Analyse des Einflusses der Werkstoffdegradation auf die nichtlineare Wellenausbreitung in unidirektionalen Compositen

– Experimentelle Untersuchung mit numerischer Analyse und Modellbildung –

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades einer Doktor-Ingenieurin
genehmigte

DISSERTATION
vorgelegt von

Natalie Rauter, MSc.

aus Essen

Hamburg 2016

Referent:
Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering
Helmut-Schmidt-Universität /
Universität der Bundeswehr Hamburg

Koreferent:
Prof. Dr. Thomas Schuster
Universität des Saarlandes

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Dezember 2016

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Professur für Mechanik der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg.

Herr Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering gab mir die Möglichkeit mich mit diesem interessanten Thema auseinander zu setzen. Besonders möchte ich mich bei ihm für das mir entgegengebrachte Vertrauen sowie die vielen fachlichen Diskussionen bedanken, deren Ergebnisse in vielerlei Hinsicht wesentlich zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. Thomas Schuster danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Bedanken möchte ich mich ebenfalls bei meinen Kollegen, welche eine Atmosphäre schufen, welche geprägt war von einem regen fachlichen Austausch. Die daraus resultierenden Anregungen trugen mit zu dem Gelingen dieser Arbeit bei.

Schlussendlich gebührt meiner Familie ein ganz besonderer Dank für die stetige Unterstützung.

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Möglichkeit der Verwendung der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Basis der Generierung höher harmonischer Moden auf Grund von mikrostrukturellen Schäden in Faserverbundstrukturen analysiert. Es wird mit Hilfe experimenteller Untersuchungen gezeigt, dass die infolge zyklischer Zugbeanspruchung entstehende Werkstoffdegradation mit dem relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter korreliert. Um die auf mikrostrukturellen Schäden beruhende Werkstoffdegradation und die daraus resultierende nichtlineare Wellenausbreitung numerisch abzubilden, wird ein hyperelastisches Materialmodell für faserverstärkte Kunststoffe entwickelt. Im Gegensatz zu den bekannten Formulierungen aus der Biomechanik werden dabei kompressible Effekte berücksichtigt und die Verwendung der modifizierten Invarianten vermieden. Ferner kann im Vergleich zu der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan die Anzahl der benötigten Materialkonstanten auf sechs reduziert werden. Die durchgeführten numerischen Simulationen bestätigen die Anwendbarkeit dieses nichtlinearen Materialmodells zur Abbildung der Entstehung und Ausbreitung höher harmonischer Moden in unidirektionalen Faserverbundstrukturen bei der Wellenausbreitung entlang einer Symmetrieachse.

Abstract

In this work the applicability of the nonlinear wave propagation based on the higher harmonic mode generation due to microstructural damage in fiber reinforced structures is analyzed. Experimental investigations show, that the material degradation induced by cyclic tensile loading correlates with the relative acoustical nonlinearity parameter. To reproduce the material degradation due to the microstructural damage and the resulting nonlinear wave propagation numerically a hyperelastic material model for fiber reinforced plastics is developed. In contrast to the already existing biomechanical potentials compressibility effects are considered and the use of the modified invariants is avoided. In addition the amount of the required material parameters can be reduced to six in contrast to the nonlinear potential by Murnaghan. The numerical simulations carried out confirm the applicability of this nonlinear material model for the representation of the higher harmonic mode generation and propagation in unidirectional composite structures for the wave propagation along a symmetry axis.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **i**

Kurzfassung **iii**

Abstract **iii**

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation . . . 1
1.2 Stand der Forschung . . . 3
1.3 Ziel und Gliederung der Arbeit . . . 8

2 Nichtlineare Kontinuumsmechanik **11**
2.1 Kinematische Beziehungen . . . 11
2.2 Kinetische Größen . . . 14
2.3 Bilanzgleichungen . . . 16
2.4 Konstitutive Gleichungen hyperelastischer Materialmodelle . . . 17
2.4.1 Allgemeines . . . 18
2.4.2 Isotrope lineare Beschreibung . . . 20
2.4.3 Phänomenologische isotrope nichtlineare Modelle . . . 21
2.4.4 Transversal-isotrope lineare Ansätze . . . 22
2.4.5 Biomechanische Modelle . . . 23
2.4.6 Fünf-Konstanten-Theorie . . . 23
2.5 Wellen in dünnwandigen Flächentragwerken . . . 25
2.5.1 Nichtlineare Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Ausbreitung von Lamb-Wellen . . . 25
2.5.2 Lineare Lösung für die Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten . . . 27
2.5.2.1 Christoffel-Gleichung . . . 27
2.5.2.2 Wellenausbreitung ohne Entkopplungseffekt . . . 29
2.5.2.3 Wellenausbreitung mit Entkopplungseffekt . . . 32
2.5.2.4 Verschiebungsfelder . . . 37
2.5.3 Nichtlineare Lösung für die Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten . . . 38
2.5.3.1 Reziprozitätsbeziehung . . . 38
2.5.3.2 Normal mode expansion technique . . . 38
2.5.3.3 Lösung für die Amplitude des sekundären Wellenfelds . . . 39
2.5.3.4 Interne Resonanz . . . 40
2.5.3.5 Kumulative Modenpaare . . . 41
2.5.4 Nichtlineare Akustik der Kontaktstelle . . . 44

2.5.5 Relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter 46

3 Experimentelle Untersuchung der Werkstoffdegradation 49
3.1 Methoden der Signalanalyse 49
3.1.1 Methoden der FOURIER-Analyse 49
3.1.2 Wavelet-Transformation 52
3.2 Vorbereitung der Proben 55
3.2.1 Geometrie und Aufbau der Proben 55
3.2.2 Ermüdungsversuche 55
3.2.3 Analyse der Schadensenstehung 56
3.3 Analyse der Wellenausbreitung 58
3.3.1 Versuchsaufbau und -durchführung 58
3.3.2 Signalverarbeitung 59
3.3.3 Untersuchung des Einflusses von Störfaktoren 60
3.3.4 Ergebnisse 61
3.4 Untersuchung der mechanischen Materialeigenschaften 62
3.4.1 Versuchsaufbau und -durchführung 62
3.4.2 Messfehlerbetrachtung und Ergebnisse 63
3.5 Korrelationsanalyse 65

4 Numerische Analyse der experimentellen Untersuchungsergebnisse 69
4.1 Nichtlineare Finite-Element-Methode 69
4.1.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen 69
4.1.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen 72
4.1.3 Diskretisierung unter Verwendung des isoparametrischen Konzepts . 73
4.1.4 Anwendung auf das linearisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen 76
4.1.5 NEWTON-RAPHSON-Verfahren 77
4.1.6 NEWMARK-Verfahren 79
4.1.7 Kontaktprobleme 80
4.2 Analyse der Wellenausbreitung 82
4.2.1 Numerisches Modell und Simulation 82
4.2.2 Höher harmonische Moden und kumulativer Effekt 87
4.2.3 Relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter 88
4.3 Untersuchung der Materialeigenschaften 89
4.3.1 Numerisches Modell und Simulation 89
4.3.2 Ergebnisse 89
4.4 Korrelationsanalyse 91
4.5 Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse 91
4.5.1 Vergleich 91
4.5.2 Analyse weiterer Einflussfaktoren 91
4.5.3 Fazit 92

5 Abbildung der Werkstoffdegradation durch ein nichtlineares Materialmodell 95

5.1 Isotrope Modellbildung . . . 95
5.1.1 Analyse des Einflusses der Nichtlinearität auf das Materialverhalten und die Wellenausbreitung . . . 95
5.1.2 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung . . . 99
5.1.2.1 Analytische Betrachtung . . . 99
5.1.2.2 Numerisches Modell und Simulation . . . 103
5.1.2.3 Analyse des Amplitudenverhaltens . . . 105
5.1.2.4 Quasi kumulative Wellenausbreitung . . . 107
5.2 Erweiterung der Modellbildung auf transversal-isotropes Materialverhalten 110
5.2.1 Entwicklung eines transversal-isotropen hyperelastischen nichtlinearen Materialmodels . . . 110
5.2.1.1 Potentialfunktion . . . 110
5.2.1.2 Bestimmung der Materialparameter . . . 111
5.2.1.3 Untersuchung der Leistungsflussbedingung . . . 113
5.2.2 Validierung . . . 115
5.2.2.1 Statische Validierung . . . 115
5.2.2.2 Dynamische Validierung . . . 117
5.2.3 Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung . . . 119
5.2.3.1 Numerisches Modell und Simulation . . . 119
5.2.3.2 Analyse des Amplitudenverhaltens . . . 120
5.2.3.3 Quasi kumulative Wellenausbreitung . . . 121
5.2.4 Analyse der Abbildung des nichtlinearen Verhaltens im Stoffgesetz . 123
5.2.4.1 Statische Analyse . . . 123
5.2.4.2 Dynamische Analyse . . . 124
5.3 Fazit . . . 127

6 Zusammenfassung und Ausblick 129

Literaturverzeichnis 133

A Ergänzungen zur nichtlineare Kontinuumsmechanik 145
A.1 Dispersionsbeziehungen . . . 145
A.1.1 Getrennte Dispersionsbeziehungen für die symmetrischen und antisymmetrischen Lamb- und SH-Wellenmoden in Einzelschichten . . 145
A.1.2 Herleitung der Rayleigh-Lamb Wellengleichung aus der Dispersionsbeziehung für die Lamb-Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten . . . 147
A.2 Leistungsflussbedingung . . . 149
A.3 Herleitung der Lösung für das Gesamtverschiebungsfeld . . . 152

B Ergänzungen zur Modellierung 157
B.1 Leistungsflussbedingung für die verwendeten isotropen Materialmodelle . . 157
B.1.1 Allgemeines . . . 157
B.1.2 Neo-Hooke'sches Materialmodell . . . 160
B.1.3 Mooney-Rivlin Materialmodell . . . 162

B.1.4 Funktionsübersicht 165
B.2 Leistungsflussbedingung für das transversal-isotrope Materialmodell 167

Abbildungsverzeichnis **171**

Tabellenverzeichnis **175**

Nomenklatur **177**

Lebenslauf **181**

Publikationen **183**

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Um mechanische Strukturen im Sinne des Leichtbaus zu optimieren, kommt es in immer mehr Bereichen zur Verwendung faserverstärkter Kunststoffe (FVK). Blickt man hierzu auf die Entwicklung in der Flugzeugbauindustrie anhand des Beispiels von Airbus kann dies sehr gut nachvollzogen werden. Dazu ist in Abbildung 1.1 in zeitlicher Reihenfolge aufgeführt, welche Bauteile der einzelnen Flugzeugmuster aus Faserverbundwerkstoffen gefertigt werden. Angefangen bei der A300 aus den 1970er Jahren, bei der nur die strömungsmechanischen Verkleidungen (*fairings*) und die Abdeckung des Wetterradar in der Nase des Flugzeugs (*radome*) aus FVK besteht, sind mit der Zeit immer mehr Bauteile aus konventionellen Werkstoffen durch faserverstärkte Strukturen ersetzt worden. Zunächst beschränkte sich dies auf weitere Verkleidungen sowie Sekundärbauteile, wie z.B. die Steuerelemente Seiten- und Höhenruder (*rudder* bzw. *elevator*). Später erweiterte man dieses Vorgehen dann auch auf Primärbauteile. Das erste aus kohlefaserverstärktem Kunststoff gefertigte Primärbauteil ist das Seitenleitwerk (*VTP - vertical tail plane*) der A300 [72]. Bis heute wurde sukzessiv der Anteil an Bauteilen aus FVK erhöht. Bei der zuletzt in Dienst gestellten A350 sind mehr als 50% der Bauteile aus FVK, wobei auch der komplette Rumpf (*fuselage*) aus kohlefaserverstärktem Kunststoff gefertigt wird.

Im Gegensatz zu metallischen Strukturen, wo die Schadensmechanismen und das Ermüdungsverhalten sehr gut erforscht sind und entsprechende Reparatur- und Beurteilungsverfahren existieren, ist mit Bezug auf Faserverbundbauteile gerade die Schadensdetektion sehr kritisch. Begründet liegt dies vor allem in dem geschichteten Aufbau von Faserverbunden und dem daraus resultierenden Schadensmuster. Dabei muss generell zwischen dem Ermüdungsverhalten und den kritischen Impactschädigungen unterschieden werden. Im Gegensatz zu Aluminium entstehen bei FVK schon während der ersten hundert Lastzyklen mikrostrukturelle Schäden in den Bauteilen. Hierbei handelt es sich um mikrostrukturelle Risse in der Matrix sowie Faser-Matrix Ablösungen, welche mit konventionellen zerstörungsfreien Prüfverfahren (*NDT* - Non-Destructive Testing) nur sehr schwer zu detektieren sind. Darauf folgt ein Zeitraum, in dem die mikrostrukturellen Schäden nur sehr langsam wachsen. Über diesen Zeitraum kann eine geringfügige Verringerung der Steifigkeit festgestellt werden. Schlussendlich findet eine Akkumulation dieser Schäden statt, welche zu einem signifikanten Steifigkeitsverlust der Struktur führt und so in einem plötzlichen, bösartigen Strukturversagen enden kann, welches auch als *sudden-death* bezeichnet wird [50]. Demnach besteht das Ermüdungsverhalten in FVK-Bauteilen aus drei Abschnitten [90], wobei die Charakteristik der Initialschäden von besonderem Interesse ist. Neben diesen mikrostrukturellen Schäden können auch aus einem Impact resultierende

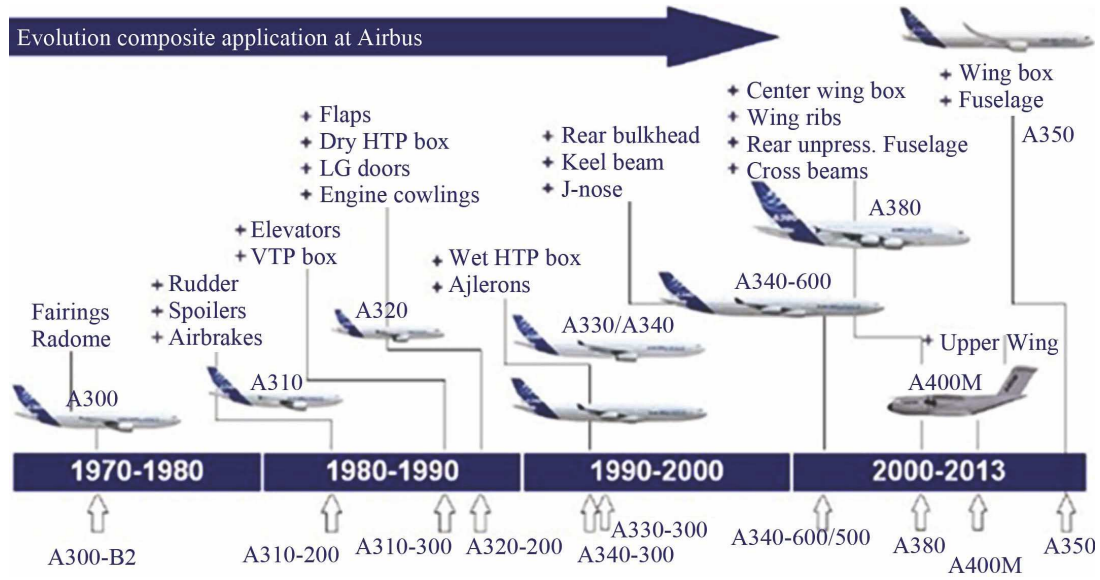


Abbildung 1.1: Entwicklung der Anwendung von Bauteilen aus faserverstärkten Kunststoffen in der zivilen Luftfahrt anhand des Beispiels Airbus [140].

und von außen nicht sichtbare Delaminationen zu einem katastrophalen Strukturversagen führen. Allerdings ist eine entsprechende Überprüfung der Struktur gerade in Hinblick auf mikrostrukturelle Schäden mit einem großen Kosten- und Zeitaufwand verbunden.

Mit Bezug auf die Flugzeugindustrie gilt an dieser Stelle, dass die Struktur *ultimate load* widerstehen können muss, so lange ein möglicher Schaden nicht detektiert werden kann. Eine frühzeitige Erkennung gerade mikrostruktureller Initialschäden und deren Entwicklung zu überwachen, ist somit äußerst erstrebenswert. Ferner bietet die in-sito Überwachung des aktuellen Zustandes der Struktur (*SHM - Structural Health Monitoring*) die Möglichkeit, ein bedarfsorientiertes Inspektionsintervall zu etablieren und eine Abschätzung der noch zu erwartenden Betriebsdauer vorzunehmen. Im Rahmen des Structural Health Monitoring gibt es verschiedene Ansätze zur Strukturüberwachung und Schadendetektion. Als besonders geeignet haben sich die Verwendung von geführten Wellen erwiesen, welche durch ein Aktor-Sensor-Netzwerk angeregt und wieder aufgezeichnet werden können. Geführte Wellen decken ferner die gesamte Bauteildicke ab und können sich über weite Strecken ausbreiten [46]. Mit den zunächst verwendeten fundamentalen symmetrischen und antisymmetrischen Moden lassen sich Delaminationen sehr gut detektieren [143]. Zusätzlich können über das Verhalten der Ausbreitungsgeschwindigkeit Aussagen über mögliche Schädigungen der Struktur gemacht werden [131]. Allerdings sind im Rahmen dieser Methoden, welche der linearen Wellenausbreitung zugeordnet werden, die Größe der detektierbaren Schäden auf die Größenordnung der Wellenlänge der verwendeten Mode beschränkt [83].

Ein neuer Ansatz basiert auf der Veränderung von Ultraschallwellen durch das mikrostrukturelle Gefüge, welches im Frequenzbereich höher harmonische Moden zur Folge hat. Dabei wird die Amplitude der höher harmonischen Mode maßgeblich durch die mikrostrukturellen Eigenschaften des Materials bestimmt. Auf Grund der nun nicht mehr

monofrequenten Signalantwort, wird diese Methode dem Gebiet der nichtlinearen Wellenausbreitung zugeordnet. Für isotrope Strukturen konnte bereits experimentell und analytisch gezeigt werden, dass mit Hilfe dieser Methode u. a. selbst mikrostrukturelle Schäden auf Grund von Ermüdung und Kriechen detektiert werden können [36, 157]. Ausgehend von diesen Erkenntnissen bei isotropen Materialverhalten gilt es jetzt, die Anwendbarkeit dieser zerstörungsfreien Prüfmethode auch für faserverstärkte Kunststoffe zu analysieren.

1.2 Stand der Forschung

Die Methoden auf dem Gebiet der nichtlinearen Wellenausbreitung sind in der Vergangenheit sehr gezielt und umfassend auf ihre Eignung zur Schadensdetektion in dünnwandigen Strukturen hin untersucht worden. Im Folgenden wird der aktuelle Stand der Forschung skizziert, wobei der Schwerpunkt auf der Methode der Generierung zweiter harmonischer Moden durch Schädigungen in der Struktur gelegt wird. Dazu erfolgt zunächst eine allgemeine Übersicht über die Entwicklung dieser Methode im Rahmen der klassischen nichtlinearen Akustik, sowie eine Abgrenzung zur nicht-klassischen Akustik. Es folgen Darstellungen der bereits durchgeführten experimentellen und numerischen Arbeiten, basierend auf der Beobachtung der nichtlinearen Ausbreitung von Lamb-Wellen. Abschließend wird der aktuelle Stand auf dem Gebiet der nichtlinearen hyperelastischen Materialmodelle zur Modellierung von faserverstärkten Strukturen umrissen.

Nichtlineare Wellenausbreitung im Allgemeinen Eine Übersicht der Entwicklung und historischen Einordnung der nichtlinearen Wellenausbreitung ist in [64, 112, 114, 146] dargestellt. Der Ursprung der nichtlinearen Wellenausbreitung liegt in der Untersuchung des nichtlinearen Verhaltens von Kristallen. Erste Arbeiten zu diesem Thema stammen von Breazeale et al. [19] und Gedroits et al. [45] aus den 1960er Jahren. Ausgangspunkt dabei ist die nicht ausreichende Beschreibung des Materialverhaltens durch das lineare Hooke'sche Gesetz. Die Herkunft dieses nichtlinearen Effekts geht zurück auf die Wechselwirkung zwischen Atomen, welche ungeladen und chemisch nicht miteinander verbunden sind. Nach Born und Madelung wird diese Wechselwirkung durch das Lennard-Jones-Potential, welches die Summe der sich anziehenden und abstoßenden Kräfte bildet, mit Bezug auf den Teilchenabstand beschrieben [17, 91]. Verallgemeinert ist dies in Abbildung 1.2 dargestellt, wobei E das Lennard-Jones-Potential und r der Abstand der Atome zueinander sind. Um die Gleichgewichtslage, und demnach für kleine Verformungen, entspricht diese Funktion in sehr guter Näherung einer Parabel. Daraus resultiert ein linearer Zusammenhang zwischen der Kraft, welche aufgebracht werden muss, um die Atome aus der Gleichgewichtslage zu bewegen, und dem aus der Belastung resultierenden neuen Abstand zwischen den Atomen. Für große Verformungen hingegen weicht das Verhalten des Potentials von dem parabelförmigen Verlauf ab, die lineare Theorie ist hier nicht mehr ausreichend. Mit dieser Problematik befassten sich u.a. Brillouin [20] und Murnaghan [105]. Letzterer entwickelte, ausgehend von einer Taylor-Reihenentwicklung dritter Ordnung, ein neues Materialmodell, welches die nichtlinearen Effekte mit berücksichtigt. Dem nichtlinearen Verhalten sind dabei die so genannten Steifigkeiten dritter Ordnung zugeordnet, welche aus physikalischer Sicht den

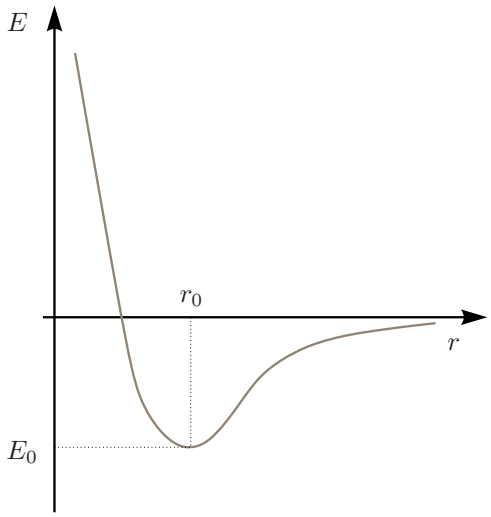


Abbildung 1.2: Potential zur Beschreibung der intermolekularen Bindung (nach [114]).

