

6. Anhang zu den relativistischen Ergebnissen

6.1 Zu den Gleichungen

6.1.1 Zu den Zwangsbedingungen

Die Propagation der Zwangsbedingung an R steht in

Lemma 6.1.1 *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $\Sigma \in G$, wobei Σ mit $t_0 \in C^1$ wie in (2.29) definiert sei. Seien Funktionen $(R, M) \in C^2(G)$ und $(\varrho, U) \in C^1(G)$ so gegeben, daß (2.25) gelten. Ist die erste Gleichung aus (2.26)*

$$\partial_r R = e^{\lambda/2} \Gamma$$

auf dem Graphen von t_0 erfüllt, so gilt sie auf ganz

$$G^\perp := \{(t, r) \in G; [t_0(r), t] \times \{r\} \subset G\}. \quad (6.1)$$

Beweis Aus $e^{\lambda/2} = \frac{A'_\Sigma(x)}{4\pi n R^2}$, $\frac{\dot{n}' \circ \varrho}{n} = \frac{1}{p+\varrho}$ folgt

$$\partial_t \left(e^{\lambda/2} \right) = \partial_t \left(\frac{A'_\Sigma(x)}{4\pi \hat{n}(\varrho) R^2} \right) = - \left(\frac{1}{p+\varrho} \dot{\varrho} + \frac{2 \dot{R}}{R} \right) e^{\lambda/2}. \quad (6.2)$$

Andererseits ergibt sich aus der M -Evo, der U -Evo von (2.25), $\Gamma^2 = M - U^2$ und (2.6) eine Darstellung von $\dot{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} 2\Gamma\dot{\Gamma} &= \dot{M} + 2U\dot{U} = -2e^\phi U\nu + 2U \left(e^\phi \nu - \frac{\beta}{\gamma} \varrho' \right) \\ &= -2\Gamma U \frac{s^2}{p+\varrho} e^{\phi-\lambda/2} \varrho' = 2\Gamma e^{\phi-\lambda/2} U \partial_r \phi. \end{aligned}$$

Zusammen mit der R -Evo, $\partial_t R' = \partial_r \dot{R} = \partial_r (e^\phi U)$ und der ϱ -Evo ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_t (e^{\lambda/2} \Gamma - R') e^{-\lambda/2} &= \\ &= - \left(\frac{\dot{\varrho}}{p+\varrho} + \frac{2\dot{R}}{R} \right) \Gamma + \dot{\Gamma} - e^{\phi-\lambda/2} U \partial_r \phi - e^{\phi-\lambda/2} \partial_r U \\ &= - \frac{\Gamma}{p+\varrho} \left(\partial_t \varrho + \frac{\beta}{\gamma} \partial_r U + \frac{2e^\phi U}{R} (p + \varrho) \right) = 0. \end{aligned}$$

Da auf der Anfangsfläche $\partial_r R = e^{\lambda/2} \Gamma$ gilt, folgt die Behauptung auf G^\perp jetzt daraus, daß für jedes $(t, r) \in G^\perp$

$$\int_{t_0(r)}^t \partial_t (e^{\lambda/2} \Gamma - R') (\tau, r) d\tau$$

verschwindet. □

Um die Wohldefiniertheit des Skalarfeldes m aus (2.26) geht es in

Lemma 6.1.2 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 6.1.1 auf Seite 181 erfüllt. Dann gilt*

$$\partial_t v_r = \partial_r v_t,$$

wobei $v_t = -4\pi p R^2 \dot{R}$ und $v_r = 4\pi \varrho R^2 R'$ in (2.28) definiert wurden.

Beweis Aus der Zwangsbedingung $R' = e^{\lambda/2} \Gamma$, der U -Evo und der R -Evo folgen

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} (\partial_t v_r - \partial_r v_t) &= \\ &= \partial_t (\varrho R^2 R') + \partial_r (p R^2 \dot{R}) \\ &= (\partial_t \varrho R' + \partial_r p \dot{R}) R^2 + 2R(\varrho + p) R' \dot{R} + (\varrho + p) R^2 \dot{R}' \\ &= (\partial_t \varrho e^{\lambda/2} \Gamma + \partial_r p e^{\phi} U) R^2 + 2R(p + \varrho) e^{\lambda/2} \Gamma e^{\phi} U \\ &\quad + (p + \varrho) R^2 (e^{\phi} U \partial_r \phi + e^{\phi} \partial_r U) \\ &= e^{\lambda/2} \Gamma R^2 [\partial_t \varrho + e^{\phi - \lambda/2} \frac{p + \varrho}{\Gamma} \partial_r U + (p + \varrho) e^{\phi} \frac{2U}{R}] \\ &\quad + e^{\phi} U R^2 [\partial_r p + (p + \varrho) \partial_r \phi], \end{aligned}$$

wobei wegen $\phi = \hat{\phi} \circ \varrho$ mit $\hat{\phi}$ aus (2.6) die letzte Klammer und aufgrund der ϱ -Evo die andere Klammer verschwinden. \square

Nachdem geklärt wurde, daß das Skalarfeld m wohldefiniert ist, kann nun die Propagation der zweiten Zwangsbedingung aus (2.26) gezeigt werden in

Lemma 6.1.3 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 6.1.1 möge auf Σ auch die Bedingung*

$$\Gamma^2 - U^2 - 1 + \frac{2m}{R} \equiv 0 \tag{6.3}$$

erfüllt sein. Dann gilt (6.3) in ganz G^\perp .

Beweis Aus der M -Evo, $\partial_t m = v_t$, der Definition von ν und der R -Evo folgen

$$\begin{aligned}\partial_t \left(M - 1 + \frac{2m}{R} \right) &= \partial_t M + \frac{2\partial_t m}{R} - \frac{2m\partial_t R}{R^2} \\ &= -2e^\phi U\nu - 8\pi p R \dot{R} - \frac{2m}{R} \frac{\dot{R}}{R} \\ &= -\frac{\dot{R}}{R} \left[(M - 1) + \frac{2m}{R} \right].\end{aligned}$$

Sei nun $(t, r) \in G^\perp$. Für $Z := M - 1 + \frac{2m}{R}$ verschwindet dann die eindeutige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\partial_t Z(\cdot, r) = -\left(\frac{\dot{R}}{R} Z\right)(\cdot, r)$ mit Anfangswert $Z(t_0(r), r) = 0$ identisch auf $[t_0(r), t]$. \square

6.1.2 Zu den Feldgleichungen

Um aus den Einsteinschen Feldgleichungen (2.4) das quasilineare System (2.25) zu erhalten, wurde Lemma 2.3.3 auf Seite 27 formuliert.

Beweis von Lemma 2.3.3 Unter den genannten Voraussetzungen sind die Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit aus (2.4) gültig. Insbesondere gelten also die reduzierten Einstein- und Materiegleichungen (2.17) bis (2.21). Unter Verwendung der Skalar-Definitionen (2.5) zeigen wir nun die Gültigkeit der quasilinearen Evolutionsgleichungen (2.25) und der Zwangsbedingungen (2.26). Zunächst ist aber die Aussage (2.24) zu begründen. Wie im Beweis von Lemma 2.2.1 auf Seite 24 folgt $\phi = \hat{\phi} \circ \varrho$ durch direkte Integration der Materiegleichung (2.18) in Verbindung mit der Koordinatenfestlegung auf dem Sternrand $[r = r_b]$. Wegen der anderen Koordinatenfestlegung gilt (2.24) jedenfalls dann, wenn $\partial_t (4\pi n R^2 e^{\lambda/2})$ verschwindet. Dies ergibt sich aber aus der Produktregel, $n = \hat{n} \circ \varrho$ mit \hat{n} aus (2.7) und der anderen Materiegleichung (2.17).

Weil bezüglich ds^2 aus (2.23) der Vektor $e^{-\phi}\partial_t$ bzw. $e^{-\lambda/2}\partial_r$ die Länge 1 hat, gilt für U bzw. Γ aus (2.5) tatsächlich $\dot{R} = e^{\phi}U$ bzw. $R' = e^{\lambda/2}\Gamma$.

