

# 3. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

## 3.1 Einleitung

In diesem Kapitel beweise ich zwei Sätze über die (zeitlich lokale) Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen quasilinear-er, hyperbolischer Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in zwei unabhängigen Unbekannten  $t$  und  $x$ . Behandelt werden Anfangs-Randwert-Probleme (MIBVP für *Mixed Initial Boundary Value Problem*) mit unterschiedlich regulären Daten.

### 3.1.1 Quasilineare hyperbolische Systeme

Ein System von partiellen Differentialgleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

heißt quasilinear, weil die Ableitungen der gesuchten Lösung  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k, \dots, u_K)$  nur linear vorkommen. Nichtlinear in  $\mathbf{u}$  ist aber im allgemeinen die Matrix

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) : \begin{cases} G & \rightarrow L(\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K), \\ (t, x) & \mapsto (a_{ij}(t, x, \mathbf{u}(t, x)))_{i,j=1,\dots,K}, \end{cases}$$

wobei diese Schreibweise  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) := [z \mapsto \mathbf{A}(z, \mathbf{u}(z))]$  zwar etwas ungenau<sup>1</sup>, aber durchaus üblich ist. Entsprechend ist  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = [z \mapsto (z, (b_1, b_2, \dots, b_K)(z, \mathbf{u}(z)))]$ .

**Hyperbolisch** heißt das System, wenn die Matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  (für alle zulässigen<sup>2</sup>  $\mathbf{u}$ ) reelle Eigenwerte  $\lambda_1(\mathbf{u}), \lambda_2(\mathbf{u}), \dots, \lambda_K(\mathbf{u})$  mit linear unabhängigen Linkseigenvektoren<sup>3</sup>  $L_1(\mathbf{u}), L_2(\mathbf{u}), \dots, L_K(\mathbf{u})$  besitzt. Sei  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte, und sei  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  eine Matrix, deren  $k$ -te Zeile  $L_k(\mathbf{u})$  ist (für alle  $k = 1, \dots, K$ ). Dann gilt also

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{u}) . \quad (3.2)$$

Auf die sogenannte **charakteristische Form**

$$L_k(\mathbf{u}) \cdot (\partial_t \mathbf{u} + \lambda_k(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}) = L_k(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{u}) \quad (3.3)$$

wird das System (3.1) gebracht, indem man es von links mit den Eigenvektoren multipliziert. In dieser Gestalt wurden die meisten Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Lösungen derartiger Systeme partieller Differentialgleichungen formuliert.

---

<sup>1</sup>Die in Abschnitt 3.1.8 zitierte Arbeit von Ying benutzt  $\mathbf{A}$  tatsächlich als auf  $\mathbf{u}$  wirkenden Operator.

<sup>2</sup>Man wird einen Funktionenraum zulässiger  $\mathbf{u}$  definieren, in dem eine Lösung  $\mathbf{u}$  von (3.1) gesucht wird.

<sup>3</sup>Rechtseigenvektoren hätte man genauso gut wählen können.

### 3.1.2 Diagonalform

#### Ein diagonales System

$$\partial_t u_k + \lambda_k(\mathbf{u}) \cdot \partial_x u_k = b_k(\mathbf{u}) \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (3.4)$$

hat die Eigenschaft, daß für jede Unbekannte klar ist, wo Daten vorzuschreiben sind<sup>4</sup>.

Man sieht dem System an, daß  $u_k$  für  $\lambda_k(\mathbf{u}) > 0$  (bzw.  $\lambda_k(\mathbf{u}) < 0$ ) bei positiver Zeitorientierung<sup>5</sup> nach rechts (bzw. nach links) propagiert wird. Nur im ersten Fall hat man also Randwerte am linken Rand vorzuschreiben, etwa

$$u_1(t, x_{\text{links}}) = \phi_1(t, \mathbf{u}^-(t, x_{\text{links}})),$$

wobei  $\mathbf{u}^-$  aus allen  $u_k$  mit  $\lambda_k(\mathbf{u}) \leq 0$  bestehe. Solche Randwerte mit Abhängigkeit von  $\mathbf{u}^-$ , das ja seinerseits (vom Innern des Lösungsgebietes) zum Rand  $[x = x_{\text{links}}]$  propagiert wird, nenne ich implizite Randdaten oder **implizite Randwerte**.

Ohne Einschränkung kann vorausgesetzt werden (siehe Abschnitt 7.1.1), daß eine Lösung im Gebiet

$$G := G(T) := [0, T] \times [0, x_{\text{rechts}}]$$

gesucht wird, wobei  $T > 0$  von den vorgelegten Daten<sup>6</sup> abhängt (zeitliche Lokalität der Sätze). Anfangsdaten sind dabei auf  $[t = 0]$  zu geben und Randdaten entsprechend auf  $[x = 0]$  und  $[x = x_{\text{rechts}}]$ .

---

<sup>4</sup>Sofern das Vorzeichen der Propagationsgeschwindigkeit  $\lambda_k(\mathbf{u})$  in der Nähe der Datenvorgabestellen konstant und bekannt ist. Der Einfachheit halber setze ich im folgenden voraus, daß  $\lambda_k$  auf dem ganzen Lösungsgebiet ein konstantes und bekanntes Vorzeichen hat. Das läßt sich ohne Kenntnis einer Lösung  $\mathbf{u}$  als Bedingung an  $\lambda_k$  formulieren, indem man von  $\lambda_k$  verlangt, daß  $\lambda_k(\mathbf{u}^*)$  ein festes Vorzeichen hat für alle  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^K$  mit  $\|\mathbf{u}^*\| \leq \Omega$ , wobei  $\Omega$  eine durch die Daten und die rechte Seite bestimmte a-priori-Schranke für die Lösung ist.

<sup>5</sup>die ich immer annehme, wenn nichts anderes gesagt wird

<sup>6</sup>und Normen der Systemgrößen  $\lambda_k$  und  $b_k$

### 3. Existenz- und Eindeigkeitsätze

---

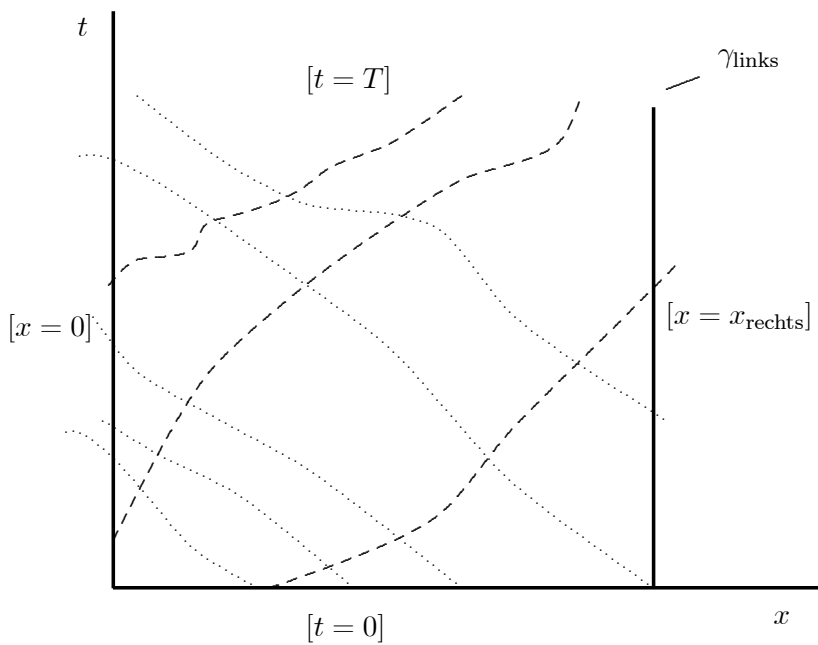


Abb. 3.1: Dieses Bild zeigt die Propagationsrichtungen, gestrichelt für  $\lambda_k(u) > 0$  (bzw. gepunktet für  $\lambda_k(u) < 0$ )

### 3.1.3 Spezielle Diagonalform für den relativistischen Anwendungsfall

Durch die Beschränkung auf Diagonalform erspare ich mir einige Schreibarbeit in den Beweisen zugunsten besserer Durchsichtigkeit<sup>7</sup>. Auch Garabedian [Gara64, Formel (4.45) in Abschnitt 4.3] beschränkt sich übrigens zur Behandlung hyperbolischer Systeme auf das diagonale System (3.4) und nennt es ein *canonical system*, wobei er nicht verrät, wie man ggf. diese Diagonal-Gestalt erzeugt. Allerdings konnte ich ein von Spivak [Spiv79] angegebenes Verfahren, das zur Diagonalisierung von Systemen (3.1) mit invertierbarem  $\mathbf{A}$  dient, unter Ausnutzung von Zwangsbedingungen so erweitern (siehe Kapitel 4), daß die Anwendung auf unser System (2.25) möglich ist. Letzteres geschieht in Abschnitt 4.4.