Einfluss einer Dehnung auf die Wellengeschwindigkeit wiedergeben [22, 23, 139]. Der Einfluss dieser Nichtlinearität auf die Ausbreitung von Ultraschallwellen wurde zunächst in [47] diskutiert, wobei drei mögliche Ursachen für das auftretende nichtlineare Verhalten formuliert wurden:

- Die Amplitude ist so groß, dass der Bereich des linearen Materialverhaltens verlassen wird,
- eine eigentlich kleine Amplitude ist überlagert mit einer signifikanten Vorspannung,
- Defekte verursachen lokal große Verformungen.

In [19] konnte gezeigt werden, dass diese elastischen Nichtlinearitäten zu höher harmonischen Moden führen. Auf Grundlage dieses Verhaltens erfolgte die angesprochene Analyse der Nichtlinearitäten von Kristallen [19, 45]. Später konnte gezeigt werden, dass die mikrostrukturellen Eigenschaften von Metallen ebenfalls die höher harmonischen Moden beeinflussen. Hierbei interagiert die Welle nicht mit der Gitterstruktur, was eine Deformation der ursprünglichen Wellenform zur Folge hat und damit zu höher harmonischen Frequenzanteilen führt. Vielmehr wird die zweite Harmonische durch die Häufigkeit, Art und Verteilung von Versatzstellen [25, 28, 29, 54, 55], Gleitbändern [25] und Ausscheidungen [26, 99] beeinflusst [112, 146]. Diese mikrostrukturellen Eigenschaften sind maßgeblich für das Ermüdungsverhalten von Metallen verantwortlich, so dass gezeigt werden konnte, dass die nichtlineare Wellenausbreitung sehr gut geeignet ist, um Fatigueschäden in Aluminium [27] sowie weiteren Metallen und Legierungen [42, 69, 128] zu detektieren. Dabei basieren all diese Erkenntnisse auf der Verwendung von akustischen Volumenwellen (*bulk waves*).

Seit den 1990er Jahren wird die Generierung höher harmonischer Moden auch bei der Ausbreitung von Lamb-Wellen diskutiert, da diese gegenüber den akustischen Volumenwellen größere Ausbreitungsstrecken aufweisen. Allerdings ist diese Betrachtung auf Grund des multimodalen und dispersiven Ausbreitungsverhaltens von Lamb-Wellen deutlich komplizierter.

Die analytische Beschreibung der Entstehung höher harmonischer Moden bei der Ausbreitung von Lamb-Wellen beruht auf zwei unterschiedlichen Ansätzen. Zunächst formulierte Deng einen Ansatz ausgehend von der Betrachtung der nichtlinearen Reflexion der Longitudinal- und Transversalwellen an den beiden Plattenrändern [34] und einem Störungstheorieansatz kombiniert mit einer Modalanalyse [35]. Diese Herangehensweise erfolgt demnach auf Grundlage der *partial wave technique* nach Auldt [6]. Ein weiterer Ansatz geht auf De Lima et al. [81] zurück, wobei die Lösung des sekundären Wellenfelds ausgehend von der *normal mode expansion technique* und der Reziprozitätsbeziehung [6] hergeleitet wird. In beiden Fällen konnte die Existenz eines kumulativen Effekts[1] der Amplitude des sekundären Wellenfeldes bewiesen werden, welcher die Detektion dieser Amplitude ermöglicht, andernfalls klingt sie sehr schnell ab. Während dieses Verhalten in [34, 35] nur an die Bedingung der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit des primären und sekundären Wellenfeldes gekoppelt ist, wird in [81] zusätzlich ein Leistungsfluss zwischen diesen beiden Wellenfeldern gefordert. In [31, 84] erfolgt eine Auswertung dieser Leistungsflussbedingung. Dabei konnte gezeigt werden, dass nur symmetrische zweite harmonische Moden generiert werden können. Diese Eigenschaft konnte in [137, 154] bestätigt werden. Ist bei vorhandenem Leistungsfluss die Gleichheit der Phasengeschwindigkeit nicht gegeben, kommt es zu einem oszillierenden Verhalten der höher harmonischen Amplitude [81]. Eine darüber hinaus in [104] geforderte Gleichheit der Gruppengeschwindigkeit ist keine Voraussetzung zur Entstehung kumulativer höher harmonischer Moden [32, 39].

Die bis hierhin durchgeführten analytischen Betrachtungen beruhen alle auf isotropem Materialverhalten, beschrieben durch die Formulierung nach Murnaghan [105]. In [158] konnte gezeigt werden, dass ausgehend von der Erweiterung dieser Formulierung auf transversal-isotrope und orthotrope Materialsymmetrien nach [114], die analytischen Beschreibungen auch für faserverstärkte Materialien gültig sind. Obwohl der Schwerpunkt der bisherigen Arbeiten auf der Betrachtung der zweiten harmonischen Mode liegt, gibt es auch erste Untersuchungen bezüglich der dritten harmonischen Mode mit Bezug auf die Ausbreitung von Lamb-Wellen [31, 83, 88]. Der vorgestellte Anwendungsbereich der Entstehung höher harmonischer Moden auf Grund der Gefügestruktur wird auch als klassische nichtlineare Akustik bezeichnet [112, 158].

Neben der klassischen nichtlinearen Akustik kann es ferner auch auf Grund der Interaktion von Kontaktstellen zu nichtlinearen Effekten in der Wellenausbreitung kommen, was auch als *contact-acoutic nonlinearity* (CAN) bezeichnet wird [135] und in den letzten 20 Jahren untersucht wurde. Die dabei auftretenden Phänomene lassen sich in vier Gruppen unterteilen [64, 112, 158]:

- Höher harmonische Moden und Mischfrequenzen,
- Subharmonische,
- Frequenzpaare,
- Nichtlineare Resonanz.

Die Entstehung der einzelnen Phänomene ist dabei abhängig von der Größe der Anregungsamplitude. Demzufolge entstehen zunächst ausschließlich höher harmonische Moden und Mischfrequenzen. Ab einer Grenzamplitude können dann auch Subharmonische und

[1] Hierbei wächst die Amplitude linear mit der Ausbreitungsstrecke.

schlussendlich Frequenzpaare beobachtet werden, bevor ein weiterer Anstieg der Amplitude zu chaotischem Rissuferklappern führt [112]. Eine Übersicht der einzelnen Ansätze zur Modellierung der Riss-Welle-Interaktion ist in [21] zu finden.

Experimentelle Untersuchung der Schadensdetektion mittels kumulativer höher harmonischer Lamb-Wellenmoden Die analytischen Ergebnisse der Eigenschaften höher harmonischer Lamb-Wellenmoden wurden zunächst experimentell validiert. Deng et al. konnten in [37, 38] den kumulativen Effekt experimentell nachweisen. Weitere Untersuchungen bezüglich der Leistungsflussbedingung sind in [11, 12] von Bermes et al. mit Bezug auf das S_1-S_2 Modenpaar in Aluminium durchgeführt worden. Liu et al. konnten in [86, 87] zusätzlich zeigen, dass es bei antisymmetrischen sekundären Wellenfeldern keinen Leistungsfluss von dem primären zum sekundären Wellenfeld gibt. Auswertungen der Leistungsflussbedingung für weitere Modenpaare, wie zum Beispiel das S_2-S_4 Modenpaar sind in [94, 95] zu finden.

Zur Untersuchung der Eignung der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Grundlage der Generierung höher harmonischer Moden in Metallen sind in den vergangenen zehn Jahren eine Vielzahl von Experimenten durchgeführt worden. Erste Messungen befassten sich mit dem Einfluss der Gefügeveränderung auf Grund plastischer Verformung auf die Ausbreitung des sekundären Wellenfeldes [116–118]. Es folgten Beobachtungen des sekundären Wellenfeldes auf Grund von Ermüdungsversuchen [36, 148] und Rissen [159, 160] in Aluminiumstrukturen, Ermüdung in Stahl [154, 155] sowie Kriechen in Titan [152, 153, 156, 157].

Neben den Experimenten an isotropen Strukturen gibt es auch erste Analysen bezüglich der Eignung zur Schadensdetektion in faserverstärkten Kunststoffen. Dazu wurden in unidirektionalem kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (UD-CFK) neben thermischer Ermüdung [77, 78] auch der Einfluss von Impactschäden auf die Entstehung höher harmonischer Lamb-Wellenmoden untersucht [119, 120].

Numerische Simulation der Ausbreitung von kumulativen höher harmonischen Lamb-Wellenmoden Neben der experimentellen Validierung der kumulativen Ausbreitungseigenschaften höher harmonischer Lamb-Wellen wird auch die numerische Abbildung der nichtlinearen Wellenausbreitung immer weiter vorangetrieben. Erste numerische Simulationen auf Grundlage der Interaktion von Rissoberflächen sind in [159] und [63] unter Verwendung des S_1-S_2 Modenpaares zu finden.

Um die klassische nichtlineare Wellenausbreitung numerisch zu untersuchen, bedarf es der Implementierung der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan oder eines anderen geeigneten hyperelastischen Materialmodells in die entsprechende Software. Die bisherigen numerischen Simulationen beruhen alle auf der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan, dessen Implementierung dazu in Comsol umgesetzt wurde. Ausgehend von dem S_1-S_2 Modenpaar wurden in [85, 88] das Verhalten der zweiten harmonischen Mode numerisch untersucht. Darüber hinaus wird auch eine Analyse des SH_2-S_2 Modenpaares präsentiert, für welches ebenfalls die Leistungsflussbedingung erfüllt ist. In [96] wird zusätzlich der Einfluss einer variierenden Phasengeschwindigkeit und der damit verbundenen unterschiedlichen Größen für das primäre und sekundäre

Wellenfeld in Betracht gezogen und das daraus resultierende Verhalten der höher harmonischen Amplitude untersucht. Dabei ist das oszillierende Verhalten der Amplitude auf Grund der divergierenden Phasengeschwindigkeiten deutlich sichtbar. Diese Erkenntnis ist Grundlage weiterer Analysen mit dem Schwerpunkt auf einem oszillierenden Verhalten der höher harmonischen Amplitude. Das Missachten der Bedingung der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit ermöglicht die Wahl anderer, bisher nicht betrachteter Modenpaare, wie z.B. die des S_0-S_0 Modenpaares. Der Einfluss von Rissen mit Kontaktbedingungen auf dieses Modenpaar wird in [132] und [147] untersucht. Eine ausführliche Diskussion des Amplitudenverhaltens dieses Modenpaares in Abhängigkeit der Frequenz und die daraus resultierende Möglichkeit einer quasi kumulativen Ausbreitung über eine zuvor definierte Ausbreitungsstrecke wird in [146] diskutiert. Weitere Betrachtungen, bei der zusätzlich die A_0-Mode mit berücksichtigt wird, sind in [32] zu finden.

Abgesehen von den Simulationen der nichtlinearen Wellenausbreitung in isotropen Strukturen gibt es einen ersten Ansatz zur numerischen Analyse in faserverstärkten Kunststoffen und damit verbunden in transversal-isotropen Strukturen. In [158] wird die Erweiterung der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan auf faserverstärkte Materialien in Comsol implementiert. Es kann numerisch bestätigt werden, dass das kumulative Verhalten der sekundären Amplitude auch in solchen Materialien vorhanden ist.

Nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Materialmodelle Die analytische Beschreibung der nichtlinearen Ausbreitung von Lamb-Wellen basiert auf der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan aus dem Jahre 1951 [105]. Dieses nichtlineare hyperelastische Materialmodell wurde zunächst für die Anwendung bei Kristallen entwickelt. Eine ähnliche Formulierung ist in [75, 113] zu finden. Das nichtlineare Materialverhalten wird dabei durch die Steifigkeiten dritter Ordnung abgebildet, welche ausführlich in [22, 23] diskutiert werden. Sie beschreiben den Einfluss einer Dehnung des Materials auf die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit im Körper [52]. Beispiele für die Steifigkeiten dritter Ordnung für diverse Kristalle und Metalle können [9] entnommen werden. Ein erster Versuch der Erweiterung diese Materialmodells auf transversal-isotrope Symmetrieeigenschaften ist in [41] vorgenommen worden. Grundlegend wird dies dann in [15] behandelt, wobei auch die experimentelle Bestimmung der nunmehr neun nichtlinearen Materialparameter ausführlich diskutiert wird. Bisher ist es allerdings nicht gelungen, alle Steifigkeiten dritter Ordnung für FVK experimentell zu bestimmen.

Außer dieser sehr aufwendigen Potentialformulierung, kommen vor allem in der Biomechanik nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Materialmodelle zur Abbildung von Gewebestrukturen zum Einsatz. Die wohl bekannteste Potentialformulierung stammt von Holzapfel et al., dem so genannten Holzapfel-Gasser-Ogden Modell [44, 59–62]. Dieses Modell ist in fast allen gängigen, kommerziellen Finite-Elemente (FE) Programmen implementiert. Allerdings ist dabei zu beachten, dass das Gewebe als inkompressibel angenommen wird. Weitere Ansätze zur Abbildung von menschlichem Gewebe sind u.a. in [66, 108, 138] zu finden.

Neben diesen Potentialformulierungen für Gewebe gibt es einige Ansätze zur Modellierung von faserverstärkten Kunststoffen. Zunächst betrachtete Usal die beiden Kom-

ponenten getrennt voneinander, indem isotrope Fasern in eine hyperelastische isotrope Matrix eingebettet wurden [144]. Daneben gibt es verschiedene Ansätze in Abhängigkeit der modifizierten Invarianten und der Annahme inkompressiblen Verhaltens [1, 30, 73, 76, 129, 141]. Allerdings konnte gezeigt werden, dass die Verwendung dieser Invarianten für die Modellierung von FVK nicht geeignet ist, da nur vier anstatt der üblichen fünf unabhängigen Materialparameter aus diesen Potentialformulierungen resultieren [145].

1.3 Ziel und Gliederung der Arbeit

Ausgehend von den Untersuchungen zur Schadendetektion mittels der nichtlinearen Wellenausbreitung soll im Rahmen dieser Arbeit die Anwendbarkeit dieser zerstörungsfreien Prüfmethode auf mikrostrukturelle Schäden infolge zyklischer Belastung in unidirektionalen faserverstärkten Kunststoffen analysiert werden. Dabei stehen sowohl die experimentelle Analyse als auch die numerische Simulation im Fokus. Hauptaugenmerk der numerischen Simulation ist auf Grund der Defizite der bisher bekannten nichtlinearen hyperelastischen Materialmodelle für FVK die Abbildung des nichtlinearen Materialverhaltens und der daraus resultierenden Werkstoffdegradation durch ein geeignetes Materialmodell.

Die Struktur der vorliegenden Arbeit ergibt sich aus den vorgestellten Zielen wie folgt. Zunächst gibt Kapitel 2 eine Übersicht über die theoretischen Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Dabei geht es zum einen um die Feldgrößen und die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, wobei der Fokus auf hyperelastischen Materialmodellen zur Beschreibung nichtlinearen Materialverhaltens liegt. Im Anschluss folgt ausgehend von der nichtlinearen Bewegungsgleichung die Darstellung der Lösung für die Wellenausbreitung in dünnwandigen Strukturen. Es werden sowohl die Lösungen für das primäre Wellenfeld, welche im isotropen Fall auf die Rayleigh-Lamb Wellengleichung führt, als auch die Lösung des sekundären Wellenfeldes vorgestellt.

In Kapitel 3 werden die experimentellen Untersuchungen des Einflusses mikrostruktureller Schäden auf Grund zyklischer Zugbeanspruchung auf die nichtlineare Wellenausbreitung dargestellt. Dabei wird detailliert auf den Schädigungsprozess der Probekörper und das dadurch entstandene Schadensmuster, die anschließende Analyse der Wellenausbreitung sowie die Ermittlung des Elastizitätsmoduls der einzelnen Proben zur Bestimmung der Werkstoffdegradation eingegangen.

Eine ausführliche Diskussion der Versuchsergebnisse wird in Kapitel 4 vorgenommen. Dazu erfolgt eine numerische Abbildung der Versuchsanordnung, wobei die reale Strukturschädigung durch interagierende Rissoberflächen mit dazugehörigen Kontaktbedingungen modelliert wird. Ausgehend von diesem numerischen Modell wird der Einfluss der Risse sowohl auf die Wellenausbreitung als auch die Werkstoffdegradation untersucht.

Kapitel 5 befasst sich anschließend mit der Abbildung der Schädigung und des daraus resultierenden nichtlinearen Materialverhaltens durch entsprechende hyperelastische Materialmodelle. Zunächst wird die Möglichkeit diskutiert, inwiefern bekannte und in den meisten FE-Programmen implementierte isotrope hyperelastische Materialmodelle für die Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung geeignet sind. Darauf aufbauend wird dieser Ansatz auf die Modellbildung für FVK erweitert. Wesentlicher Punkt ist dabei die Reduzierung der Koeffizienten zur Beschreibung des nichtlinearen Materialmodells

im Vergleich zu der Potentialformulierung nach MURNAGHAN sowie die Berücksichtigung kompressibler Effekte ohne die Verwendung der modifizierten Invarianten.

Abschließend werden in Kapitel 6 die Untersuchungsergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf noch offene Fragestellungen gegeben.

Kapitel 2

Nichtlineare Kontinuumsmechanik

Ziel der Kontinuumsmechanik ist es, das mechanische Verhalten von Körpern durch entsprechende Modelle abzubilden. Die Beschreibung physikalischer Größen für die einzelnen Punkte innerhalb des Körpers erfolgt dabei durch Feldgrößen, welche durch stetig differenzierbare Tensorgleichungen im Ort gegeben sind. Dabei eventuell auftretende Nichtlinearitäten können durch nichtlineares Materialverhalten oder geometrischer Nichtlinearität (große Verformungen) gegeben sein. Im Folgenden werden die Grundlagen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik für die spätere Betrachtung der Wellenausbreitung in dünnwandigen Flächenstrukturen skizziert.

Ausführliche Darstellungen der Inhalte sind unter anderem in [2, 3, 7, 14, 48, 51, 58, 92, 93] zu finden. Für die Beschreibung der Kontinuumsmechanik hat sich die Tensorrechnung als sehr nützlich erwiesen. Eine kurze Einführung ist unter anderem in [2, 7] gegeben.

2.1 Kinematische Beziehungen

Darstellung der Bewegung

Um die Bewegung eines Körpers in einem Raum zu beschreiben, wird eine Referenzkonfiguration benötigt. Diese Konfiguration des Körpers, die oft mit der Ausgangskonfiguration identifiziert wird, ist mit B_0 gekennzeichnet und bezieht sich im Allgemeinen auf den unbelasteten Zustand des Körpers, siehe Abbildung 2.1. Die mit B gekennzeichnete Momentankonfiguration beschreibt die aktuelle, durch die äußere Belastung bedingte Lage des Körpers. Die Lage eines Punktes innerhalb des Körpers ist durch den Ortsvektor $\mathbf{X}$ in der Referenzkonfiguration bzw. $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration gegeben. Die Vektorfunktion $\boldsymbol{\varphi}$ beschreibt die Abbildung von $\mathbf{X}$ auf $\mathbf{x}$ in Abhängigkeit der Zeit

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t). \tag{2.1}$$

Ausgehend von diesen beiden Konfigurationen sind zwei unterschiedliche Betrachtungen der Bewegung bzw. Eigenschaften des entsprechenden Punktes möglich. Erfolgt die Betrachtung ausgehend von dem Ortsvektor $\mathbf{X}$ über die Zeit spricht man von der materiellen bzw. LANGRANGE'sche Darstellung, die Komponenten des Ortsvektors $\mathbf{X}$ werden auch als materielle bzw. LAGRANGE'sche Koordinaten bezeichnet. Im Gegensatz dazu steht die räumliche bzw. EULER'sche Darstellung der Bewegung, bei der die Eigenschaften des räumlich festliegenden Punktes mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ über die Zeit beobachtet werden. Die Komponenten des Ortsvektor $\mathbf{x}$ werden auch räumliche bzw. EULER'sche Koordinaten genannt. Klassische Beispiele für diese beiden Betrachtungsweisen sind die Strukturmechanik, wo in der Regel die LAGRANGE'sche Darstellung zur Anwendung kommt sowie

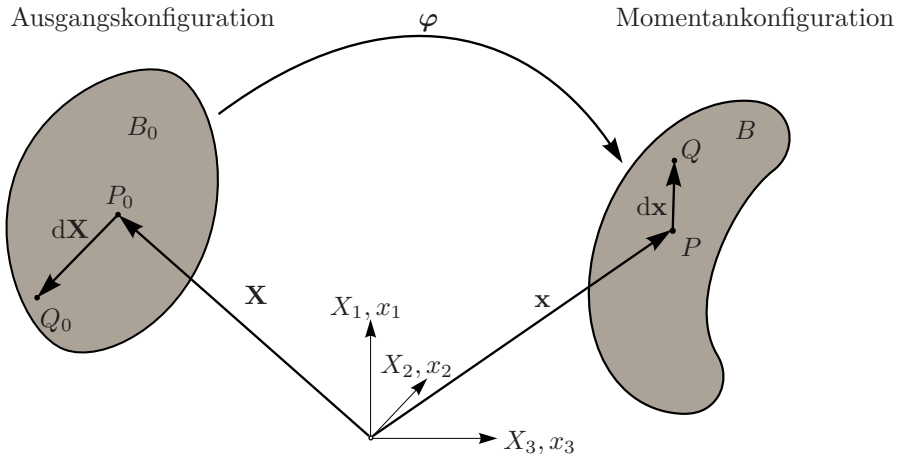


Abbildung 2.1: Abbildung eines Punktes P_0 des Körpers B_0 in der Ausgangskonfiguration auf den Punkt P des Körpers B in die Momentankonfiguration.

die Strömungsmechanik, wo meistens die Euler'sche Darstellung erfolgt.

Die durch die Belastung verursachte Verschiebung $\mathbf{u}$ eines Punktes ist definiert als

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}. \tag{2.2}$$

Deformation

Die Deformation des Körpers ist durch den Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ gegeben und ergibt sich als Gradient der Vektorfunktion $\boldsymbol{\varphi}$

$$\mathbf{F} = \operatorname{Grad} \boldsymbol{\varphi} = \operatorname{Grad} \mathbf{x}. \tag{2.3}$$

Abgeleitet aus Abbildung 2.1 beschreibt der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ somit die Überführung des Linienelementes $\mathrm{d}\mathbf{X}$ in das Linienelement $\mathrm{d}\mathbf{x}$ über den Zusammenhang

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{X}. \tag{2.4}$$

Die Determinante J des Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ wird auch als Jacobi-Determinante bezeichnet. Sie gibt die Veränderung des Volumens von der Ausgangskonfiguration V_0 zur Momentankonfiguration V durch die Deformation wieder

$$J = \det \mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V_0}. \tag{2.5}$$

Verändert sich das Volumen während der Deformation nicht, der Körper ist also inkompressibel, nimmt J den Wert 1 an.