Zum Beweis der ϱ -Evo ermittelt man $\dot{\lambda}$ aus (2.20) zu

$$\frac{\dot{\lambda}}{2} = \frac{1}{R'} \left[\left(e^{\phi}U \right)' - \dot{R}\phi' \right] = \frac{U'}{\Gamma} e^{\phi-\lambda/2},$$

was in (2.17) eingesetzt $\dot{\varrho} + \beta\gamma U' = -e^{\phi}(p + \varrho)\frac{2U}{R}$ liefert.

Die U -Evo ergibt sich, in dem man

$$\ddot{R} = \left(e^{\phi}U \right)' = \dot{\phi}\dot{R} + e^{\phi}\dot{U}$$

und $e^{-\lambda/2}R'\hat{\phi}' = -\frac{\Gamma s^2}{p+\varrho} = -\frac{s}{\gamma}$ in (2.21) einsetzt und dabei

$$-\frac{2e^{-\phi}}{R} \left[\dot{U} + \frac{U^2}{2R}e^{\phi} + \frac{\beta}{\gamma}\varrho' \right] + \frac{\Gamma^2 - 1}{R^2} = 8\pi p,$$

erhält, nach Multiplikation mit $-e^{\phi}\frac{R}{2}$ ergibt sich tatsächlich $\dot{U} + (\beta/\gamma)\varrho' = e^{\phi}\nu$ mit ν aus (2.27) und $M = \Gamma^2 - U^2$.

Um die M -Evo zu erhalten, wird nun aus $\Gamma = e^{-\lambda/2}R'$ und (2.20)

$$\dot{\Gamma} = -\frac{\dot{\lambda}}{2}R'e^{-\lambda/2} + \dot{R}'e^{-\lambda/2} = \dot{R}\phi'e^{-\lambda/2} = -\frac{U}{\Gamma}\frac{\beta}{\gamma}\varrho',$$

ermittelt, wobei zuletzt $\phi' = \frac{-\varrho'}{p+\varrho}$, $\dot{R} = e^{-\phi}U$ und (2.27) benutzt wurden. Es folgt $\partial_t M = 2\Gamma\dot{\Gamma} - 2U\dot{U} = -2Ue^{\phi}\nu$. Zu zeigen bleibt die zweite Zwangsbedingung (2.26). Es wird eine Hilfsgröße $\tilde{m} := -\frac{M-1}{2}R$ eingeführt, die definitionsgemäß die Bedingung mit \tilde{m} anstelle von m erfüllt. Wegen $m(\cdot, 0) = 0 = \tilde{m}(\cdot, 0)$ genügt es nun, $\partial_t \tilde{m} = v_t$ und $\partial_r \tilde{m} = v_r$ zu beweisen. Mit der M -Evo läßt sich $\partial_t \tilde{m} = -4\pi p R^2 \dot{R}$ sofort errechnen. Für die

andere Behauptung wird zunächst aus der ϱ -Evo, (2.17) und zuletzt $\Gamma = R'e^{-\lambda/2}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} UU' &= \frac{p+\varrho}{\beta\gamma}U \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} + 2\frac{\dot{R}}{R} \right) - \frac{e^\phi(p+\varrho)}{\beta\gamma} \frac{2U^2}{R} \\ &= e^{\lambda/2}\Gamma e^{-\phi}U \frac{\dot{\lambda}}{2} = R'e^{-2\phi} \dot{R} \frac{\dot{\lambda}}{2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

hergeleitet. Dann folgt

$$\begin{aligned} \partial_r \tilde{m} &= -\frac{1}{2} (R'^2 e^{-\lambda} - U^2 - 1)' R - \frac{M-1}{2} R' \\ &= -e^{-\lambda} \left(R' R'' - \frac{\lambda'}{2} R'^2 \right) R + R' e^{-2\phi} \dot{R} \frac{\dot{\lambda}}{2} \\ &\quad - \frac{R'^2 e^{-\lambda} - 1}{2} R' + \frac{1}{2} e^{-2\phi} \dot{R}^2 R' \\ &= \frac{R^2 R'}{2} [\text{linke Seite von (2.19)}] \\ &= 4\pi \varrho R^2 R', \end{aligned}$$

was zu zeigen war. \square

Im Lemma 2.3.4 auf Seite 30 wird gezeigt, welche Bedingungen an Anfangswertvorgaben $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$ zu stellen sind, damit eine diese auf der Anfangsfläche Σ annehmende Lösung (R, M, ϱ, U) der Zeitentwicklungsgleichungen (2.25) auf Σ die Zwangsbedingungen (2.26) erfüllt.

Beweis von Lemma 2.3.4 Seien die Voraussetzungen des ersten Teils von Lemma 2.3.4 erfüllt. Dann gelten $\partial_t R(t_0(r), r) = e^{\hat{\phi}(\varrho_\Sigma(r))} U_\Sigma(r)$ und $\partial_r R(t_0(r), r) = \frac{d}{dr} R_\Sigma(r) - t'_0(r) \partial_t R(t_0(r), r)$, was wegen (2.31) gerade $(e^{\lambda_\Sigma/2} \Gamma_\Sigma)$ ist. Ein Vergleich der Definitionen von λ (bzw. Γ) und λ_Σ (bzw. Γ_Σ) zeigt, daß man auf Σ den Index Σ weglassen darf. Seien nun auch die Voraussetzungen des zweiten Teils des Lemmas erfüllt. Es bleibt $m_\Sigma(r) = m(t_0(r), r)$ zu zeigen. Wegen $m_\Sigma(0) = m(t_0(0), 0) = 0$ genügt es, die Gleichheit der intrinsischen Ableitung zu beweisen. Es gilt

$$\frac{d}{dr} m_\Sigma(r) = t'_0(r) v_t(t_0(r), r) + v_r(t_0(r), r). \quad (6.5)$$

Nach Voraussetzung gelten auf Σ einerseits $\partial_t R = e^{\phi} U$ und nach dem ersten Teil des Lemmas andererseits $\partial_t R = e^{\lambda/2} \Gamma$. Setzt man dies in v_t und v_r aus (2.28) ein, folgt auch diese Behauptung. \square

In der Folgerung 2.3.5 auf Seite 31 steht, daß zulässige Anfangsdaten im Sinne von Definition (2.4.6) auf Seite 54 dafür sorgen, daß auf der Anfangsdatenfläche die Zwangsbedingungen (2.26) erfüllt sind.

Beweis von Folgerung 2.3.5 Mit der Anfangsfläche $\Sigma := H$, die durch $t_0 = B_H$ parametrisiert wird, ist Lemma 2.3.4 anwendbar, wenn man die Zwangsbedingungen (2.31) und (2.32) als Folge von (2.48) aus Definition 2.4.6

$$M_\Sigma = R'_\Sigma (R'_\Sigma - 2U_\Sigma), \quad M_\Sigma = 1 - 2m_\Sigma/R_\Sigma;$$

nachweisen kann. Seien also jetzt diese Bedingungen erfüllt und sei (R, M, ϱ, U) eine die Anfangswerte $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$ annehmende Lösung von (2.25). Setzt man in der ersten Bedingung $M_\Sigma = \Gamma_\Sigma^2 - U_\Sigma^2$ ein, so folgt mit der binomischen Formel $\Gamma_\Sigma = \pm (R'_\Sigma - U_\Sigma)$, wobei das Minuszeichen für zulässige Anfangsdaten ausgeschlossen werden kann. Weil λ nach Konstruktion von A_H auf H verschwindet und $t'_0 e^{\hat{\phi} \circ \varrho_\Sigma} = 1$ gilt, folgt daraus die erste zu zeigende Bedingung (2.31). Für die andere Bedingung (2.32) ist zu zeigen, daß m_H aus der Definition und m_Σ aus Lemma 2.3.4 dasselbe definieren. Dies ist ebenfalls leicht zu sehen, wobei man auch (2.31) in der Form $R'_\Sigma = \Gamma_\Sigma - U_\Sigma$ verwenden kann. \square

Im Lemma 2.3.6 auf Seite 32 wird aus einer Lösung des quasilinearen Systems (2.25) die Gültigkeit der reduzierten Einsteinschen Materie-Feldgleichungen gewonnen.