In Satz 3.2.4 behandle ich eine speziellere Form<sup>8,9</sup> von (3.4),

---

<sup>7</sup>Wenn bei mir  $u$  in Richtung  $\lambda(\mathbf{u})$  propagiert wird, dann ist darunter „ $(\partial_t + \lambda(u) \cdot \partial_x)u$  läßt sich ableitungsfrei in Unbekannten  $\mathbf{u}$  ausdrücken“ zu verstehen. Dies gilt dagegen in [AlMH94, Appendix B] nicht für  $(\partial_t + \lambda_3 \cdot \partial_x)g_3$  mit  $g_3 := \sqrt{\frac{dp(\varrho)}{d\varrho}}\varrho + \frac{p+\varrho}{\Gamma}U$ , das im Sinne von Courant und Hilbert in Richtung  $\lambda_3(R, \varrho, U, \Gamma)$  propagiert wird, sondern nur für  $\sqrt{\frac{dp(\varrho)}{d\varrho}}(\partial_t + \lambda_3 \cdot \partial_x)\varrho + \frac{p+\varrho}{\Gamma}(\partial_t + \lambda_3 \cdot \partial_x)U$ .

<sup>8</sup>Die kugelsymmetrischen Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik, die im 2. Kapitel vorkamen, lassen sich in mitschwimmenden Koordinaten dieser Struktur unterordnen. Dabei gibt es neben den Stromlinien, in deren Richtung die  $t$ -Linien des Koordinatensystem zeigen, nämlich genau zwei nicht-triviale charakteristische Richtungen, und zwar die für ein- bzw. auslaufenden Schall. Mit Hilfe einer Diagonalisierung (siehe Abschnitt 4.4) bringt man (2.25) auf diese Form (3.5).

<sup>9</sup>Meine Beweise nutzen von dieser Spezialform aus, daß am Rand  $[x = 0]$  (bzw.  $[x = x_{\text{rechts}}]$ ) genau einer Größe, nämlich  $v_+$  (bzw.  $v_-$ ) Werte vorzuschreiben sind (Vermeidung von *fan-shaped domains* [LiWu92, Chapter 4]) und, daß deren Propagationsrichtungen  $\lambda_{\pm}$  unabhängig von  $\mathbf{v} = (v_+, v_-)$  sind (Vermeidung von Schocks).

nämlich

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \mathbf{b}(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \partial_t v_- + \lambda_-(t, x, \mathbf{u}) \cdot \partial_x v_- &= g_-(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \partial_t v_+ + \lambda_+(t, x, \mathbf{u}) \cdot \partial_x v_+ &= g_+(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit  $\mathbf{v} = (v_-, v_+)$  und  $\lambda_-(\mathbf{u}) < 0 < \lambda_+(\mathbf{u})$ . Dieses System hat nur zwei Scharen nicht-trivialer Charakteristiken, und zwar die nach rechts laufenden  $\lambda_+$ -Charakteristiken und die nach links propagierenden  $\lambda_-$ -Charakteristiken. Eine  $\lambda_{\pm}$ -Charakteristik durch  $(t_0, x_0)$  ist dabei die Lösung  $\gamma$  der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = \lambda_{\pm}(t, \gamma(t), \mathbf{u}(t, \gamma(t))) \text{ mit Anfangswert } \gamma(t_0) = x_0$$

oder auch deren Graph<sup>10</sup>. Die  $\lambda_+$ -Charakteristik, die in der Ecke  $(0, x_{\text{links}})$  beginnt, heißt bei mir **Grenz-Charakteristik** (Definition 3.2.3), weil sie das Abhängigkeitsgebiet von den Anfangsdaten (nach links) begrenzt und wird mit  $\gamma_{\text{links}}$  bezeichnet.

Einem Differentialgleichungssystem der Form (3.5) kann und muß man genau für  $v_+$  Randdaten (im linken Rand) vorschreiben. Wenn diese und auch alle Anfangsdaten stetig differenzierbar sind, erwartet man (zu Recht, wie meine Sätze zeigen), daß  $\mathbf{u}$  und  $v_-$  auf ganz  $G$  stetig sind, sogar bei verletzter Eckbedingung<sup>11</sup>, die sich ja ausschließlich auf  $v_+$  bezieht. Dagegen ist dann  $v_+$  fast überall stetig, nämlich auf  $G$  ohne die Grenzcharakteristik, auf der  $\mathbf{u}$  und  $v_-$  knicken könnten.

---

<sup>10</sup>Aus diesem Grunde schreibe ich entgegen mancher Konvention die Zeitkoordinate vor der Ortskoordinate.

<sup>11</sup>siehe Abschnitt 3.1.5

### 3.1.4 Beweise durch Trennen von *Initial (IVP) & Char. Boundary Value Problem (CBVP)*

Eine gemischte Anfangs-Randwertaufgabe (MIBVP 3.2.1) läßt sich aufspalten in ein reines Anfangswertproblem (IVP) und ein charakteristisches Randwertproblem (CBVP 3.2.5), für das wir in

$$G_{\text{CBVP}}(T) := \{(t, x); \quad t \in [0, T], x \in [0, \gamma_{\text{links}}(t)]\}$$

eine eindeutige  $C_L^1$ -Lösung finden, sofern  $(u, v_-)|_{\gamma_{\text{links}}} \in C_L^1$  und  $(v_+)|_{[x=0]} \in C_L^1$  geeignet vorgeschrieben werden.

Allein für  $v_+$  wurden sowohl Anfangsdaten als auch Randdaten vorgeschrieben. Somit kann nur für  $v_+$  eine Eckbedingung erfüllt oder verletzt werden. Dieses Vorgehen wird in Abbildung 3.2 visualisiert.

### 3.1.5 Eckbedingungen

Eckbedingung meint, daß die Randwertdaten in der „Ecke“  $(0, 0)$  zu den dort ebenfalls vorliegenden Anfangswertdaten passen müssen. Aus den Anfangsdaten (und deren intrinsischen Ableitungen) ergeben sich für eine Lösung der Evolutionsgleichungen nämlich Anforderungen an Wert und zeitliche Änderung der Randwerte in der Ecke, die denen der vorgeschriebenen Randwertvorgaben nicht widersprechen dürfen. Diese Kompatibilität wird bei der Eckbedingung  $n$ -ter Ordnung unter Berücksichtigung der Daten und ihrer Ableitungen bis zur  $n$ -ten Ordnung geprüft. Die Eckbedingung 0-ter Ordnung kann daher nicht verhindern, daß eine evtl. Lösung des

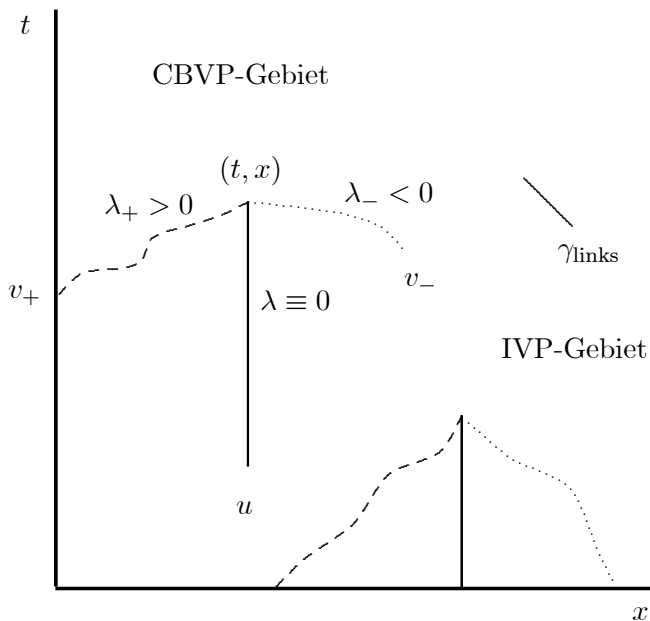


Abb. 3.2: In  $(t, x) \in G_{\text{CBVP}}(T)$  wird  $v_{\pm}$  durch Integration von  $g_{\pm}$  entlang der Charakteristik zu  $\lambda_{\pm} \gtrless 0$  gewonnen. Dagegen wird  $u$  durch Integration von  $\mathfrak{b}$  entlang der  $t$ -Linie durch  $(t, x)$  gewonnen. Anfangsdaten kommen dabei nur für  $\lambda_+ > 0$  von der  $t$ -Achse  $[x = 0]$ , sonst von der Grenzcharakteristik  $\gamma_{\text{links}}$ .