Der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ beschreibt die Gesamtheit der Bewegung, welche sich aus einer Starrkörperbewegung und einer Deformation zusammensetzt. Es kann jedoch keine getrennte Aussage über die Verzerrung des Körpers gemacht werden. Allerdings kann der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ durch eine polare Zerlegung in eine reine Rotation und eine reine

Streckung aufgeteilt werden

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}. \tag{2.6}$$

Hierbei ist $\mathbf{R}$ die Rotationsmatrix, $\mathbf{U}$ der rechte und $\mathbf{V}$ der linke Streckungstensor. Auf der Grundlage der Streckungstensoren sind die CAUCHY-GREEN Deformationstensoren definiert als

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \tag{2.7}$$

und

$$\mathbf{b} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top, \tag{2.8}$$

wobei $\mathbf{C}$ der rechte CAUCHY-GREEN Deformationstensor mit Bezug auf die Ausgangskonfiguration ist und $\mathbf{b}$ der linke CAUCHY-GREEN Deformationstensor, welcher in der Momentankonfiguration definiert ist.

Es kann gezeigt werden, dass diese, auf Grund ihrer Ähnlichkeit, dieselben Eigenwerte λ_i^2 besitzen, wobei λ_i das Streckungsverhältnis in die Hauptachsenrichtung i ist. Unter Verwendung der Eigenwerte λ_i^2 lassen sich die Verzerrungsinvarianten, die sich aus der charakteristischen Gleichung des Eigenwertproblems zur Bestimmung der Hauptnormalverzerrungen ergeben, formulieren als

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2, \\ I_3 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Betrachtet man einen aus dem Kontinuum herausgetrennten Quader, können die Invarianten wie folgt interpretiert werden [149]

- I_1 gibt die Längenänderung der Raumdiagonale des Quaders an,
- I_2 beschreibt die Oberflächenveränderung,
- I_3 verkörpert die Veränderung des Volumens.

Verzerrung

Ein Nachteil der vorgestellten CAUCHY-GREEN Deformationstensoren ist die fehlende Trennung zwischen Starrkörperverschiebung und tatsächlicher Verzerrung des Körpers. Im Falle einer reinen Starrkörperverschiebung ergeben diese beiden Tensoren den Einheitstensor $\mathbf{I}$, sie sind also nicht null. Basierend darauf kann die reine Verzerrung des Körpers mit Bezug auf die Ausgangskonfiguration angegeben werden durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \tag{2.10}$$

Der an dieser Stelle eingeführte Tensor 2. Stufe $\mathbf{E}$ wird als GREEN-LAGRANGE'scher Verzerrungstensor bezeichnet. Unter Verwendung der Verschiebungen lässt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}^{\top}\,\mathbf{u} + \mathrm{Grad}\,\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^{\top}\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{Grad}\,\mathbf{u}\right) \tag{2.11}$$

formulieren. In der Momentankonfiguration ist eine ähnliche Definition durch

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{I} - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\top})^{-1}\right] &(2.12)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\,\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,\mathbf{u}^{\top} - \mathrm{grad}^{\top}\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{u}\right) &(2.13)\end{aligned}$$

gegeben, wobei $\mathbf{e}$ als ALMANSI-Verzerrungstensor bezeichnet wird. Diese beiden Verzerrungen sind über den Zusammenhang

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-\top}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}^{-1} \tag{2.14}$$

miteinander verknüpft. Die dargestellte Operation, bei der eine Größe aus der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration überführt wird, wird als push-forward bezeichnet, andersherum spricht man von einem pull-back.

Unter der Annahme kleiner Verzerrungen, also der linearen Theorie, wird davon ausgegangen, dass der quadratische Anteil in $\mathbf{u}$ einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Gesamtverzerrung hat. Zusätzlich folgt daraus, dass der Gradient des Verschiebungsfeldes klein gegenüber eins ist und somit für den materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \tag{2.15}$$

gilt. Damit folgt zunächst aus (2.14)

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}, \tag{2.16}$$

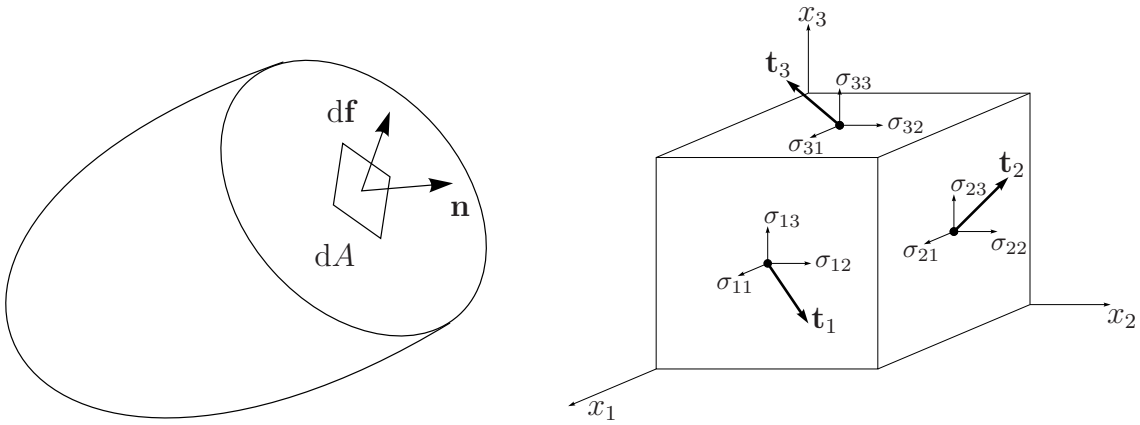
womit

$$\mathbf{E}^{\mathrm{lin}} = \mathbf{e}^{\mathrm{lin}} = \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}^{\top}\,\mathbf{u} + \mathrm{Grad}\,\mathbf{u}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}^{\top}\,\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,\mathbf{u}\right) \tag{2.17}$$

als linearisiertes Verzerrungsmaß resultiert. Es ist zu erkennen, dass in diesem Fall keine Unterscheidung mehr zwischen Momentan- und Ausgangskonfiguration vorhanden ist. Die beiden Konfigurationen fallen zusammen.

2.2 Kinetische Größen

Auf Grund der äußeren Belastung entsteht im Inneren eines Körpers eine Beanspruchung, welche für einen Punkt durch die Spannungen beschrieben wird. Betrachtet man einen Schnitt durch einen Körper, wie in Abbildung 2.2(a) dargestellt, ist der CAUCHY-



(a) Definition Spannungsvektor.

(b) Spannungsbestimmung an einer Schnittfläche.

Abbildung 2.2: Bestimmung der Spannungsvektoren und -tensoren.

Spannungsvektor $\mathbf{t}$ definiert als

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}A}. \tag{2.18}$$

Hierbei ist d$\mathbf{f}$ der resultierende Kraftvektor, der auf das Flächenelement dA in der Momentankonfiguration wirkt. Da in diesem Fall der Kraftvektor auf die tatsächliche Fläche bezogen wird, wird der CAUCHY-Spannungsvektor $\mathbf{t}$ auch als wahrer Spannungsvektor bezeichnet. Darüber hinaus ist der Spannungsvektor abhängig von dem Ort $\mathbf{x}$, der Orientierung der Bezugsfläche, gegeben durch den Normalenvektor $\mathbf{n}$, und der Zeit t.

Auf der Grundlage eines infinitesimalen Volumenelementes, wobei die Flächennormalen parallel zu den Koordinatenachsen x_i liegen, ist der Spannungszustand in einem Punkt schließlich durch die insgesamt neun Komponenten σ_{ij} der drei Spannungsvektoren t_i beschrieben, vgl. Abbildung 2.2(b). Diese Komponenten der Spannungsvektoren bilden zusammen den CAUCHY-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, einen symmetrischen Tensor 2. Stufe, für den gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \tag{2.19}$$

Dieser Zusammenhang ist auch als CAUCHY-Theorem bekannt [93].

Eine ähnlich Betrachtung, bei der der resultierende Kraftvektor auf das Flächenelement mit dem Normalenvektor $\mathbf{N}$ in der Ausgangskonfiguration bezogen wird, führt auf den ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungsvektor $\mathbf{t}^{\mathrm{I}}$, welcher definiert ist als

$$\mathbf{t}^{\mathrm{I}}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}A_0} \tag{2.20}$$

und als Nennspannungsvektor bezeichnet wird. Der Spannungszustand in einem Punkt wird auf Grundlage dieser Betrachtung durch den ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Span-

nungstensor $\mathbf{P}$ beschrieben,

$$\mathbf{t}^{\mathrm{I}}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}. \tag{2.21}$$

Im Gegensatz zu dem symmetrischen Cauchy-Spannungstensor ist der erste Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor unsymmetrisch, weshalb häufig eine modifizierte, symmetrische Variante verwendet wird, der zweite Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor $\mathbf{S}$. Dieser ist definiert als

$$\mathbf{t}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}^{\mathrm{I}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}. \tag{2.22}$$

Transformiert man den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor mittels einer push-forward Operation wieder in die Momentankonfiguration, erhält man den Kirchhoff Spannungstensor

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top}. \tag{2.23}$$

Durch den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{P} = J^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{\top} = J^{-1}\boldsymbol{\tau} \tag{2.24}$$

können die Spannungstensoren ineinander umgerechnet werden. Für den Fall, dass der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ dem Einheitstensor entspricht, sind diese identisch.

2.3 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen sind die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik. Sie beschreiben die Wechselwirkung zwischen Kontinuum und Umgebung. Im Allgemeinen werden diese in der integralen Form angegeben, so dass eine Aussage über das gesamte Kontinuum gemacht wird. Aus der integralen Form der Bilanzgleichung kann eine Aussage über lokale Eigenschaften abgeleitet werden.

Im Folgenden werden die Massebilanz und die Impulsbilanz kurz vorgestellt. Neben diesen gibt es noch weitere mechanische Bilanzgleichungen, wie die Drehimpulsbilanz und den Energieerhaltungssatz. Diese werden für die spätere Betrachtung der Wellenausbreitung aber nicht benötigt.

Massenbilanz

Findet während der Beobachtung eines Körpers kein Masseaustausch bzw. Zuwachs oder Verlust an Masse statt, verändert sich die Gesamtmasse des Körpers nicht, so dass für diese

$$m = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{X}) \ \mathrm{d}V_0 = \int_{V} \rho(\mathbf{x}, t) \ \mathrm{d}V \tag{2.25}$$

gilt. Der Ausdruck $\rho_0 \ \mathrm{d}V_0$ beschreibt die Masse eines materiellen Volumenelementes vor

und $\rho\,\mathrm{d}V$ nach der Deformation. Sind diese identisch, kann über (2.5) der Zusammenhang

$$\rho_0 = \rho \det \mathbf{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \det \mathbf{F} = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{2.26}$$

aufgestellt werden, so dass die JACOBI-Determinante nicht nur über das Verhältnis der Volumina zueinander, sondern auch über die Dichten bestimmt werden kann.

Impulsbilanz

Die Impulsbilanz basiert auf dem 2. NEWTON'schen Axiom, wonach die Summe der angreifenden Kräfte gleich der zeitlichen Ableitung des Impulses ist. Im Folgenden wird diese, basierend auf den Ausführungen in [92], vorgestellt. Die zeitliche Impulsveränderung ist zunächst gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \mathbf{v}\ \mathrm{d}V, \tag{2.27}$$

wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Körpers ist, für die gilt

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{u}}. \tag{2.28}$$

Betrachtet man nun einen Körper B, an dem die Oberflächenkräfte $\mathbf{t}$ pro Flächeneinheit und die Volumenkräfte $\mathbf{b}$ pro Masseneinheit angreifen, folgt aus dem 2. NEWTON'schen Axiom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}\ \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{t}\ \mathrm{d}S + \int_V \rho \mathbf{b}\ \mathrm{d}V. \tag{2.29}$$

Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems (2.19), dem GAUSS'schen Integralsatz, womit ein Flächenintegral in ein Volumenintegral überführt werden kann, und nach der Transformation in die Ausgangskonfiguration ergibt sich für (2.29)

$$\int_{V_0} \mathrm{Div}\,\mathbf{P}\ \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{b}\ \mathrm{d}V_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}\ \mathrm{d}V_0. \tag{2.30}$$

In lokaler Form, also auf einen Massepunkt bezogen, folgt

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \tag{2.31}$$

2.4 Konstitutive Gleichungen hyperelastischer Materialmodelle

Konstitutive Gleichungen werden benötigt, um die kinematischen Größen mit den kinetischen Größen zu verknüpfen. Je nach Materialart können verschiedenste Materialmodelle zum Einsatz kommen. Im Folgenden sollen die hyperelastischen Materialmodelle für die lineare und nichtlineare Beschreibung von isotropem und transversal-isotropem Materialverhalten vorgestellt werden.

2.4.1 Allgemeines

Hyperelastische Materialien, auch als GREEN'sche Materialien bezeichnet, kennzeichnen die Existenz einer Verzerrungsenergiedichtefunktion Ψ als Potential der Spannungen [10, 49]

$$\Psi = \int \mathbf{S} \, \mathrm{d}\mathbf{E} \tag{2.32}$$

bzw.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2\frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \tag{2.33}$$

Aus (2.32) wird ersichtlich, dass bei hyperelastischen Materialien die verrichtete Arbeit allein vom Verzerrungszustand abhängt, also wegunabhängig ist, da [10]

$$\int_{\mathbf{E}_1}^{\mathbf{E}_2} \mathbf{S} \, \mathrm{d}\mathbf{E} = \Psi(\mathbf{E}_2) - \Psi(\mathbf{E}_1) \tag{2.34}$$

gilt. Des Weiteren sind die Verformungen reversibel und es treten keine dissipativen Effekte auf.

Die Verzerrungsenergiedichte kann auf unterschiedliche Arten aufgestellt werden, zumeist liegt jedoch ein phänomenologischer Ansatz zu Grunde. Es erfolgt also eine empirische Formulierung im Wesentlichen auf Grundlage von experimentellen Ergebnissen. Darüber hinaus werden für die Formulierung des Potentials häufig die Invarianten des Verzerrungstensors verwendet. Für einen symmetrischen Tensor 2. Stufe, hier $\mathbf{A}$, lassen sich allgemein die drei Invarianten [2, 92]

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{A} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 + \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\right] \qquad I_3 = \det \mathbf{A} \tag{2.35}$$

bestimmen, die zur Beschreibung isotropen Materialverhaltens ausreichend sind. Liegt eine Hauptachsenbetrachtung vor, sind diese drei Invarianten äquivalent durch (2.9) beschrieben. Bei transversal-isotropem Materialverhalten kommen zusätzlich zu den drei Invarianten für isotropes Material zwei weitere, sogenannte Pseudo-Invarianten, hinzu. Diese berücksichtigen die Richtungsabhängigkeit im Material und sind gegeben durch [58, 136]

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_0 \qquad \text{und} \qquad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{a}_0. \tag{2.36}$$

Der Vektor $\mathbf{a}_0$ gibt dabei die Vorzugsrichtung an, welche bei faserverstärkten Kunststoffen der Faserrichtung entspricht. Darüber hinaus gibt es die Möglichkeit, die Invarianten über den GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor als

$$J_1 = \operatorname{tr} \mathbf{E}, \qquad J_2 = \operatorname{tr} \mathbf{E}^2 \qquad \text{und} \qquad J_3 = \operatorname{tr} \mathbf{E}^3 \tag{2.37}$$

zu formulieren [136]. Diese sind für die Formulierung konstitutiver Gleichungen basierend

auf einer TAYLOR-Reihenentwicklung [51] gültig und können mittels

$$\begin{aligned} J_1 &= I_1 \\ J_2 &= I_1^2 - 2I_2 \\ J_3 &= I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3 \end{aligned} \tag{2.38}$$

in die bereits vorgestellte Invarianten aus (2.35) überführt werden.

Vor allem in kommerzieller FE-Software werden die Potentialfunktionen häufig in der Form

$$\Psi = \Psi_{\text{iso}} + \Psi_{\text{vol}} \tag{2.39}$$

angegeben, es erfolgt also eine Trennung in den volumenerhaltenden (isochoren) und den volumenverändernden (volumetrischen) Anteil. Diese Formulierung beruht auf der multiplikativen Dekomposition des materiellen Deformationsgradienten [18, 58]

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{vol}} \cdot \mathbf{F}_{\text{iso}} = J^{\frac{1}{3}}\bar{\mathbf{F}}. \tag{2.40}$$

Der modifizierte materielle Deformationsgradient $\bar{\mathbf{F}}$ beschreibt dabei den volumenerhaltenden Anteil, $J^{\frac{1}{3}}$ berücksichtigt im Fall von kompressiblen Materialverhalten den volumenverändernden Anteil. Daraus resultieren der modifizierte rechte CAUCHY-GREEN Deformationstensor $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}$ und die modifizierten Invarianten [18, 58, 151]

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-\frac{2}{3}}, \qquad \bar{I}_2 = I_2 J^{-\frac{4}{3}}, \qquad \bar{I}_3 = J^{\frac{1}{2}}, \qquad \bar{I}_4 = I_4 J^{-\frac{2}{3}}, \qquad \bar{I}_5 = I_5 J^{-\frac{4}{3}}. \tag{2.41}$$

Der Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor $\mathbf{S}$ bzw. Elastizitätstensor $\mathbb{C}$, einem Tensor 4. Stufe, und dem aufgestellten hyperelastischen Potential ist gegeben durch [10]

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi(I_1, ..., I_n)}{\partial I_a}\frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi(J_1, ..., J_n)}{\partial J_a}\frac{\partial J_a}{\partial \mathbf{E}}, \tag{2.42}$$

bzw.

$$\mathbb{C} = 4\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C}^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E}^2} = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi(I_1, ..., I_n)}{\partial I_a}\frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi(J_1, ..., J_n)}{\partial J_a}\frac{\partial J_a}{\partial \mathbf{E}^2}. \tag{2.43}$$

Die dafür benötigten partiellen Ableitungen der Invarianten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I}, & \frac{\partial I_4}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I}I_1 - \mathbf{C}, & \frac{\partial I_5}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0, \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= I_3\mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \tag{2.44}$$

und

$$\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{I}, \qquad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{E}} = 2\mathbf{E}, \qquad \frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{E}} = 3\mathbf{E}^2. \tag{2.45}$$

Dabei gelten auf Grund der Symmetrie des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors bzw. des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors für die Ableitungen von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}^{-1}$ [66]

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{I}^s = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}^{-1}}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\left(E^{-1}_{ik}E^{-1}_{lj} + E^{-1}_{il}E^{-1}_{jk}\right)\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{2.47}$$

bzw. $\mathbf{C}$ und $\mathbf{C}^{-1}$ [66]

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{I}^s = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{2}\left(C^{-1}_{ik}C^{-1}_{lj} + C^{-1}_{il}C^{-1}_{jk}\right)\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{2.49}$$

2.4.2 Isotrope lineare Beschreibung

Die einfachste Potentialbeschreibung für hyperelastische Materialien ist, auf Grund der geforderten zweifachen Differenzierbarkeit aus (2.43), quadratisch in den Verzerrungen [10]

$$\Psi = \frac{1}{2}(\mathbb{C} : \mathbf{E}) : \mathbf{E}. \tag{2.50}$$

Basierend auf (2.50) ergibt sich als konstitutive Gleichung

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}, \tag{2.51}$$

auch bekannt als ST. VENANT-KIRCHHOFF bzw. KIRCHHOFF Material. Es ist zu beachten, dass dieses Materialmodell gerade für das Druckverhalten physikalisch nicht plausible Ergebnisse liefert [151].

Legt man die lineare Theorie und damit kleine Verformungen zu Grunde, erhält man das bekannte verallgemeinerte HOOKE'sche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}. \tag{2.52}$$

Das ST. VENANT-KIRCHHOFF Materialmodell stellt demnach die Erweiterung des HOOKE'schen Gesetzes auf große Deformationen dar, welches auf Grund der angesprochenen Probleme das Materialverhalten in einigen Bereichen nur unzureichend abbildet.

Im Allgemeinen enthält der Elastizitätstensor $\mathbb{C}$ $81 (= 3^4)$ unabhängige Elemente. Auf Grund der Symmetrie des Verzerrungs- und Spannungstensors reduziert sich zum einen

die Anzahl der unabhängigen Größen für allgemeines anisotropes elastisches Materialverhalten von 81 auf 36. Dadurch lässt sich (2.52) mittels der VOIGT-Notation in eine Matrixschreibweise überführen zu

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112}\\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212}\\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312}\\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312}\\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312}\\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\epsilon_{11}\\ \epsilon_{22}\\ \epsilon_{33}\\ \epsilon_{23}\\ \epsilon_{13}\\ \epsilon_{12}\end{bmatrix}. \tag{2.53}$$

Die Anzahl der unabhängigen Materialparameter kann darüber hinaus auf Grund der Vertauschbarkeit der Ableitungen bei der Elastizitätstensorermittlung aus dem Potential nach (2.43) noch einmal auf 21 reduziert werden. Die endgültige Anzahl der unabhängigen Größen wird schlussendlich durch die Symmetrieeigenschaften des betrachteten Materials bestimmt. So ergeben sich für orthotropes Material neun, für transversal-isotropes Material fünf und bei komplett richtungsunabhängigem isotropem Materialverhalten mit den LAMÉ-Koeffizienten λ und ν zwei unabhängige Materialparameter.

2.4.3 Phänomenologische isotrope nichtlineare Modelle

Neben der Formulierung des ST. VENANT-KIRCHHOFF Modells gibt es eine Reihe phänomenologischer isotroper nichtlinearer Materialmodelle. Als eine einfache Erweiterung des HOOKE'schen Gesetzes auf große Verformungen dient das NEO-HOOKE'sche Materialmodell. Für kompressibles isotropes Materialverhalten ist die Potentialfunktion in Abhängigkeit des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors sowie der Determinante des materiellen Deformationstensors gegeben durch [10]

$$\Psi_{\mathrm{Neo}}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\lambda\left(\ln J\right)^2 - \mu\ln(J) + \frac{1}{2}\mu\left(\operatorname{tr}\mathbf{C} - 3\right), \tag{2.54}$$

so dass der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor formuliert werden kann als

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\Psi_{\mathrm{Neo}}}{\partial\mathbf{C}} = \lambda\ln J\mathbf{C}^{-1} + \mu\left(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}\right). \tag{2.55}$$

Einen weiteren Ansatz entwickelten RIVLIN und SAUNDERS [124] zunächst für inkompressible Materialien für große Verformungen, z.B. Gummi,

$$\Psi_{\mathrm{Moo}}(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{c}_{ij}\left(I_1 - 3\right)^i\left(I_2 - 3\right)^j, \bar{c}_{00} = 0 \tag{2.56}$$

bzw. in vereinfachter Form [100]

$$\Psi_{\mathrm{Moo}}(I_1, I_2) = c_{10}\left(I_1 - 3\right) + c_{01}\left(I_2 - 3\right), \tag{2.57}$$

wobei c_{01} und c_{10} die Materialparameter sind, für die der Zusammenhang $c_{10} + c_{01} = \frac{\mu}{2}$

gilt. Es konnte gezeigt werden, dass dieses Materialmodell sehr gut mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmt [100, 124]. Ferner kann für $c_{01} = 0$ aus diesem Modell das NEO-HOOKE'sche Materialmodell für inkompressible Materialien abgeleitet werden.

