \\
&+ \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \beta) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \beta) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \beta) - \\
&\quad \left. - (1 \pm 1) 2 \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im \beta) \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
&+ 4(1 \pm 1) \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(R)), \quad \alpha \neq \beta,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

und durch Gleichsetzen von  $c_1$  und  $c_2$  den Fall **3**:

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(0, c_1, -c_1, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \alpha) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \alpha) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \alpha) - \\
&\quad \left. - 2(1 \pm 1) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) (1 + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos \gamma c_1 \cos \beta c_2) \right) + \\
&+ \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \beta) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \beta) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \beta) - \\
&\quad \left. - 2(1 \pm 1) \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im(\beta)) \frac{\pi}{2} \right) (1 + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos \gamma c_1 \cos \beta c_2) \right) \\
&\quad + 4(1 \pm 1)(1 + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2)) \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(R)), \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

**Fall 4** : hier gilt für  $w \neq 0, w = -c_1, c_1 \neq -c_2$ :

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_1, c_1, c_2, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (-2) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_1 + c_2, \alpha) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_2, \alpha) \right) + \\
&+ \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \beta) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (-2) \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im(\beta)) \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_1 + c_2, \beta) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_2, \beta) \right) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (1 \pm 1) 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R, \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.8}$$



**Fall 5** :  $w \neq 0, w = -c_2, c_1 \neq -c_2$ :

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_2, c_2, c_1, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_2) (-2) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(-c_2 + c_1, \alpha) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_2) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(c_1, \alpha) \right) + \\
&+ \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \beta) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_2) (-2) \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im(\beta)) \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(-c_2 + c_1, \beta) + \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_2) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(c_1, \beta) \right) + \\
&+ (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_2) (1 \pm 1) 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R, \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

**Fall 6** :  $w = -c_1 = -c_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_1, c_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \alpha) + \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(c_1, \alpha) + \right. \\
&\quad \left. + (1 \pm 1) (\cos(\gamma c_1) + \cos(\beta c_1)) 2 \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) \right) + \\
&\quad + \frac{2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \beta) + \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_1) \tilde{M}_{\pm}(c_1, \beta) + \right. \\
&\quad \left. + (1 \pm 1) (\cos(\gamma c_1) + \cos(\beta c_1)) 2 \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im(\beta)) \frac{\pi}{2} \right) \right) + \\
&+ 2(1 \pm 1) (\cos(\gamma c_1) + \cos(\beta c_1)) \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R, \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

**Fall 7** :  $w = -(c_1 + c_2)$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-(c_1 + c_2), c_1, c_1, \alpha, \beta, \gamma) &= \\
&= \frac{-2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-(c_1 + c_2), \alpha) - \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \alpha) - \right. \\
&\quad - \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \alpha) - \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_1) 2(1 \pm 1) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) \left. \right) + \\
&+ \frac{-2\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \tilde{M}_{\pm}(-(c_1 + c_2), \beta) - \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \beta) - \right. \\
&\quad - \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \beta) - \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_1) 2(1 \pm 1) \left( \ln(\beta) - j \operatorname{sgn}(\Im(\beta)) \frac{\pi}{2} \right) \left. \right) + \\
&+ 2(1 \pm 1) \cos(\gamma c_1) \cos(\beta c_1) \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R, \quad \alpha \neq \beta.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

### A.2.2 $R_{\pm}$ für $\alpha = \beta \neq 0$

**Fall 8 :**

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(w, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -\alpha \left( (-jwH(w, \alpha) \pm jw^*H(-w^*, \alpha)) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos \gamma c_1 (-j(w + c_1)H(w + c_1, \alpha) \pm (-w^* - c_1^*)H(-w^* - c_1^*, \alpha)) - \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos \alpha c_2 (-j(w + c_2)H(w + c_2, \alpha) \pm (-w^* - c_2^*)H(-w^* - c_2^*, \alpha)) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos \gamma c_1 \cos \alpha c_2 (-j(w + c_1 + c_2)H(w + c_1 + c_2, \alpha) \pm \\
&\quad \quad \left. \pm (-w^* - c_1^* - c_2^*)H(-w^* - c_1^* - c_2^*, \alpha)) \right) + \\
&- 2(1 \pm 1) \left( (1 - \delta_{0,c_1}) \cos \gamma c_1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos \alpha c_2 + \right. \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos \gamma c_1 \cos \alpha c_2 \left. \right) + \\
&\quad + 2 \left( \tilde{M}_{\pm}(w, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1, \alpha) - \right. \\
&\quad \quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_2, \alpha) + \\
&\quad \quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \tilde{M}_{\pm}(w + c_1 + c_2, \alpha) \right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

bzw. (**Fall 9**)

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(0, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -j\alpha \left( (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (c_1 H(c_1, \alpha) \mp c_1^* H(-c_1^*, \alpha)) + \right. \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\alpha c_2) (c_2 H(c_2, \alpha) \mp c_2^* H(-c_2^*, \alpha)) - \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \cdot \\
&\quad \quad \left. \cdot ((c_1 + c_2) H(c_1 + c_2, \alpha) \mp (c_1^* + c_2^*) H(-c_1^* - c_2^*, \alpha)) \right) + \\
&\quad + 2(1 \pm 1) \left( (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) + (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\alpha c_2) - \right. \\
&\quad \quad - (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \left. \right) + \\
&\quad + (1 \pm 1) \left( -2 - 4(\ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2}) + 4 \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(R)) \right),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

**Fall 10 :**

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(0, c_1, -c_1, \alpha, \alpha, \gamma) &= 2(\cos \gamma c_1 + \cos \alpha c_1)(1 \pm 1 - 2\tilde{M}_{\pm}(c_1, \alpha)) - \\
&\quad - j\alpha \left( \cos(\gamma c_1) [c_1 H(c_1, \alpha) \mp c_1^* H(-c_1^*, \alpha)] + \cos(\alpha c_1) [c_1 H(c_1, \alpha) \mp c_1^* H(-c_1^*, \alpha)] \right) + \\
&\quad + (1 \pm 1) (1 + \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_1)) \left[ -2 - 4(\ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2}) + 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) \right].
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Der Exponent der  $e$ -Funktion wird ebenfalls Null für  $w = -c_1 \neq 0$  oder  $w = -c_2 \neq 0$ , was zusammen mit der Unterscheidung  $\alpha \neq \beta$  bzw.  $\alpha = \beta$  die letzten 4 Fälle ausmacht:

**Fall 11:**  $w = -c_1 \neq -c_2$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_1, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -\alpha \left( (jc_1 H(-c_1, \alpha) \mp jc_1^* H(c_1^*, \alpha)) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\alpha c_2) (-j(-c_1 + c_2) H(-c_1 + c_2, \alpha) \pm (c_1^* - c_2^*) H(c_1^* - c_2^*, \alpha)) + \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) (-jc_2 H(c_2, \alpha) \pm \\
&\quad \quad \left. \pm (-c_2^*) H(-c_2^*, \alpha)) \right) + \\
&- 2(1 \pm 1) \left( (1 - \delta_{0,c_1}) \cos \gamma c_1 - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos \alpha c_2 + \right. \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \left. \right) + \\
&\quad + 2 \left\{ \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \alpha) - (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) (1 \pm 1) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im \alpha) \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\
&\quad - (1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_1 + c_2, \alpha) + \\
&\quad \quad \left. + (1 - \delta_{0,c_1})(1 - \delta_{0,c_2}) \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_2, \alpha) \right\} - \\
&- 2 \cos(\gamma c_1) (1 \pm 1) \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

**Fall 12**  $w \neq 0, w = -c_2, c_1 \neq -c_2$ :

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_2, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -\alpha \left( (jc_2 H(-c_2, \alpha) \mp jc_2^* H(c_2^*, \alpha)) - \right. \\
&\quad + (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \left( -(-j(-c_1 + c_2) H(-c_1 + c_2, \alpha) \pm (c_1^* - c_2^*) H(c_1^* - c_2^*, \alpha)) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos(\alpha c_2) (jc_1 H(c_1, \alpha) \pm jc_1^* H(c_1^*, \alpha)) \right) \right) + \\
&\quad + 2 \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \alpha) + (1 - \delta_{0,c_1}) \cos(\gamma c_1) \left( -\tilde{M}_{\pm}(c_1 - c_2) + \cos(\beta c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_1) \right) \right) + \\
&\quad + 2 \cos(\beta c_2) (1 \pm 1) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im \alpha) \frac{\pi}{2} \right) - \\
&- 2(1 \pm 1) (1 - \cos(\alpha c_2)) - 4 \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