MIBVP in der Ecke  $(0, 0)$  „knicken“<sup>12</sup> kann.

Eine solche Störung breitet sich entlang der<sup>13</sup> (ins Lösungsgebiet) einlaufenden Grenz-Charakteristik (siehe Seite 74 bzw. Definition 3.2.3) aus. Außerhalb derselben kann man bei hinreichend oft differenzierbaren Anfangs- und Randdaten eine höhere Differenzierbarkeitsordnung für die Lösung erwarten. Entsprechende Ergebnisse werden in diesem Kapitel bewiesen (Satz 3.3.1).

### 3.1.6 Ergebnisse

In Abschnitt 3.2 wird ein MIBVP in diagonalen Form<sup>14</sup> behandelt, bei dem sich aus hinreichend glatten Daten, die aber nur eine Eckbedingung 0-ter Ordnung erfüllen müssen, eine Lipschitz-stetige Lösung entwickelt.

In Satz 3.3.2 verzichte ich auf diese Eckbedingung, weshalb man von einer zugehörigen Lösung keine Stetigkeit erwarten kann. Es zeigt sich aber, daß dennoch eine Lösung existiert, die fast überall stetig differenzierbar ist, nämlich überall abgesehen von der sogenannten Grenz-Charakteristik, auf der die Lösung ggf. „springt“<sup>15</sup>.

Im Satz 4.4.1 fasse ich die Wirkungen der verschiedenen Eckbedingungen für unser System (2.25) zusammen, wobei beide

<sup>12</sup>Ein Knick entlang einer Kurve  $\gamma$  ist eine Unstetigkeit der Ableitung entlang einer Kurve, die  $\gamma$  transversal schneidet. Beispielsweise hat eine Funktion  $v \in C^0(G) \cup C^1(G \setminus [t = x])$  entlang der Winkelhalbierenden einen Knick, wenn  $\partial_t v(t, t-) \neq \partial_t v(t, t+)$  für alle  $t \in [0, 1]$ , wobei etwa ein linksseitiger Grenzwert  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(t + \varepsilon)$  durch  $f(t+)$  abgekürzt ist und  $G = [0, 1]^2$  sei.

<sup>13</sup>Wir betrachten nur Systeme, bei denen genau eine Charakteristik von der jeweiligen Ecke ins Lösungsgebiet hineinläuft. Das ist in unserer Anwendung die ein- (bzw. aus-)laufende Schallcharakteristik.

<sup>14</sup>Ein Verfahren, um diese Form zu erzielen wird in Kapitel 4 Diagonalisierung dargestellt

<sup>15</sup>Eine Funktion  $v : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto v(t, x)$  springt z.B. entlang  $[t = x]$ , wenn  $v(t, t-) \neq v(t, t+)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

im 2. Kapitel vorkommenden Anfangsdatenflächen  $[t = 0]$  und  $[t = B_H(r)]$  berücksichtigt werden.

### 3.1.7 Vermeidung von Schocks etc.

Durch die Stetigkeit von  $u$  und damit der von  $\lambda_k(u)$  hält man sich fern von den typischen Schwierigkeiten bei nichtlinearen, hyperbolischen Systemen, die sich in Form von Unstetigkeiten (*rarefaction waves*, Schocks, Kontaktunstetigkeiten) zeigen.

Zu jeder noch so kleinen Zeit  $t_{\text{Schock}} > 0$  kann man zwar<sup>16</sup> Anfangsdaten finden, die beliebig oft differenzierbar sind und dennoch eine Schockentstehung vor oder in  $t = t_{\text{Schock}}$  bewirken. Etwa Burgers Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0$$

entwickelt aus

$$u(0, x) = u_0(x) := t_{\text{Schock}} \cdot 1_{\mathbb{R}_{-\infty, 0]} + (t_{\text{Schock}} - x) \cdot 1_{\mathbb{R}_{[0, t_{\text{Schock}}]}}$$

auch dann einen Schock in  $t = t_{\text{Schock}}$ , wenn man die Knicke von  $u_0$  glättet. Andererseits gibt es nach den zeitlich lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsätzen ein  $T \in ]0, t_{\text{Schock}}[$  so, daß die Lösung in  $G(T)$  etwa Lipschitz-stetig differenzierbar ist.

### 3.1.8 Allgemeinere Systeme

Meine Sätze müßten auch für charakteristisch geschriebene Systeme (3.3) gelten. In der Tat hat Ying [Ying91] die Existenz eindeutiger  $C^1$ -Lösungen für ein MIBVP eines quasilinearen Systems in charakteristischer Form bewiesen. Dabei dürfen die nichtlinearen Terme, die normalerweise eine Funktion der Form  $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t, x))$  sind, sogar in funktionaler Weise von  $u$

---

<sup>16</sup>jedenfalls für gewisse Gleichungen

abhängen, etwa  $(t, x) \mapsto (\mathfrak{f}^*(\mathbf{u}))(t, x) := \int_{t_0}^t x \cdot \mathbf{u}(s, x) \, ds$ , d.h.  $\mathfrak{f}^*$  ist ein Operator.

Derartige Funktionale sind nicht mit meinen Methoden diagonalisierbar. Mir kommt es in dieser Arbeit auch nicht so sehr auf größtmögliche Allgemeinheit an, sondern eher darauf, die Wirkung der Eckbedingung auf die Glattheit der Lösung zu beleuchten, insbesondere für die kugelsymmetrischen Einsteinschen Feldgleichungen mit idealer Flüssigkeit. Dies geschieht zusammenfassend in Satz 4.4.1.

### 3.1.9 Beweismethode

Man betrachte für geeignete  $C_L^1$ -Funktionen  $\mathfrak{w}$  eine Familie linearer Differentialgleichungssysteme

$$\partial_t u_k + \lambda_k(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x u_k = g_k(\mathfrak{w}), \quad (3.6)$$

deren eindeutige Lösung  $\mathbf{u} \in C_L^1(G(T))$  das Bild von  $\mathfrak{w}$  unter einer Abbildung  $\mathcal{T}$  sei. Für hinreichend kleine  $T$ , deren Wert von gewissen Normen der Anfangs- (bzw. Rand-)Daten  $u_0$  und der  $\lambda_k, g_k$  abhängen, läßt sich zeigen, daß  $\mathcal{T}$  eine Kontraktion ist. Also hat  $\mathcal{T}$  dann genau einen Fixpunkt, der die (somit eindeutige) Lösung von (3.4) ist. Man findet ihn durch eine Iteration  $\mathbf{u}_{(n+1)} := \mathcal{T}\mathbf{u}_{(n)}$ , wobei als Startwert  $\mathbf{u}_{(0)}$  eine beliebige  $C_L^1$ -Funktion mit passenden Anfangs- und Randwerten genommen wird.

Die Hauptarbeit ist dabei, den Begriff „geeignete  $C_L^1$ -Funktionen  $\mathfrak{w}$ “ zu präzisieren. Dies geschieht durch Forderungen

$$\|w_k\|_{C^0} \leq \Omega_{0k}, \quad \|w_k\|_{C^1} \leq \Omega_{1k}$$

und

$$\Omega_{2l} \text{ ist Lipschitz-Konstante von } \partial_t w_k, \partial_x w_k.$$

### 3. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

---

Dazu müssen die **a-priori-Schranken**  $\Omega_{0k}$ ,  $\Omega_{1k}$  und  $\Omega_{2k}$  geeignet festgelegt werden in Ausdrücken von

$$\|\lambda_k\|_{C^0}, \|g_k\|_{C^0}, \|u_0\|_{C^0} \quad \text{für } \Omega_{0k}$$

$$\|\lambda_k\|_{C^1}, \left\| \frac{1}{(\lambda_k)|_{[x=x_{\text{links}}]}} \right\|_{C^0}, \|g_k\|_{C^0}, \|u_0\|_{C^1} \quad \text{für } \Omega_{1k}$$

diesen sowie zusätzlich

$$\|g_k\|_{C^1} \quad \text{und einer LipKon von } \partial_t \lambda_k, \partial_x \lambda_k \quad \text{für } \Omega_{2k},$$

wobei „LipKon“ eine Abkürzung für „Lipschitz-Konstante“ ist. Wegen der impliziten Randwerte muß dabei eines der  $\Omega_{1k}$  (vermöge  $\|u_0\|_{C^1}$ ) von den anderen  $\Omega_{1k}$  abhängen, weswegen man in der Reihenfolge der Konstantenfestlegungen sorgfältig vorgehen muß. Entsprechendes gilt für die Lipschitz-Konstanten und wird im Beweis von Satz 7.2.15 ab Seite 226 genau ausgeführt.