Erweitert man das MOONEY-RIVLIN Modell auf kompressible Materialien, erhält man als Potential in Abhängigkeit der modifizierten Invarianten [8]

$$\Psi_{\text{Moo}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3) = c_{10}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + c_{01}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + \frac{K}{2}\left(\bar{I}_3 - 1\right)^2, \tag{2.58}$$

wobei K der Kompressionsmodul ist. Streng genommen muss bei dem Übergang von (2.57) zu (2.58) eine Anpassung der Materialparameter c_{10} und c_{01} stattfinden. Da sich die Werte der modifizierten Invarianten gegenüber den normalen Invarianten aber nur sehr geringfügig verändern, wird dies in der Regel vernachlässigt [18].

2.4.4 Transversal-isotrope lineare Ansätze

Basierend auf den fünf Invarianten für transversal-isotropes Material, vgl. (2.35) und (2.36), existieren verschiedene hyperelastische Ansätze zur Beschreibung von linearem transversal-isotropem Materialverhalten. Unter Verwendung des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ kann die Potentialfunktion formuliert werden als [40, 66]

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{E}} \;&= \tfrac{1}{2}\lambda(\operatorname{tr}\mathbf{E})^2 + \mu_T \operatorname{tr}\mathbf{E}^2 + \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})\operatorname{tr}\mathbf{E} \\ &\quad +2(\mu_L - \mu_T)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}^2\cdot\mathbf{a}) + \tfrac{1}{2}\beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})^2.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Dabei sind α, β, λ, μ_L und μ_T die fünf unabhängigen Materialparameter, die zur Beschreibung von transversal-isotropem Materialverhalten benötigt werden. Verwendet man anstelle des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ die Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors $\mathbf{C}$, ergibt sich nach [123] zunächst

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{C}} = \;& c_1(I_1 - 3)^2 + c_2(I_2 - 3) - 2c_2(I_1 - 3) + c_3(I_4 - 1)^2 \\ &+c_4(I_5 - 1) - 2c_4(I_4 - 1) + c_5(I_4 - 1)(I_1 - 3)\end{aligned} \tag{2.60}$$

mit den fünf unabhängigen Materialparametern $c_1, ..., c_5$. Obwohl die beiden Terme

$$-2c_2(I_1 - 3) \qquad \text{und} \qquad -2c_4(I_4 - 1), \tag{2.61}$$

keinen Anteil an dem Elastizitätstensor haben, werden sie benötigt, damit im unverformten Zustand keine Vorspannungen herrschen [123].

Bei beiden Potentialen handelt es sich um eine lineare Modellbildung, da der Elastizitätstensor $\mathbb{C}$ unabhängig vom Deformationszustand $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{C}$ ist. Darüber hinaus werden Kompressibilitätseffekte auf Grund der Annahme $I_3 = 1$ nicht berücksichtigt. Es handelt sich demnach um eine inkompressible Formulierungen.

2.4.5 Biomechanische Modelle

Nichtlineare transversal-isotrope Materialmodelle kommen überwiegend in der Biomechanik zur Modellierung von Gewebe zum Einsatz. Dabei wird eine zweigeteilte Potentialformulierung der Form

$$\Psi = \Psi_{\text{iso}} + \Psi_{\text{aniso}} \tag{2.62}$$

verwendet. Für den isotropen Anteil werden bekannte Formulierungen, wie zum Beispiel die Potentialformulierung nach Neo-Hooke oder Mooney-Rivlin herangezogen. Der anisotrope Anteil der Potentialfunktion, der die Kollagenfasern des Gewebes repräsentiert, wird über einen Exponentialfunktionsansatz mit der 4. Invarianten formuliert. Falls die Fasern eine Gewebeschicht bilden, wird darüber hinaus zusätzlich die 6. Invariante berücksichtigt, so dass sich nach [60]

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{HGO}}(\mathbf{C}) &= \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi_{\text{aniso}}(\bar{I}_4, \bar{I}_6) \\ &= \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \mathrm{e}^{k_2(\bar{I}_i - 1)^2} - 1 \end{aligned} \tag{2.63}$$

als Potentialfunktion ergibt, welche auch als Holzapfel-Gasser-Ogden Modell bekannt ist. Hierbei sind c, k_1 und k_2 die benötigten Materialparameter. Dieses Modell wird zur Simulation von Arterienwänden verwendet. Dabei ist zu beachten, dass diesem Modell die Annahme zu Grunde liegt, dass Kollagenfasern nur Zug aufnehmen können. Es erfolgt eine Fallunterscheidung der Potentialformulierung zwischen Zug- und Druckbeanspruchung. In einer Erweiterung des Holzapfel-Gasser-Ogden Modells wird darüber hinaus zusätzlich die Faserverteilung in die jeweilige Richtung mit berücksichtigt, so dass sich die Potentialfunktion verändert zu [44]

$$\Psi_{\text{HGO}}(\mathbf{C}) = \frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \mathrm{e}^{k_2\left[\kappa \bar{I}_1 + (1-3\kappa)(\bar{I}_i - 1)\right]^2} - 1. \tag{2.64}$$

Dabei gibt $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{3}$ die Faserverteilung an. Für $\kappa = \frac{1}{3}$ sind die Fasern zufällig verteilt und man erhält isotropes Verhalten, für $\kappa = 0$ sind die Fasern perfekt ausgerichtet, sie liegen parallel. Bei beiden Modellen werden Kompressibilitätseffekte vernachlässigt.

2.4.6 Fünf-Konstanten-Theorie

Die Fünf-Konstanten-Theorie wurde von Murnaghan 1951 zur Beschreibung von nichtlinearem isotropem Materialverhalten entwickelt [105]. Im Gegensatz zu linearen Modellen basiert die Potentialfunktion Ψ des Murnaghan Modells auf einer Taylor-Reihenentwicklung dritter Ordnung [15]

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3. \tag{2.65}$$

Ψ_0 repräsentiert die Verzerrungsenergie im unverformten Zustand, welche als konstant angenommen wird. Darüber hinaus soll die erste Ableitung der Potentialfunktion nach

der Verzerrung an der Stelle $E_{ij} = 0$ null sein, so dass im unverformten Zustand Spannungsfreiheit herrscht. Daraus resultiert $\Psi_1 = 0$. Die verbleibenden Terme ergeben sich in Indexnotation zu [15, 22, 114]

$$\Psi_2 = \frac{1}{2!} C_{ijkl}\, E_{ij}\, E_{kl} \tag{2.66}$$

und

$$\Psi_3 = \frac{1}{3!} C_{ijklmn}\, E_{ij}\, E_{kl}\, E_{mn}. \tag{2.67}$$

Die Materialparameter C_{ijkl} und C_{ijklmn} können durch die zweite bzw. dritte Ableitung der Potentialfunktion Ψ nach $\mathbf{E}$ bestimmt werden. Deshalb werden diese als Steifigkeiten zweiter bzw. Steifigkeiten dritter Ordnung bezeichnet, wobei die Steifigkeiten zweiter Ordnung dem bekannten Elastizitätstensor aus dem HOOKE'schen Gesetz (2.52) entsprechen und somit das lineare Materialverhalten beschreiben. Die insgesamt 729 Steifigkeiten dritter Ordnung geben das nichtlineare Materialverhalten wieder. Sie beschreiben das Verhalten der Wellengeschwindigkeit in einem Körper in Abhängigkeit eines vorherrschenden Spannungszustandes [114, 115, 139]. Für isotropes Material ergeben sich auf Grund der Symmetrieeigenschaften neben den beiden LAMÉ-Konstanten die drei unabhängigen Steifigkeiten dritter Ordnung A, B, C nach [75] bzw. l, m, m nach [105]. Mit Hilfe dieser fünf Materialkonstanten lässt sich die Potentialfunktion Ψ formulieren als [75]

$$\Psi = \mu_0 E_{ik}^2 + \frac{\lambda_0}{2} E_{ss}^2 + \frac{A}{3} E_{ik} E_{is} E_{ks} + B E_{ik}^2 E_{ss} + \frac{C}{3} E_{ss}^3. \tag{2.68}$$

Nach (2.42) lautet der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor [85] damit

$$S_{ik} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ik}} = 2\mu_0 E_{ik} + \lambda_0 E_{ss}\delta_{ik} + A E_{is} E_{ks} + B E_{ab} E_{ba} \delta_{ik} + 2B E_{ss} E_{ik} + C E_{ss}^2 \delta_{ik}. \tag{2.69}$$

Über die Beziehungen [71]

$$A = n \qquad\qquad l = B + C \tag{2.70}$$

$$B = m - \frac{n}{2} \qquad\qquad m = \frac{A}{2} + B \tag{2.71}$$

$$C = l - m + \frac{n}{2} \qquad\qquad n = A \tag{2.72}$$

können die Steifigkeiten dritter Ordnung A, B, C und l, m, n ineinander umgerechnet und somit (2.68) und (2.69) auch in Abhängigkeit von l, m, n angegeben werden.

Die Erweiterung der Fünf-Konstanten-Theorie für komplexere Materialien wie z. B. unidirektionale Einzelschichten und geschichtete Strukturen werden in [114] vorgestellt. Anstelle der für isotropes Material benötigten 5 (2+3) Materialparameter, wird transversalisotropes Material durch insgesamt 14 (5+9) unabhängige Materialparameter beschrieben, für orthotropes Material sind sogar 29 (9+20) Größen nötig. Beispiele für einige Materi-

alparameter sind unter anderem in [9] für isotrope und in [114] für transversal-isotrope und orthotrope Werkstoffe gegeben.

2.5 Wellen in dünnwandigen Flächentragwerken

In dünnwandigen Flächentragwerken entstehen durch die Überlagerung und Reflexion von Longitudinal- und Transversalwellen an den Rändern LAMB- und horizontale Scherwellen (SH-Wellen), auch bezeichnet als geführte Wellen. Im Allgemeinen sind diese beiden Wellenformen gekoppelt. In isotropen und unter bestimmten Voraussetzungen auch in transversal-isotropen Strukturen kommt es zu einer Entkopplung von LAMB- und SH-Wellen. Das Phänomen der Ausbreitung von LAMB-Wellen wurde 1917 erstmals von HORACE LAMB beschrieben [74]. Dabei handelt es sich um multimodale, dispersive Wellen, die sich über die gesamte Bauteildicke ausbreiten. Generell unterscheidet man sowohl bei LAMB- als auch SH-Wellen zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Wellenmoden.

Unter Berücksichtigung der linearen Theorie zur Beschreibung der Wellenausbreitung, führt eine monofrequente Anregung auch zu einer monofrequenten Signalantwort. Weist die Struktur dahingegen nichtlineares Verhalten auf, liegt also eine nichtlineare Geometrie oder Materialverhalten vor, oder enthält sie miteinander interagierende Flächen, wie zum Beispiel Risse, führt dies zur Entstehung eines sekundären Wellenfeldes. Dieses sekundäre Wellenfeld ist gekennzeichnet durch Frequenzanteile mit einem ganzzahligen Vielfachen der Anregungsfrequenz, so genannter höher harmonischer Moden, wobei die Amplituden in der Regel sehr klein sind. Im Folgenden soll zunächst die Bewegungsgleichung für eine geometrisch bzw. materiell nichtlineare Struktur aufgestellt werden. Es erfolgt die Lösung für das primäre Wellenfeld über den linearen Teil der Bewegungsgleichung. Im Anschluss wird die Lösung für das sekundäre Wellenfeld vorgestellt, wobei hier die Amplitude im Vordergrund steht. Abschließend wird kurz auf die Entstehung höher harmonischer Moden durch die Interaktion von Rissoberflächen sowie die Möglichkeit der Quantifizierung des nichtlinearen Verhaltens eingegangen.

2.5.1 Nichtlineare Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Ausbreitung von LAMB-Wellen

Voraussetzung für die Formulierung der Bewegungsgleichung für die nichtlineare Wellenausbreitung ist ein gegebenes Potential Ψ. Basierend auf Ψ kann zunächst der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor $\mathbf{S}$, als Funktion von $\mathbf{H} = \operatorname{Grad}\mathbf{u}$, nach (2.42) berechnet werden. Mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{S}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{F}^{\top} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{H}) \tag{2.73}$$

kann anschließend der erste PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor $\mathbf{P}$ aufgestellt werden. Unter Vernachlässigung von Termen oberhalb zweiter Ordnung lässt sich $\mathbf{P}$ in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil, gleichbedeutend mit quadratisch in $\mathbf{H}$, aufteilen. Es ergibt sich

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) = \mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}^1) + \mathbf{P}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{H}^2) \tag{2.74}$$
$$= \mathbf{S}(\mathbf{H}^1) + \mathbf{S}(\mathbf{H}^2) + \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{H}^1). \tag{2.75}$$

Steht $\mathbf{H}$ ohne Zusatz in der Klammer, bedeutet dies, dass die zugehörige Größe eine Funktion des Gradienten des Verschiebungsfeldes ist. Erfolgt eine zusätzliche Angabe über die Potenz von $\mathbf{H}$, so ist nur der Teil der Funktion gemeint, welcher die entsprechende Potenz von $\mathbf{H}$ aufweist.

Geht man nun von einer nichtlinearen Wellenausbreitung aus, kann die Wellengleichung mittels eines Störansatzes gelöst werden, durch welchen das Wellenfeld in zwei Komponenten zerlegt wird

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \tag{2.76}$$

mit $\|\mathbf{u}_1\| \gg \|\mathbf{u}_2\|$. Die beiden Anteile des Gesamtverschiebungsfeldes $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ repräsentieren dabei das Verschiebungsfeld des primären Wellenfelds $\mathbf{u}_1$ bei ω sowie das Verschiebungsfeld des sekundären Wellenfelds $\mathbf{u}_2$ bei 2ω. Auf Grundlage der Impulsbilanz (2.31) in der lokalen Form, wobei die Volumenkräften vernachlässigt werden

$$\mathrm{Div}[\mathbf{P}(\mathbf{H})] = \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{2.77}$$

und der Spannungsrandbedingung geführter Wellen

$$\mathbf{P}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}, \tag{2.78}$$

mit dem Normalenvektor der Oberfläche $\mathbf{N}$, können folgende Randwertprobleme für $\mathbf{u}_1$

$$\mathrm{Div}[\mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}_1)] - \rho\ddot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0} \tag{2.79}$$
$$\mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{2.80}$$

und für $\mathbf{u}_2$

$$\mathrm{Div}[\mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}_2)] - \rho\ddot{\mathbf{u}}_2 = -\mathrm{Div}[\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)] \tag{2.81}$$
$$\mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2) \tag{2.82}$$

formuliert werden. Die Lösung des Randwertproblems für das primäre Wellenfeld $\mathbf{u}_1$ ergibt sich aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.79) unter Beachtung der Spannungsrandbedingungen (2.80). Des Weiteren folgt aus dem Zusatz $(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1, 2)$ in (2.81), dass das sekundäre Wellenfeld $\mathbf{u}_2$ durch die Interaktion der quadratischen Terme (dritter Term des Klammerausdrucks) des Verschiebungsfeldes beschrieben durch $\mathbf{H}_1$ (erster Term des Klammerausdrucks) mit sich selbst (zweiter Term des Klammerausdrucks) entsteht. Wird dementsprechend die lineare Theorie und damit die Vernachlässigung der quadratischen Terme zu Grunde gelegt, entsteht kein sekundäres Wellenfeld.

2.5.2 Lineare Lösung für die Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten

Für die Lösung des primären Wellenfelds wird im Folgenden die homogene Differentialgleichung (2.79) verwendet und deren Lösung unter Beachtung der Spannungsrandbedingungen (2.80) für die Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten vorgestellt. Dazu wird zunächst die bekannte CHRISTOFFEL-Gleichung hergeleitet, bevor eine Fallunterscheidung auf der Grundlage der Belegung des Elastizitätstensors vorgenommen wird. Die Darstellungen beruhen auf [53, 122]. Detaillierte Beschreibungen, auch für andere Materialsymmetrien, sind unter anderem in [46, 53, 106, 107, 122, 126] zu finden.

2.5.2.1 CHRISTOFFEL-Gleichung

Ausgehend von der linearen Theorie und dem damit verbundenen Zusammenfall der Ausgangs- und Momentankonfiguration kann in dem Randwertproblem für $\mathbf{u}_1$ aus (2.79) und (2.80) der erste PIOLA-KICHHOFF'sche Spannungstensor durch den CAUCHY-Spannungstensor ersetzt werden. Des Weiteren wird als Verzerrungsmaß zur Beschreibung des primären Wellenfeldes der lineare Anteil des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}^{\top}\,\mathbf{u} + \mathrm{Grad}\,\mathbf{u}). \tag{2.83}$$

verwendet. Mit Hilfe des allgemeinen HOOKE'schen Gesetzes, als lineare konstitutive Gleichung,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.52}$$

kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung formuliert werden als

$$\mathrm{Div}(\mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}) - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \tag{2.84}$$

Führt man in diese Gleichung zusätzlich die Definition des linearisierten GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor über den Gradienten des Verschiebungsfeldes aus (2.17) ein und berücksichtigt die Vertauschbarkeit der Indizes auf Grund der vorgestellten Potential- und Symmetrieeigenschaften, kann (2.84) überführt werden in [53]

$$\mathrm{Div}(\mathbb{C} : \mathrm{Grad}\,\mathbf{u}) - \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \tag{2.85}$$

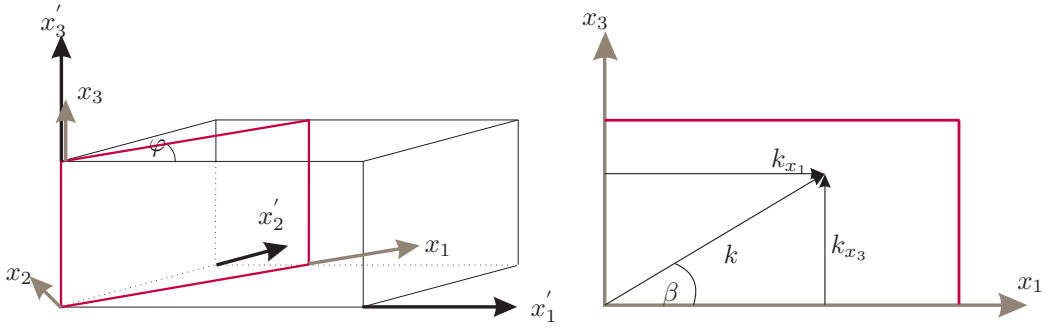
Somit ist die Wellengleichung für allgemeines anisotropes Materialverhalten in der Indexnotation gegeben durch

$$C_{ijkl}u_{k,lj} - \rho\ddot{u}_i = 0. \tag{2.86}$$

Um diese Differentialgleichung 2. Ordnung zu lösen, wird der Ansatz

$$u_i = A\; p_i\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_j x_j - \omega t)} \tag{2.87}$$

verwendet, wobei A die Amplitude, p_i der Polarisationsvektor, k_j der Wellenzahlvektor



(a) Wellenausbreitung in der $x_1 - x_3$ Ebene. (b) Wellenzahlvektor.

Abbildung 2.3: Geometrie zur Beschreibung der Wellenausbreitung.

und ω die Kreisfrequenz ist. In diesem Zusammenhang gibt der Polarisationsvektor die Richtung der Partikelbewegung und der Wellenzahlvektor die Ausbreitungsrichtung der Welle an. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass die Wellenausbreitung in der x_1-x_3-Ebene liegt. Dies ist möglich, da die Ebene der Wellenausbreitung durch Koordinatentransformation immer in diese Ebene gedreht werden kann, siehe Abbildung 2.3(a). Auf dieser Grundlage vereinfacht sich der Wellenzahlvektor k_j. Er kann mittels der in Abbildung 2.3(b) dargestellten, geometrischen Betrachtung ausgedrückt werden durch

$$k_j = \begin{bmatrix} k_{x_1} \\ k_{x_2} \\ k_{x_3} \end{bmatrix} = k_{x_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = k_{x_1}\, n_j. \tag{2.88}$$

Dabei ist n_j der Ausbreitungsrichtungsvektor und $\alpha = \tan\beta$. Im Folgenden wird auf den Index der Wellenzahl verzichtet, mit k ist demnach die Komponente der Wellenzahl in x_1-Richtung gemeint.

Für die Wellengeschwindigkeitskomponenten in x_1- und x_3-Richtung, auch als Phasengeschwindigkeit bezeichnet, gegeben durch

$$c_\mathrm{p} = \frac{\omega}{k}, \tag{2.89}$$

können die beiden Beziehungen $c_{\mathrm{p}_1} = \frac{\omega}{k}$ und $c_{\mathrm{p}_3} = \frac{\omega}{\alpha k}$ aufgestellt werden. Neben der Ausbreitungskomponente ist auch die Geschwindigkeitskomponente in x_2-Richtung null. Eine Verschiebung ist hingegen möglich, wodurch die allgemeine Kopplung zwischen Lamb- und SH-Wellen berücksichtigt ist.

Um die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung aus (2.86) zu lösen, wird die gewählte Ansatzfunktion (2.87) mit den entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} u_{l,kj} &= -k_k\, k_j\, u_l \\ \ddot{u}_i &= -\omega^2\, u_i, \end{aligned} \tag{2.90}$$

unter Verwendung von (2.89) eingesetzt. Als Ergebnis erhält man die CHRISTOFFEL-Gleichung [107]

$$\Lambda_{il}\, p_l = (\delta_{il}\rho c_\mathrm{p}^2 - \lambda_{il})\, p_l = 0 \tag{2.91}$$

bzw. in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} - \rho c_\mathrm{p}^2 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} - \rho c_\mathrm{p}^2 & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} - \rho c_\mathrm{p}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.92}$$

Die darin enthaltenen Elemente λ_{il} können nach

$$\lambda_{il} = C_{ijkl}\, n_k\, n_j \tag{2.93}$$

berechnet werden und sind nur von den Materialparametern und der Ausbreitungsrichtung abhängig.

Basierend auf der CHRISTOFFEL-Gleichung kann das Verschiebungsfeld formuliert und unter Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen die Dispersionsbeziehung aufgestellt werden. Einen erheblichen Einfluss darauf hat, wie in (2.93) zu erkennen, der Elastizitätstensor. Je nach Belegung kann es zu einer Entkopplung der drei Verschiebungskomponenten kommen. Diese beiden Fälle sollen im Folgenden getrennt voneinander betrachtet werden.