Beweis von Lemma 2.3.6 Die Propagation der Zwangsbedingungen (2.26) wurde in den Lemmata 6.1.1 bis 6.1.3 gezeigt.

Nach dem Lemma 2.3.2 genügt es, (2.17) bis (2.21) nachzuweisen. (2.18) ergibt sich sofort aus (2.6). Daraus folgt auch (2.17) mit $\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda/2} = \partial_t(e^{\lambda/2})$ und (6.2).

In der ϱ -Evo ersetzt man die Ableitungen $\partial_t\varrho$ bzw. ∂_rU vermöge (2.17) bzw. $\dot{R}' = (e^{\phi}U)' = \phi'R + e^{\phi}U'$. Dies führt zu

$$-(p+\varrho) \left(\frac{\dot{\lambda}}{R} + 2\frac{\dot{R}}{2} \right) + e^{-\lambda/2} \frac{p+\varrho}{\Gamma} \left(\dot{R}' - \phi'\dot{R} \right) = -e^{\phi}(p+\varrho) \frac{2U}{R},$$

was wegen (2.26) das Ausklammern von $-\frac{(p+\varrho)}{2\Gamma}e^{-\lambda/2} = -\frac{(p+\varrho)}{2R'}$ ermöglicht. Dann erhält man

$$R'\dot{\lambda} + 4\frac{\dot{R}}{R}R' - 2\dot{R}' + 2\dot{R}\phi' = 4\frac{e^{\phi}U}{R}R',$$

durch erneute Anwendung der R -Evo folgt also (2.20).

Um (2.19) aus der Raumableitung der zweiten Zwangsbedingung (2.26) zu gewinnen, wird wie im Beweis zu Lemma 2.3.3 zunächst die Beziehung (6.4) hergeleitet. Man erhält für $M := \Gamma^2 - U^2 = e^{-\lambda}R'^2 - U^2$ aus der wegen (2.26) gültigen Gleichung $\partial_r(M - 1 + \frac{2m}{R}) = 0$ dann

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-\lambda} (2R''R' - \lambda'R'^2) - 2UU' + \frac{2m'}{R} - \frac{2m}{R} \frac{R'}{R} \\ &= e^{-\lambda} (2R''R' - \lambda'R'^2) - R'e^{-2\phi}\dot{R}\dot{\lambda} \\ &\quad + 8\pi\varrho RR' + (M-1)\frac{R'}{R} \\ &= RR' \left[e^{-\lambda} \left(\frac{2R''}{R} - \lambda' \frac{R'}{R} \right) - e^{-2\phi} \frac{\dot{R}}{R} \dot{\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 8\pi\varrho + \frac{e^{-\lambda}R'^2 - 1}{R^2} - e^{-2\phi} \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist auch (2.19) gezeigt.

Nach Definition von M , (2.26) und der R -Evo verschwindet $M - (R'e^{-\lambda/2})^2 + (e^{-\phi}\dot{R})^2$ identisch. In der Zeitableitung setzt

man die M -Evo und (2.20) ein und erhält

$$\begin{aligned}
 0 &= -2e^\phi U_\nu - 2R'e^{-\lambda} \left(\dot{R}' - \frac{\dot{\lambda}}{2} R' \right) + 2\dot{R}e^{-2\phi} \left(-\dot{\phi}\dot{R} + \ddot{R} \right) \\
 &= -2e^\phi U \left(\frac{R'^2 e^{-\lambda} - e^{-2\phi} \dot{R}^2 - 1}{2R} - 4\pi p R \right) - 2R'e^{-\lambda} \dot{R}\phi' \\
 &\quad + 2\dot{R}e^{-2\phi} \left(-\dot{\phi}\dot{R} + \ddot{R} \right) \\
 &= -\dot{R}R \left[e^{-\lambda} \left(\frac{R'^2 - e^\lambda}{R^2} + 2\frac{R'}{R}\phi' \right) - 8\pi p \right. \\
 &\quad \left. + e^{-2\phi} \left(-\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\phi} - 2\frac{\ddot{R}}{R} \right) \right],
 \end{aligned}$$

so daß nun auch (2.21) nachgewiesen ist. □

6.2 Zur Regularität im Zentrum

Jedenfalls für die dort behandelten sehr speziellen Nenner sind die folgenden Lemmata eine Verallgemeinerung der entsprechenden l' Hospitalschen Regel, die sich dort für $n = 0$ ergibt. Unter den Voraussetzungen der l' Hospitalschen Regel wird nämlich nicht nur die Existenz des Grenzwertes in der hebbaren Singularität garantiert, sondern darüber hinaus die Existenz des Grenzwertes aller Ableitungen, sofern der Zähler hinreichend glatt ist.

Lemma 6.2.1 *Sei $h \in C^m(\mathbb{R})$ mit $h(0) = 0$. Dann existiert der folgende Grenzwert und es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{h(r)}{r} \right]^{(n)} = \frac{1}{n+1} h^{(n+1)}(0).$$

Beweis Durch vollständige Induktion zeigt man die Gültigkeit von

$$r^{n+1}(r^{-1})^{(k)} = (-1)^k k! r^{n-k}.$$

Dies setzt man in die Formel für die n -te Ableitung eines Produktes ein und erhält

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow 0} [r^{-1}h(r)]^{(n)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k! r^{n-k} h^{(n-k)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)r^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (n-k) r^{n-k-1} h^{(n-k)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)r^n} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} [-1+1] r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} = \frac{1}{n+1} \lim_{r \rightarrow 0} h^{(n+1)}(r),
 \end{aligned}$$

wobei beim zweiten „=“-Zeichen wegen $h(0) = 0$ die Regel von l'Hospital angewandt werden konnte. \square

Lemma 6.2.2 *Es sei $h \in C^m(\mathbb{R})$ mit $h(0) = h'(0) = 0$ und $m \geq 1$. Dann existiert der folgende Grenzwert und es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{h(r)}{r^2} \right]^{(n)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} h^{(n+2)}(0).$$

Beweis Durch vollständige Induktion zeigt man die Gültigkeit von

$$r^{n+2}(r^{-2})^{(k)} = (-1)^k (k+1)! r^{n-k}.$$

Dies setzt man in die Formel für die n -te Ableitung eines Produktes ein und erhält

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow 0} [r^{-2}h(r)]^{(n)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n+2}} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (k+1)! r^{n-k} h^{(n-k)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+2)r^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(k+1)}{(n-k)!} (n-k) r^{n-k-1} h^{(n-k)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!(k+1)}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+2)r^{n+1}} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n![-k+(k+1)]}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+2)(n+1)r^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k-1)!} r^{n-k-1} h^{(n-k+1)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+2)}(r) + r^n h^{(n+2)}(r) \right\} \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \lim_{r \rightarrow 0} h^{(n+2)}(r),
 \end{aligned}$$

wobei beim zweiten (bzw. beim vierten) „=“-Zeichen wegen $h(0) = 0$ (bzw. $h'(0) = 0$) die Regel von l'Hospital angewandt werden konnte. \square

Lemma 6.2.3 Sei $h \in C^m(\mathbb{R})$ mit $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ und $m \geq 2$. Dann existiert der folgende Grenzwert und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{h(r)}{r^3} \right]^{(n)} = \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} h^{(n+3)}(0).$$