Für  $u = \mathcal{T}v$  gilt dann

$$\|u_k\|_{C^0(G(T))} \leq \Omega_{0k}, \text{ sofern } T < T_0$$

$$\|u_k\|_{C^1(G(T))} \leq \Omega_{1k}, \text{ sofern } T < T_1$$

$$\Omega_{2k} \text{ ist LipKon von } \partial_t u_k \text{ und } \partial_x u_k, \text{ sofern } T < T_2.$$

Dabei sind die Zeit-Konstanten

$$T_0 \quad \text{durch} \quad \|g_k\|_{C^0}$$

$$T_1 \quad \text{durch} \quad \|\lambda_k\|_{C^0}, \|g_k\|_{C^1}, \Omega_{1k}$$

$$T_2 \quad \text{auch durch} \quad \text{LipKon von } \partial_t \lambda_k, \partial_x \lambda_k, \partial_t g_k, \partial_x g_k, \Omega_{2k}$$

a-priori bestimmt. Eine Kontraktion in  $C^0(G(T))$  ist  $\mathcal{T}$  für  $T < T_{\text{Kontraktion}}$ , wobei  $T_{\text{Kontraktion}}$  durch  $\|\lambda_k\|_{C^0}$  und  $\|g_k\|_{C^1}$  ausgedrückt werden kann.

*Differenzieren contra Differentialgleichung für Ableitung*

Diese a-priori-Abschätzungen gewinne ich dabei durch direktes Abschätzen der explizit angebbaren Lösung von (3.6). Diese Lösungen werden als Integral entlang einer Charakteristik beschrieben. Um a-priori-Abschätzungen für die Ableitungen und deren LipKon zu bekommen, differenziere ich dieses Integral und schätze die einzelnen Terme ab.

Üblicher wäre, (3.6) nach  $\partial_x$  zu differenzieren und die Lösung  $\hat{u}_k$  von

$$\partial_t \hat{u}_k + \lambda_k(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x \hat{u}_k = \partial_{\mathfrak{w}} b_k(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x \mathfrak{w} - \partial_{\mathfrak{w}} \lambda_k(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x \mathfrak{w} \cdot \hat{u}_k$$

als  $\partial_x u_k$  zu erkennen, wozu  $\partial_x \partial_t u_k = \partial_t \partial_x u_k$  einer Begründung bedarf (und passende Anfangs- (bzw. Rand-)Daten vorzugeben sind). Diese Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen wird in der Regel gerechtfertigt über eine Iteration  $u_{(n+1)} := \mathcal{T}u_{(n)}$ , die sich komplett in  $C^2$  abspielt. Bei unserer Anwendung haben wir aber keine  $C^2$ - sondern nur  $C_L^1$ -Daten. Darum müßte man auch die Daten approximieren. Dann müssen IVP und CBVP gemeinsam gelöst werden, falls man verhindern möchte, daß die Grenzcharakteristik in jedem Iterationsschritt eine neue Lage bekommt. Ein „Wackeln der Grenzcharakteristik“ erfordert Verwaltungsaufwand und zusätzliche Konvergenz-Beweise (vgl. [Kind91]). Löst man aber in jedem Iterationsschritt das komplette MIBVP, so erhält man gröbstenfalls eine stetige Lösung. Diagonale Systeme mit verletzter Eckbedingung können also nicht mit der Standardmethode gelöst werden. Daher ist mein Beweis ein echter Fortschritt, wenn ein diagonales System mit verletzter Eckbedingung gelöst werden soll.

### 3.1.10 Alternative Beweise

Einen Beweis über die Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen (MIBVP) findet man bei Courant und Hilbert [Cour66]. Deren Darstellung ist aber nicht sehr übersichtlich notiert und enthält auch einige Lücken. Kind hat daher in ihrer Dissertation [Kind91] einen eigenen Beweis für ein derartiges Differentialgleichungssystem aufgeschrieben, der auf denselben Methoden (iterative Integration entlang der Charakteristiken) beruht. Ihr Beweis ist auf ein spezielles Diagonalsystem zugeschnitten, obwohl ihr zu beweisender Satz für ein System der Form

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \mathbf{b}(x, \mathbf{u}, v_1, v_2) \\ \partial_t v_1 + \lambda(\mathbf{u}) \cdot \partial_x v_2 &= g_1(x, \mathbf{u}, v_1, v_2) \quad \text{mit } \lambda(\mathbf{u}) > 0 \\ \partial_t v_2 + \lambda(\mathbf{u}) \cdot \partial_x v_1 &= g_2(x, \mathbf{u}, v_1, v_2) \end{aligned}$$

formuliert ist. Dieses System läßt sich aber leicht auf Diagonalgestalt (3.4) bringen, und genau damit beginnt Kinds Beweis. Leider wird durch die Formulierung ihres Satzes der Informationstransport und die daraus resultierenden Freiheiten bei der Randwertvorgabe verschleiert<sup>17</sup>. Im Gegensatz zu meinem systematischen Vorgehen in Kapitel 4, das zu einer minimalen Anzahl neuer Unbekannter führt, hat Kind durch ad-hoc-Definitionen neuer Unbekannter ein Diagonalsystem in 24 Unbekannten erzeugt, das den kugelsymmetrischen Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit entspricht, die ich in sechs Unbekannten beschreibe.

Einen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit einer fast überall stetigen Lösung eines MIBVP gibt Cazzini Nieri in

---

<sup>17</sup>In ihrem Satz sind beide Größen  $v_1$  und  $v_2$  gleichberechtigt. Warum wird gerade für  $v_2$  ein Randwert angegeben? Dürfte der auch von  $v_1$  abhängen?

[Cazz80], die in der Formulierung ihres Satzes nicht nur auf implizite Randwerte, sondern auch auf trivial propagierende Charakteristiken ( $\lambda_k \equiv 0$ ) verzichtet. Dafür hat sie Aussagen geringerer Differentiationstufe gezeigt. Für das MIBVP in charakteristischer Form (3.3) beweist Cazzani Nieri nämlich die Existenz einer f. ü. Lipschitz-stetigen Lösung<sup>18</sup> ( $u \in C_L^0(G)$ ), wobei sowohl auf der Anfangsfläche  $[t = 0]$  als auch auf dem Rand  $[x = 0]$   $C_L^0$ -Daten vorausgesetzt werden, die zusammen passen müssen, d.h. einer sogenannten Eckbedingung 0-ter Ordnung genügen.

Ferner liefert Ying [Ying91] einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, zu dem ich mich in Abschnitt 3.1.8 auf Seite 78 geäußert habe.

Verschiedene Beweise findet man in dem ziemlich umfassenden Buch von Li und Wu [LiWu92]. Allerdings ist in dem Buch der von mir benötigte Fall einer das Lösungsgebiet begrenzenden Charakteristik für quasilineare Probleme (vgl. Problem 3.2.5 bzw. Satz 3.2.6) nicht behandelt worden. Dort steht auch ein Beweis für Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des linearen und quasilinearen IVP [LiWu92, Seiten 43 bis 74], den ich aber nicht zitiere, weil infolge der Diagonalisierung Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des linearen IVP aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt und das quasilineare IVP in Satz 7.2.15 gemeinsam mit dem quasilinearen CBVP gelöst werden kann.

---

<sup>18</sup>der zu den Differentialgleichungen äquivalenten Integralgleichungen

## 3.2 Stetige Lösung des *Mixed Initial Boundary Value Probl.* (MIBVP)

### 3.2.1 Formulierung des Problems

Wir betrachten folgende gemischte Anfangsrandwertaufgabe (MIBVP als Abkürzung von *Mixed Initial Boundary Value Problem*).

**Problem 3.2.1 (MIBVP)** Gegeben seien  $K \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}} \in \mathbb{R}$  mit  $x_{\text{links}} < x_{\text{rechts}}$ . Zu  $T > 0$  ist

$$G(T) := [t_0, t_0 + T] \times [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$$

ein Gebiet, auf dem eine Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  der folgenden Anfangsrandwertaufgabe gesucht wird.