2.5.2.2 Wellenausbreitung ohne Entkopplungseffekt

Die CHRISTOFFEL-Gleichung stellt ein Eigenwertproblem dar. Die nichttrivialen Lösungen für α und p_j ergeben sich somit aus der Beziehung

$$\det(\Lambda_{il}) = 0. \tag{2.94}$$

Wird ein monoklin belegter Elastizitätstensor

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2313} & C_{1313} & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

zu Grunde gelegt, ergibt sich für die Determinante

$$f_0 + f_2\alpha^2 + f_4\alpha^4 + f_6\alpha^6 = 0, \tag{2.96}$$

ein Polynom 6. Ordnung. Als Ergebnis erhält man drei Wertepaare $\pm\,\alpha_n$ mit den dazugehörenden Eigen- bzw. Polarisationsvektoren $(p_i)_n$, mit deren Hilfe, durch Einsetzen in

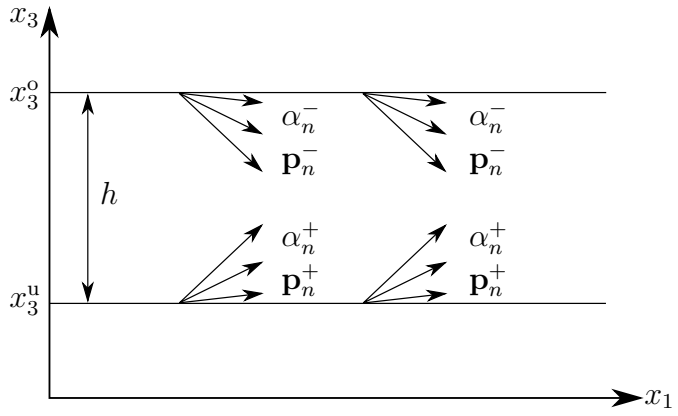


Abbildung 2.4: Superposition der sechs Teilwellen.

(2.87), das Verschiebungsfeld beschrieben wird als

$$u_i = \sum_{n=1}^{3} \left[A_n^+ \left(p_i^+ \right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n x_3} + A_n^- \left(p_i^- \right)_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\alpha_n x_3} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)}. \tag{2.97}$$

Aus (2.97) kann geschlussfolgert werden, dass geführte Wellen durch die Superposition von insgesamt sechs Teilwellen entstehen. Es handelt sich dabei um die Überlagerung der an den Rändern reflektierten Longitudinal- und Transversalwellen. Die gefundenen Eigenwerte und -vektoren $+\alpha_n$ und $\mathbf{p}_n^+$ stehen für in positive x_3-Richtung, $-\alpha_n$ und $\mathbf{p}_n^-$ spiegelbildlich für in negative x_3-Richtung laufende Wellen (vgl. Abbildung 2.4).

Durch die Verwendung der Spannungsrandbedingung aus (2.80) können die noch unbekannten Amplituden ermittelt und die Dispersionsbeziehung aufgestellt werden. Für die gewählte Geometrie zur Beschreibung der Wellenausbreitung ergibt sich aus (2.80) als Randbedingung

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \tag{2.98}$$

Mittels Einsetzen von (2.83) in (2.52), unter der Berücksichtigung der Vertauschbarkeit der Indizes, kann der Zusammenhang

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \tag{2.99}$$

aufgestellt werden, der es ermöglicht, die Spannungsrandbedingungen mit dem in (2.97) formulierten Verschiebungsfeld zu verknüpfen. Dabei können, bei einer geeigneten Wahl des Koordinatensystemursprungs, die Exponentialfunktionsterme zusammengefasst werden. Für die sich in negative x_3-Richtung ausbreitenden Teilwellen wird der Koordinatensystemursprung an die Oberkante der Einzelschicht gelegt, für in positive x_3-Richtung laufende Teilwellen an die Unterkante der Einzelschicht. Damit ergibt sich zunächst für das Verschiebungsfeld

$$u_i = \sum_{n=1}^{3} \left[A_n^+ \left(p_i^+ \right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n (x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A_n^- \left(p_i^- \right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n (x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} \tag{2.100}$$

und schließlich durch Einsetzen von (2.100) in (2.99) für die Spannungen

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_l} \left\{ C_{ijkl} \sum_{n=1}^{3} \left[A_n^+ \left(p_k^+\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A_n^- \left(p_k^-\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} \right\}. \quad (2.101)$$

Bei der Ortsableitung wird davon ausgegangen, dass der Elastizitätstensor über die Platte konstant ist, so dass sich die Spannungsrandbedingung, für die grundsätzlich $j = 3$ gilt, unter Verwendung der entsprechenden x_3-Koordinaten der Ober- ($x_3 = x_3^{\mathrm{o}}$) und Unterkante ($x_3 = x_3^{\mathrm{u}}$) in der Weise

$$\sigma_i^{\mathrm{u}} = \mathrm{i}k \sum_{n=1}^{3} \left[A_n^+ \left(d_i^+\right)_n + A_n^- \left(d_i^-\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n h} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} = 0, \quad (2.102)$$

$$\sigma_i^{\mathrm{o}} = \mathrm{i}k \sum_{n=1}^{3} \left[A_n^+ \left(d_i^+\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n h} + A_n^- \left(d_i^-\right)_n \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} = 0, \quad (2.103)$$

mit

$$\left(d_i^{\pm}\right)_n = C_{i3kl} n_l^{\pm} \left(p_k\right)_n^{\pm} \qquad \text{und} \qquad h = x_3^{\mathrm{o}} - x_3^{\mathrm{u}} \quad (2.104)$$

formulieren lassen. Führt man diese beiden Gleichungen zusammen in ein Gleichungssystem, erhält man die in der Literatur zu findende Dispersionsbeziehung [125]

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^{\mathrm{u}} \\ \sigma_i^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} = \mathrm{i}k \begin{bmatrix} D_{ij}^+ & D_{il}^- H_{jl} \\ D_{il}^+ H_{jl} & D_{ij}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_l^+ \\ A_l^- \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

mit

$$D_{ij}^{\pm} = \left[\left(d_i^{\pm}\right)_1 \quad \left(d_i^{\pm}\right)_2 \quad \left(d_i^{\pm}\right)_3 \right], \quad (2.106)$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_1 h} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_2 h} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_3 h} \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

$$A_j^{\pm} = \left[A_1^{\pm} \quad A_2^{\pm} \quad A_3^{\pm} \right]. \quad (2.108)$$

Als Lösungen werden nun Werte für ω und k gesucht, die (2.105) erfüllen. Da es sich dabei um ein homogenes Gleichungssystem handelt, kann dies gelöst werden, indem die Determinante der Koeffizientenmatrix zu null gesetzt wird. Allerdings existiert keine geschlossene Lösung, so dass die Lösungen für (2.105) numerisch ermittelt werden müssen. Ferner ist es in (2.105) zunächst nicht möglich, zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Moden zu unterscheiden. Basierend auf (2.105) können aber durch Umformen zwei getrennte Bestimmungsgleichungen für die symmetrischen und die antisymmetrischen Moden formuliert werden. Für die antisymmetrischen Moden ergibt sich

$$d_{31}\ \tan(k\alpha_1\frac{h}{2})(d_{12}\ d_{23}-d_{22}\ d_{13})+d_{32}\ \tan(k\alpha_2\frac{h}{2})(d_{13}\ d_{21}-d_{23}\ d_{11}) + d_{33}\ \tan(k\alpha_3\frac{h}{2})(d_{11}\ d_{22}-d_{21}\ d_{12})=0 \quad (2.109)$$

bzw. für die symmetrischen Moden

$$d_{31}\ \cot(k\alpha_1\frac{h}{2})(d_{12}\ d_{23}-d_{22}\ d_{13})+d_{32}\ \cot(k\alpha_2\frac{h}{2})(d_{13}\ d_{21}-d_{23}\ d_{11}) + d_{33}\ \cot(k\alpha_3\frac{h}{2})(d_{11}\ d_{22}-d_{21}\ d_{12})=0. \quad (2.110)$$

Eine Trennung zwischen LAMB- und SH-Wellen ist hingegen nicht möglich. Die genaue Umformung ist in Anhang A.1.1 dargestellt.

2.5.2.3 Wellenausbreitung mit Entkopplungseffekt

Betrachtet man die Wellenausbreitung in einer UD-Schicht entlang einer Symmetrieachse, also in Richtung oder quer zur Faser, entkoppeln sich die Verschiebungskomponenten in der CHRISTOFFEL-Gleichung auf Grund der Belegung des Elastizitätstensors. Ausgehend von dem Elastizitätstensor in der Form

$$C_{ijkl}=\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0\\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0\\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

werden die Koeffizienten λ_{12} und λ_{23} aus der CHRISTOFFEL-Gleichung zu null, so dass sich diese vereinfacht zu

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}-\rho c_p^2 & 0 & \lambda_{13}\\ 0 & \lambda_{22}-\rho c_p^2 & 0\\ \lambda_{13} & 0 & \lambda_{33}-\rho c_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Es sind zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme entstanden. Die Verschiebung der Partikel in x_2-Richtung, beschrieben durch p_2, kann getrennt von der Verschiebung in der x_1-x_3-Ebene, beschrieben durch p_1 und p_3, betrachtet werden. Dies ermöglicht eine separate Betrachtung von LAMB- und SH-Wellen.

Als Eigenwerte aus der CHRISTOFFEL-Gleichung ergeben sich für LAMB-Wellen aus der

biquadratischen Gleichung

$$f_0 + f_2\alpha^2 + f_4\alpha^4 = 0 \tag{2.113}$$

die zwei Wertepaare

$$\pm\alpha_1 \text{ und } \pm\alpha_3 \tag{2.114}$$

und für SH-Wellen aus der quadratischen Gleichung

$$f_0^* + f_2^*\alpha^2 = 0 \tag{2.115}$$

das Wertepaar

$$\pm\alpha_2. \tag{2.116}$$

Das Verschiebungsfeld der LAMB-Wellen entsteht somit aus der Überlagerung von vier, das Verschiebungsfeld der SH-Wellen aus zwei Teilwellen. Beschrieben werden kann dies durch

$$u_i = \sum_{n=1,3} \left[A_n^+ \left(p_i^+\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A_n^- \left(p_i^-\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} \quad i = 1,3 \tag{2.117}$$

für die LAMB-Wellen bzw.

$$u_2 = \left[A^+ p_2^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha(x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A^- p_2^- \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha(x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} \tag{2.118}$$

für die SH-Wellen.

Bei der Betrachtung der Spannungsrandbedingungen ist ebenfalls eine Fallunterscheidung notwendig. Für LAMB-Wellen ist die Spannungskomponente σ_{23} immer null, entsprechend sind für die SH-Wellen die beiden Komponenten σ_{13} und σ_{33} immer null, so dass sich die verbleibenden Komponenten der Spannungsrandbedingung bei LAMB-Wellen als

$$\sigma_i = \mathrm{i}k \sum_{n=1,3} \left[A_n^+ \left(d_i^+\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A_n^- \left(d_i^-\right)_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_n(x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)}, \tag{2.119}$$

mit

$$\left(d_i^{\pm}\right)_j = C_{i3kl} n_l \left(p_k\right)_j \text{ und } \; i,k = 1,3 \tag{2.120}$$

bzw. bei den SH-Wellen als

$$\sigma_2 = \mathrm{i}k \left[A^+ d_2^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha(x_3 - x_3^{\mathrm{u}})} + A^- d_2^- \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha(x_3^{\mathrm{o}} - x_3)} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)}, \tag{2.121}$$

mit

$$\left(d_2^{\pm}\right)_j = C_{232l} n_l \left(p_k\right)_j \tag{2.122}$$

formulieren lassen. Führt man auch hier die Spannungen an der Ober- und Unterkante der

Platte in einem Gleichungssystem zusammen, folgt dasselbe homogene Gleichungssystem als Dispersionsbeziehung wie bereits bei der Betrachtung ohne den Entkopplungseffekt

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^{\mathrm{u}} \\ \sigma_i^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} = \mathrm{i}k \begin{bmatrix} D_{ij}^{+} & D_{il}^{-} H_{jl} \\ D_{il}^{+} H_{jl} & D_{ij}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_l^{+} \\ A_l^{-} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.105}$$

nur dass die Submatrizen eine andere Form haben. Für Lamb-Wellen ergeben sie sich zu

$$D_{ij}^{\pm} = \left[\left(d_i^{\pm} \right)_1 \quad \left(d_i^{\pm} \right)_3 \right], \tag{2.123}$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_1 h} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_3 h} \end{bmatrix}, \tag{2.124}$$

$$A_j^{\pm} = \begin{bmatrix} A_1^{\pm} & A_3^{\pm} \end{bmatrix} \tag{2.125}$$

und für die SH-Wellen zu

$$D_{ij}^{\pm} = \left[\left(d_i^{\pm} \right)_2 \right], \tag{2.126}$$

$$H_{ij} = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha_2 h} \right], \tag{2.127}$$

$$A_j^{\pm} = \left[A_2^{\pm} \right]. \tag{2.128}$$

Analog zur vorherigen Betrachtung ist es auch hier möglich, getrennte Gleichungen für die Dispersionsbeziehungen der symmetrischen und antisymmetrischen Lamb-Wellenmoden sowie der symmetrischen und antisymmetrischen Moden der SH-Wellen aufzustellen. Für die antisymmetrischen Lamb-Wellenmoden folgt

$$d_{11} d_{33} \ \tan(k\alpha_3 \frac{h}{2}) - d_{13} d_{31} \ \tan(k\alpha_1 \frac{h}{2}) = 0 \tag{2.129}$$

bzw. für die symmetrischen Lamb-Wellenmoden

$$d_{11} d_{33} \ \cot(k\alpha_3 \frac{h}{2}) - d_{13} d_{31} \ \cot(k\alpha_1 \frac{h}{2}) = 0. \tag{2.130}$$

Bei den SH-Wellen erhält man für die antisymmetrischen Moden die Dispersionsbeziehung

$$\cos(k\alpha_2 \frac{h}{2}) = 0 \tag{2.131}$$

bzw. für die symmetrischen Moden der SH-Wellen

$$\sin(k\alpha_2 \frac{h}{2}) = 0. \tag{2.132}$$

Da die Belegung des Elastizitätstensors für transversal-isotropes und isotropes Material identisch ist, kann auf Grundlage der Gleichungen (2.129) und (2.130) die Rayleigh-

Lamb Gleichung [46, 126]

$$\frac{\tan q\frac{h}{2}}{\tan p\frac{h}{2}} = -\left(\frac{4k^2pq}{(q^2-k^2)^2}\right)^{\pm 1} \tag{2.133}$$

mit

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{L}}^2} - k^2 \qquad \text{und} \qquad q^2 = \frac{\omega^2}{c_{\mathrm{T}}^2} - k^2, \tag{2.134}$$

für die Ausbreitung von Lamb-Wellen in isotropem Material hergeleitet werden (siehe Anhang A.1.2). Hierbei ist c_{L} die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinal- und c_{T} der Transversalwelle. Abschließend zeigt Abbildung 2.5 beispielhaft ein Dispersionsdiagramm der Phasengeschwindigkeit für Lamb- (Abbildung 2.5(a)) bzw. SH-Wellen (Abbildung 2.5(b)) für die Wellenausbreitung in Faserrichtung in einer transversal-isotropen Einzelschicht. Die Trennung zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Moden ist gekennzeichnet durch die Verwendung durchgezogener Linien für die symmetrischen und gestrichelten Linien für die antisymmetrischen Moden. Die einzelnen Moden eines Typs werden nach ihrem ersten Erscheinen durchnummeriert, so dass man zwischen $S_0, S_1, S_2, ...$ und $A_0, A_1, A_2, ...$ für Lamb- und $SH_0^{\mathrm{S}}, SH_1^{\mathrm{S}}, SH_2^{\mathrm{S}}, ...$ und $SH_0^{\mathrm{A}}, SH_1^{\mathrm{A}}, SH_2^{\mathrm{A}}, ...$ für SH-Wellen unterscheiden kann. Die beiden fundamentalen Lamb-Wellenmoden S_0 und A_0 sowie die horizontale Scherwelle SH_0^{S} sind dabei immer vorhanden. Die Frequenz, bei der eine Wellenmode zum ersten Mal auftritt, wird als *Cut-off frequency* bezeichnet. Ab diesem Punkt ist die Welle als solche zu erkennen, sie breitet sich aus. Dieser Zustand ist durch eine reale Wellenzahl gekennzeichnet. Bei kleineren Frequenzen handelt es sich um evaneszente Wellen, also Wellen, die exponentiell abklingen und sich somit nicht ausbreiten. Diese Wellen sind durch eine imaginäre Wellenzahl charakterisiert. Zu jeder Frequenz gehören demnach eine endliche Anzahl an sich ausbreitenden und eine unendliche Anzahl an evaneszenten Wellen [6].

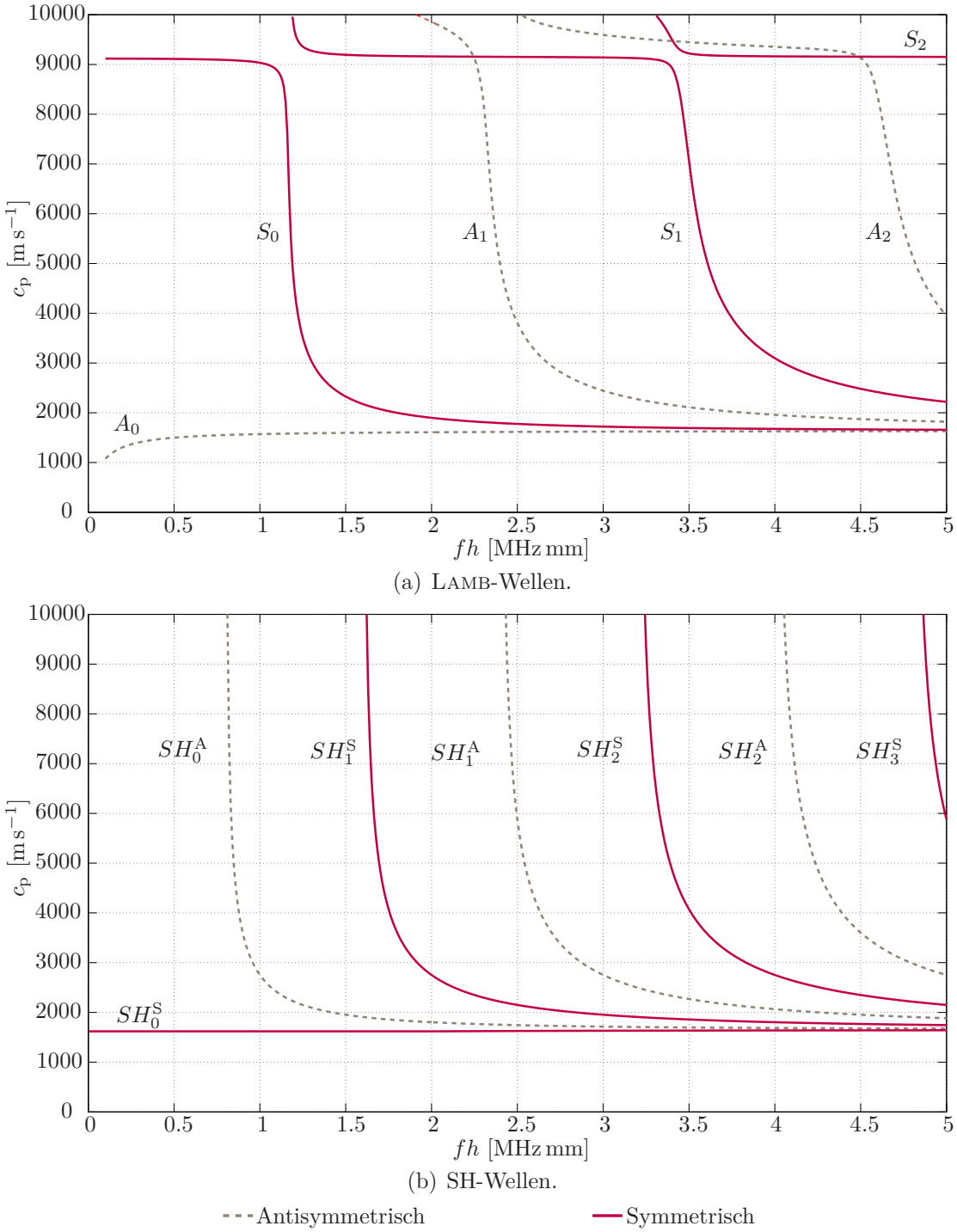
Neben der bereits vorgestellten Phasengeschwindigkeit ist es üblich, Dispersionsdiagramme auch für die Gruppengeschwindigkeit anzugeben. Im Gegensatz zur Phasengeschwindigkeit, die die Geschwindigkeit eines Punktes mit konstanter Phase beschreibt, gibt die Gruppengeschwindigkeit an, mit welcher Geschwindigkeit sich ein Wellenpaket ausbreitet. Sie ist definiert als

$$c_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}. \tag{2.135}$$

Nach [126] kann diese auch in Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit mittels

$$c_{\mathrm{g}} = \mathrm{d}\omega\left[\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{c_{\mathrm{p}}}\right)\right]^{-1} \tag{2.136}$$

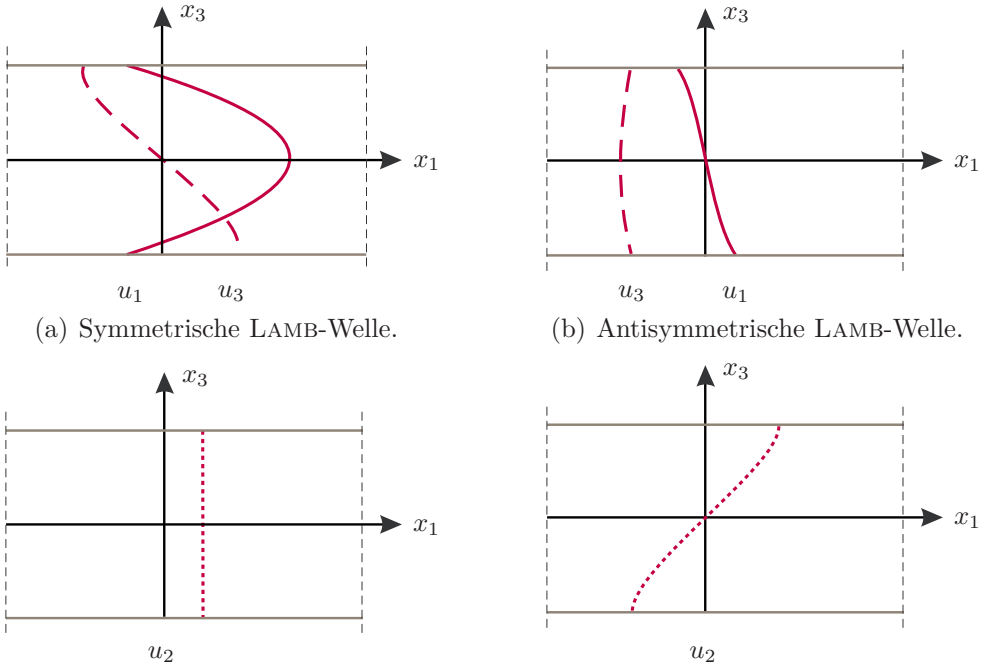
$$= c_{\mathrm{p}}^2\left[c_{\mathrm{p}} - \omega\frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\omega}\right]^{-1} \tag{2.137}$$



(a) Lamb-Wellen.