Beweis Durch vollständige Induktion zeigt man die Gültigkeit von

$$r^{n+3} (r^{-2})^{(k)} = (-1)^k \frac{(k+2)!}{2} r^{n-k}.$$

Dies setzt man in die Formel für die n -te Ableitung eines Produktes ein und erhält

$$\begin{aligned}
 & \lim_{r \rightarrow 0} [r^{-3} h(r)]^{(n)} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n+3}} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(k+2)!}{2} r^{n-k} h^{(n-k)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+3)r^{n+2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(k+2)(k+1)}{2(n-k-1)!} r^{n-k-1} h^{(n-k)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!(k+2)(k+1)}{2(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+3)r^{n+2}} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!(k+1)[-k+(k+2)]}{2(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+1)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + r^n h^{(n+1)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(n+3)(n+2)r^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n!(k+1)}{(n-k-1)!} r^{n-k-1} h^{(n-k+1)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!(k+1)}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+2)}(r) + r^n h^{(n+2)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{n!}{(n+3)(n+2)r^{n+1}} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{[-k+(k+1)]}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+2)}(r) \right\} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{n!}{(n+3)(n+2)(n+1)r^n} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-k-1)!} r^{n-k-1} h^{(n-k+2)}(r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!} r^{n-k} h^{(n-k+3)}(r) + \frac{1}{n!} r^n h^{(n+3)}(r) \right\} \\
 &= \frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} \lim_{r \rightarrow 0} h^{(n+3)}(r),
 \end{aligned}$$

wobei beim zweiten (bzw. vierten bzw. sechsten) „=“-Zeichen wegen $h(0) = 0$ (bzw. $h'(0) = 0$ bzw. $h''(0) = 0$) die Regel von l'Hospital angewandt werden konnte. \square

6.3 Zu den Anfangsdaten

Beweis zu Bemerkung 2.4.8, (v) Nach Voraussetzung gilt $(D_t + D_r)R = U + \Gamma$ in der ganzen Raumzeit V . Die rechte Seite ist wegen $\lambda = 0$ auf H außerdem gleich R'_H , also positiv auf $H \setminus B$, wobei B den Sternrand bezeichne. Das ist die erste Aussage von (v). Um die Verallgemeinerung zu zeigen, wird zunächst bemerkt, daß H ein Ereignishorizont ist, von dessen chronologischer Zukunft aus \mathcal{J}^+ also nicht erreicht werden kann. Ein den Voraussetzungen genügender Lichtkegel L ist deshalb genau dann lichtartig in \mathcal{J}^+ fortsetzbar, wenn das Ereignis $B \cap L$ nicht später als $B \cap H$ stattfindet, d.h. L muß in der kausalen Vergangenheit von H liegen. Bevor die Äquivalenz dieser Aussage zu

$$(D_t + D_r)R > 0 \quad \text{auf} \quad L \setminus B \quad (6.6)$$

gezeigt wird, ist das Vorzeichen von $(D_t + D_r)R = \Gamma + U$ auf B zu untersuchen. Dieses wechselt in $H \cap B$, weil gemäß Zwangsbedingung dort $|\Gamma|^2 - |U|^2 = 1 - 2m/R = 0$ und

$$\partial_t \left(1 - \frac{2m}{R} \right) = -\frac{2\partial_t m}{R} + \partial_t R \frac{2m}{R^2} = 0 + e^\phi \frac{U}{R} < 0$$

gelten. Folglich ist $\left[|\Gamma|^2 - |U|^2 \right]_{|B} = [1 - 2m/R]_{|B}$ eine in $H \cap B$ verschwindende, streng monoton fallende Funktion. Auf $B \cap V_0 \cap [J^-(H) \setminus H]$ ist somit $|\Gamma| > |U|$, was dort (6.6) nach sich zieht, weil $\Gamma > 0 > U$ auf V_H gilt, während umgekehrt $(D_t + D_r)R < 0$ auf $B \cap V_0 \cap [J^+(H) \setminus H]$ gilt. Gezeigt ist jetzt, daß auf einem in der kausalen Vergangenheit von H liegenden Zukunftslichtkegel L tatsächlich (6.6) gilt. Zu zeigen bleibt, daß eine Verletzung von (6.6) dazu führt, daß L in der Zukunft von H liegt. Sei nun (6.6) in $P \in L$ verletzt. Nach Penrose Argument aus [Hern66, Seite 455] gilt dann $(D_t + D_r)R < 0$ in der lichtartigen Zukunft von P , also insbesondere in $L \cap B$.

Dies kann aber nur in der chronologischen Zukunft $[J^+(H) \setminus H]$ des Ereignishorizonts H der Fall sein, was zu zeigen war. \square

Lemma 6.3.1 *Mögen $\varrho_H \in C^2([0, r_b])$ und $R_H \in C^4([0, r_b])$ die (ϱ_H, R_H) -Bedingungen erfüllen. Dann ist U_H aus (2.55) zweimal stetig differenzierbar auf $]0, r_b[$.*

Beweis Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Als erstes wird gezeigt, daß χ zweimal stetig differenzierbar ist, weil der Integrand in (2.58) stetig differenzierbar ist. Kürzt man dessen Zähler $Q := q_H + 4\pi(\hat{p} \circ \varrho_H) R_H$ ab, so gelten:

$$Q(r_b) = 0 \quad \text{nach (2.64) und (2.59) mit (2.3);}$$

$$Q'(r_b) = 4\pi(2\varrho_b \mathcal{U}(\varrho_H, R_H)(r_b) + p'(\varrho_b)) \quad \text{nach (2.65);}$$

$$Q''(r_b) \quad \text{existiert, weil } R \in C^4 \text{ ist.}$$

Dann ist nach der Regel von l'Hospital

$$\chi'(r_b) = \lim_{r \nearrow r_b} \left(\frac{Q(r)}{R'_H(r)} \right) = \frac{Q'(r_b)}{R''_H(r_b)} \in \mathbb{R},$$

weil $R''_H(r_b) = 4\pi\varrho_b R_H(r_b) > 0$. Für die Ableitung gilt wieder wegen $Q(r_b) = R'_H(r_b) = 0$ und $R''_H(r_b) \neq 0$

$$\begin{aligned} \chi''(r_b) &= \lim_{r \nearrow r_b} \left(\frac{Q' R'_H - Q R''_H}{2R'_H R''_H} \right) (r) \\ &= \lim_{r \nearrow r_b} \left(\frac{Q'' R'_H + Q' R''_H - Q' R''_H - Q R'''_H}{2R''_H R''_H + 2R'_H R'''_H} \right) (r) = 0. \end{aligned}$$

Für U_H ist damit die Stetigkeit auf $]0, r_b[$ klar, während sie in $r = 0$ aus (2.65) folgt und $U_H(0) = 0$ liefert. Aus

$$U'_H = - \left(\chi' + \frac{R'_H}{R_H} \right) U_H + \frac{(R'_H)^2 - 1}{2R_H} + q_H$$

folgt weiter die Stetigkeit auf $]0, r_b[$. Wegen $\chi \in C^2([0, r_b])$ ist auch die zweite Ableitung von U_H stetig differenzierbar auf $]0, r_b[$. \square

Beweis von Lemma 2.4.9 Seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Definitionsgemäß gilt die erste Gleichung aus (2.48). Die andere ist dann gleichwertig zu

$$R'_H R_H U_H = m_H + R_H \frac{(R'_H)^2 - 1}{2},$$

wobei $m'_H = 4\pi (\varrho_H R'_H - (\hat{p}(\varrho_H) + \varrho_H) U_H) R_H^2$ nach (2.28) mit $t_0 = [B_H$ aus (2.8)], $\partial_t R = e^{\hat{\phi} \circ \varrho_H} U_H$ und (2.16) gilt. Differenziert man dies und teilt anschließend durch R'_H , so erhält man eine *lineare*, gewöhnliche Differentialgleichung für die Unbekannte $W := [R_H U_H]$. Zum Anfangswert $W(0) = 0$ hat diese Anfangswertaufgabe eine eindeutige Lösung, die sich explizit als Integral schreiben läßt. Entsprechend wurde der Operator \mathcal{U} in (2.56) gerade so definiert, daß $W = [R_H \mathcal{U}(\varrho_H, R_H)]$ dieses Anfangswertproblem löst. Also sind (2.48) und (2.55) zumindest auf $]0, r_b[$ gleichwertig. Mit der Regel von l'Hospital und (2.65) folgt $U_H(0) = 0$. Daß (2.48) auch in $r = r_b$ gilt, ergibt sich aus Lemma 6.3.1, wobei die Notwendigkeit von (2.64) sichtbar wird.