**Fall 13**  $w = -c_1 = -c_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-c_1, c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -\alpha \left( (jc_1 H(-c_1, \alpha) \mp jc_1^* H(c_1^*, \alpha)) - \right. \\
&\quad \left. + \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_1) (jc_1 H(c_1, \alpha) \pm jc_1^* H(-c_1^*, \alpha)) \right) + \\
&\quad + 2 \left( \tilde{M}_{\pm}(-c_1, \alpha) + \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_2, \alpha) + \right. \\
&\quad \left. (1 \pm 1) (\cos(\gamma c_1) + \cos(\alpha c_2)) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) \right) - \\
&\quad - (1 + \cos(\gamma c_1) + \cos(\alpha c_2) + \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2)) + \\
&\quad + 2(1 \pm 1) \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

**Fall 14**  $w = -(c_1 + c_2)$

$$\begin{aligned}
R_{\pm}(-(c_1 + c_2), c_1, c_2, \alpha, \alpha, \gamma) &= \\
&= -\alpha \left( (j(c_1 + c_2) H(-(c_1 + c_2), \alpha) \mp j(c_1 + c_2)^* H((c_1 + c_2)^*, \alpha)) - \right. \\
&\quad \left. - \cos(\gamma c_1) (-jc_2 H(c_2, \alpha) \mp jc_2^* H(-c_2^*, \alpha)) - \cos(\beta c_2) (jc_1 H(-c_1, \alpha) \pm jc_1^* H(c_1^*, \alpha)) \right) + \\
&\quad + 2 \left( \tilde{M}_{\pm}(-(c_1 + c_2), \alpha) - \cos(\gamma c_1) \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \alpha) - \right. \\
&\quad \left. - \cos(\alpha c_2) \tilde{M}_{\pm}(-c_2, \alpha) \cos(\alpha c_2) \tilde{M}_{\pm}(c_2, \alpha) + \right. \\
&\quad \left. (1 \pm 1) (\cos(\gamma c_1) + \cos(\alpha c_2)) \left( \ln(\alpha) - j \operatorname{sgn}(\Im(\alpha)) \frac{\pi}{2} \right) \right) - \\
&\quad - 2(1 \pm 1) (1 \cdot \cos(\gamma c_1) - \cos(\alpha c_2) + \cos(\gamma c_1) \cos(\alpha c_2) + \\
&\quad ) - 4(1 \pm 1) \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

### A.2.3 $R_+$ für $\alpha = \beta = 0$

Vor Auswertung dieser Fälle wird folgende Vorbetrachtung durchgeführt: Mit Hilfe von [2, S.229, Nr. 5.1.11] erhält man für  $w \in \mathbb{C}$ :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-j\nu w}}{\nu} d\nu = - \left( C_E + \ln(j\varepsilon w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (j\varepsilon w)^n}{n n!} \right),$$

wobei  $C_E$  die EULER'sche Konstante darstellt. Damit wird

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-j\nu w}}{\nu} d\nu = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_E + \ln(\varepsilon) + \ln(jw)). \tag{A.19}$$

Für die in einzelnen Summanden von  $R_+(w, c_1, c_2, 0, 0, 0)$  auftretenden Ausdrücke benötigt man noch die folgenden Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\nu} (e^{-j\nu w} + e^{-j\nu(-w^*)}) d\nu &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2C_E + 2\ln(\varepsilon) + \underbrace{\ln(jw) + \ln(-jw^*)}_{=2\ln|w|}) \\ &= -2\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_E + \ln(\varepsilon) + \ln|w|), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

und

$$\int_0^\infty \frac{1}{\nu} (e^{-j\nu w} + e^{-j\nu(-w^*)} - 2) d\nu = -2\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_E + \ln|w|) - 2\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R) \quad (\text{A.21})$$

**Fall 15:** Für  $w \neq 0, w \neq -c_1, w \neq -c_2, w \neq -(c_1 + c_2)$ :

$$R_+(w, c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(\ln|w| - \delta_{0,c_1} \ln|w + c_1| - \delta_{0,c_2} \ln|w + c_2| + \delta_{0,c_1} \delta_{0,c_2} \ln|w + c_1 + c_2|).$$

**Fall 16:** Hier gilt wegen  $w = 0, w \neq -c_1, w \neq -c_2, w \neq -(c_1 + c_2): c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ :

$$R_+(0, c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(-C_E - \ln|c_1| - \ln|c_2| + \ln|c_1 + c_2|) + 8\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

**Fall 17** Mit  $w = 0, w \neq -c_1, w \neq -c_2, w = -(c_1 + c_2): c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$  und  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ :

$$R_+(0, c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(-2C_E - \ln|c_1| - \ln|c_2|) + 16\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

**Fall 18:** Für die Argumente von  $R_+$  gilt hier  $w \neq 0, w = -c_1 \Rightarrow c_1 \neq 0, w \neq -c_2, w \neq -(c_1 + c_2)$ :

$$R_+(-c_1, c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(\ln|c_1| + C_E + \delta_{0,c_2}(-\ln|-c_1 + c_2| + \ln|c_2|)) + 8\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

**Fall 19:** Gültig für  $w \neq 0, w = -c_2 \Rightarrow c_2 \neq 0, w \neq -c_1, w \neq -(c_1 + c_2)$ :

$$R_+(-c_2, c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(\ln|c_2| + C_E + \delta_{0,c_1}(-\ln|-c_2 + c_1| + \ln|c_1|)) + 8\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

**Fall 20:**  $w \neq 0, w = -c_1 \Rightarrow c_1 \neq 0, w = -c_2 \Rightarrow c_2 \neq 0, w \neq -(c_1 + c_2)$ :

$$R_+(-c_1, c_1, c_1, 0, 0, 0) = -8(2C_E + 2\ln|c_1|) - 16\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

**Fall 21:**  $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0, w \neq 0, w = -(c_1 + c_2), c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$

$$R_+(-(c_1 + c_2), c_1, c_2, 0, 0, 0) = -8(\ln|w| - \ln|c_1| - \ln|c_2| - C_E) - 8\lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R).$$

### A.2.4 $R_-$ für $\alpha = \beta = 0$

Mit Gleichung (A.19) wird

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\nu} (e^{-j\nu w} - e^{-j\nu(-w^*)}) d\nu &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_E + \ln(\varepsilon) + \ln(jw) - C_E - \ln(\varepsilon) \ln(-jw^*)) \\ &= -\ln\left(\frac{jw}{-jw^*}\right) = -\ln(e^{j(2\arg(w)+\pi)}) \\ &= -j2\arg(w) + \pi \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

wird

$$\begin{aligned} R_-(w, c_1, c_2, 0, 0, 0) &= 4j \left( -\delta_{w,0}(2\arg(w) + \pi) + \delta_{c_1,0}(2\arg(w + c_1) + \pi) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{c_2,0}(2\arg(w + c_2) + \pi) - \delta_{c_1,0}\delta_{c_2,0}(2\arg(w + c_2) + \pi) \right). \end{aligned}$$

### A.2.5 Mathematische Rückführung der Funktionen $H$ und $M$ auf $E_1$

Die im folgenden aufgeführte Rückführung gelang zum ersten Mal in [8] und ist dort entnommen.

Die durch die Gleichungen (A.1) und (A.2) definierten Funktionen  $H$  und  $M$  auf das komplexwertige Exponentialintegral zurückgeführt, welches lt. [2] Nr. 5.1.1, S.228, für  $|\arg(w)| < \pi$  wie folgt definiert ist:

$$E_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_w^{\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu}.$$

Dabei ist zu beachten, daß der Integrationsweg in der komplexen Ebene weder die negative reelle Achse noch den Ursprung schneiden darf.

Die Definitionsgleichung der Exponentialintegralfunktion für rein reelle Argumente:

$$E_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{-x}^{\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu}, \quad x > 0,$$

entnimmt man ebenfalls [2] (Nr. 5.1.2, S.228).