(b) SH-Wellen.

Abbildung 2.5: Dispersionsdiagramme der Phasengeschwindigkeit für Lamb- und SH-Wellen in einer transversal-isotropen Einzelschicht bei Wellenausbreitung in Faserrichtung.



(a) Symmetrische LAMB-Welle. (b) Antisymmetrische LAMB-Welle.

(c) Symmetrische SH-Welle. (d) Antisymmetrische SH-Welle.

Abbildung 2.6: Verschiebungsfelder der fundamentalen LAMB- und SH-Wellenmoden (nach [53]).

ausgedrückt werden.

2.5.2.4 Verschiebungsfelder

Ist die Dispersionsbeziehung ausgewertet und eine Frequenz-Geschwindigkeits-Paarung einer Wellenmode bekannt, kann mit Hilfe dieser Werte das Verschiebungsfeld der Mode bestimmt werden. Dazu werden zunächst die Frequenz und Geschwindigkeit in die CHRISTOFFEL-Gleichung, (2.92) bzw. (2.112), eingesetzt und die Eigenwerte sowie der Polarisationsvektor ermittelt. Im Anschluss kann aus der Dispersionsbeziehung (2.105) die Amplitude errechnet und abschließend mittels der Gleichung für die Verschiebungen, in Abhängigkeit der Koordinaten, das Verschiebungsfeld einer Wellenmode bestimmt werden. Entsprechend der Belegung des Elastizitätstensors erhält man entweder getrennte Verschiebungsfelder für LAMB- und SH-Wellen, oder die Verschiebungsfelder der beiden Wellentypen sind miteinander gekoppelt.

In Abbildung 2.6 sind beispielhaft die Verschiebungskomponenten für die fundamentalen symmetrischen und antisymmetrischen LAMB- und SH-Wellen im entkoppelten Zustand dargestellt.

2.5.3 Nichtlineare Lösung für die Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten

Im Folgenden soll die Lösung des Randwertproblems für das sekundäre Wellenfeld aus (2.81) und (2.82) mit Hilfe der *normal mode expansion technique* zusammen mit der *Reziprozitätsbeziehung* dargestellt werden, so wie sie unter anderem in [33, 81, 104] zu finden ist. Dazu werden zunächst die *Reziprozitätsbeziehung* und die *normal mode expansion technique* vorgestellt. Es folgt die Lösung für die Amplitude der höher harmonischen Mode sowie die Auswertung der Kumulativitätsbedingungen und die Bestimmung passender kumulativer Modenpaare. Ein weiterer Lösungsansatz, welcher auf der *partial wave technique* basiert, ist in [34–37] zu finden.

2.5.3.1 Reziprozitätsbeziehung

Die *Reziprozitätsbeziehung* besagt nach [5, 6], dass zwischen zwei Lösungen der Wellengleichung der Zusammenhang

$$\mathrm{Div}(\mathbf{v}_2^* \cdot \bar{\mathbf{P}}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \bar{\mathbf{P}}_2^*) = 0 \tag{2.138}$$

gilt. Hierbei beschreibt $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld der Wellenmode und $\bar{\mathbf{P}}$ das modale Spannungsfeld. Ferner wird durch $(...)^*$ die konjugiert komplexe Größe gekennzeichnet. Zunächst spiegelt (2.138) die Interaktion zwischen Spannung und Partikelbewegung wieder. Zum einen führt ein Spannungszustand im Körper zu einer Bewegung der Partikel, zum anderen verursacht aber auch eine Bewegung der Partikel eine Spannung. Des Weiteren repräsentiert das Produkt aus Geschwindigkeit und Spannung einen Leistungsfluss in einem Punkt, so dass (2.138) schlussendlich punktuell die Dichte des Leistungsflusses angibt.

2.5.3.2 Normal mode expansion technique

Die folgenden Ausführungen zur *normal mode expansion technique* basieren weitestgehend auf der Darstellung in [126]. Die *normal mode expansion technique* ähnelt der *eigenfunction expansion technique*, wobei hier die Normalschwingungen der Struktur als Eigenfunktionen dienen. Ziel dieser Methode ist es, mit Hilfe der Normalschwingungen einen allgemeinen Ausdruck bzw. eine numerische Schätzung für eine Funktion zu finden. Dazu wird diese z.B. mittels einer Reihenentwicklung abgebildet, wobei zu jedem Element eine unbekannte Amplitude gehört, welche es zu bestimmen gilt. Im Rahmen dieses Vorgehens wird dabei die Bedingung der Vollständigkeit und der Orthogonalität an die Reihe bzw. die verwendeten Funktionen gestellt.

Eine Reihe bildet eine gesuchte Funktion vollständig ab, wenn Sie dieselbe Differenzierbarkeit und Randwerte für ein bestimmtes Intervall aufweist. So ist eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion $f(x)$ mit den Randwerten $u(0) = u(1) = 0$ durch eine Reihe der Form $\sin(n\pi x)$ für $n = 1, 2, .., \infty$ vollständig abgebildet, da die Reihe selbst ebenfalls zweifach differenzierbar ist und die Randbedingungen erfüllt. Demnach kann eine Funktion

$f(x)$ mittels

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \tag{2.139}$$

mit den unbekannten Amplituden A_n beschrieben werden.

In (2.139) wird dabei ein Orthogonalsystem unter Verwendung der Funktionen $\sin(n\pi x)$ entwickelt. Es gilt der Zusammenhang

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x) \ \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für} \qquad m \neq n, \tag{2.140}$$

durch welchen die Orthogonalität zwischen zwei Funktionen in dem Intervall $[a, b]$ definiert ist.

Basierend auf diesen Eigenschaften können die unbekannten Amplituden sehr einfach bestimmt werden. Dazu muss die aufgestellte Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(x) \tag{2.141}$$

auf beiden Seiten mit allen Elementen der Reihe multipliziert und anschließend über den relevanten Bereich integriert werden

$$\int_a^b f(x)\Phi_m \ \mathrm{d}x = \int_a^b \left\{ \Phi_m(x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(x) \right\} \ \mathrm{d}x. \tag{2.142}$$

Auf Grund der geforderten Orthogonalität verbleibt nur der Term, für den $m = n$ gilt. Alle anderen Terme verschwinden. Die gesuchte Amplitude ist somit gegeben durch

$$A_m = \frac{\int_a^b f(x)\Phi_m \ \mathrm{d}x}{\int_a^b \Phi_m^2(x) \ \mathrm{d}x}. \tag{2.143}$$

2.5.3.3 Lösung für die Amplitude des sekundären Wellenfelds

Angewandt auf die Interaktion der nichtlinearen Anteile der Verschiebungen des primären Wellenfeldes bei der Lamb-Wellenausbreitung mit sich selbst, werden die Größen aus der *Reziprozitätsbeziehung* zunächst mittels der *normal mode expansion technique* durch folgende Reihen wiedergegeben [6, 81]

$$\mathbf{P}^{\mathrm{L}}(\mathbf{H}_2) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(X_1)\mathbf{P}_m, \tag{2.144}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(X_1)\mathbf{v}_m, \tag{2.145}$$

welche die Lösung des sekundären Wellenfeldes als Linearkombination aller Wellenmoden, sich ausbreitend und nichtausbreitend, bei 2ω darstellen. Bezogen auf das Randwertproblem aus (2.81) ergibt sich daraus für die Lösung der Amplitude der höher harmonischen

Mode folgende Differentialgleichung [33, 81, 104]

$$4\mathcal{P}_{mn}\left[\frac{\mathrm{d}A_m(X_1)}{\mathrm{d}X_1} - \mathrm{i}k_n^* A_m(X_1)\right] = (f_n^{\mathrm{surf}} + f_n^{\mathrm{vol}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kX_1}, \tag{2.146}$$

mit

$$\mathcal{P}_{mn} = -\frac{1}{4}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\mathbf{v}_n^* \cdot \mathbf{P}_m}{4} + \frac{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{P}_m^*}{4}\right) \cdot \mathbf{N}_{X_1}\, \mathrm{d}X_3, \tag{2.147}$$

$$f_n^{\mathrm{surf}} = -\frac{1}{2}\mathbf{P}^{\mathrm{NL}} \cdot \mathbf{v}_n^* \cdot \mathbf{N}_{X_3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \tag{2.148}$$

$$f_n^{\mathrm{vol}} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{Div}(\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}) \cdot \mathbf{v}_n^*\, \mathrm{d}X_3. \tag{2.149}$$

Da $(...)^*$ die konjugiert komplexen Größen bezeichnet, erfolgt auf diese Weise die Berücksichtigung der sich nicht ausbreitenden Wellenmoden, $\mathcal{P}_{mn}$ ist der aus der Reziprozitätsbeziehung folgende zeitlich gemittelte Leistungsfluss zwischen der m-ten und n-ten Wellenmode, f_n^{surf} der Leistungsfluss über die Oberfläche und f_n^{vol} über das Volumen infolge des primären Wellenfeldes. Die Amplitude der höher harmonischen Mode ergibt sich dann als Lösung der Differentialgleichung zu [33, 81, 104]

$$A_m(X_1) = \frac{f_n^{\mathrm{surf}} + f_n^{\mathrm{vol}}}{4\mathcal{P}_{mn}} \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{k_n^* - 2k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kX_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n^* X_1}), & k_n^* \neq 2k \\ X_1, & k_n^* = 2k \end{cases} \tag{2.150}$$

2.5.3.4 Interne Resonanz

Aus der Orthogonalitätsbedingung folgt zunächst, dass zu einer Mode m nur eine Mode $n = m$ existiert, für die gilt $\mathcal{P}_{mn} \neq 0$. Außerdem muss wegen $n = m$ gleichzeitig auch $k_n = k_m$ sein. Damit eine höher harmonische Mode entsteht, muss darüber hinaus für die Volumen- und Oberflächenkräfte $f_n^{\mathrm{surf}} + f_n^{\mathrm{vol}} \neq 0$ gelten. Es muss also ein Leistungsfluss zwischen der primären und der höher harmonischen Mode vorhanden sein.

Ist des Weiteren die Phasengeschwindigkeit der beiden Moden identisch ($k_n = 2k$), liegt ein kumulativer Effekt vor, welcher durch den linearen Anstieg der Amplitude mit der Ausbreitungsstrecke charakterisiert ist (siehe (2.150)). Sind beide Bedingungen zur Entstehung kumulativ höher harmonischer Moden erfüllt, spricht man von interner Resonanz.

Für den Fall, dass $k_n \neq 2k$ weist die Amplitude der höher harmonischen Mode oszillierendes Verhalten auf. Dieses Verhalten wird durch die so genannte Dispersionslänge beschrieben, welche definiert ist als [81]

$$L = \left|\frac{\pi c_{\mathrm{p}}^{2\omega} c_{\mathrm{p}}^{\omega}}{\omega(c_{\mathrm{p}}^{2\omega} - c_{\mathrm{p}}^{\omega})}\right|. \tag{2.151}$$

Da zur Herleitung der Amplitude des sekundären Wellenfeldes keine Spezifizierung des Materialverhaltens gemacht wurde, ist dieser Zusammenhang zunächst materialunabhän-

gig. Erst bei der Auswertung der Kumulativitätsbedingung und der damit verbundenen Bestimmung des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors wird eine Materialabhängigkeit erzeugt.

2.5.3.5 Kumulative Modenpaare

Um ein Modenpaar mit kumulativen Ausbreitungsverhalten und die zugehörige Anregungsfrequenz auszuwählen, müssen die beiden Kriterien der internen Resonanz ausgewertet werden, was im Folgenden beispielhaft für die LAMB-Wellenausbreitung in isotropem nichtlinearen Medium, gegeben durch die nichtlineare Potentialformulierung nach MURNAGHAN, vorgestellt werden soll. Dieselben Zusammenhänge können auch für Faserverbunde, basierend auf der Erweiterung dieser Potentialfunktion, aufgestellt werden [158].

Leistungsflussbedingung Die Analyse der Leistungsflussbedingung erfolgt unter Verwendung von (2.148) und (2.149). Dazu werden ausgehend vom Verschiebungsfeld, die Symmetrieeigenschaften der Einträge der entsprechenden Größen bezüglich der Mittelebene der Platte ausgewertet [31, 104, 137].

Die in Abbildung 2.6 dargestellten Verschiebungskomponenten einer symmetrischen und einer antisymmetrischen LAMB-Wellenmode zeigen deutlich, dass für symmetrische Wellenmoden die u_1-Verschiebungskomponente symmetrisches und die u_3-Verschiebungskomponente antisymmetrisches bzw. punktsymmetrisches Verhalten bezüglich der Mittelebene aufweisen. Die u_1-Verschiebungskomponente kann demnach durch eine gerade Funktion und die u_3-Verschiebungskomponente durch eine ungerade Funktion beschrieben werden. Für die antisymmetrische LAMB-Wellenmode ist dies genau umgekehrt. Diese Eigenschaften können durch die Notation [33, 84, 104]

$$\mathbf{u}^{\mathrm{sym}} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^{\mathrm{anti}} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \tag{2.152}$$

dargestellt werden. Mit S ist das symmetrische Verhalten des Eintrages bezüglich der Mittelebene gekennzeichnet und A symbolisiert das antisymmetrische Verhalten. Dieselben Eigenschaften weisen auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Moden auf, da für die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \mathrm{i}\omega\mathbf{u} \tag{2.153}$$

gilt [104]. Basierend auf den Verschiebungsfeldern ergibt sich für den Gradienten

$$\mathrm{Grad}\,\mathbf{u}^{\mathrm{sym}} = \mathbf{H}^{\mathrm{sym}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Grad}\,\mathbf{u}^{\mathrm{anti}} = \mathbf{H}^{\mathrm{anti}} = \begin{bmatrix} A & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & A \end{bmatrix}. \tag{2.154}$$

Ausgehend von der Potentialformulierung nach MURNAGHAN für isotropes Materialverhalten aus (2.68) und unter Verwendung des Zusammenhangs

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H}) \tag{2.155}$$

ist der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor, unter Berücksichtigung maximal quadratischer Terme von $\mathbf{H}$, gegeben durch [31]

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{5k} &= \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \mu(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} \\ &+ C\operatorname{tr}(\mathbf{H})^2\mathbf{I} + \mu\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + B\operatorname{tr}(\mathbf{H})(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top) \\ &+ \frac{B}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{A}{4}[\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top + (\mathbf{H}^\top)^2]. \end{aligned} \tag{2.156}$$

Die Aufteilung in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil in $\mathbf{H}$ führt zu

$$\mathbf{S}_{5k}^{L} = \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \mu(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}), \tag{2.157}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{5k}^{NL} &= \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + C\operatorname{tr}(\mathbf{H})^2\mathbf{I} + \mu\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + B\operatorname{tr}(\mathbf{H})(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top) \\ &+ \frac{B}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{A}{4}[\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top + (\mathbf{H}^\top)^2]. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Mit Hilfe der Transformation aus (2.73) ergeben sich die linearen und nichtlinearen Anteile des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors, wie in (2.75) dargestellt, zu

$$\mathbf{P}_{5k}^{L} = \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) + \mu(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}), \tag{2.159}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{5k}^{NL} &= \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H})\mathbf{H} + \mu\mathbf{H} \cdot (\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) \\ &+ \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + C\operatorname{tr}(\mathbf{H})^2\mathbf{I} + \mu\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + B\operatorname{tr}(\mathbf{H})(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\top) \\ &+ \frac{B}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{A}{4}[\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\top + (\mathbf{H}^\top)^2]. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Die Einträge der für die Auswertung von f_n^{surf} und f_n^{vol} benötigten Größen $\mathbf{P}_{5k}^{NL}$ und $\operatorname{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{NL})$ besitzen nach (2.160) die Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{P}_{5k}^{NL} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{NL}) = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix}. \tag{2.161}$$

Dabei macht es kein Unterschied für die Symmetrieeigenschaften von $\mathbf{P}_{5k}^{NL}$ und $\operatorname{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{NL})$, ob bei der Auswertung von (2.148) und (2.149) für $\mathbf{H}$ die Eigenschaften einer symmetri-

schen oder antisymmetrischen LAMB-Wellenmoden für das primäre Wellenfeld zu Grunde gelegt werden. Eine detaillierte Darstellung ist in Anhang A.2 aufgeführt.

Setzt man die Eigenschaften zunächst in die Bestimmungsgleichung des Oberflächenleistungsflusses ein und berücksichtigt die Symmetrieeigenschaften der Elemente des Geschwindigkeitsvektors, erhält man

$$f_n^{\mathrm{surf}} = -\frac{1}{2}\mathbf{P}_{5\mathrm{k}}^{\mathrm{NL}} \cdot \mathbf{v}_n^* \cdot \mathbf{N}_{X_3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tag{2.162}$$

$$= -\frac{1}{2}(P_{3i}^{\mathrm{NL}} v_i)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tag{2.163}$$

$$= -\frac{1}{2}(AS + SA)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = -\frac{1}{2}(A)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \neq 0 \tag{2.164}$$

für eine sekundäre symmetrische Mode und

$$f_n^{\mathrm{surf}} = -\frac{1}{2}(AA + SS)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = -\frac{1}{2}(S)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0. \tag{2.165}$$

für eine sekundäre antisymmetrische Mode. Da eine zur Mittelebene symmetrische Funktion für $\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ dieselben Funktionswerte aufweist, ist der Oberflächenleistungsfluss für antisymmetrische höher harmonische LAMB-Wellenmoden immer null. Eine identische Betrachtung des Volumenleistungsflusses führt zu den folgenden Ergebnissen für die symmetrische

$$f_n^{\mathrm{vol}} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{Div}(\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}) \cdot \mathbf{v}_n^* \,\mathrm{d}X_3 \tag{2.166}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{P}_i v_i \,\mathrm{d}X_3 \tag{2.167}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} SS + AA \,\mathrm{d}X_3 \tag{2.168}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} S \,\mathrm{d}X_3 = \frac{1}{2}(A)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \neq 0 \tag{2.169}$$

und die antisymmetrische Mode

$$f_n^{\mathrm{vol}} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} SA + AS \,\mathrm{d}X_3 \tag{2.170}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A \,\mathrm{d}X_3 = \frac{1}{2}(S)\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0, \tag{2.171}$$

mit

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathrm{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{\mathrm{NL}}). \tag{2.172}$$

Demnach ergibt sich neben dem Oberflächenleistungsfluss auch kein Volumenleistungsfluss bei einem sekundären antisymmetrischen Wellenfeld. Es ist also nicht möglich, eine antisymmetrische höher harmonische LAMB-Wellenmode zu erzeugen.

Basierend auf den Bestimmungsgleichungen der Leistungsflussanteile kann somit der Leistungsfluss zwischen zwei Moden berechnet werden.

Phasengeschwindigkeit Die genaue Bestimmung geeigneter Modenpaare und der zugehörigen Anregungsfrequenz für die Generierung kumulativ höher harmonischer Moden erfolgt abschließend über die Auswertung der zweiten Bedingung zur internen Resonanz, der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit. Mittels des zugehörigen Dispersionsdiagramms können die Geschwindigkeiten der einzelnen Moden über die Frequenz miteinander verglichen und die entsprechende Anregungsfrequenz ermittelt werden. In Abbildung 2.7 ist ein Dispersionsdiagramm für Aluminium dargestellt. Es beinhaltet zum einen die Kurven für die symmetrischen (rot) und antisymmetrischen (grau) Wellenmoden bei ω, welche das primäre Wellenfeld (PW) widerspiegeln und zum anderen die symmetrischen Wellenmoden bei 2ω (schwarz) für das sekundäre Wellenfeld (SW), wobei die Kurven des primären und sekundären Wellenfeldes unterschiedliche Frequenzachsen besitzen. Das primäre Wellenfeld ist über die untere Frequenzachse (rot) aufgetragen, die Kurven des sekundären Wellenfeldes hingegen über die obere Frequenzachse (schwarz). Die Aufteilung der beiden Achsen ist dabei so gewählt, dass

$$2\omega^{\mathrm{SW}} \;=\; \omega^{\mathrm{PW}} \tag{2.173}$$

gilt. Demzufolge ist die Gleichheit der Phasengeschwindigkeit zwischen einer primären und sekundären Mode gegeben, wenn sich zwei entsprechende Kurven kreuzen bzw. berühren. Diese Stellen sind in dem Diagramm mit einem Kreis gekennzeichnet. Für das Modenpaar S_0-S_0 wird im niederfrequenten Bereich keine Gleichheit der Phasengeschwindigkeit erreicht, sie nähern sich aber mit geringer werdender Frequenz immer weiter an. Als Ergebnis dieser Auswertung und unter Vernachlässigung von horizontalen Scherwellen sind somit die Modenpaare S_1-S_2 und S_2/A_2-S_4 für die Betrachtung der kumulativen nichtlinearen Wellenausbreitung von Bedeutung, da diese die beiden Bedingungen der internen Resonanz erfüllen.

2.5.4 Nichtlineare Akustik der Kontaktstelle

Neben der Entstehung höher harmonischer Moden durch nichtlineares Materialverhalten oder geometrischer Nichtlinearität können diese auch durch die Interaktion von Grenzflächen, wie z.B. bei Rissen, generiert werden. Man spricht von einer *Contact-Acoustic Nonlinearity* (CAN) [135]. Die Erregung höher harmonischer Moden kann dabei durch drei Phänomene beschrieben werden, das Rissuferklappern durch eine vertikale oder tangentiale Bewegung sowie durch Reibung.