Die Äquivalenz von (2.49) und (2.59) folgt aus (2.3). Die Bedingungen (2.50f) und (2.60f) sind identisch. Zu zeigen bleibt also nur noch, daß sich die Eckbedingung durch (2.63) erreichen läßt. In der rechten Seite der ϱ -Evo aus (2.38) setzt man die Anfangsdaten und die auf H gültigen Beziehungen $\beta = s/B'_H$, $B'_H = e^{-\hat{\phi} \circ \varrho_H}$, $\Gamma_H = \sqrt{M_H + U_H^2} = R'_H - U_H$ sowie die in $H \cap B$ gültigen Beziehungen $p = 0$, $\varrho_H = \varrho_b$, $R'_H = 0 = M_H$, $\nu = \frac{-1}{2R_H}$ ein und erhält

$$\partial_{t^*} \varrho_b = -\frac{U_H s^2}{\varrho_b} \varrho'_H + U'_H + \frac{2U_H}{R_H} (-U_H) + \frac{1}{2R_H}. \quad (6.7)$$

Um die Ableitung von U_H zu eliminieren, kann die Regel von l'Hospital wegen (2.64) angewandt werden:

$$\begin{aligned}
 U'_H(r_b) &= \\
 &= - \lim_{r \nearrow r_b} \left(\frac{R''_H + 4\pi((\hat{p} \circ \varrho_H) + \varrho_H)R_H}{R'_H} U_H \right) (r) - \frac{1}{2R_H(r_b)} \\
 &= \left(- \frac{R'''_H + 4\pi(s^2 + 1)\varrho'_H R_H}{R''_H} U_H \right) (r_b) - \frac{1}{2R_H(r_b)} \\
 &= \left(\frac{R'''_H}{4\pi\varrho_b R_H} U_H + \frac{s^2 + 1}{\varrho_b} U_H \varrho'_H \right) (r_b) - \frac{1}{2R_H(r_b)},
 \end{aligned}$$

wobei zuletzt (2.64) in der Form $R''_H = -4\pi\varrho_b R_H$ benutzt wurde. Setzt man dieses $U'_H(r_b)$ in (6.7) ein, so vereinfacht sich dies zu

$$\partial_{t^*} \varrho_H(r_b) = \left(\frac{U_H}{4\pi\varrho_b R_H} [q'_H - 8\pi\varrho_b U_H] \right) (r_b).$$

Also gilt die Eckbedingung genau dann, wenn (2.63) gilt. \square

6.3.1 Zum Beweis von Satz 2.4.10

Allgemeine Hilfssätze

Lemma 6.3.2 Seien $k, l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Bezeichne \hat{C}^k die Menge der C^k -Funktionen $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f\|_{C^k} < \infty$. Man setze $m := \min\{k, l\}$. Seien weiter $\delta, b > 0$. Dann sind stetig

- a) $\hat{C}^k \times \hat{C}^l \rightarrow \hat{C}^m$, $(f, g) \mapsto f \diamond g$ für $\diamond \in \{+, -, \cdot\}$
bezüglich der C^p -Topologie für $p \leq m$,
- b) $\{f \in \hat{C}^k; \text{Bild } f \geq \delta\} \rightarrow \hat{C}^k$, $f \mapsto f^{-1}$
bezüglich der C^0 -Topologie,
- c) $\exp : C^k(K) \rightarrow C^k$, $f \mapsto e^f$
bezüglich der C^0 -Topologie, sofern K kompakt ist,

d) $f : \hat{C}^k \rightarrow \hat{C}^{k+1}$, $f \mapsto [[0, b] \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \int_0^r f(\hat{r}) d\hat{r}]$
 bezüglich der C^p -Topologie für $p \leq m$,

e) $(\cdot)^\prime : \hat{C}^k \rightarrow \hat{C}^{k-1}$, $f \mapsto f^\prime$.

Beweis von Lemma 6.3.2 Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (bzw. $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) eine Folge von C^k -Funktionen (bzw. C^l -Funktionen), die in der C^p -Norm gegen f_∞ (bzw. gegen g_∞) konvergieren.

Zu a) Für jedes $p \leq m$ ist

$$\begin{aligned} & \| (f_n g_n)^{(p)} - (f_\infty g_\infty)^{(p)} \|_{C^0} \\ &= \sup \left\{ x \in X; \left| \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \left(f_n^{(q)} g_n^{(p-q)} - f_\infty^{(q)} g_\infty^{(p-q)} \right) (x) \right| \right\} \\ &\leq \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \left| \left(f_n^{(q)} \left[g_n^{(p-q)} - g_\infty^{(p-q)} \right] + \left[f_n^{(q)} - f_\infty^{(q)} \right] g_\infty^{(p-q)} \right) (x) \right| \\ &\leq \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \{ \|f_n\|_{C^q} \|g_n - g_\infty\|_{C^{p-q}} + \|g_\infty\|_{C^{p-q}} \|f_n - f_\infty\|_{C^q} \}, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung gegen Null konvergiert.

Zu b) Für alle x gilt

$$\left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f_\infty(x)} \right| = \left| \frac{f_\infty(x) - f_n(x)}{f_n(x) f_\infty(x)} \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \|f_n - f_\infty\|_{C^0} \rightarrow 0,$$

also konvergiert auch $\|f_n^{-1} - f_\infty^{-1}\|_{C^0}$ gegen Null für $n \rightarrow \infty$.

Zu c) Weil $x \mapsto e^x$ in x_0 Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante e^{x_0} gilt

$$\|e^{f_n} - e^{f_\infty}\| \leq \sup \left\{ \left| e^{f(x)} \right|; x \in K \right\} \|f_n - f_\infty\|_{C^0},$$

worin die rechte Seite gegen 0 geht, da das Supremum endlich ist.

Zu d) Die Konvergenz in der C^0 -Norm folgt, weil für $r \in [0, b]$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^r f_n(\hat{r}) \, d\hat{r} - \int_0^r f_\infty(\hat{r}) \, d\hat{r} \right| &\leq \int_0^r |f_n(\hat{r}) - f_\infty(\hat{r})| \, d\hat{r} \\ &\leq \|f_n - f_\infty\| b \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

gilt. Für jedes $p \leq m$ und jedes $r \in [0, b]$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_0^r f_n(\hat{r}) \, d\hat{r} \right)^{(p+1)} - \left(\int_0^r f_\infty(\hat{r}) \, d\hat{r} \right)^{(p+1)} \right| \\ = \left| f_n^{(p)}(r) - f_\infty^{(p)}(r) \right| \leq \|f_n - f_\infty\|_{C^p} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

Zu e) Wegen $\|f_n - f_\infty\|_{C^k} = \|f'_n - f'_\infty\|_{C^{k-1}}$ ist nichts zu zeigen. \square

Lemmata für Satz 2.4.10

In diesem Abschnitt werden Lemmata zum Beweis von Satz 2.4.10 bereit gestellt. Dabei wird der Index H aus Abschnitt 2.4.4 unterdrückt, da hier nur Funktionen einer Veränderlichen auftreten.

Lemma 6.3.3 *Der Operator*

$$\mathcal{R} : Q_0 \rightarrow C^\infty([0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}), q \mapsto [\text{Lösung von (2.70)}]$$

ist injektiv und stetig, wenn man den Definitions- (bzw. den Werte-)Bereich mit der C^0 - (bzw. C^1 -)Topologie versieht.

Beweis Mögen q_1 und q_2 aus dem Definitionsbereich von \mathcal{R} stammen und dasselbe Bild $R := \mathcal{R}(q_i)$ liefern. Dann gilt $R'' + 4\pi \cdot \varrho \cdot R = q_i$ für beide $i \in 1, 2$. Also folgt $q_1 = q_2$, d. h. \mathcal{R} ist injektiv.