Die in den Funktionen  $H$  und  $M$  auftretenden Summanden der Art:

$$\int_0^{\infty} e^{-j\nu w} \frac{d\nu}{\nu \pm \alpha},$$

können für  $|\arg(\alpha)| < \frac{\pi}{2}$  mit Hilfe einer Substitution umgeformt werden:

$$\int_0^{\infty} e^{-j\nu w} \frac{d\nu}{\nu \pm \alpha} = e^{\pm jw\alpha} \int_{\pm jw\alpha}^{jw\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} \quad \begin{array}{l} |\arg(\alpha)| \leq \frac{\pi}{2} \\ |\arg(w)| < \pi \end{array}.$$

Anschließend werden sie in zwei Teilintegrale aufgespalten:

$$\int_0^{\infty} e^{-j\nu w} \frac{d\nu}{\nu \pm \alpha} = e^{\pm jw\alpha} \left[ \int_{\pm jw\alpha}^{\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} + \int_{\infty}^{jw\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} \right].$$

Das zweite Teilintegral liefert dabei keinen Beitrag, da auf der rechten Seite der folgenden Gleichung im Integranden eine Exponentialfunktion mit negativem reellen Exponenten  $R$  auftaucht, die im Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  verschwindet:

$$\int_{\infty}^{jw\infty} e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} = \lim_{R \rightarrow \infty} j \int_0^{\arg(w) + \frac{\pi}{2}} e^{-R(\cos(\psi) + j \sin(\psi))} d\psi = 0.$$

Durch Substitution und Aufspaltung des Integrals wird der ursprüngliche Integrationsweg geändert. Dabei kann es dazu kommen, daß der Umlaufsinn um den bei  $w=0$  im Ursprung gelegenen Pol geändert wird und damit der Beitrag des Pols zum Integral berücksichtigt werden muß. Dabei ist die Lage der komplexen Variablen  $w$  und  $\alpha$  zueinander sowie zur negativ-reellen Achse zu berücksichtigen.

Die drei relevanten Fälle werden im folgenden untersucht. Dabei wird zur Bestimmung der Abweichung zwischen dem Integral entlang des ursprünglichen Weges und dem Integral entlang des geänderten das geschlossene Integral  $I = \oint e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu}$  berechnet.

Den Beitrag des Poles liefert der Residuensatz der Funktionentheorie.

**Erster Fall:**  $|\arg(w) + \frac{\pi}{2}| > |\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2}| > 0$

Hier wird der Pol bei  $w = 0$  vom Integrationsweg umlaufen. Das Integral  $I$  ist entlang der Integrationskontur  $C$  zu bilden, die sich aus den drei Abschnitten  $C1$ ,  $C2$  und  $C3$  wie in Abbildung A.2.5 gezeigt zusammensetzt, und berechnet sich zu

$$I = \oint_C e^{-\nu} \frac{d\nu}{\nu} = j 2\pi \operatorname{sgn}\left(\arg(w) + \frac{\pi}{2}\right),$$

wenn man mit  $\arg(w)$  die Phase von  $w$  und mit  $\operatorname{sgn}(x)$  die Vorzeichenfunktion für reellwertige Argumente  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ +1 & x > 0. \end{cases}$$

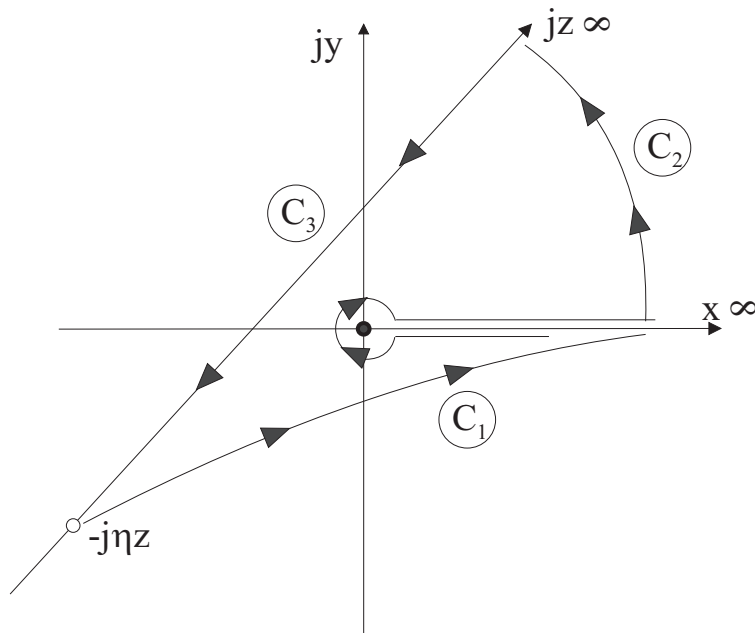


Abbildung 41:  $|\arg(w) + \frac{\pi}{2}| > |\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2}| > 0$

**Zweiter Fall:**  $\arg(\alpha) = 0$

In diesem Fall liegt der Startpunkt der Integration derart, daß der ursprüngliche Integrationsweg  $C_3$  durch den Pol bei  $w = 0$  führt. Diesen kann man sich als aus zwei Halbpolen zusammengesetzt vorstellen, deren einer (bei  $w = 0^+$ ) wieder aus dem von der Integrationskontur  $C$  eingeschlossenen Fläche entfernt wird. Für das Integral  $I$  erhält man:

$$I = j \pi \operatorname{sgn}\left(\arg(w) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Abbildung A.2.5 verdeutlicht die Teilstrecken und die Lage der Start- und Endpunkte der Integration.

**Dritter Fall:**  $\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0$

Eine weitere Konstellation liegt vor, wenn der Ausgangspunkt der Integration auf der negativ reellen Achse liegt. Das Integral  $I$  nimmt in diesem Fall den Wert

$$I = -j \pi \operatorname{sgn}(\arg(\alpha))$$

an. Zusätzlich ist für diesen Fall zu bedenken, daß hier das Integral  $\int_{C_1} e^{-\nu \frac{dw}{w}}$  divergiert und mit den bekannten Symmetrien der Exponentialintegralfunktion wie folgt zu ersetzen ist:

$$E_1(-j\alpha w) = -E_i(j\alpha w), \quad \arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dieser Fall wird in Abbildung A.2.5 dargestellt



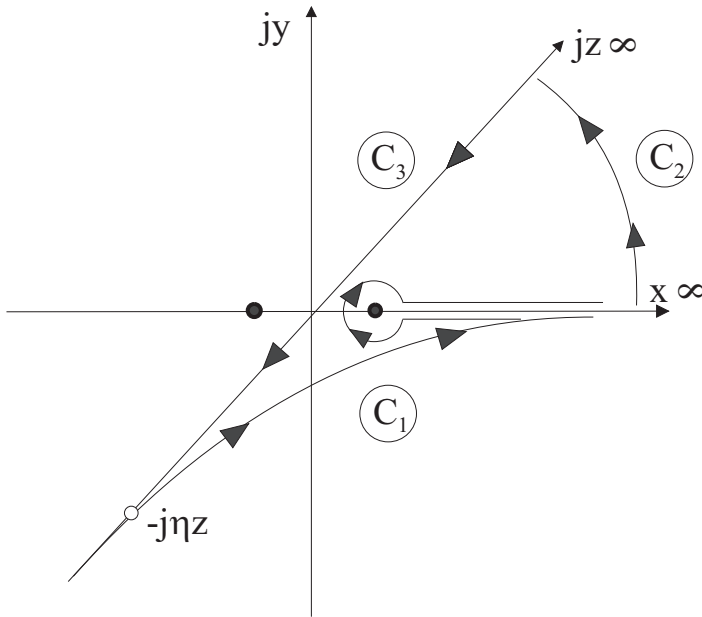


Abbildung 42:  $\arg(\alpha) = 0$

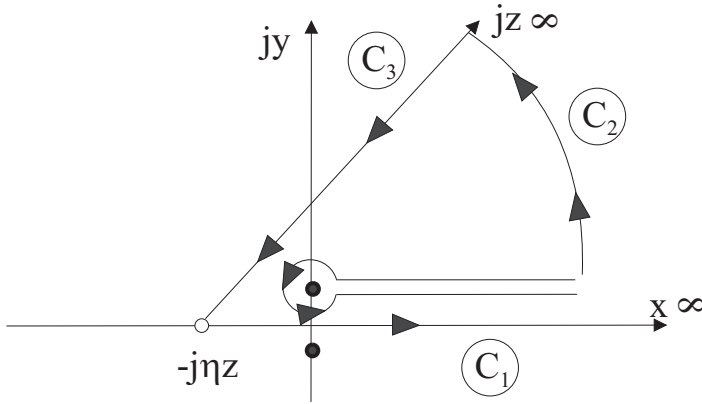


Abbildung 43:  $\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0$

Unter Berücksichtigung der oben berechneten Beiträge des Poles erhält man also für die Auswertung der Funktion  $H$  und  $M$ :