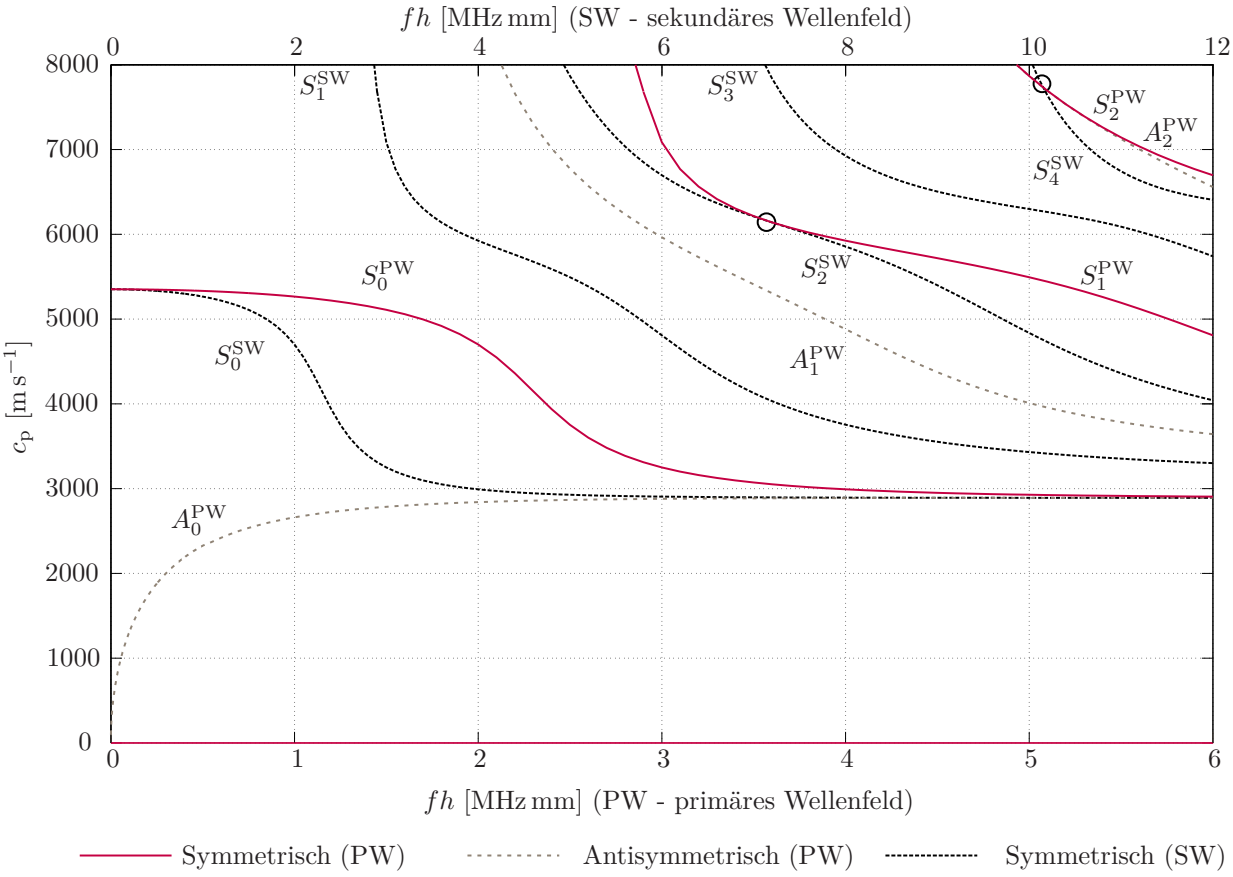


Abbildung 2.7: Auswertung der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit als zweite Bedingung für die interne Resonanz.

Eine detaillierte Darstellung ist in [112] zu finden. Dabei erfolgt die Modellierung des Rissuferklapperns bei vertikaler und tangentialer Relativbewegung mittels der Heaviside Funktion, welche die Fallunterscheidung zwischen Kraftübertragung bei geschlossenem oder offenem Riss für vertikale Relativbewegung bzw. die Behinderung der Relativbewegung nach Überschreiten einer Grenzdehnung durch die Unebenheiten der Rissoberflächen in tangentialer Richtung ermöglicht. Als Spannungs-Dehnungs-Beziehung ergibt sich so

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{E}) = \mathbb{C} : \mathbf{E} + \mathcal{H}(\mathbf{E})\Delta\mathbb{C} : \mathbf{E}, \tag{2.174}$$

wobei $\mathcal{H}$ die Heaviside Funktion und $\Delta\mathbb{C}$ die durch den Riss bedingte Steifigkeitsänderung ist.

Bei der Betrachtung der Reibung erfolgt die Modellierung mittels der Signum-Funktion, um das hysteretische Spannungs-Dehnungs-Verhalten an den durch die Reibung gekoppelten Oberflächen abzubilden.

Einen kumulativen Effekt gibt es hier zunächst nicht, da durch die aus der Heaviside Funktion resultierende Nichtlinearität keine quadratischen Terme in $\mathbf{H}$ im Spannungstensor generiert werden. Nimmt man aber, wie bei Kontaktproblemen üblich, den vollständigen Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor an, entsteht auf Grundlage der

quadratischen Terme in **H** eine geometrische Nichtlinearität, welche unter Berücksichtigung der vorgestellten Bedingungen auch hier einen kumulativen Effekt hervorrufen.

2.5.5 Relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter

Um den nichtlinearen Effekt der Wellenausbreitung zu quantifizieren, wird häufig der relative akustische Nichtlinearitätsparameter $\beta^{'}$ verwendet. Dieser beruht auf der Definition des absoluten akustischen Nichtlinearitätsparameters β, hergeleitet anhand einer eindimensionalen Betrachtung der Ausbreitung von Longitudinalwellen basierend auf der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan.

Ausgehend von der Taylor-Reihenentwicklung für die Potentialfunktion kann für den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor zunächst für den allgemeinen dreidimensionalen Fall der Zusammenhang

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijklmn}E_{kl}E_{mn} \tag{2.175}$$

aufgestellt werden. Nach der Reduktion auf den benötigten eindimensionalen Fall lässt sich dies als [130]

$$\begin{aligned} S_{11} &= EE_{11} + \frac{1}{2}(A + 3B + C)E_{11}^2 \\ &= E(1 - \frac{1}{2}\beta E_{11})E_{11} \end{aligned} \tag{2.176}$$

mit

$$\beta = -\frac{A + 3B + C}{E} \tag{2.177}$$

formulieren, wobei E der Elastizitätsmodul ist. Ferner ist für den eindimensionalen Fall die Bewegungsgleichung der Longitudinalwelle gegeben durch [64]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \tag{2.178}$$

wobei $S_{11} = \sigma$ mit der Annahme kleiner Verformungen ist.

Unter Verwendung der Störungstheorie wird ausgehend von (2.76) für das Verschiebungsfeld zunächst der Ansatz

$$u = u_1 + \beta u_2, \tag{2.76}$$

mit $\beta \ll 1$ gewählt. Des Weiteren wird ein eindimensionales sinusförmiges Wellenfeld mit quadratischer Nichtlinearität angenommen, so dass sich mit dem Ansatz

$$u_1 = u_0 \cos(kx - \omega t) \tag{2.179}$$

für das primäre und

$$u_2 = A_2 x \sin^2(kx - \omega t) \tag{2.180}$$

für das sekundäre Wellenfeld als Lösung für das Gesamtverschiebungsfeld [24]

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\beta}{8}(k u_0)^2 x \left\{1 - \cos[2(kx - \omega t)]\right\} \tag{2.181}$$

ergibt. Eine detaillierte Darstellung ist in Anhang A.3 zu finden. Die Amplitude des primären Wellenfeldes sowie die durch die Störung generierte Amplitude des sekundären Wellenfeldes sind somit gegeben durch

$$A_1 = u_0 \qquad \text{und} \qquad \bar{A}_2 = \frac{\beta}{8}(k u_0)^2 x. \tag{2.182}$$

Auf der Grundlage dieser beiden Amplituden ist der absolute akustische Nichtlinearitätsparameter definiert als [15]

$$\beta = \frac{8}{k^2 x}\frac{\bar{A}_2}{A_1^2}, \tag{2.183}$$

wobei x die Ausbreitungsstrecke der Welle ist. Der absolute akustische Nichtlinearitätsparameter ist also proportional zum Amplitudenverhältnis bzw. der Steigung des Amplitudenverhältnisses über die Ausbreitungsstrecke. Diese Proportionalität wird bei der Ausbreitung von Lamb-Wellen häufig verwendet, um die Nichtlinearität zu quantifizieren, so dass für den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter β' die beiden Definitionen [77, 79, 80, 94, 95, 160]

$$\beta_1' = \frac{1}{x}\frac{\bar{A}_2}{A_1^2} \qquad \text{und} \qquad \beta_2' = \frac{\bar{A}_2}{A_1^2} \tag{2.184}$$

aufgestellt werden können.

Kapitel 3

Experimentelle Untersuchung der Werkstoffdegradation

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Werkstoffdegradation in unidirektionalen CFK Proben infolge einer zyklischen Zugbelastung auf die nichtlineare Wellenausbreitung experimentell untersucht. Dazu wird die Schädigung in die Proben eingebracht, anschließend die nichtlineare Wellenausbreitung analysiert und abschließend die Ermittlung des Elastizitätsmoduls als Indikator des Steifigkeitsverlustes des Materials durchgeführt. Die Untersuchung erfolgt an drei Probensätzen, welche unabhängig voneinander analysiert werden.

Zur Ermittlung der Versuchsergebnisse für die Wellenausbreitung bedarf es einer Signalverarbeitung mittels Zeit-Frequenz-Verfahren. Die dazugehörigen theoretischen Grundlagen werden im Folgenden zunächst kurz vorgestellt, bevor im Anschluss die detaillierte Darstellung der experimentellen Untersuchungen erfolgt.

3.1 Methoden der Signalanalyse

Mittels der Signalanalyse wird ein aufgenommenes Zeitsignal in den Frequenzbereich überführt, um die darin enthaltenen Frequenzanteile zu bestimmen. Generell unterscheidet man zwischen periodischen und aperiodischen, zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten sowie stationären und instationären Zeitsignalen. Im Folgenden wird kurz eine Übersicht über die Grundlagen der Methoden zur Signalanalyse gegeben, welche für die Auswertung der Ausbreitung von Lamb-Wellen verwendet werden. Dabei handelt es sich grundsätzlich um aperiodische, zeitdiskrete Signale, die je nach Anregung und Modellierung stationär oder instationär sind. Ausführliche Darstellungen der Inhalte sind unter anderem in [43, 56, 57, 68, 97, 98] zu finden.

3.1.1 Methoden der Fourier-Analyse

Stationäre Signale

Ausgangspunkt der Fourier-Analyse von stationären Signalen ist die Fourier-Reihe, welche periodische, zeitkontinuierliche, stationäre Signale mittels einer Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen abbildet. Diese ist unter Verwendung der Euler-Formeln (A.3) durch die komplexe Fourier-Reihe gegeben als

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}. \tag{3.1}$$

Das Ergebnis ist ein diskretes Spektrum mit den Stützstellen $n\omega$. Für die Kreisfrequenz ω gilt der Zusammenhang

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \tag{3.2}$$

wobei T die Periodendauer ist. Ferner ist

$$X_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

der komplexe FOURIER-Koeffizient, welcher die Amplituden und den Phasenversatz zu der jeweiligen Frequenz enthält.

Für Signale die keine Periodizität aufweisen, kann die FOURIER-Reihe erweitert werden, indem die Periodendauer als unendlich angenommen wird. Damit ergibt sich aus (3.3)

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{3.4}$$

mit

$$X(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{3.5}$$

Die FOURIER-Transformierte $X(\mathrm{i}\omega)$ enthält dabei, wie zuvor X_n, die Informationen bezüglich der Frequenzanteile und der zugehörigen Phasenverschiebung. Im Gegensatz zur FOURIER-Reihe ist das Ergebnis ein kontinuierliches Spektrum, da $T \to \infty$ und damit $\omega_0 \to 0$.

Bei experimentell bestimmten Daten liegt das Signal in der Regel nicht in kontinuierlicher, sondern diskreter Form vor. Unter der Annahme, dass das mit N Stützstellen abgetastete Signal, eine Periodendauer von $T = N \cdot \Delta t$ besitzt, was genau der Signallänge entspricht, ergeben sich die FOURIER-Koeffizienten zu

$$X_n = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_0 k\Delta t} \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\frac{nk}{N}}. \tag{3.7}$$

Diese Transformation wird auch als diskrete FOURIER-Transformation (DFT) bezeichnet und liefert als Ergebnis, wie die FOURIER-Reihe, ein Linienspektrum mit N Stützstellen. Die einzelnen Spektrallinien haben einen Abstand von

$$\Delta f = \frac{1}{T}. \tag{3.8}$$

Bei der DFT liegen demnach sowohl das Signal als auch das Frequenzspektrum in diskreter Form vor, so dass sich diese Methode besonders zur computergestützten Spektralanalyse eignet. Auf Grund der quadratisch mit der Signallänge anwachsenden Rechenzeit [97] existieren, basierend auf der DFT, verschiedene Algorithmen, mit deren Hilfe die Re-

chenzeit deutlich reduziert werden kann. Der am häufigsten verwendete Algorithmus ist die schnelle FOURIER-Transformation (fast FOURIER-transform FFT), welche auftretende Regelmäßigkeiten bei der Verwendung von 2^n-Stützstellen ausnutzt.

Instationäre Signale

Die bisher vorgestellten Methoden basieren immer auf einem Signal, welches zu jeder Zeit dieselben Frequenzanteile beinhaltet. Weist ein Signal über die Zeit verändernde Frequenzanteile auf, spricht man von einem instationären Signal, für deren Analyse eine Zeit-Frequenz-Analysemethode nötig ist. Diese Methoden entsprechen den vorgestellten Verfahren für stationäre Signale, wobei das Signal in einzelne Abschnitte unterteilt wird, welche als quasi-stationär angesehen werden. Es ergibt sich eine zeitliche Auflösung der Analyse der Frequenzanteile. Die Ermittlung der Abschnitte erfolgt mittels einer Fensterfunktion, wie z.B. das Rechteck- oder HANNING-Fenster, die mit dem Signal multipliziert werden. Die Länge eines Abschnitts wird als Fensterlänge bezeichnet. Darüber hinaus ist es möglich, die einzelnen Abschnitte mit einer gewissen Überlappung anzuordnen. Die Wahl einer geeigneten Fensterfunktion sowie der Fenster- und Überlappungslänge ist problemspezifisch durchzuführen. Die einzelnen Abschnitte des Signals sind gegeben durch

$$x_n(\tau, t) = x(\tau) \cdot h(t - \tau), \tag{3.9}$$

wobei $x(\tau)$ das Signal ist und $h(t - \tau)$ die Fensterfunktion, welche über das Signal verschoben wird. Setzt man dies z.B. in die Bestimmungsgleichung der DFT bzw. FFT aus (3.7) ein, erhält man als Ergebnis ein zweidimensionales Spektrogramm in Abhängigkeit der Kreisfrequenz und der Zeit. Dieses Verfahren wird als zeitdiskrete kurz-Zeit FOURIER-Transformation (short-time FOURIER-tranform STFT) bezeichnet. Häufig findet man auch die zeitkontinuierliche Formulierung, indem (3.9) in (3.4) eingesetzt wird.

Die Auflösung des resultierenden Spektrogramms wird beschrieben durch die Abstände der Spektrallinien in Frequenzrichtung $\Delta\omega$ sowie dem zeitlichen Abstand zweier durchgeführter Analysen, bezeichnet als Fortsetzungsintervall $\Delta\vartheta$. Für den Abstand der Spektrallinien folgt aus (3.8)

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}. \tag{3.10}$$

Das Fortsetzungsintervall $\Delta\vartheta$ ist definiert als [56]

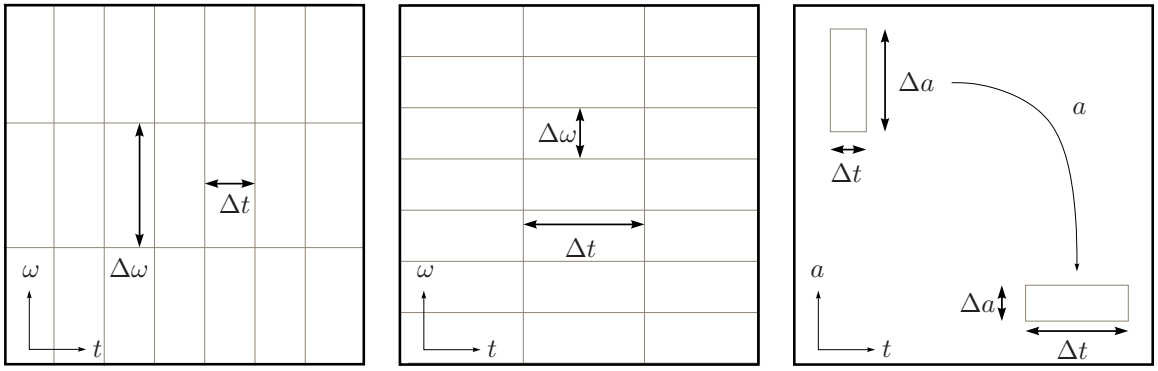
$$\Delta\vartheta = \frac{\pi}{\omega_B} \tag{3.11}$$

mit

$$\omega_B = C\frac{2\pi}{T} = C\frac{2\pi}{N\Delta t}. \tag{3.12}$$

Dabei ist C eine Konstante, welche den Einfluss der gewählten Fensterfunktion beschreibt. Für das Rechteckfenster nimmt C den Wert 1, für das HAMMING- und HANNING-Fenster den Wert 2 an.

Da sowohl (3.10) als auch (3.11) von Δt abhängig sind, können diese beiden Intervalle nicht unabhängig voneinander gewählt werden, so dass entweder nur die Frequenz- oder die



(a) STFT Zeitfokus (nach [56]) (b) STFT Frequenzfokus (nach [56]) (c) Wavelet (nach [68])

Abbildung 3.1: Vergleich der Auflösung des Spektrogramm für die STFT und der Wavelet-Transformation.

zeitliche Auflösung erhöht werden kann. Dieses Phänomen wird als Unschärfe bezeichnet [67]. Das gewählte Intervall ist aber über das gesamte Spektrum gleich, siehe Abbildung 3.1.

Bei der Anwendung dieser Methode für die Analyse der LAMB-Wellenausbreitung hat sich gezeigt, dass die Wahl der Fenster- und Überlappungslänge einen erheblichen Einfluss auf das Spektrogramm hat, so dass diese Methode nur mit äußerster Vorsicht bei der Analyse der Ausbreitung von LAMB-Wellen verwendet werden sollte [109, 117]. Ein erheblicher Nachteil der STFT ist darüber hinaus die konstante Fensterbreite. Diese führt dazu, dass niedrige Frequenzanteile nicht so genau abgebildet werden wie höhere Frequenzanteile, da der Fensterausschnitt bei niedrigen Frequenzen weniger Perioden beinhaltet und damit die angenommene Periodizität weniger gut erfüllt ist als bei höheren Frequenzen.

3.1.2 Wavelet-Transformation

Ausgehend von der unpräzisen Abbildung niederfrequenter Signale ist die Wavelet-Transformation entstanden. Sie beruht auf den Arbeiten von MORLET et al. [101, 102] und ist auf Grund der besseren Abbildungseigenschaften sehr gut für die Zeit-Frequenz-Analyse bei instationärer LAMB-Wellenausbreitung geeignet. Die Analyse des Signals erfolgt mittels einer Familie von Basisfunktionen $\Psi_{a,t}$, die ausgehend von einem Prototypen Ψ, auch als Mutter-Wavelet bezeichnet, durch die Translation auf der Zeitachse t und die Skalierung über den Faktor a hervorgehen [56]

$$\Psi_{a,t}(\tau) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{\tau - t}{a}\right). \tag{3.13}$$

Wie zuvor bei der FOURIER-Analyse wird auch bei der Wavelet-Transformation zwischen der kontinuierlichen und diskreten Variante unterschieden. Diese Einteilung erfolgt allerdings nicht auf der Basis des Eingangssignals, sondern nach der Verteilung der Parameter a und t. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation (CWT) ist gegeben durch die Faltung

des Eingangssignals mit dem Wavelet $\Psi_{a,t}(\tau)$

$$W_\Psi = X(a,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi \left(\frac{\tau - t}{a} \right) \, \mathrm{d}\tau, \tag{3.14}$$

wobei dieses sowohl kontinuierlicher als auch diskreter Natur sein kann. Im Unterschied zum Zeit-Frequenz-Spektrogramm der FOURIER-Analyse hängt das Ergebnis der Wavelet-Transformation neben der Zeit t von dem dimensionslosen Skalierungsparameter a, auch als Skale bezeichnet, ab, welcher mit der Frequenz verwant aber nicht identisch ist. Der Einfluss der Skalierung auf das Wavelet ist in Abbildung 3.2 beispielhaft für das MORLET-Wavelet gegeben, welches sich als besonders geeignet für die Analyse instationärer Signale bei der LAMB-Wellenausbreitung erwiesen hat [82, 89, 142]. Das komplexe Mutter-Wavelet der MORLET-Familie ist definiert als das Produkt einer Welle, beschrieben durch eine komplexe Exponentialfunktion, mit dem GAUSS-Fenster

$$\Psi_M(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{3.15}$$

Abbildung 3.2 zeigt, dass für $a > 1$ das Wavelet gestaucht wird, so dass sich die Frequenz im Vergleich zum Mutter-Wavelet ($a = 1$) erhöht. Dies führt zu einer geringeren zeitlichen Ausdehnung und einem breiteren Spektrum im Frequenzbereich. Wählt man $0 < a < 1$ wird das Wavelet gestreckt. Demzufolge verringert sich zunächst die Frequenz des Wavelets, was zu einer größeren zeitlichen Ausdehnung und damit zu einem schmaleren Spektrum führt. Auf diese Weise wird die Fensterbreite an die Frequenz angepasst. Daraus resultiert, dass die Auflösung des Spektrums aus der Wavelet-Transformation im Vergleich zur FOURIER-Analyse nicht über das gesamte Spektrum konstant ist. Vielmehr führt ein großer Wert für a zu einem breiten Zeit- bzw. schmalen Frequenzfenster und ein kleiner Wert für a zu einem schmalen Zeit- bzw. breiten Frequenzfenster (Abbildung 3.1).

Bei der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) wird die Skalierung und Verschiebung des Wavelets in diskreten Schritten durchgeführt. Sie ist gegeben durch

$$X(a,t) = \sum_{\tau} x(t) \Psi \left(\frac{\tau - t}{a} \right). \tag{3.16}$$

Es erfolgt also, unter Verwendung von orthonormierten diskreten Wavelets, die Zerlegung des Originalsignals. Dabei ergeben sich zu jeder Skale ein Wavelet-Detail und ein dazugehöriger Rest. Das Signal kann mittels der Addition der einzelnen orthogonalen Wavelet-Details unter Verwendung der zugehörigen Detail-Koeffizienten rekonstruiert werden [142]. Abbildung 3.3 zeigt schematisch die Dekomposition eines Zeitsignals mit Hilfe eines Wavelets aus der Symlet-Familie.