Zum Beweis der Stetigkeit seien ϕ_1 und ϕ_2 linear unabhängige C^∞ -Lösungen von $y'' + 4\pi \cdot \varrho \cdot y = 0$. Mit der Abkürzung

$w := \phi_1 \cdot \phi_2' - \phi_1' \cdot \phi_2 \neq 0^1$ gilt dann für jedes $r \in [0, \infty[$ und jedes $q \in C^\infty([0, \infty[)$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q)(r) &= \phi_2(r) \cdot \int_0^r \left(\frac{\phi_1 \cdot q}{w} \right) (\hat{r}) d\hat{r} - \phi_1(r) \cdot \int_0^r \left(\frac{\phi_2 \cdot q}{w} \right) (\hat{r}) d\hat{r} \\ &\quad + \frac{\phi_1(0) \cdot \phi_2(r) - \phi_1(r) \cdot \phi_2(0)}{w(0)}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

woraus man mit Lemma 6.3.2 die Stetigkeit von

$$\mathcal{R} : (Q_0, \|\cdot\|_{C^0}) \longrightarrow (C^\infty([0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$$

erkennt. Dabei ist das Lemma für die Integranden anwendbar, weil q außerhalb eines Kompaktums identisch verschwindet und $\varrho \equiv \varrho_b$ auf $[r_b, \infty[$ konstant ist, so daß ϕ_1 und ϕ_2 dort beschränkt sind. Zu zeigen bleibt $|w| \geq \delta > 0$. Dies folgt aus der Stetigkeit von w , die $\inf |w| = \min |w| > 0$ auf $[0, r_b]$ garantiert, und der Tatsache, daß auf $[r_b, \infty[$ die Wronski-Determinante w wegen $\varrho \equiv \varrho_b$ konstant ist. \square

Lemma 6.3.4 *Zu $q \in Q_1$ aus (2.75) setze man $R := \mathcal{R}(q)$ und $\xi := \min \{r \in [0, \infty[; R'(r) = 0\}^2$. Dann gelten*

1. $R' > 0$ auf $[0, \xi[$ und somit $R > 0$ auf $]0, \xi[$;
2. $R'' < 0$ auf $]0, \xi + \delta[$ für ein $\delta > 0$.

Beweis Die 1. Behauptung folgt aus $R'(0) = 1 > 0$ und der Definition von ξ als kleinste Nullstelle von R' .

Zur 2. Behauptung bemerkt man, daß $R'' = q - 4\pi \cdot \varrho \cdot R$ nach Definition von Q_1 und 1. zumindest auf $[0, \min \{r_b - \varepsilon_b, \xi\}]$ negativ ist. Weil R auf $[\varepsilon, \xi[$ echt wächst, gilt $R > R(\varepsilon)$ auf

¹Es ist nämlich w die WRONSKI-Determinante der linear unabhängigen Fundamental-Lösungen

² $\min \emptyset = +\infty$

$[\min \{r_b - \varepsilon_b, \xi\}, \xi + \delta[$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Dort gilt daher wegen $|q| < \delta_q \leq 4\pi \cdot \varrho \cdot R(\varepsilon) \leq 4\pi \cdot \varrho \cdot R$ die Behauptung. \square

Lemma 6.3.5 *Die Funktion*

$$\zeta : [\mathcal{R}(Q_1)]' \rightarrow]0, \infty[, \quad S \mapsto \min \{r \in [0, \infty[; S(r) = 0\},$$

wobei $S \in [\mathcal{R}(Q_1)]'$ genau dann gelten soll, wenn ein $\hat{q} \in Q_1$ mit $S = [\mathcal{R}(\hat{q})]'$ existiert, ist wohldefiniert und auf $\zeta^{-1}(]0, \infty[)$ stetig, wenn man $[\mathcal{R}(Q_1)]'$ mit der C^0 ($[0, \infty[$)-Topologie versteht.

Beweis Die Wohldefiniertheit folgt aus $[\mathcal{R}(\hat{q})]'(0) = 1 > 0$ für jedes $\hat{q} \in Q$, d.h. $\zeta([\mathcal{R}(Q)]') \subseteq]0, \infty[\cup \{\min \emptyset\}$. Sei nun $R'_0 \in [\mathcal{R}(Q_1)]'$ so, daß $\xi := \zeta(R'_0)$ endlich ist. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ ist R'_0 streng monoton fallend auf $[0, \xi + \delta]$, da nach Lemma 6.3.4 dort $R''_0 < 0$ ist. Für jedes S aus

$$M_0 := \left\{ S \in (\mathcal{R}(Q))'; \quad |S - R'_0| < \frac{1}{2} \cdot \min |R'_0(\xi \pm \delta)| \right\}$$

gilt $S(\xi - \delta) > R'_0(\xi - \delta)/2 > 0 > R'_0(\xi + \delta)/2 > S(\xi + \delta)$, also gelten $\xi - \delta < \zeta(S) < \xi + \delta$ und $\zeta(M_0) \in]\xi - \delta, \xi + \delta[$. Da diese Menge eine bezüglich der C^0 -Topologie offene Kugel um R'_0 ist, ist R'_0 ein innerer Punkt von $\zeta^{-1}(]\xi - \delta, \xi + \delta[)$, was die Stetigkeit beweist. \square

Lemma 6.3.6 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11 erfüllt. Die Menge Q_1 aus (2.75) ist dann so beschaffen, daß $q_h \in Q_1$ gilt und außerdem für jedes $\sigma < 0$ und jedes $\tau > 0$ auch $q_{(\sigma, \tau)} \in Q_1$ ist.*

Beweis Außerhalb von $]\varepsilon, r_b - \varepsilon_b[$ (bzw. von $]r_b - \varepsilon_b, r_b + \varepsilon_b[$) ist κ_τ (bzw. η_σ) unabhängig von τ (bzw. σ) konstant gleich

1 (bzw. 0). Dort ist also jedes $q_{(\sigma,\tau)} = q_h$ und erfüllt nach Voraussetzung $q_h = q_0$ auf $[0, \varepsilon]$ und $q_h \equiv 0$ auf $]r_b + \varepsilon_b, \infty[$. Mit $\kappa_\tau > 0$ für jedes $\tau > 0$ folgt daraus und der Definition von q_h auch $q_{(\sigma,\tau)} < 0$ auf $[0, r_b - \varepsilon_b[$ für jedes $\sigma < 0$. Zu zeigen bleibt $|q_{(\sigma,\tau)}| \leq \hat{\delta}$ auf $[r_b - \varepsilon_b, r_b + \varepsilon_b]$. Dort gilt aber $q_{(\sigma,\tau)} = 1 \cdot (0 - \eta_\sigma) = -\eta_\sigma$, wobei $|\eta_\sigma| \leq \hat{\delta}$ ist. \square

Lemma 6.3.7 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11 auf Seite 61 erfüllt. Dann ist die Abbildung $\sigma \mapsto \eta_\sigma$ stetig, sofern man den Wertebereich mit der C^0 -Topologie versieht.*

Beweis Ist $\varepsilon_b \cdot |\sigma_0| < \hat{\delta}$ und konvergiert $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen σ_0 , dann sind fast alle $\varepsilon_b \cdot |\sigma_n| < \hat{\delta}$, so daß $\eta_{\sigma_n} = \eta_{\sigma_0}$ gar nicht von n abhängt. In diesem Fall ist die Stetigkeit also trivial.

Sei daher $|\sigma_0| = -\sigma_0 \geq \frac{\hat{\delta}}{\varepsilon_b}$ und konvergiere $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen σ_0 , wobei $|\sigma_n| \in \left[\frac{\hat{\delta}}{\varepsilon_b}, 2|\sigma_0| \right]$ sei. Für $f_n : r \mapsto (r - r_b)\sigma_n / \hat{\delta}$ ist $\eta_{\sigma_n} = \hat{\delta} \cdot \tilde{\eta} \circ f_n$. Weil $\tilde{\eta}$ außerhalb von $[-1, 1]$ verschwindet, verschwinden dann alle η_{σ_n} außerhalb von $[r_b - \varepsilon_b, r_b + \varepsilon_b]$ identisch. Es genügt daher die gleichmäßige Konvergenz der f_n gegen f_0 auf einem Kompaktum zu zeigen. Dort ist aber die C^k -Norm für jedes k endlich, so daß die Konvergenz aus Lemma 6.3.2 folgt. \square

Lemma 6.3.8 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11 auf Seite 61 erfüllt. Dann sind die Abbildungen*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow Q_1, \quad (\sigma, \tau) \mapsto q_{(\sigma,\tau)}$$

und

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow C^\infty, \quad (\sigma, \tau) \mapsto [\mathcal{R}(q_{(\sigma,\tau)})]'$$

stetig, wenn man den Wertebereich mit der C^0 -Topologie versieht.