$$M(w, \alpha) = e^{j\alpha w} E_1(j\alpha w) + e^{-j\alpha w} E_1(-j\alpha w) + j\pi e^{-j\alpha w} \left[ \operatorname{sgn} \arg(\alpha) - \operatorname{sgn}(\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2}) \right], \quad (\text{A.23})$$

$$H(w, \alpha) = e^{j\alpha w} E_1(j\alpha w) - e^{-j\alpha w} E_1(-j\alpha w) - j\pi e^{-j\alpha w} \left[ \operatorname{sgn} \arg(\alpha) - \operatorname{sgn}(\arg(w) + \arg(\alpha) + \frac{\pi}{2}) \right] \quad (\text{A.24})$$



# B Darstellung von $E_1(w)$ für verschiedene Gebiete der komplexen Ebene

Die beiden Hilfsfunktionen  $H$  und  $M$ , definiert in den Gleichungen (A.1) und (A.2), lassen sich auf die Exponentialintegralfunktion  $E_1(w)$  zurückführen, wie sie in [2], S.228, Nr. 5.1.1 definiert ist. Die Exponentialintegralfunktion für komplexwertige Argumente ist eine relativ selten benutzte Funktion, die in keinem der gängigen mathematischen Softwarepakete enthalten ist. Eine gute Beschreibung ihrer Eigenschaften entnimmt man [29, 30 ff.]. Die hier aufgeführte Darstellung der komplexwertigen Exponentialintegralfunktion wurde erstmals in [8] veröffentlicht und wurde dort entnommen.

Die zur Berechnung der Matrixkoeffizienten nötige Exponentialintegralfunktion  $E_i(w)$  kann durch folgende Reihendarstellungen approximiert werden, die je nach Lage des Funktionsarguments in der komplexen Ebene differieren. Die einzelnen Entwicklungen werden im folgenden kurz vorgestellt. Die Genauigkeiten in Abhängigkeit von der Iterationshäufigkeit bzw. dem Grad der verwendeten Polynome können Tabelle 7 entnommen werden.

## B.1 Reihenentwicklung nach Potenzen $w^p$

Für kleine Beträge  $|w|$  kann  $E_1$  in eine Potenzreihe um den Ursprung entwickelt werden:

$$E_1(w) = -C_E - \ln(w) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-w)^n}{n n!}, \quad \arg(w) < \pi.$$

Die vorkommende Konstante  $C_E$  ist die EULER'sche Konstante und kann durch Bildung des Grenzwertes

$$C_E = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right].$$

bestimmt werden. Diese Potenzreihendarstellung ist [2] Nr. 5.1.10, S. 229, entnommen und wird für  $|w| < 10$  oder  $\Re\{w\} < 0 \wedge |w| < 20$  verwendet.

## B.2 LAGUERRE-Integration

Für große Beträge von  $w$  (implementiert:  $|w| > 26$ ) kann das Exponentialintegral als Ergebnis einer LAGUERRE-Integration dargestellt werden, bei der die zu entwickelnde Funktion mit LAGUERRE-Polynomen abgebildet wird. Es ergibt sich eine Reihendarstellung der Form

$$E_1(w) = e^{-w} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\alpha_i + w}, \quad |w| \rightarrow \infty,$$

wobei die  $\alpha_i$  die  $i$ -te Nullstelle des LAGUERRE Polynoms  $N$ -ten Grades  $L_N(x)$  und  $\beta_i$  der dazugehörige Gewichtungsfaktor ist.

| Nr. | $\alpha_n$      | $\beta_n$           |
|-----|-----------------|---------------------|
| 1   | 0.1157221173580 | 2.647313710554 E-1  |
| 2   | 0.6117574845151 | 3.777592758731 E-1  |
| 3   | 1.5126102697764 | 2.440820113198 E-1  |
| 4   | 2.8337513377435 | 9.044922221168 E-2  |
| 5   | 4.5992276394183 | 2.010238115463 E-2  |
| 6   | 6.844525453115  | 2.663973541865 E-3  |
| 7   | 9.621316842456  | 2.032315926630 E-3  |
| 8   | 13.00605499330  | 8.365055856819 E-6  |
| 9   | 17.11685518746  | 1.668493876541 E-7  |
| 10  | 22.15109037940  | 1.342391030515 E-9  |
| 11  | 28.48796725098  | 3.061601635035 E-12 |
| 12  | 37.09912104447  | 8.148077467426 E-16 |

Tabelle 7: LAGUERREkoeffizienten

Hier wurde das LAGUERRE-Polynom zwölften Grades mit Hilfe der RODRIGUEZ-Formel (s. [2], S. 785)

$$L_N(x) = \frac{1}{N! e^{-x}} \frac{d^N}{dx^N} [e^{-x} x^N]$$

erzeugt und seine Nullstellen ermittelt. Der Faktor  $\beta_i$  wurde aus  $\alpha_i$  und dem Wert des LAGUERRE-Polynoms  $N + 1$ -ter Ordnung an der Stelle  $\alpha_i$  mit

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{(N + 1)^2 (L_{N+1}(\alpha_i))^2}$$

berechnet.

Die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  sind in Tabelle 6 aufgeführt. Die interne Genauigkeit der verwendeten Koeffizienten beträgt 18 Stellen.

Es wurden Ergebnisse der LAGUERRE-Entwicklung mit Polynomen 12-ten Grades mit denen 20-ten Grades verglichen. Eine Steigerung der Genauigkeit ist nur für einige Gebiete der

komplexen Ebene und dort auch nur um eine Dezimalstelle festzustellen. Die Genauigkeit der verwendeten Entwicklung 12-ten Grades beträgt  $10^{-11}$ .

### B.3 Kettenbruchdarstellung

$$E_1(w) = \frac{e^{-w}}{w + \frac{1}{1 + \frac{1}{w + \frac{2}{1 + \dots}}}}$$

Für Werte von  $w$ , bei denen weder Potenzreihenentwicklung noch LAGUERRE-Integration zur Anwendung kommt, läßt sich  $E_1(w)$  mit Hilfe einer Kettenbruchdarstellung ([2], Nr. 5.1.22, S. 229) berechnen. Wegen numerischer Instabilität eignet sich diese Darstellung jedoch nicht für das Gebiet der negativen reellen Achse.

### B.4 Entwicklung nach Potenzen von $jy$

Für das Gebiet der negativ reellen Achse sind alle bisher genannten Entwicklungen wegen schlechter Konvergenzeigenschaften nur bedingt geeignet. In [8] wurde für genau diesen Bereich eine Potenzreihe in Potenzen von  $jy$  entwickelt, die sich wie folgt berechnen läßt:

$$E_1(w) = -E_i(-x) - j\pi \operatorname{sgn}(y) + e^{-w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(jy)^n}{n!} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r!}{(-x)^{r+1}}, \quad x < 0, |y| < |x|.$$

Diese Reihendarstellung gewährleistet eine hohe Genauigkeit bei einer relativ geringen Anzahl an Reihengliedern.

### B.5 Genauigkeiten der verwendeten Reihendarstellungen

Die relativen Genauigkeiten der verwendeten Reihendarstellungen sind in Tabelle 7 aufgeführt. Hier konvergieren die Potenzreihen so stark, daß bei Verwendung von 70 Reihengliedern der maximal relative Fehler im Bereich der Auflösungsgenauigkeit der verwendeten Zahlentypen lag („long double“,  $\approx 10^{-18}$ ). Für die LAGUERRE-Integration wurde ein Vergleich der Werte unter Verwendung von 12 LAGUERRE-Polynomen mit solchen durchgeführt, bei denen 25 LAGUERRE-Polynome zum Einsatz kamen. Der maximale relative Fehler betrug  $10^{-12}$ .