#### 1. (Dgl.-System)

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} &= \mathbf{b}(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \partial_t v_- + \lambda_-(t, x, \mathbf{u}) \cdot \partial_x v_- &= g_-(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \partial_t v_+ + \lambda_+(t, x, \mathbf{u}) \cdot \partial_x v_+ &= g_+(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_K)$  und  $\mathbf{v} = (v_+, v_-)$  sind und

$$\lambda_- < 0 < \lambda_+ \quad (3.8)$$

gelte.

**2. (Anfangsdaten)**  $\mathbf{u}(t_0, x) = \mathbf{u}_0(x)$  und  $\mathbf{v}(t_0, x) = \mathbf{v}_0(x)$  für alle  $x \in [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$ .

#### 3. (Randdaten)

$$\begin{aligned} v_+(t, x_{\text{links}}) &= \phi_+(t, \mathbf{u}(t, x_{\text{links}}), v_-(t, x_{\text{links}})) \\ v_-(t, x_{\text{rechts}}) &= \phi_-(t, \mathbf{u}(t, x_{\text{rechts}}), v_+(t, x_{\text{rechts}})). \end{aligned}$$



### 3.2 Stetige Lösung des Mixed Initial Boundary Value Probl.

---

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Systemgrößen  $\lambda_{\pm}$ ,  $g_{\pm}$ ,  $\mathbf{b}$  und die Daten  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\phi_{\pm}$  findet man ein  $T > 0$  und eine fast überall stetig differenzierbare Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  von Problem 3.2.1.

**Satz 3.2.2** *Seien  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega > 0$  und  $T_0 > 0$  gegeben. Außer der gesuchten Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  seien alle Größen aus Problem 3.2.1 so gegeben, daß die folgenden Bedingungen gelten.*

**a)**  $b_k, g_{\pm} \in C_L^1 \left( G(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+2} \rightarrow \mathbb{R} \right)$  für  $k = 1, \dots, K$   
und  $\lambda_{\pm} \in C_L^1 \left( G(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^K \rightarrow \mathbb{R} \right)$  mit (3.8).

**b)**  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in C_L^1 \left( [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}] \rightarrow \mathbb{R}^{K+2} \right)$  mit

$$\|(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\| < \frac{1}{4}\Omega, \quad (3.9)$$

wobei  $\|\cdot\|$  das Maximum der komponentenweisen Supremumsnormen ist.

**c)**  $\phi_{\pm} \in C_L^1 \left( G(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+1} \rightarrow \mathbb{R} \right)$  mit  $\|\phi_{\pm}\| < \frac{1}{4}\Omega$  und den folgenden Eckbedingungen 0. Ordnung

$$\begin{aligned} (v_+)_{\mathbf{0}}(x_{\text{links}}) &= \phi_+(t_0, \mathbf{u}_0(x_{\text{links}}), (v_-)_{\mathbf{0}}(x_{\text{links}})), \\ (v_-)_{\mathbf{0}}(x_{\text{rechts}}) &= \phi_-(t_0, \mathbf{u}_0(x_{\text{rechts}}), (v_+)_{\mathbf{0}}(x_{\text{rechts}})) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dann findet man ein  $T \in ]0, T_0[$  derart, daß eine  $C_L^0$ -Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  existiert auf  $G(T) = [t_0, t_0 + T] \times [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$  mit folgenden Eigenschaften

**i)** Die Lösung ist beschränkt:  $\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| < \Omega$ .

- ii) Sei  $\gamma_{\text{links}}$  (bzw.  $\gamma_{\text{rechts}}$ ) die Grenzcharakteristik im Sinne von Definition 3.2.3. Seien

$$G_{\text{IVP}} := \{(t, x) \in G(T); \quad \gamma_{\text{links}}(t) \leq x \leq \gamma_{\text{rechts}}\}$$

und

$$G_{\text{CBVP}} := \overline{G(T) \setminus G_{\text{IVP}}}$$

das Abhängigkeitsgebiet der Anfangsdaten und der Abschluß des übrigen Gebietes. Sowohl auf  $G_{\text{IVP}}$  als auch auf  $G_{\text{CBVP}}$  ist  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  Lipschitz-stetig differenzierbar. Auf beiden Gebieten sind daher die Ableitungen in (3.7) wohldefiniert.

- iii) Die Anfangs- und Randdaten passen zusammen:

$$v_+(t_0+, x_{\text{links}}) = v_+(t_0, x_{\text{links}}+)$$

$$\text{und } v_-(t_0+, x_{\text{rechts}}) = v_-(t_0, x_{\text{rechts}}-),$$

wobei etwa  $v_+(t_0\pm, x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} v_+(t_0 \pm \varepsilon, x)$  den einseitigen Grenzwert abkürze.

Der **Beweis von Satz 3.2.2** steht auf Seite 94.

*Bemerkungen zu diesem Satz*

Die Behauptung **i)** ermöglicht erst die Wohldefiniertheit des Systems, weil die Größen aus **a)** und **c)** nur für solche  $\mathbf{u}$ - (bzw.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ -) Werte definiert sind. Dann gilt auch (3.8) mit der Konsequenz, daß unser System (3.7) **hyperbolisch** ist.

Mit Behauptung **ii)** ist vereinbar, daß  $(\mathbf{u}, v_-)$  entlang Kurven, die  $\gamma_{\text{links}}$  transversal schneiden, knicken könnte. Entsprechend springt die zu  $\gamma_{\text{rechts}}$  transversale Ableitung von  $(\mathbf{u}, v_+)$  möglicherweise.

Die Behauptung **iii)** ist zwar schon in  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in C_L^0(G(T))$  enthalten. Sie wird dennoch aufgeführt, um den Zweck der Eckbedingung (3.10) zu verdeutlichen.

### 3.2 Stetige Lösung des Mixed Initial Boundary Value Probl.

---

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $t_0 = 0$  und  $x_{\text{links}} = 0$  angenommen werden (siehe Abschnitt 7.1.1, Seite 209).

Für unsere Anwendung arbeiten wir in  $\|u\| < \Omega$  nicht mit  $u = (R, M, \varrho, U)$ , sondern mit

$$u = (R - R_0, M - M_0, \varrho - \varrho_0, U - U_0).$$

Diese **Zentrierung** wird im Abschnitt 4.4.5 ab Seite 119 beschrieben.

Der Satz liefert nur eine zeitlich lokale Lösung, weil  $T > 0$  beliebig klein sein kann. Allerdings ist  $T$  **a-priori** bestimmt, d.h. allein aus  $K, T_0, \Omega$  sowie den Normen der Größen  $\lambda_{\pm}, g_{\pm}, \mathfrak{b}$  und der Daten  $u_0, v_0, \phi_{\pm}$  berechenbar.

In **zeitlich umgekehrter Richtung** liefert der Satz eine Lösung, indem man  $\lambda_{\pm}, \mathfrak{b}$  und  $g_{\pm}$  mit  $-1$  multipliziert.

*Bemerkungen zur Anfangsfläche  $[t = 0]$*

Denkt man an kugelsymmetrische Koordinaten, so beschreibt ein  $(t, x) = (t, r)$  eine Sphäre mit örtlicher Bezeichnung  $r$  im Zeitpunkt  $t$ . Eine Menge  $[t = 0]$  ist daher ein Drehungs-invarianter 3-D-Ortsraum, also eine Hyperfläche in der 4-D-Raumzeit. Daher sprechen wir von Anfangsdaten**fläche**, obwohl es sich um eine Kurve  $[t = 0] \subset \mathbb{R}^2$  handelt.

Der Satz 3.2.2 ist auch wahr für eine beliebige, nirgends charakteristische Anfangsfläche  $[t = t_0(x)]$ , wobei also  $t_0$  aus  $C_L^1([0, x_{\text{rechts}}] \rightarrow [0, T])$  so gegeben sein muß, daß

$$t'_0(x) \cdot \lambda(t, x, u_0(x))|_{t=t_0(x)} \neq 1 \quad \text{für alle } x \in [0, x_{\text{rechts}}],$$

alle Eigenwerte  $\lambda$  und die gegebene Anfangsdatenfunktion  $u_0$ , für die  $u_0(x) = u(t_0(x), x)$  gelten soll, erfüllt ist.

Für die numerische Praxis will man aber  $t_0 \equiv 0$  haben, um Programmieraufwand und Speicherbedarf zu sparen. Durch die Transformation

$$t^* = t - t_0(r), r^* = r,$$

also  $\partial_t = \partial_{t^*}$ ,  $\partial_r = -t'_0(r) \cdot \partial_{t^*} + \partial_{r^*}$  geht eine Anfangsfläche  $[t = t_0(r)]$  in  $[t^* = 0]$  über. (Für unsere Anwendung  $t_0 = B_H$  führe ich diese Transformation (2.16) in Abschnitt 4.4.4 konkret durch.)