Beweis Zunächst ist die erste Abbildung wohldefiniert, weil das $q_{(\sigma,\tau)} = \kappa_\tau(q_h - \eta_\sigma)$ aus (2.73) nach Lemma 6.3.6 tatsächlich in Q_1 liegt.

Nach Lemma 6.3.2 sind $\tau \mapsto \tau\kappa$ und $\tau \mapsto \kappa_\tau$ stetig, da κ außerhalb eines Kompaktums konstant ist. Weil nach Lemma 6.3.7 auch $\sigma \mapsto \eta_\sigma$ stetig ist und ebenfalls η_σ außerhalb eines Kompaktums konstant ist, folgt die Stetigkeit von $(\sigma, \tau) \mapsto q_{(\sigma,\tau)}$ wieder mit Lemma 6.3.2. Als Hintereinanderausführung dieser stetigen Abbildung mit dem nach Lemma 6.3.3 stetigen Operator \mathcal{R} und dem nach Lemma 6.3.2 stetigen Ableitungsoperator ist auch die zweite Funktion stetig mit der C^0 -Topologie im Wertebereich. \square

Lemma 6.3.9 *Die Funktion*

$$\mathcal{S} : \{f \in C^1([0, r_b]); f(r_b) = 0\} \rightarrow C^0, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{x - r_b}$$

ist wohldefiniert und stetig.

Beweis In $x = r_b$ kann wegen $f(r_b) = 0$ die Regel von l'Hospital angewandt werden, um zu erkennen, daß die Funktion $\mathcal{S}(f) : [0, r_b] \mapsto \mathbb{R}$ in r_b stetig, also \mathcal{S} wohldefiniert ist. Zum Beweis der Stetigkeit von \mathcal{S} seien f und g aus dem Definitionsbereich von \mathcal{S} gegeben. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung findet man zu jedem $x \in [0, r_b]$ ein $\xi_x \in [0, r_b]$ mit

$$\left| \frac{(f - g)(x)}{x - r_b} \right| = \left| \frac{(f - g)(r_b) + (f - g)'(\xi_x) \cdot (x - r_b)}{x - r_b} \right|.$$

Weil die rechte Seite gleich $|(f - g)'(\xi_x)|$ ist, folgt tatsächlich $\|\mathcal{S}(f) - \mathcal{S}(g)\|_{C^0} \leq \|f - g\|_{C^1}$. \square

Lemma 6.3.10 *Seien die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11 auf Seite 61 erfüllt. Mit den im zugehörigen Beweis getroffenen Abkürzungen ist dann $U_b : E \rightarrow \mathbb{R}$ aus (2.76) stetig und beschränkt.*

Beweis Zunächst wird die Stetigkeit bewiesen. Zur Abkürzung soll unter C^0 -Stetigkeit eines Operators verstanden werden, daß Definitions- und/oder Wertebereich mit der C^0 -Topologie versehen seien, um die Stetigkeit zu prüfen.

In diesem Sinn C^0 -stetig ist $(\sigma, \tau) \mapsto q_{(\sigma, \tau)}$ nach Lemma 6.3.8. Ferner ist $q \mapsto \mathcal{R}(q)$ stetig, wenn man Definitions- (bzw. Werte-)bereich mit der C^0 - (bzw. C^1 -)Topologie versehen. Daher genügt es, die C^0 -Stetigkeit von

$$Q_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q \mapsto \mathcal{U}(\varrho, \mathcal{R}(q))(r_b)$$

zu zeigen, wobei $Q_2 := \{q \in Q_1; [\mathcal{R}(q)]'(r_b) = 0\}$ sei. Zunächst ist

$$\mathcal{E} : Q_2 \rightarrow C^\infty([0, r_b]), \quad q \mapsto \left[\frac{(R'_q)^2 - 1}{2} + q R_q \right]_{|[0, r_b]}$$

C^0 -stetig nach Lemma 6.3.2, da sich alles auf dem Kompaktum $[0, r_b]$ abspielt. Mit der Abkürzung $R_q := [\mathcal{R}(q)]_{|[0, r_b]}$ wird nun die C^0 -Stetigkeit von³

$$\mathcal{C} : Q_2 \rightarrow C^\infty([0, r_b]), \quad q \mapsto \frac{\mathcal{S}(q_{|[0, r_b]}) + 4\pi\mathcal{S}(\hat{p} \circ \varrho_{|[0, r_b]}) R_q}{\mathcal{S}(R'_q)}$$

gezeigt werden, wobei \mathcal{S} aus Lemma 6.3.9 benutzt wird. Nach diesem Lemma und nach Lemma 6.3.2 genügt dazu zu zeigen, daß der Betrag des Nenners durch eine positive Konstante nach unten begrenzt ist. Für jedes $r \in [0, r_b]$ findet man nach

³Man beachte $\mathcal{C}(q) = \chi'$ für χ aus (2.58) mit $(q_H, R_H) = (q, R_q)$

dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in [0, r_b]$ mit

$$\mathcal{S}(R'_q)(r) = \frac{R'_q(r)}{r - r_b} = R''_q(\xi) = (q - 4\pi \varrho R_q)(\xi) .$$

Die rechte Seite ist nach Lemma 6.3.4 negativ. Auf $[0, \varepsilon]$ ist $\inf |R''_q| = \min |R''_q| > 0$ unabhängig von $q \in Q_2$, ebenso auf $[\varepsilon, r_b]$, wo $|q - 4\pi \varrho R_q| = -q + 4\pi \varrho R_q \geq -\hat{\delta} + 4\pi \varrho_b R(\varepsilon)$ nach Wahl von $\hat{\delta} \leq 2\pi \varrho_b R(\varepsilon)$ den Beweis der C^0 -Stetigkeit von \mathcal{C} beendet.

Weil nach Lemma 6.3.2 die Integration über einem Kompaktum C^0 -stetig ist, ist es auch die Abbildung $q \mapsto \chi_q$, wobei $\chi_q(r) := \int_0^r \mathcal{C}(q)(\hat{r}) \, d\hat{r}$ passend zu (2.58) definiert wird. Wieder nach Lemma 6.3.2 folgt dann die C^0 -Stetigkeit von

$$Q_2 \rightarrow C^\infty([0, r_b]), \quad q \mapsto \mathcal{U}(q, \mathcal{R}(q)) ,$$

wobei entsprechend (2.56)

$$\mathcal{U}(q, \mathcal{R}(q))(r) = \frac{e^{-\chi_q(r)}}{R_q(r)} \int_\varepsilon^r \mathcal{E}(q)(\hat{r}) e^{\chi_q(\hat{r})} \, d\hat{r} + (RUe^{\chi_q})(\varepsilon)$$

ist. Auf $[0, \varepsilon]$ wurde dabei auf die Restriktion R und U wie in (2.68) zurückgegriffen, um in $r = 0$ die prinzipiell mögliche Durchführung einer zu Lemma 6.3.9 analogen Überlegung zu vermeiden.