Anschließend ist eine Funktionslandkarte angefügt:

| Anzahl | Kettenbruch  | Potenzreihe  | Potenzreihe in $ jy $ |
|--------|--------------|--------------|-----------------------|
| 10     | $ 10^{-5} $  | $ 10^{-7} $  | $ 10^{-7} $           |
| 30     | $ 10^{-8} $  | $ 10^{-9} $  | $ 10^{-9} $           |
| 50     | $ 10^{-10} $ | $ 10^{-13} $ | $ 10^{-12} $          |
| 70     | $ 10^{-11} $ | -            | -                     |

Tabelle 8: Maximaler Fehler von  $|E_1|$

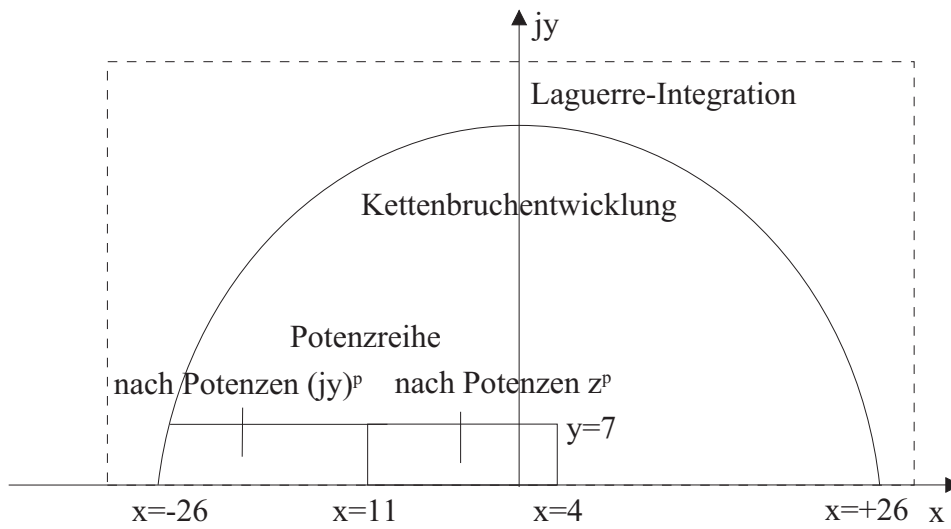


Abbildung 44: Funktionslandkarte für  $E_1(w)$

# C Verwendete NAG-Routinen

Die Umsetzung der mathematisch hergeleiteten Formeln für die untersuchten Leiteranordnungen in Feldbilder geschah in der Programmiersprache C++. Da zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihenansätze z.T. große Fließkomma-Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten gelöst werden mussten, wurde auf die Numerikroutinen der Numerical Analysis Group NAG Fortran Library, Mark 19, zurückgegriffen. Die verwendeten Routinen sind hier kurz erläutert; für eine genauere Beschreibung wird auf [35] verwiesen.

## Routinen zur numerischen Integration

**D01AKF** Adaptives Quadraturverfahren für oszillierende Funktionen einer Unbekannten bei festen Integrationsgrenzen

**D01ALF** Adaptives Quadraturverfahren für Funktionen einer Unbekannten mit  $n$  vorher bekannten Singularitäten bei festen Integrationsgrenzen

## Routinen zur Lösung linearer Gleichungssysteme

**F07ARF** LU-Faktorisierung einer komplexwertigen  $n \times m$ -Matrix

**F07ASF** Lösen eines komplexwertigen linearen Gleichungssystems, das zuvor mit F07ARF faktorisiert wurde





# D Formelsammlung

## D.1 Integralausdrücke

Gültig für  $c, d \in \mathbb{R}$  und  $w, \gamma \in \mathbb{C}$ :

$$\int_c^d \cos(\gamma \xi) e^{\pm w \xi} d\xi = \frac{1}{2} \left\{ \pm [e^{\pm wd} \cos(\gamma d) - e^{\pm wc} \cos(\gamma c)] \left[ \frac{1}{\nu + j\gamma} + \frac{1}{\nu - j\gamma} \right] + \right. \\ \left. + j [e^{\pm wd} \sin(\gamma d) - e^{\pm wc} \sin(\gamma c)] \left[ \frac{1}{\nu + j\gamma} - \frac{1}{\nu - j\gamma} \right] \right\}.$$

Für  $\alpha_{in} = \frac{n\pi}{a_i}$ :

$$\int_0^{a_i} \cos(\alpha_{in} x) e^{\pm j\nu x} dx = \pm \frac{j}{2} [1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right]. \quad (\text{D.1})$$

Für  $\tilde{\alpha}_{in} = \frac{n\pi}{b_i}$ :

$$\int_0^{b_i} \cos(\tilde{\alpha}_{in} x) e^{\pm \nu x} dx = \mp \frac{1}{2} [1 - (-1)^n e^{\pm \nu b_i}] \left[ \frac{1}{\nu + j\tilde{\alpha}_{in}} + \frac{1}{\nu - j\tilde{\alpha}_{in}} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Für  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{in} \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{a_i} \cosh[\alpha_{in}(x - \eta)] e^{\pm j\nu x} dx = \frac{j}{2} \left\{ (\sinh[\alpha_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm j\nu a_i} + \sinh(\alpha_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - j\alpha_{in}} \right] \mp \right. \\ \left. \mp (\cosh[\alpha_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm j\nu a_i} - \cosh(\alpha_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - j\alpha_{in}} \right] \right\}. \quad (\text{D.3})$$

$$\int_0^{a_i} \cosh[\alpha_{in}(x - \eta)] e^{\pm \nu x} dx = \frac{1}{2} \left\{ (\sinh[\alpha_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} + \sinh(\alpha_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \pm \right. \\ \left. \pm (\cosh[\alpha_{in}(a_i - \eta)] e^{\pm \nu a_i} - \cosh(\alpha_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} + \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \right\}. \quad (\text{D.4})$$

$$\int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(x - \eta)] e^{\pm j\nu x} dx = \frac{j}{2} \left\{ (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} + \sinh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} - \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \pm \right. \\ \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm j\nu b_i} - \cosh(\beta_{in}\eta)) \left[ \frac{1}{\nu + j\beta_{in}} + \frac{1}{\nu - j\beta_{in}} \right] \right\}. \quad (\text{D.5})$$

$$\int_0^{b_i} \cosh[\beta_{in}(x - \eta)] e^{\pm \nu x} dx = \frac{1}{2} \left\{ (\sinh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} + \sinh(\beta_{in})) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \pm \right. \\ \left. \pm (\cosh[\beta_{in}(b_i - \eta)] e^{\pm \nu b_i} - \cosh(\beta_{in} \eta)) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right\}. \quad (\text{D.6})$$

## D.2 Partialbruchzerlegungen

Die folgenden Partialbruchzerlegungen gelten für komplexe Koeffizienten  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] = -\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu - a} \right], \quad a \neq 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] \left[ \frac{1}{\nu + b} - \frac{1}{\nu - b} \right] = -\frac{2b}{b^2 - a^2} \left( a \left[ \frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu - a} \right] - b \left[ \frac{1}{\nu + b} - \frac{1}{\nu - b} \right] \right) \quad a \neq b \quad (\text{D.8})$$

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] \left[ \frac{1}{\nu + b} + \frac{1}{\nu - b} \right] = \frac{2}{b^2 - a^2} \left( -a^2 \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] + b^2 \left[ \frac{1}{\nu + b} + \frac{1}{\nu - b} \right] \right), \quad a \neq b \quad (\text{D.9})$$

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right]^2 = -a \left[ \frac{1}{(\nu + a)^2} - \frac{1}{(\nu - a)^2} \right] + 2 \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] \quad (\text{D.10})$$

$$\nu \left[ \frac{1}{\nu + a} + \frac{1}{\nu - a} \right] \left[ \frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu - a} \right] = -a \left[ \frac{1}{(\nu + a)^2} + \frac{1}{(\nu - a)^2} \right] + \left[ \frac{1}{\nu + a} - \frac{1}{\nu - a} \right] \quad (\text{D.11})$$