In den Beweisen im Abschnitt 7.2 des Anhangs habe ich die Theoreme mit einer Anfangsfläche  $[t = t_0(x)]$  formuliert, weil dadurch eine fast einheitliche Behandlung der Abschätzungen für IVP und CBVP möglich wird (vgl. die beiden Fälle **i**) und **ii**) in Satz 7.2.2).

### Grenzcharakteristiken

Die beiden Grenz-Charakteristiken, die von der Ecke aus in das Lösungsgebiet hinein laufen, werden wie folgt definiert.

**Definition 3.2.3** Sei  $(u, v) \in C_L^0(G(T) \rightarrow [-\Omega, \Omega]^{K+2})$  eine Lösung von (3.7). Die Lösung  $\gamma_{\text{links}}$  (bzw.  $\gamma_{\text{rechts}}$ ) der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \gamma'_{\text{links}}(t) &= \lambda_+(t, \gamma_{\text{links}}(t), \mathbf{u}(t, \gamma_{\text{links}}(t))) \\ (\text{bzw. } \gamma'_{\text{rechts}}(t) &= \lambda_-(t, \gamma_{\text{rechts}}(t), \mathbf{u}(t, \gamma_{\text{rechts}}(t)))) \end{aligned}$$

mit Anfangswert  $\gamma_{\text{links}}(t_0) = x_{\text{links}}$  (bzw.  $\gamma_{\text{rechts}}(t_0) = x_{\text{rechts}}$ ) heißt die **linke** (bzw. **rechte**) **Grenzcharakteristik**.

### 3.2.2 Lösen des Initial Value Probl. (IVP)

Das Anfangsrandwertproblem 3.2.1 wird durch Verzicht auf die Randdaten zum Anfangswertproblem (IVP). Dieses läßt sich mit bekannten Sätzen lösen, siehe etwa<sup>19</sup> [LiWu92, Theorem 4.1, S.66 und Theorem 4.2, S. 74].

---

<sup>19</sup>Abgesehen von Courant und Hilbert [Cour66] gibt auch Garabedian [Gara64, Abschnitt 4.3] einen Beweis für IVP-Lösungen an, in dem er iterativ entlang der Charakteristiken integriert.

### 3.2 Stetige Lösung des Mixed Initial Boundary Value Probl.

---

**Satz 3.2.4 (IVP)** Seien  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega > 0$  und  $T_0 > 0$  gegeben. Außer der gesuchten Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  seien alle Größen aus **1.** und **2.** von Problem 3.2.1 so gegeben, daß die Bedingungen **a)** und **b)** aus Satz 3.2.2 gelten.

Dann findet man ein  $T \in ]0, T_0[$  derart, daß auf

$$G_{\text{IVP}}(T) := \{(t, x) \in G(T); \quad \gamma_{\text{links}}(t) \leq x \leq \gamma_{\text{rechts}}(t)\} \quad (3.11)$$

eine  $C_L^1$ -Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  existiert mit  $\|(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \leq \frac{1}{2}\Omega$ , wobei  $\gamma_{\text{links}}$  (bzw.  $\gamma_{\text{rechts}}$ ) die linke (bzw. rechte) Grenzcharakteristik ist.

Einen **Beweis**, der sich meiner Methoden bedient, steht in Abschnitt 7.2.4. Darin wird lediglich Satz 7.2.15 von Seite 225 auf eine Fortsetzung des Problems angewandt, um die Lösung in  $[\text{maximales Abhängigkeitsgebiet}] \cap G(T)$  zu erhalten.



und  $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_{K+1} \leq 0 < \underline{\lambda}_+$ .

**2. (Grenzdaten)**

$\underline{u} \left( (\gamma_{\text{links}})^{-1}(x), x \right) = \mathbf{u}_{\text{Grenze}}(x)$  für alle  $x \in [0, x_{\text{rechts}}]$ .

**3. (Randdaten)**  $v_+(t, 0) = \phi_+(t, \underline{u}(t, 0))$  für alle  $t \in [0, T]$ .

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Größen  $\underline{\lambda}_k, \underline{\lambda}_+, g_k, g_+$  und die Daten  $\mathbf{u}_{\text{Grenze}}, \phi_+$  findet man ein  $T > 0$  und eine fast überall stetig differenzierbare Lösung  $(\underline{u}, v_+)$  von Problem 3.2.5.

In Problem 3.2.5 wurde das System (3.7) etwas verallgemeinert<sup>22</sup> zu (3.14), weil nunmehr nur noch eine Unbekannte ausgezeichnet ist, nämlich  $v_+$ , welche tangential zur Grenzcharakteristik propagiert wird. In dieser Formulierung läßt sich das CBVP 3.2.5 mit funktionalanalytischen Methoden leicht lösen, wozu das Buch von Li und Wu [LiWu92] nützliche Hinweise gab. In Abschnitt 7.2.3 des Anhangs befindet sich der vollständige Beweis von

**Satz 3.2.6 (CBVP)** Seien  $K \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega > 0$  und  $T_0 > 0$  gegeben. Außer der Lösung  $(\underline{u}, \mathbf{v})$  seien alle Größen aus Problem 3.2.5 so gegeben, daß die folgenden Bedingungen gelten.

**a)**  $g_1, g_2, \dots, g_{K+1}, g_+ \in C_L^1 \left( G(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+2} \rightarrow \mathbb{R} \right)$  und

$$\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_K, \underline{\lambda}_+ \in C_L^1 \left( G(T_0) \times [-\Omega, \Omega]^{K+1} \rightarrow \mathbb{R} \right)$$

---

<sup>22</sup>Die Systeme gehen ineinander über durch

CBVP 3.2.5	MIBVP 3.2.1
$\underline{u}, v_+$	$(\mathbf{u}, v_-), v_+$
$(\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_{K+1}, \underline{\lambda}_+)$	$(0, 0, \dots, 0, \lambda_-, \lambda_+)$
$(\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_{K+1}, g_+)$	$(\mathbf{b}, g_-, g_+)$

b)  $\mathbf{u}_{\text{Grenze}} \in C_L^1(\gamma_{\text{links}}([0, T_0]) \rightarrow \mathbb{R})$  mit

$$\|\mathbf{u}_{\text{Grenze}}\| \leq \frac{1}{2}\Omega, \quad (3.15)$$

wobei  $\|\cdot\|$  das Maximum der komponentenweisen Supremumsnormen ist.

c)  $\phi_+ \in C_L^1\left([0, T_0] \times [-\Omega, \Omega]^K \rightarrow \mathbb{R}\right)$ .

Dann findet man ein  $T \in ]0, T_0[$  derart, daß auf  $G_{\text{CBVP}}(T)$  aus (3.12) eine  $C_L^1$ -Lösung  $(\underline{\mathbf{u}}, v_+)$  existiert mit  $\|(\underline{\mathbf{u}}, v_+)\| \leq \Omega$ .

Im Unterschied zu Satz 3.2.2 gibt es bei diesem CBVP keine Eckbedingung<sup>23</sup>! Für die den Randdaten unterworfenen Größe  $v_+$  aus (3.14) gibt es nämlich keine Datenvorgabe auf der Grenzcharakteristik (und umgekehrt keine Randdaten für  $\underline{\mathbf{u}}$ ). Dafür taucht die Zusatzbedingung „ $\gamma_{\text{links}}$  ist Grenzcharakteristik“ (3.13) auf.

Der **Beweis** dieses Satzes, der ein Spezialfall (des CBVP-Falles) von Satz 7.2.15 ist, steht im Anhang ab Seite 226.

### 3.2.4 Zusammensetzen der Teillösungen

Die Bedingung (3.13) ist mit

$$\mathbf{u}_{\text{Grenze}}(x) := (\mathbf{u}, v_-)_{\text{IVP}}(\gamma_{\text{links}}^{-1}(x), x) \quad (3.16)$$

zu erfüllen<sup>24</sup>, wenn man auf eine Lösung von Problem 3.2.1 hinaus will.

---

<sup>23</sup>Deshalb wird hier von CBVP und **nicht** von **gemischter** (Grenz-)Charakteristik-Randwert-Aufgabe (MCBVP) gesprochen.