Damit ist die Stetigkeit von U_b bewiesen. Um nun die Beschränktheit von U_b zu zeigen, soll $const$ eine Konstante symbolisieren, die zwar von h und $\bar{\tau}$, nicht jedoch von σ ab-

hängen darf. Es gilt

$$\begin{aligned}
 |\chi_q| &\leq \int_0^{r_b} |\mathcal{C}(q)(\hat{r})| \, d\hat{r} \\
 &\leq \int_0^{r_b} \frac{\max\{(\mathcal{S}(|q_{(\sigma,\tau)}|)+4\pi\mathcal{S}(\hat{p}\circ\varrho) r_b)(r); r\in[0,r_b]\}}{\min\{|\mathcal{S}([\mathcal{R}(q_{(\sigma,\tau)})]')(r)|; r\in[0,r_b]\}} \, d\hat{r} \\
 &\leq \int_0^{r_b} \frac{\max\{|q'_{(\sigma,\tau)}(r)|; r\in[0,r_b]\} + const}{\min\{\hat{\delta}, \min\{|R''(r)|; r\in[0,\varepsilon]\}\}} \, d\hat{r} \\
 &\leq const \int_0^{r_b-\varepsilon_b} |q'_{(\sigma,\tau)}(\hat{r})| \, d\hat{r} + const \int_{r_b-\varepsilon_b}^{r_b} |\eta'_\sigma(\hat{r})| \, d\hat{r}
 \end{aligned}$$

wobei der erste Integrand $\|q'_{(\sigma,\tau)}\| \leq \kappa_\tau \cdot \|qh\|_{C^0} \leq \bar{\tau} \cdot \|h\|_{C^0}$ durch die von σ unabhängige Schranke $\bar{\tau}\bar{M}$ nach oben begrenzt ist. Außerhalb von $\left[r_b - \max\left\{\frac{\hat{\delta}}{|\sigma|}, \varepsilon_b\right\}, r_b\right]$ verschwindet der zweite Integrand. Innerhalb dieses Intervalls ist aber

$$|\eta'_\sigma(r)| = \hat{\delta} \left| \tilde{\eta}' \left(\frac{r_b - r}{\min\{\hat{\delta}, \varepsilon_b |\sigma|\}} |\sigma| \right) \right| \frac{|\sigma|}{\min\{\hat{\delta}, \varepsilon_b |\sigma|\}}$$

für $\varepsilon_b |\sigma| \leq \hat{\delta}$ (bzw. $\varepsilon_b |\sigma| > \hat{\delta}$) durch $const$ (bzw. durch $|\sigma| \cdot const$) nach oben beschränkt. Auch im zweiten Fall ist also der zweite Integrand durch $\int_{r_b-\varepsilon_b}^{r_b} |\sigma| \cdot const \, d\hat{r} \leq const$ unabhängig von σ noch oben begrenzt.

Die Beschränktheit von

$$U_b(\sigma, \tau) = \frac{e^{-\chi_q(r_b)}}{R_q(r_b)} \int_0^{r_b} \frac{(R'_q(\hat{r}))^2 - 1}{2} + q(\hat{r}) R_q(\hat{r}) e^{\chi_q(\hat{r})} \, d\hat{r}$$

folgt dann aus $\|R'_q\|_{C^0} \leq 1$, $|R_q(\hat{r})| = R_q(\hat{r}) \leq \hat{r}$ und $\|q\|_{C^0} \leq \max\left\{\bar{\tau}\bar{M}, \frac{1}{24\varepsilon_b}\right\} \leq const$. \square

Im Beweis von Lemma 2.4.11 wird das folgende Lemma für

$$f : (\sigma, \tau) \mapsto r_b - \zeta \left([\mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)})]' \right)$$

und $\bar{\Sigma}$ aus (2.77) angewendet.

Lemma 6.3.11 *Sei $K := [\sigma^-, \sigma^+] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}] \subset \mathbb{R}^2$. Für die stetige Abbildung $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\bar{\Sigma} : f^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$) gelte*

$$f(\cdot, \underline{\tau}) < 0 < f(\cdot, \bar{\tau}) \quad (\text{bzw. } \bar{\Sigma}(\sigma^-, \cdot) < 0 < \bar{\Sigma}(\sigma^+, \cdot)).$$

Dann gibt es ein $(\sigma^*, \tau^*) \in K$ mit $f(\sigma^*, \tau^*) = 0 = \bar{\Sigma}(\sigma^*, \tau^*)$.

Beweis Die Anwendung des Zwischenwertsatzes für f zeigt, daß der Definitionsbereich $N := f^{-1}(\{0\})$ von $\bar{\Sigma}$ nichtleer ist. Man setzt

$$N^\pm := \{(\sigma, \tau) \in N; \pm \bar{\Sigma}(\sigma, \tau) \geq 0\}.$$

Falls $N^+ \cap N^- \neq \emptyset$, dann hat $(\sigma^*, \tau^*) \in N^+ \cap N^-$ die gewünschten Eigenschaften.

Der Fall $N^+ \cap N^- = \emptyset$ soll ad absurdum geführt werden. Zunächst wird gezeigt, daß der Abstand $d(N^+, N^-)$ positiv ist. Denn wäre er Null, so gäbe es Folgen $\{s_n^\pm\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n^\pm \subset N^\pm$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} d(s_n^+, s_n^-) = 0$. Weil aber N^+ und N^- abgeschlossen und somit kompakt sind, läge der dann gemeinsame Grenzwert im leeren Durchschnitt.

Nun wird die Annahme $d(N^+, N^-) > 0$ widerlegt. Setze

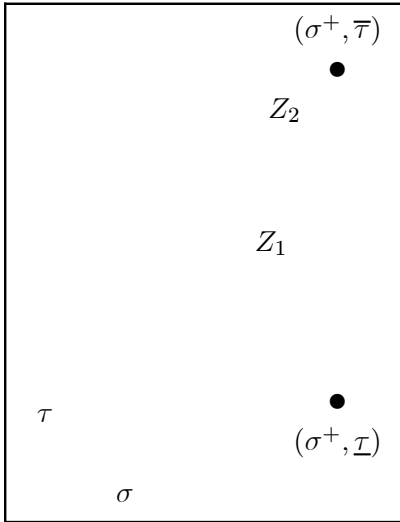
$$\delta := \min \{d(N^+, N^-), d(N^+, [\sigma^-, \sigma^+] \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}])\}.$$

Weil $N_\delta^+ := \{s \in K; d(s, N^+) \leq \delta/2\}$ kompakt ist, findet man für dessen Rand eine Überdeckung \hat{N} durch endlich viele Kugeln mit Radius $\frac{1}{3}\delta$ und Mittelpunkt in $\overline{N_\delta^+}$. Dabei hat \hat{N} zu $N^+ \cup N^-$ positiven Abstand, denn es gilt $\frac{1}{6}\delta \leq d(\hat{N}, N^+) \leq \frac{5}{6}\delta$

und somit folgt $d(\hat{N}, N^-) \geq \frac{1}{6}\delta$. Sei $S^+ := \{\sigma^+\} \times [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$ der rechte Rand von K . Dann enthält die Menge

$$\overline{(S^+ \setminus \partial\hat{N})} \cup \overline{(\partial\hat{N} \setminus S^+)},$$

wobei ∂M der Rand einer Menge M sei, einen stetigen Weg γ endlicher Länge von $(\sigma^+, \underline{\tau})$ zu $(\sigma^+, \bar{\tau})$, wie in der Abbildung angedeutet.



Dieser Weg γ besteht einerseits aus den nicht durch $\partial\hat{N}$ unterbrochenen Geradenstücken $S^+ \setminus \partial\hat{N}$ von $S^+ = [\sigma = \sigma^+]$, dem rechten Rand von K , und andererseits aus den endlich vielen Zusammenhangskomponenten Z_i von

$$\overline{(\partial\hat{N} \setminus S^+)},$$

welche die Lücken in S^+ überbrücken.

Gezeigt wird jetzt, daß γ keine Punkte aus $N^+ \cup N^-$ enthält. Zunächst gilt $d(\partial\hat{N}, N^+ \cup N^-) > 0$ nach Konstruktion von \hat{N} . Aus der Voraussetzung $\bar{\Sigma}(S^+) > 0$ folgt $N^- \cap S^+ = \emptyset$. Schließlich ist $s \in N^+ \cap S^+$ nicht möglich, weil dann $s \in N_\delta^+$ durch eine Kugel aus \hat{N} vom Rand S^+ „weggekapselt“ worden wäre. Somit enthält der Weg γ tatsächlich keine Punkte aus $N^+ \cup N^- = N$, welches die Nullstellenmenge von f ist. Da $f|_\gamma$ stetig und nach Voraussetzung das Vorzeichen wechselt, ist dies ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz. \square

6. Anhang zu den relativistischen Ergebnissen