## D.3 Zusammenfassende Funktionen

Aus [8] werden folgende Definitionen übernommen:

$$H(z, \alpha_p, \gamma) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} - \frac{1}{n - \Phi_p} \right] e^{-jnz} dn$$

$$M(z, \alpha_p, \gamma) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} + \frac{1}{n - \Phi_p} \right] e^{-jnz} dn \quad \text{mit} \quad \Phi_p = \alpha_p e^{j\gamma}$$

$$\tilde{H}_{\pm}(z, \alpha_p, \gamma) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} - \frac{1}{n - \Phi_p} \right] \{e^{-jnz} \pm e^{-jn(-z^*)}\} dn$$

$$\tilde{M}_{\pm}(z, \alpha_p, \gamma) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} + \frac{1}{n - \Phi_p} \right] \{e^{-jnz} \pm e^{-jn(-z^*)}\} dn \quad \text{mit} \quad \Phi_p = \alpha_p e^{j\gamma}$$

## D.4 Besondere Integrale

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(n + \Phi_p)^2} - \frac{1}{(n - \Phi_p)^2} \right] e^{-jnz} dn = +\frac{2}{\Phi_p} - jz \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} - \frac{1}{n - \Phi_p} \right] e^{-jnz} dn =$$

$$= +\frac{2}{\Phi_p} - jz H(z, \alpha_p, \gamma)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(n + \Phi_p)^2} + \frac{1}{(n - \Phi_p)^2} \right] e^{-jnz} dn = -jz \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} + \frac{1}{n - \Phi_p} \right] e^{-jnz} dn = -jz M(z, \alpha_p, \gamma).$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-jnz}}{n} dn = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{C_E + \ln(\varepsilon) + \ln(jz)\} - \pi \leq \varphi_z \leq 0$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} - \frac{1}{n - \Phi_p} \right] dn = 0$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{n + \Phi_p} + \frac{1}{n - \Phi_p} \right] dn = -2 \ln \Phi_p + 2 \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln R)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(n + \Phi_p)^2} + \frac{1}{(n - \Phi_p)^2} \right] dn = 0$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{(n + \Phi_p)^2} - \frac{1}{(n - \Phi_p)^2} \right] dn = +\frac{2}{\Phi_p}$$

## D.5 Elementare Umformungen

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad (\text{D.12})$$

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad (\text{D.13})$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (\text{D.14})$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (\text{D.15})$$

$$\sin(jy) = j \sinh y \quad \sinh y = -j \sin(jy) \quad (\text{D.16})$$

$$\cos(jy) = \cosh y \quad \cosh(y) = \cos(jy) \quad (\text{D.17})$$

$$\sinh(jy) = j \sin y \quad \cosh(jy) = \cos y \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{1}{a \pm b} + \frac{1}{a \mp b} = \frac{1}{b+a} - \frac{1}{b-a} \quad \frac{1}{a \pm b} - \frac{1}{a \mp b} = \pm \left[ \frac{1}{b+a} + \frac{1}{b-a} \right]$$

$$\frac{1}{a \pm jb} + \frac{1}{a \mp jb} = j \left[ \frac{1}{b+ja} - \frac{1}{b-ja} \right] \quad \frac{1}{a \pm jb} - \frac{1}{a \mp jb} = \mp j \left[ \frac{1}{b+ja} + \frac{1}{b-ja} \right]$$

# E Orthogonalfunktionen

Die in dieser Arbeit auftauchenden Orthogonalfunktionen lassen sich durch eine einfache Substitution auf die im folgenden aufgeführten Grundfunktionen zurückführen. Zum Nachweis der Orthogonalität wurden die unten aufgeführten Integrale mit Hilfe der [3] entnommenen Integralbeziehungen Nr. 275, 315 und 354 berechnet.

Betrachtet werden die Fälle  $n, p \in \mathbb{N}_0$ .

Für alle  $n, p \in \mathbb{N}_0$  erhält man für:

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\xi) \cos(p\xi) d\xi = 0. \quad (\text{E.1})$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\xi) \cos(p\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & n \neq p \\ \pi & n = p \neq 0 \\ 2\pi & n = p = 0 \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

$$= \pi \delta_{np} (1 + \delta_{0p}) = \pi \delta_{np} (1 + \delta_{0n}).$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(p\xi) \sin(n\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & n \neq p \text{ und } p = n = 0 \\ \pi & n = p \neq 0 \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

$$= \pi \delta_{np}.$$

Für harmonischen Funktionen in komplexer EULER'scher Darstellung gilt:

$$\int_0^{2\pi} e^{-jn\xi} e^{jp\xi} d\xi = \begin{cases} 0 & n \neq p \\ 2\pi & n = p \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

$$= 2\pi \delta_{np}.$$

Das Symbol  $\delta_{np}$  bezeichnet das KRONECKER-Symbol.



## F Alternativer Ansatz

In Kapitel 4 werden zwei gleichwertige Ansätze für ein Vektorpotential im Innenraum eines leitfähigen rechteckförmigen Gebietes entwickelt, von denen der auf der Lösung eines NEUMANN'schen Randwertproblems basierende Ansatz weiterverwendet wird.

Der andere Ansatz geht von einem DIRICHLET-Problem aus; neben weiteren Nachteilen führt er auf analytisch nicht auswertbare Ausdrücke. Dieser Nachweis wird in diesem Anhang geführt.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist der in Gleichung (4.7) formulierte Reihenansatz für das Vektorpotential und die Randintegralgleichung für Rechteckleiter aus Gleichung (5.5).

In die Integraldarstellung:

$$\begin{aligned}
 A^{(a)} = & \sum_{i=1}^N \int_0^{a_i} \left( \left[ -W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} + \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} W_i^{(i)} \right]_{y_0=y_{qi}} + \right. \\
 & \left. + \left[ W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_0} G_{20} - \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial y_0} W_i^{(i)} \right]_{y_0=y_{qi}+b_i} \right) dx_{0i} + \\
 & + \int_0^{b_i} \left( \left[ -W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} + \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} W_i^{(i)} \right]_{x_0=x_{qi}} + \right. \\
 & \left. + \left[ W_i^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_0} G_{20} - \frac{\mu_a}{\mu_i} G_{20} \frac{\partial}{\partial x_0} W_i^{(i)} \right]_{x_0=x_{qi}+a_i} \right) dy_{0i} + A_e,
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

wird die Reihendarstellung für  $W^{(i)}$  eingesetzt; anschließend werden die zu den einzelnen Koeffizientensätzen gehörenden Ausdrücke gesammelt und zusammengefasst. Für Kern und Normalableitungen des Kerns werden die FOURIERtransformierten (Gleichungen (3.2), (3.4), (3.3) und (3.5) auf Seite 28) verwendet.

Im folgenden wird nur der Beitrag betrachtet, der zum Koeffizientensatz  $v_{i1n}$  gehört.