<sup>24</sup>man beachte  $\gamma'_{\text{links}}(t) =$

$$\lambda_+(t, \gamma_{\text{links}}(t), \mathbf{u}(t, \gamma_{\text{links}}(t))) = \underline{\lambda}_+(t, \gamma_{\text{links}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t, \gamma_{\text{links}}(t)))$$

gemäß Fußnote 22



### 3.2 Stetige Lösung des Mixed Initial Boundary Value Probl.

---

Aber wo ist die Eckbedingung geblieben? Tatsächlich hat man, sobald das CBVP 3.2.5 mit (3.16) gelöst wird, Lipschitzstetig differenzierbare Lösungen sowohl auf  $G_{\text{IVP}}(T)$  als auch auf  $G_{\text{CBVP}}(T)$  vorliegen, ohne sich um die Eckbedingung gekümmert zu haben. Diese taucht nun beim Zusammensetzen<sup>25</sup> wieder auf.

**Bemerkung 3.2.7** Die Lösung  $\underline{u} = (u, v_-)_{\text{IVP}}$  ist entlang der Grenze  $\gamma_{\text{links}}$  stetig, wenn das CBVP mit den richtigen Grenzdaten (3.16) gelöst wird. Im Unterschied dazu ist die Größe  $v_+$  auf der Grenze  $\gamma_{\text{links}}$  genau dann stetig, wenn die Eckbedingung 0-ter Ordnung

$$(v_+)_{\text{IVP}}(0, 0) = \phi_+(0, u(0, 0))$$

erfüllt ist.

**Beweis** Die Größe  $v_+$  auf der Grenze  $\gamma_{\text{links}}$  läßt sich direkt aus (3.7) bestimmen. Dort muß  $\partial_t v_+ + \gamma'_{\text{links}} \partial_x v_+ = g_+$  gelten. Also ist  $v_+(t, \gamma_{\text{links}}(t)) = y(t)$ , wobei  $y$  die Lösung der Anfangswertaufgabe zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(s) = g_+(s, \gamma_{\text{links}}(s), u_{\text{Grenze}}(s, \gamma_{\text{links}}(s)), y(s)), y(0) = y_0 \quad (3.17)$$

ist. Dabei ist als Anfangswert  $y_0 := (v_+)_{\text{IVP}}(0, 0)$  beim IVP (bzw.  $y_0 := \phi_+(0, u(0, 0))$ ) beim CBVP) zu nehmen. Wegen der Eindeutigkeit von Lösungen der Anfangswertaufgabe gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt die Behauptung für  $(v_+)_{\text{IVP}} \cup (v_+)_{\text{CBVP}}$ .  $\square$

---

<sup>25</sup>Natürlich muß ggf.  $T$  verkleinert werden zu  $T := \min\{T_{\text{IVP}}, T_{\text{CBVP}}\}$ .

**Beweis von Satz 3.2.2:**

Man nehme die Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{IVP}} \in C_L^1(G_{\text{IVP}}(T))$  gemäß Satz 3.2.4. Man löse das CBVP mit den Grenzdaten (3.16) und Satz 3.2.6. Weil die Eckbedingung erfüllt ist, lassen sich die Lösungen nach Bemerkung 3.2.7 stetig zusammensetzen.

Zu zeigen bleiben noch die Lipschitz-stetige Differenzierbarkeit auf den Grenzcharakteristiken, oBdA auf  $\gamma_{\text{links}}$ . In  $G_{\text{IVP}}$  (bzw.  $G_{\text{CBVP}}$ ) sind nach Voraussetzung alle Größen Lipschitz-stetig differenzierbar<sup>26</sup>. Also sind auch die Ableitungen von  $\underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, v_-)$  entlang des gemeinsamen Randes  $\gamma_{\text{links}}$  Lipschitz-stetig. Weil eine stetige Funktion  $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann stetig differenzierbar ist, wenn beide partielle Ableitungen existieren und stetig sind, geht es jetzt um die stetige Differenzierbarkeit von  $\underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, v_-)$  entlang Kurven, welche die Grenze nicht-tangential schneiden. Nach (3.7) bzw. deren Verallgemeinerung<sup>27</sup> (3.14) sind tatsächlich (für  $k = 1, 2, \dots, K$ )

$$\partial_t u_k = \partial_t \underline{u}_k + \lambda_k(\underline{\mathbf{u}}) \cdot \partial_x \underline{u}_k$$

und

$$(\partial_t + \lambda_-(\mathbf{u}) \cdot \partial_x) v_- = \partial_t \underline{u}_{K+1} + \lambda_{K+1}(\underline{\mathbf{u}}) \cdot \partial_x \underline{u}_{K+1}$$

stetig<sup>28</sup>. Also ist  $(\mathbf{u}, v_-)$  auch auf der Grenzcharakteristik Lipschitz-stetig differenzierbar.  $\square$

### 3.3 MIBVP mit anderen Eckbedingungen

In Abschnitt 3.2 wurde (unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.2) eine Lösung von MIBVP 3.2.1 gewonnen, die außerhalb der Grenzcharakteristiken Lipschitz-stetig differenzierbar

---

<sup>26</sup>Eine Lipschitzkonstante der Ableitung ist das Maximum der Lipschitzkonstanten der Ableitungen in  $G_{\text{IVP}}$  und  $G_{\text{CBVP}}$ .

<sup>27</sup>vgl. Fußnote 22

<sup>28</sup>Dagegen wird  $(\partial_t + \lambda \cdot \partial_x) v_+$  für  $\lambda \neq \gamma'_{\text{links}}$  auf  $\gamma_{\text{links}}$  genau dann springen, wenn die Eck-Bedingung 1-ter Ordnung verletzt ist.

ist, aber auf den Grenzcharakteristiken zumindest Lipschitz-stetig ist. Aus stetig verträglichen  $C_L^1$ -Daten gewinnt man also eine stetige Lösung. Bei erfüllter Eckbedingung erster Ordnung, d.h. bei stetig differenzierbar verträglichen  $C_L^1$ -Daten wird man eine  $C_L^1$ -Lösung erwarten.

### 3.3.1 $C_L^1$ -Daten liefern $C_L^1$ -Lösung

**Satz 3.3.1** *Die Voraussetzungen von Satz 3.2.2 mögen gelten. Zusätzlich sollen gelten*

**d)** *die Eckbedingungen 1-ter Ordnung<sup>29</sup>*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_+ + \lambda_+(t_0, x_{\text{links}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{links}})) \cdot (v_+)'_0(x_{\text{links}}) &= g_+ \\ \frac{d}{dt}\phi_- + \lambda_-(t_0, x_{\text{rechts}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{rechts}})) \cdot (v_-)'_0(x_{\text{rechts}}) &= g_- \end{aligned}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_+ &:= \partial_t\phi_+ + \underbrace{\partial_{\mathbf{u}}\phi_+ \cdot \mathbf{b}}_{\partial_t\mathbf{u}} \\ &+ \underbrace{\partial_{v_-}\phi_+ \cdot (g_- - \lambda_-(t_0, x_{\text{links}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{links}})) \cdot (v_-)'_0)}_{=:\partial_t v_-(t_0, x_{\text{links}}+)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi_- &:= \partial_t\phi_- + \partial_{\mathbf{u}}\phi_- \cdot \mathbf{b} \\ &+ \partial_{v_+}\phi_- \cdot (g_+ - \lambda_+(t_0, x_{\text{rechts}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{rechts}})) \cdot (v_+)'_0) \end{aligned}$$

benutzt wurden und außerdem alle unterdrückte Argumente sinngemäß aus  $\{t_0, x_{\text{links}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{links}}), \mathbf{v}_0(x_{\text{links}})\}$  (bzw. aus  $\{t_0, x_{\text{rechts}}, \mathbf{u}_0(x_{\text{rechts}}), \mathbf{v}_0(x_{\text{rechts}})\}$ ) zu ergänzen sind.

<sup>29</sup>Es muß in der linken Ecke das aufgrund der Randwertvorgabe ermittelte  $\partial_t v_+(0+, x_{\text{links}}) = \frac{d}{dt}\phi_+$  mit dem aufgrund der Anfangswertvorgaben durch das Differentialgleichungssystem (3.7) bestimmten  $\partial_t v_+(0, x_{\text{links}}+) = g_+ - \lambda_+ \cdot v_+'_+$  übereinstimmen. Dann gilt auch  $\partial_x v_+(0+, x_{\text{links}}) = \partial_x v_+(0, x_{\text{links}}+)$ , denn nach (3.7) ist  $g_+(0, x_{\text{links}}, \mathbf{u}(0, x_{\text{links}}), \mathbf{v}(0, x_{\text{links}})) - \partial_t v_+(0, x_{\text{links}})$  dann sowohl gleich  $\partial_x v_+(0+, x_{\text{links}})$  als auch gleich  $\partial_x v_+(0, x_{\text{links}}+)$ .