Einsetzen von  $W^{(i)}$  aus dem DIRICHLET-Ansatz führt auf:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^{a_i} (-\sin(\alpha_{in}x_{0i})) (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) dx_{0i} + \right. \\
& + \int_0^{a_i} \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{1}{\nu} (\coth(\beta_{in}b_i) - \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in}b_i)}) (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-x_{0i})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-x_{0i})}) \\
& \quad \cdot \beta_{in} \sin(\alpha_{in}x_{0i}) dx_{0i} + \\
& \quad - \int_0^{b_i} \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\alpha_{in}}{\sinh(\beta_{in}b_i)} \frac{1}{\nu} \sinh[\beta_{in}(b_i - y_{0i})] e^{\pm \nu y_{0i}} \cdot \\
& \quad \cdot ((e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)}) - (-1)^n (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)})) dy_{0i} \left. \right] d\nu.
\end{aligned}$$

Nach geeignetem Ausklammern sowie der Anwendung der Substitution  $y'_{0i} = b_i - y_{0i}$  im Integral  $\int_0^{b_i} \dots dy_{0i}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \left[ - (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} \int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_i) e^{\mp j\nu x_{0i}} dx_{0i} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} \int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_i) e^{\pm j\nu x_{0i}} dx_{0i}) + \right. \\
& + \left( \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in}b_i)} \frac{1}{\nu} (\cosh(\beta_{in}b_i) - e^{\pm \nu b_i}) \right) \cdot \\
& \quad \cdot (e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} \int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_i) e^{\mp j\nu x_{0i}} dx_{0i} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)} \int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_i) e^{\pm j\nu x_{0i}} dx_{0i}) + \\
& - \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\alpha_{in}}{\sinh(\beta_{in}b_i)} \frac{1}{\nu} ((e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*)}) - (-1)^n (e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-a_i)} + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*-a_i)})) \cdot \\
& \quad \cdot \int_0^{b_i} \sinh(\beta_{in}y_{0i}) e^{\mp \nu y_{0i}} dy_{0i} \left. \right] d\nu.
\end{aligned}$$

Die enthaltenen Integrale sind analytisch lösbar und liefern

$$\int_0^{a_i} \sin(\alpha_{in}x_i) e^{\pm j\nu x_{0i}} dx_{0i} = \frac{1}{2} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \quad (\text{F.2})$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^{b_i} \sinh(\beta_{in}y_{0i}) e^{\pm \nu y_{0i}} dy_{0i} &= \frac{j}{2} \left( (e^{\pm j\nu a_i} \cosh(\beta_{in}b_i) - 1) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \mp \right. \\
& \quad \left. \mp e^{\pm j\nu a_i} \sinh(\beta_{in}b_i) \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right).
\end{aligned}$$



Als Zwischenergebnis erhält man:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left[ \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\mp \nu b_i} - 1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{\pm j\nu(w^*-w_{qi}^*+jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\mp \nu b_i} - 1) \right) \cdot \right. \\
& \quad \left. \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \frac{1}{\nu} \left( \beta_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] - \alpha_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \right] + \\
& - \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) + \right. \\
& \quad \left. + e^{\mp j\nu(w^*-w_{qi}^*+jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \right) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] + \\
& \mp \left( e^{\pm j\nu(w-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) + e^{\pm j\nu(w^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \right) \cdot \\
& \quad \cdot \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \sinh(\beta_{in} a_i) \alpha_{in} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \Big] d\nu.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Matrixkoeffizienten wird die Orthogonalitätsrelation für Sinusfunktionen ausgenutzt. Dazu wird der obige Ausdruck mit  $\sin(\alpha_{km} x_k)$  multipliziert. Anschließend wird  $x_k = 0$  festgelegt und über das Intervall  $[0, a_k]$  integriert:  $\int_0^{a_k} \dots dx_k|_{x_k=0}$ . Nach Ausklammern erhält man:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \left[ \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\mp \nu b_i} - 1) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^*-w_{qi}^*+jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\mp \nu b_i} - 1) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \right) \cdot \right. \\
& \quad \left. \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \frac{1}{\nu} \left( \beta_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] - \alpha_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \right] + \\
& + \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k + \right. \\
& \quad \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^*-w_{qi}^*+jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \right) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] + \\
& + \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\pm j\nu x_k} dx_k + \right. \\
& \quad \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^*-w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) \int_0^{a_k} \sin(\alpha_{km} x_k) e^{\mp j\nu x_k} dx_k \right) \\
& \quad \cdot \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \sinh(\beta_{in} a_i) \alpha_{in} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \Big].
\end{aligned}$$

Hier treten wiederum Integrale des Typs aus Gleichung (F.2) auf; nach Einsetzen der Ergeb-

nisse der Grundintegrale und Umstellen führt dies auf:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{16\pi} \int_0^\infty \left( \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_k}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\mp \nu b_i} - 1) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* + jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_k}) (\cosh(\beta_{in} b_i) e^{\pm \nu b_i} - 1) \right) \right. \\
& \quad \left. \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \frac{1}{\nu} \left( \beta_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \alpha_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi}-jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_k}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^* + jb_i)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_k}) \right) \right. \\
& \quad \left. \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left( e^{\pm j\nu(w_{qk}-w_{qi})} (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_k}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{\pm j\nu(w_{qk}^* - w_{qi}^*)} (1 - (-1)^n e^{\pm j\nu a_i}) (1 - (-1)^n e^{\mp j\nu a_k}) \right) \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{\mu_a}{\mu_i} \frac{\beta_{in}}{\sinh(\beta_{in} b_i)} \sinh(\beta_{in} a_i) \alpha_{in} \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} + \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] \right) d\nu.
\end{aligned}$$

Die Teilintegrale in den Zeilen 5-7 und 8-10 der letzten Gleichung lassen sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegungen

$$\left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] \left[ \frac{1}{\nu+b} - \frac{1}{\nu-b} \right] = \frac{2b}{b^2-a^2} \left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] - \frac{2a}{b^2-a^2} \left[ \frac{1}{\nu+b} - \frac{1}{\nu-b} \right]$$

und

$$\frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu+a} + \frac{1}{\nu-a} \right] \left[ \frac{1}{\nu+b} - \frac{1}{\nu-b} \right] = \frac{2}{b^2-a^2} \left[ \frac{1}{\nu-b} - \frac{1}{\nu+b} - \frac{b}{a} \left( \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right) \right]$$

auf eine Summe aus Grundintegralen des Typs

$$H(w, \alpha) = \int_0^\infty \left\{ e^{-j\nu w} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha} - \frac{1}{\nu - \alpha} \right] \right\} d\nu, \quad w, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

darstellen, für die aus Anhang A eine Lösung bekannt ist, die wegen

$$\int_0^\infty \left[ \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a} \right] dn = 0$$

auch für  $w = 0$  und damit für alle  $w \in \mathbb{C}$  gilt. In den Zeilen 1 – 3 muß die folgende Partialbruchzerlegung angewendet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] \left[ \frac{1}{\nu+b} - \frac{1}{\nu-b} \right] &= \frac{2b}{a(b^2-a^2)} \left[ \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] - \\
&\quad - \frac{2a}{b(b^2-a^2)} \left[ \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu+b} - \frac{1}{\nu-b} \right].
\end{aligned}$$

Diese führt für  $w \neq 0$  wiederum auf bekannte Ausdrücke; lediglich der Fall  $w = 0$  bedarf einer gesonderten Untersuchung.

Die Verwendung von

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu+a} - \frac{1}{\nu-a} \right] d\nu = 2 \ln(a) - 2 \lim_{R \rightarrow 0} \ln(R)$$

führt für das interessierende Integral auf Ausdrücke, die sich nur für den Fall  $\alpha_{in} = \beta_{in}$  analytisch darstellen lassen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left( \beta_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{in}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{in}} \right] - \alpha_{in} \left[ \frac{1}{\nu + \beta_{in}} - \frac{1}{\nu - \beta_{in}} \right] \right) \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1}{\nu + \alpha_{km}} - \frac{1}{\nu - \alpha_{km}} \right] d\nu = \\ & = 2 \left( \frac{\beta_{in} \alpha_{in}}{\alpha_{km} (\alpha_{km}^2 - \alpha_{in}^2)} \ln(\alpha_{in}) - \frac{\beta_{in} \alpha_{km}}{\alpha_{in} (\alpha_{km}^2 - \alpha_{in}^2)} \ln(\alpha_{km}) \right). \end{aligned}$$

Dieser Spezialfall tritt dann ein, wenn entweder die Frequenz, die Leitfähigkeit oder die Permeabilität zu Null wird und ist daher technisch nicht von Interesse.



# Literaturverzeichnis

- [1] *Numerical Quadrature for the Approximation of Singular Oscillating Integrals Appearing in Boundary Integral Equations.* 2005
- [2] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I.A.: *Handbook of Mathematical Function.* New York : Dover Publications, 1970
- [3] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik.* 24. Frankfurt am Main : Harry Deutsch, 1989
- [4] CLEMENS, M.: Large systems of equations in a discrete electromagnetism: formulations and numerical algorithms. In: *IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology* 152 (2005), März, Nr. 2, S. 50–72
- [5] CLEMENS, M. ; DROBNY, S. ; WEILAND, T.: Numerical analysis of a magnetic recording write head benchmark problem using the finite integration technique. In: *IEEE Transactions of Magnetics* 38 (2002), März, Nr. 2, S. 601–604
- [6] CLEMENS, M. ; WEILAND, T.: Transient Eddy Current Calculation with the FI-Method. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 35 (1999), May, Nr. 3, S. 1163–1166
- [7] DROBNY, S. ; WEILAND, T.: Numerical calculation of nonlinear transient field problems with the Newton-Raphson method. In: *IEEE Transactions of Magnetics* 36 (2000), Juli, Nr. 4, S. 809–812
- [8] EHRICH, M.: *Transiente und Quasistationäre Stromverdrängung ebener Leiteranordnungen.* TU Berlin, 1979
- [9] EHRICH, M.: *Skriptum zur Vorlesung „Theoretische Elektrotechnik“.* Universität der Bundeswehr Hamburg, 1996
- [10] EHRICH, M.: *Bemerkungen zur Lösung von Randintegralgleichungen III.* 1997. – Unveröffentlichtes Papier
- [11] EHRICH, M.: *Die Integralgleichungen des ebenen Stromverdrängungsproblems.* 1997. – Unveröffentlichtes Papier
- [12] EHRICH, M. ; FICHTE, L.O. ; LÜER, M.: Contributions to Boundary Integrals by the Normal Derivative Of the Kernel. In: *Asia-Pacific Microwave Conference* (1999), S. 385–388

- [13] EHRICH, M. ; KUHLMANN, J. ; NETZLER, D.: High accuracy integration of boundary integral equations describing axisymmetric field problems. In: *Microwave Conference Proceedings* (1997)
- [14] EULER, H. ; WEILAND, T.: Zur Berechnung der Wirbelströme in beliebig geformten, lamellierten, dreidimensionalen Eisenkörpern. In: *Archiv für Elektrotechnik* 60 (1979), S. 103–109. – Teil II: Anwendungen
- [15] FETZER, Joachim: *Die Lösung statischer und stationärer elektromagnetischer Feldgrößen mit Hilfe der Kopplung der Methoden der finiten Elemente mit der Randelementmethode*, Universität Stuttgart, Diss., Juli 1995
- [16] FICHTE, L.O. ; KURZ, S. ; EHRICH, M: An Analytical Solution to the Eddy Current Problem of a Conducting Bar. In: *2004 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Conference Proceedings* 4 (2004)
- [17] FICHTE, L.O. ; LANGE, S. ; STEINMETZ, T. ; CLEMENS, M.: Shielding Properties of a Conducting Bar calculated with a Boundary Integral Equation Method. In: *Advances in Radio Sciences* (2004)
- [18] FOSTER, O.: *Analysis 3. 2*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1983
- [19] GONG, L. ; HAGEL, R. ; ZHANG, K. ; UNBEHAUEN, R.: Solution of the 3-D Helmholtz Equation with Eddy Currents in Cylindrical Coordinates by Longitudinal Components. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 28 (1992), März, Nr. 2, S. 1154–1157
- [20] GRADSTEYN, I.S. ; RYZHIK, I.: *Table Of Integrals and Series*. New York : Academic Press, 1965
- [21] HANSON, G.W. ; YAKOVLEV, A.B.: *Operator Theory for Electromagnetics*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer, 2002
- [22] HARRINGTON, R.F.: Matrix methods for fields. In: *Proceeding of the IEEE* 55 (1967), Februar, S. 136–149
- [23] HARRINGTON, R.F.: *Field Computation by Moment Method*. New York : Macmillan, 1968
- [24] ISERLES, A.: On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I: Fourier transforms. In: *IMA Journal for Numerical Analysis* (2004), Nr. 24, S. 365–391
- [25] JUILLARD, J. ; DE BARMON, B. ; BERTHIAU, G.: Simple analytical three-dimensional eddy-current model. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 36 (2000), Januar, Nr. 1, S. 258–266
- [26] KOST, A.: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*. Berlin : Springer, 1994

- [27] KRIEZIS, E.E. ; TSIBOUKIS, T.D. ; PANAS, S.M. ; TEGOPOULOS, J.A.: Eddy currents: theory and applications. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 80 (1992), Oktober, Nr. 10, S. 1559 – 1589
- [28] KURZ, S.: *Skriptum zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Theoretischen Elektrotechnik“*. Hamburg : Universität der Bundeswehr Hamburg, 2004
- [29] LEBEDEV, N.N.: *Special Functions and Their Applications*. New York : Dover Publications, 1972
- [30] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*. Berlin : Springer, 1990
- [31] LUDWIG, R. ; DAI, X.-W.: Numerical and Analytical Modelling of Pulsed Eddy Currents in a Conducting Half-Space. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 26 (1990), Januar, Nr. 1, S. 299–307
- [32] NAMJOSHI, K.V. ; LAVERS, J.D. ; BIRINGER, P.P.: Current flow in long conductors with a step conductivity change. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 44 (1998), Juli, Nr. 4, S. 1243–1245
- [33] NETZLER, D.: *Transiente Stromverdrängung in einem System kreiszylindrischer Massivleiter bei Einschalten einer Wechselstromquelle*. Hamburg, Universität der Bundeswehr Hamburg, Diss., 1996
- [34] NUMERICAL ANALYSIS GROUP. *NAG Fortran Library, Mark 19*. [www.nag.com](http://www.nag.com)
- [35] NUMERICAL ANALYSIS GROUP: *Fortran Library Manual, Mark 12*. Oxford : NAG, 1987
- [36] PRUDNIKOV, A.P. ; BRYKOV, J.A. ; MARICEV, O.I.: *Integrals and Series I - Elementary functions*. New York : Gordon and Breach Science Publications, 1986
- [37] PRUDNIKOV, A.P. ; BRYKOV, J.A. ; MARICEV, O.I.: *Integrals and Series II - Special functions*. New York : Gordon and Breach Science Publications, 1986
- [38] RUCKER, W.M. ; RICHTER, K.R.: Calculation Of Two-Dimensional Eddy Current Problems with the Boundary Element Method. In: *IEEE Transactions of Magnetism* 19 (1983), November, Nr. 6
- [39] SCHWARTZ, L.: *Mathematics for the Physical Sciences*. Paris : Hermann, 1966
- [40] SCHWARZ, H.R.: *Numerische Mathematik*. Stuttgart : Teubner, 1986
- [41] SCHWENKHAGEN, H.: Untersuchungen über Stromverdrängung in rechteckigen Leitern. In: *Archiv für Elektrotechnik* XVII (1927), Nr. 6
- [42] SHEN, J.: *Computation of Linear and Nonlinear Eddy Currents with the Boundary Element Method*, Technische Universität Berlin, Diss., Juni 1994

- [43] STRATTON, J.A.: *Electromagnetic Theory*. New York etc. : McGraw Hill, 1941
- [44] TEGOPOULOS, J.A. ; KRIEZIS, E.E.: *Eddy Currents in Linear Conducting Media*. Amsterdam etc. : Elsevier, 1985
- [45] THEODOULIDIS, T.P. ; KANTARTZIS, N.V. ; TSIBOUKIS, T.D. ; KRIEZIS, E.E.: Analytical and numerical solution of the eddy-current problem in spherical coordinates based on the second-order vector potential formulation. In: *IEEE Transactions of Magnetics* 33 (1997), Juli, Nr. 4, S. 2461–2472
- [46] TONTI, E.: A direct discrete formulation of field laws: The cell method. In: *Computer Modelling in Engineering & Sciences* 2 (2001), Nr. 2, S. 237–258
- [47] VOM STEIN, H.D.: *Skriptum zur Vorlesung „Allgemeine Nachrichtentechnik“*. Hamburg : Universität der Bundeswehr Hamburg, 1990
- [48] WEILAND, T.: A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields. In: *Electronics and Communications AEÜ* 31 (1977), Nr. 3, S. 116–120
- [49] WEILAND, T.: Zur Berechnung der Wirbelströme in beliebig geformten, lamellierten, dreidimensionalen Eisenkörpern. In: *Archiv für Elektrotechnik* 60 (1978), S. 345–351. – Teil I: Die Methode
- [50] WEILAND, T.: On the Numerical Solution of Maxwellian Equations and Applications in the Field of Accelerator Physics. In: *Particle Accelerators* 15 (1984), S. 245–292