### 3. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

---

Dann gibt es ein  $T \in ]t_0, t_0 + T_0]$  so, daß das Problem 3.2.1 eine eindeutige  $C_L^1$ -Lösung auf  $G(T)$  hat. Dabei ist  $T > 0$  a-priori bestimmt.

**Beweis**<sup>30</sup> Zunächst beschränkt man sich wieder auf den linken Teil (vgl. Fußnote 20) des Lösungsgebietes  $G(T)$ . Ohne Einschränkung seien  $x_{\text{links}} = 0$  und  $t_0 = 0$  (keine Einschränkung gemäß Abschnitt 7.1.1 des Anhangs). Nach den Sätzen 3.2.4 und 3.2.6 erhält man  $C_L^1$ -Lösungen  $(u, v_-, v_+)_{\text{IVP}}$  auf

$$G_{\text{IVP}} = \left\{ (t, x) \in G(T); \gamma_{\text{links}}(t) \leq x \leq \frac{1}{2}x_{\text{rechts}} \right\}$$

bzw.  $(u, v_-, v_+)_{\text{CBVP}} := (\underline{u}, v_+)$  auf

$$G_{\text{CBVP}} = \{(t, x) \in G(T); 0 \leq x \leq \gamma_{\text{links}}(t)\},$$

wobei auf der Grenzcharakteristik  $\gamma_{\text{links}}$  nach (3.16) immerhin  $(u, v_-)_{\text{CBVP}} = (u, v_-)_{\text{IVP}}$  gilt.

Wie im Beweis von Satz 3.2.2 auf Seite 94 zeigt man  $(u, v_-) \in C_L^1(G(T))$  und  $(u, v_-, v_+) \in C_L^0(G(T))$ . Zu zeigen bleibt nur noch die Lipschitz-Stetigkeit der Ableitungen von  $v_+$  auf  $\gamma_{\text{links}}$ . Wegen  $(\partial_t + \gamma'_{\text{links}} \cdot \partial_x)v_+ \in C_L^0$  (nach (3.7)) genügt es,

$$(\partial_x v_+)_{|\gamma_{\text{links}}} \in C_L^0 \tag{3.18}$$

zu beweisen. Dazu greifen wir auf Formeln aus dem Anhang 7.2 des vorigen Abschnitts 3.2 zurück. Wir setzen

$$\tilde{\lambda} : z \mapsto \lambda_+(z, \mathbf{u}(z)) = \underline{\lambda}_+(z, \underline{\mathbf{u}}(z))$$

und  $\tilde{g} : z \mapsto g_+(z, (u, v_-, v_+)(z))$ . Entsprechend Definition 7.2.1 bezeichne  $\gamma(\cdot, z)$  die durch  $z = (t, x) \in G_{\text{IVP}} \cup G_{\text{CBVP}}$

---

<sup>30</sup>Ich notiere den Beweis hier, statt ihn aus der Literatur zu zitieren, weil man darin wieder die Wirkung der Eckbedingung verfolgen kann.

laufende und zu  $\tilde{\lambda}$  gehörende Charakteristik. Für  $z \in G_{\text{IVP}}$  gilt nach (7.9) mit  $\tau_0 \equiv 0$  und  $x_0(s) = s$

$$\begin{aligned} \partial_x v_+(t, x) &= (v_+)'_0(\gamma(0, z)) \cdot \partial_x \gamma(0, z) \\ &+ \int_0^t \partial_2 \tilde{g}(\hat{\tau}, \gamma(\hat{\tau}, z)) \cdot \partial_x \gamma(\hat{\tau}, z) \, d\hat{\tau}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für  $z \in G_{\text{CBVP}}$  gilt nach (7.10) mit  $\tau_0$  aus (7.8)<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \partial_x v_+(t, x) &= \tilde{\phi}'_0(\tau_0(z)) \cdot \partial_x \tau_0(z) - \partial_x \tau_0(z) \cdot \tilde{g}(\tau_0(z), 0) \\ &+ \int_{\tau_0(z)}^t \partial_2 \tilde{g}(\hat{\tau}, \gamma(\hat{\tau}, z)) \cdot \partial_x \gamma(\hat{\tau}, z) \, d\hat{\tau}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei  $\tilde{\phi}_0 : t \mapsto \phi_+(t, (u, v_-)(t))$  einzusetzen ist.

Der Grenzübergang  $x \rightarrow \gamma_{\text{links}}(t)$  liefert  $\tau_0(z) \rightarrow 0$  und somit die Gleichheit der Integrale aus (3.19) und (3.20). Für die Differenz der Grenzwerte gilt daher und weil sowohl  $\tilde{\phi}'_0, \tilde{g}, (v_+)'_0$  als auch  $\partial_x \gamma, \partial_x \tau_0$  stetig sind,

$$\begin{aligned} \partial_x v_+(t, \gamma_{\text{links}}(t) -) - \partial_x v_+(t, \gamma_{\text{links}}(t) +) &= \\ &= \left( \tilde{\phi}'_0(0) - \tilde{g}(0, 0) \right) \cdot \partial_x \tau_0(z) - (v_+)'_0(0) \cdot \partial_x \gamma(0, z). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nach (7.18) mit  $s = 0$  und  $\xi = 0$  gilt

$$\partial_x \tau_0(z) = -\frac{1}{\tilde{\lambda}(0, 0)} \cdot \partial_x \gamma(0, z).$$

Setzt man dies in (3.21) ein, so verschwindet die rechte Seite von (3.21) infolge der Eckbedingung **d**). Damit ist (3.18) bewiesen.  $\square$

---

<sup>31</sup>mit  $X_0 \equiv 0$  und  $t_0(x) = x$ , was nach der Bemerkung hinter (7.11) zulässig ist.

### 3.3.2 Lösung des MIBVP mit Sprung entlang der Eckcharakteristik

Gelöst werden soll nun das MIBVP mit unverträglichen Eckdaten, d.h. die Eckbedingung 0-ter Ordnung soll verletzt sein:  $v_+(t_0+, x_{\text{links}}) \neq v_+(t_0, x_{\text{links}}+)$ . Dieses Anfangsrandwertproblem (MIBVP) läßt sich mit den Sätzen aus Abschnitt 3.2 leicht lösen.

**Satz 3.3.2** *Von den Voraussetzungen aus Satz 3.2.2 seien alle Bedingungen außer (3.10) erfüllt. Stattdessen gelte*

$$(v_+)_0(x_{\text{links}}) \neq \phi_+(t_0, \mathbf{u}_0(x_{\text{links}}), (v_-)_0(x_{\text{links}})) \quad .$$

*Dann findet man ein  $T \in ]0, T_0]$  so, daß auf  $G(T)$  eine Lösung  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  von Problem 3.2.1 existiert, die den Behauptungen **i)** und **ii)** aus Satz 3.2.2 genügt. Anstelle von **iii)** gilt*

$$v_+(t+, \gamma_{\text{links}}(t)) \neq v_+(t, \gamma_{\text{links}}(t) +) \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_0 + T] .$$

*Außerdem sind  $\mathbf{v}_-$  und  $\mathbf{u}$  stetig.*

**Beweis** Zunächst erhält man Teillösungen wie im ersten Abschnitt des Beweises des vorigen Satzes 3.3.1.

Es fehlt noch das Verhalten von Ableitungen in zu  $\gamma_{\text{links}}$  transversaler Richtung. Die stetige Größe  $\mathbf{u}$  hat dabei einen Knick, d.h. die links- und rechtsseitigen Ableitungen existieren, sind aber i.allg. verschieden. Ihr Maximum ist eine Lipschitz-Konstante, so daß  $\mathbf{u} \in C_L^0(G(T, X))$  gezeigt ist. Der Sprung von  $v_+$  auf  $\gamma_{\text{links}}$  ergibt sich aus der Unverträglichkeit der Eckdaten und der Stetigkeit der Teillösungen<sup>32</sup> (auf  $G_{\text{IVP}}$  und  $G_{\text{CBVP}}$ ).  $\square$

---

<sup>32</sup>Die Beweise aus Abschnitt 7.2.3 liefern auch a-priori-Schranken für die Veränderung von  $v_+$  entlang  $\gamma_{\text{links}}$ . Darum bleibt ein anfänglicher Sprung für eine im voraus bestimmte Zeit erhalten.