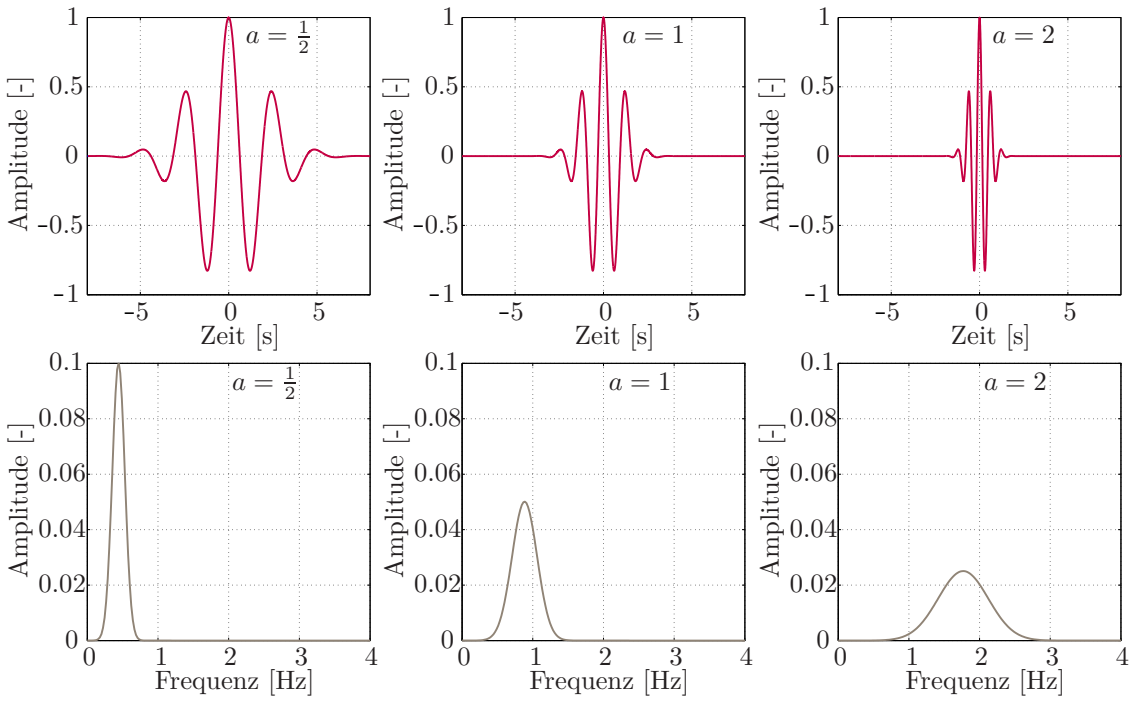


Abbildung 3.2: Einfluss der Skale a auf die zeitliche Ausdehnung und das Frequenzspektrum anhand des Morlet-Wavelets.

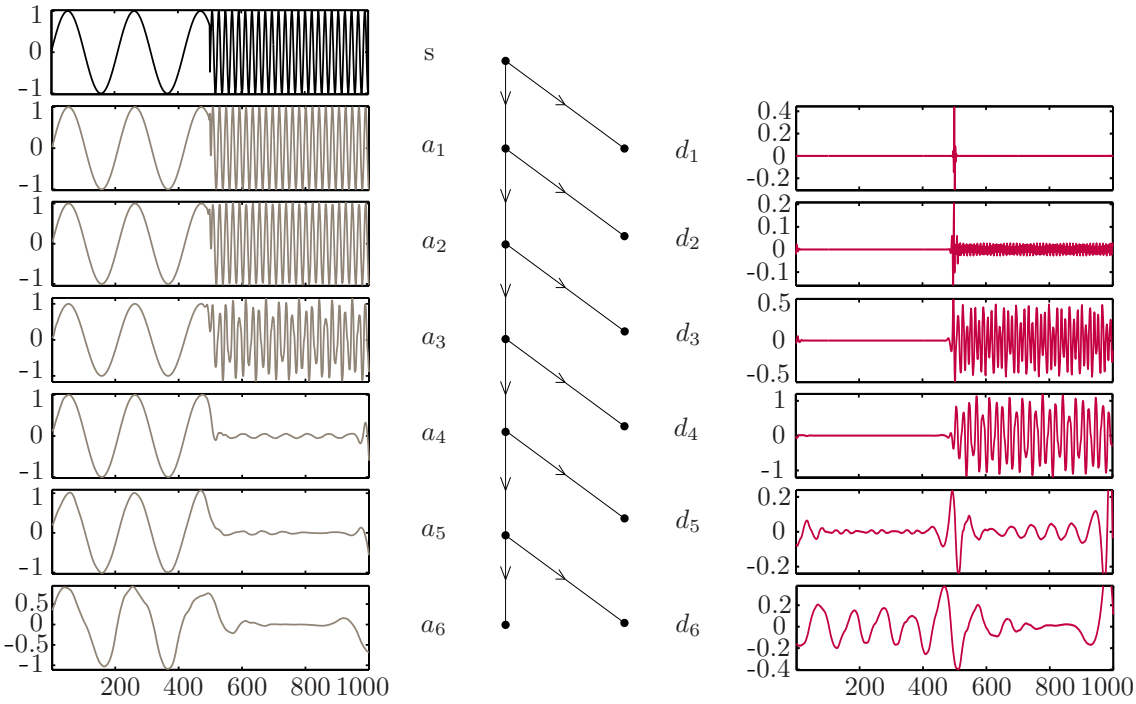


Abbildung 3.3: Ergebnis einer Dekomposition des Signals s in die Wavelet-Details d_i und den zugehörigen Resten a_i mittels einer DWT.

3.2 Vorbereitung der Proben

3.2.1 Geometrie und Aufbau der Proben

Für die experimentellen Untersuchungen werden als Probekörper, wie beispielhaft in Abbildung 3.4 dargestellt, Streifen aus unidirektionalem CFK-Gelege mit dem Schichtaufbau $[0]_4$ und den Abmaßen 600 mm × 80 mm × 2.3 mm verwendet, wobei die Faserrichtung der Probenlängsrichtung entspricht. Die Materialparameter des verwendeten Werkstoffes sind in Tabelle 3.1 gegeben.

Abbildung 3.4: Verwendetes unidirektionales CFK.

Tabelle 3.1: Materialparameter des verwendeten Werkstoffes.

C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{23}	C_{44}	C_{66}	ρ
122.3 GPa	8.08 GPa	2.38 GPa	5.82 GPa	3.75 GPa	4 GPa	1.466 kg m^{-3}

3.2.2 Ermüdungsversuche

Die Schädigung der einzelnen Proben erfolgt mittels einer schwellenden zyklischen Zugbelastung in Faserrichtung. Die Bruchgrenze des verwendeten unidirektionalen CFK liegt bei 1383 MPa. Ausgehend von der Geometrie der Proben entspricht dies einer Versagenslast von 255 kN. Um zu gewährleisten, dass durch die zyklische Beanspruchung ein signifikantes Schadensbild entsteht, wird als Obergrenze des Lastspiels die maximal zur Verfügung stehende Kraft von 200 kN verwendet. Dies entspricht ca. 80% der Bruchlast. Die Mittenlast der schwellenden Belastung wird auf 105 kN festgesetzt. So ist sichergestellt, dass es während des Zyklus zu keiner Druckbeanspruchung kommt, welche mögliche Stabilitätsprobleme zur Folge haben könnte. Abbildung 3.5 zeigt den resultierenden Lastzyklus, welcher mit einer Frequenz von 4 Hz gefahren wird.

Um unterschiedliche Schädigungsgrade zu generieren, werden die Proben mit verschiedenen Zyklenzahlen beaufschlagt. Darüber hinaus werden pro Zyklenzahl mehrere Proben bereitgestellt, um eine mögliche Reproduzierbarkeit des Schädigungsgrades zu untersuchen. Eine ungeschädigte Probe dient als Referenz. Des weiteren werden die Proben in drei Probensätze unterteilt und zeitlich getrennt voneinander untersucht. Auf diesem Wege können äußere Einflüsse auf die Versuchsergebnisse ausgeschlossen werden. In Tabelle 3.2 ist die Probenanzahl zu den einzelnen Zyklenzahlen für die jeweiligen Probensätze aufgeführt. Insgesamt werden 33 Proben analysiert.

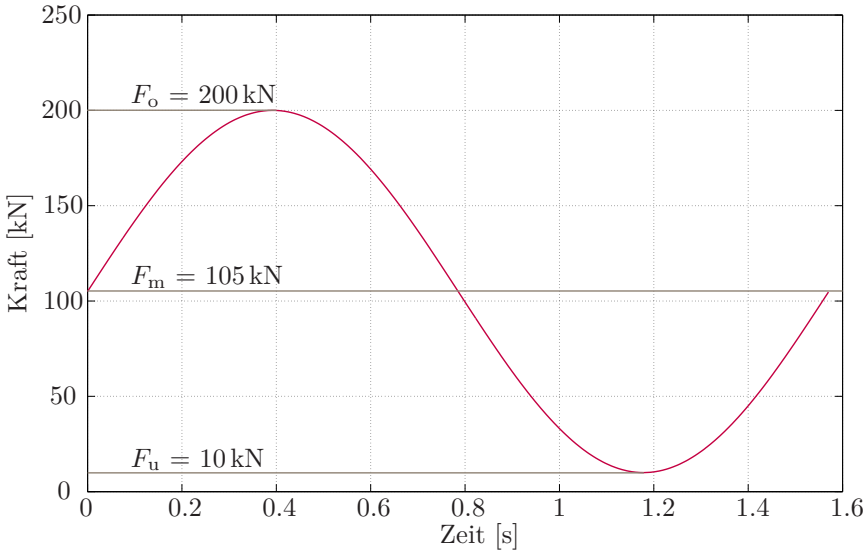


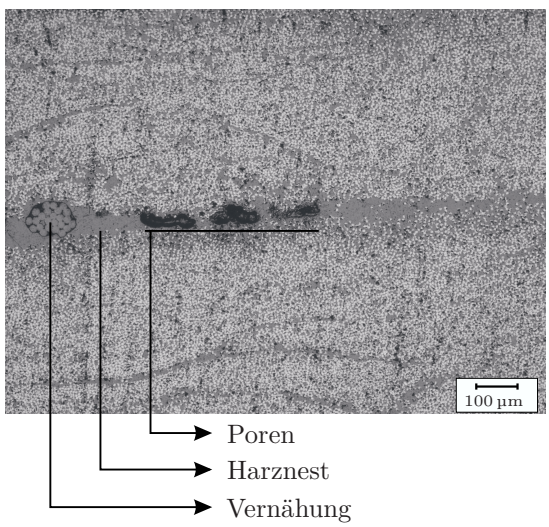
Abbildung 3.5: Belastungszyklus.

Tabelle 3.2: Übersicht Lastwechsel mit der zugehörigen Anzahl an Proben.

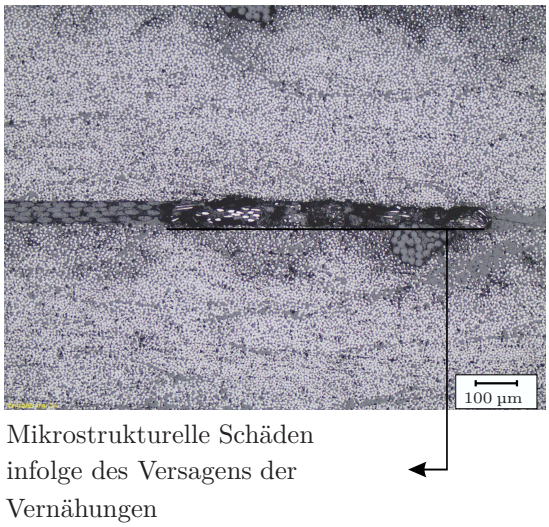
Lastwechsel		0	5000	10000	15000	20000
Anzahl der Proben	Satz I	1	2	2	2	2
	Satz II	-	3	3	3	3
	Satz III	-	3	3	3	3

3.2.3 Analyse der Schadensenstehung

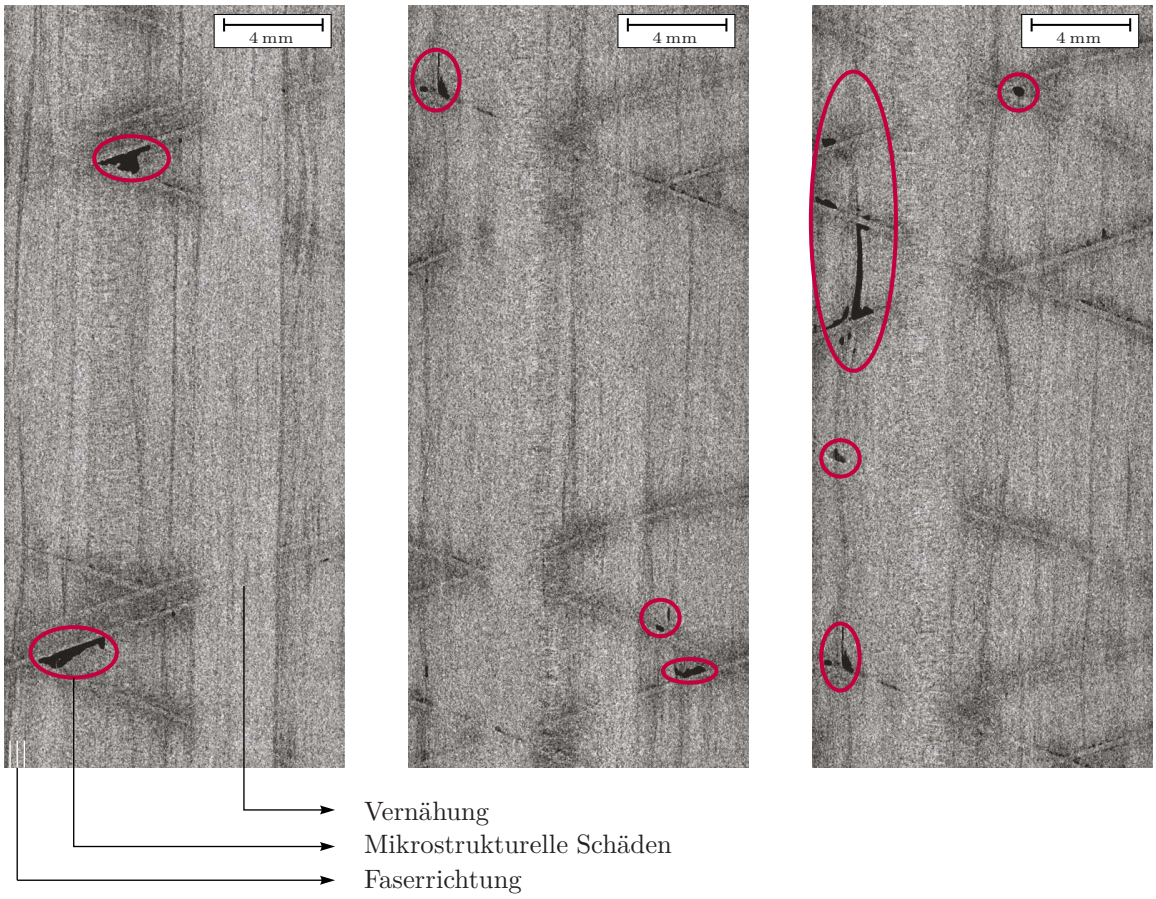
Ausgehend von dem allgemeinen Ermüdungsverhalten von faserverstärkten Kunststoffen ist davon auszugehen, dass es bereits während der ersten Lastwechsel zu einer Schädigung der Struktur kommt [90]. Eine detaillierte Betrachtung des Fertigungsprozesses offenbart zwei Aspekte, die zu einer Schadensbildung führen. Zunächst ist das Grundmaterial auf prepreg-Basis gefertigt. In diesem Fall werden vier Lagen vorimpregnierter Fasergelege (prepregs) mit derselben Ausrichtung aufeinander abgelegt und anschließend bei erhöhter Temperatur und Druck ausgehärtet. Infolge einer nicht gleichmäßigen Druckverteilung kann es in einigen Bereichen zu Harzansammlungen, so genannten Harznestern, und Lufteinschlüssen, auch als Poren bezeichnet, kommen. Diese Gebiete besitzen eine deutlich geringere Steifigkeit als die übrige Struktur, was eine inhomogene Steifigkeitsverteilung zur Folge hat. Abbildung 3.6(a) zeigt eine Mikroskopaufnahme des verwendeten Materials in Faserrichtung, auf der diese fertigungsbedingten Schäden zu erkennen sind. Darüber hinaus sind in diesem Fall prepregs verarbeitet worden, welche neben den Fasern noch zusätzliche Vernähungen enthalten. Diese sollen gewährleisten, dass es während des Aushärtens unter Druck zu keinem Verrutschen der Fasern kommt. Im Gegensatz zu den Fasern besitzen diese Vernähungen allerdings eine deutlich geringere Steifigkeit, weswegen einige dieser Vernähungen während der ersten Zyklen der Belastung reißen.



(a) Schädigungen infolge des Fertigungsprozesses.



(b) Schädigung infolge des Versagens der Vernähungen.



(c) CT-Aufnahmen des Schädigungsmusters.

Abbildung 3.6: Schadensbild infolge einer schwellenden Zugbelastung in unidirektionalem CFK.

Es entstehen mikrostrukturelle, horizontale Risse an den Bruchstellen der Vernähungen, wie in Abbildung 3.6(b) zu sehen, welche infolge der zyklischen Beanspruchung wachsen. Eine Ultraschalluntersuchung und CT-Aufnahmen einer geschädigten Probe bestätigen dieses Schädigungsmuster. Anhand der CT-Aufnahmen in Abbildung 3.6(c) ist deutlich zu erkennen, dass vor allem an den Kreuzungspunkten der Vernähungen Schädigungen entstehen.

Als Resultat der Schadensentstehung kann davon ausgegangen werden, dass jede Probe auf Grund der fertigungsbedingten inhomogenen Steifigkeitsverteilung und des Versagens der Vernähungen eine individuelle Initialschädigung aufweist, welche unter der zyklischen Belastung weiter wächst. Infolgedessen muss dieselbe Anzahl an Zyklen zweier Proben nicht zwangsläufig zu derselben Schädigung führen. Des Weiteren führt eine höhere Lastzahl nicht unbedingt zu einer stärkeren Schädigung der Probe. Dies wird unterstützt durch eine Probe, welche während der zyklischen Belastung bereits bei 6000 Zyklen versagte.

3.3 Analyse der Wellenausbreitung

3.3.1 Versuchsaufbau und -durchführung

In Abbildung 3.7 ist der Versuchsaufbau der experimentellen Untersuchung der Wellenausbreitung schematisch dargestellt. Die Anregung des primären Wellenfeldes erfolgt mittels eines piezoelektrischen Aktors, welcher über einen Funktionsgenerator mit einem Burstsignal, bestehend aus zwei gefensterten Sinusperioden, angesteuert wird. Die Amplitude beträgt 50 V_{pp} (Peak-to-Peak). Nach einer Laufstrecke von 25 cm wird das Signal mittels einer 16-bit Transistor Messkarte über einen piezoelektrischen Sensor aufgezeichnet. Die Abtastrate beträgt dabei 105 MHz. Darüber hinaus wird das Signal 10000-fach gemittelt, um das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern.

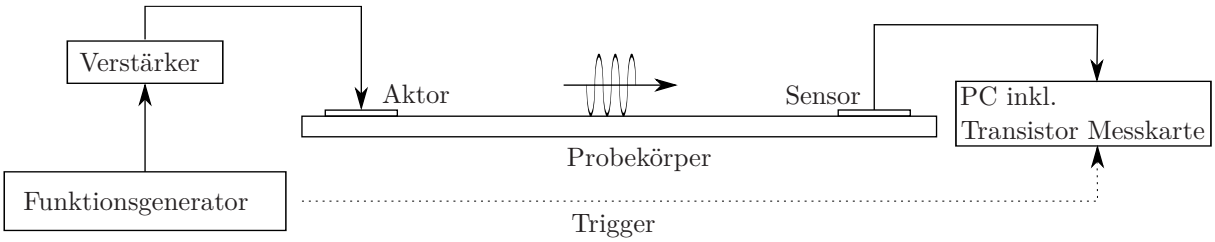
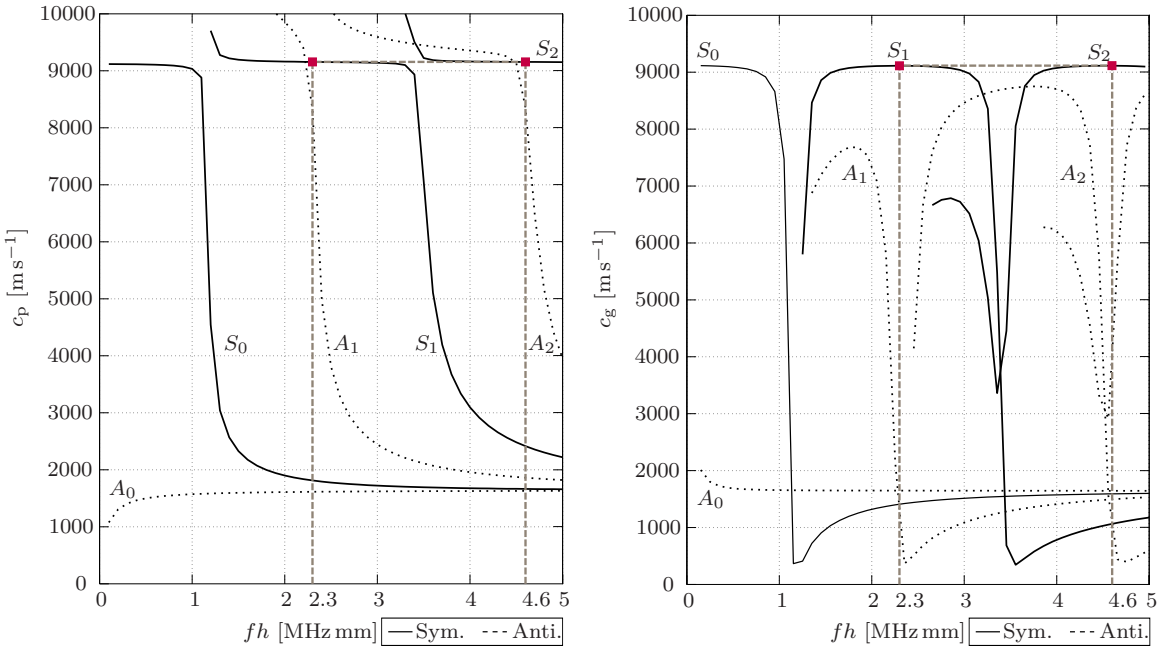


Abbildung 3.7: Schema des Versuchsaufbaus.

Zur Untersuchung des nichtlinearen Wellenverhaltens wird das S_1-S_2 Modenpaar verwendet, bei dem ein Leistungsfluss von der primären zur sekundären Mode vorhanden ist, vgl. Kapitel 2.5.3.5. Damit die durch die Schäden generierte höher harmonische S_2-Mode einen kumulativen Effekt aufweist, muss für die Anregungsfrequenz die zusätzlich in Abschnitt 2.5.3.5 vorgestellte Bedingung der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit erfüllt sein. Für die durchgeführten experimentellen Untersuchungen wird neben der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit zusätzlich die Gleichheit der Gruppengeschwindigkeit gefordert, um potentielle Effekte auf Grund der unterschiedlichen Laufzeiten zu minimieren.

In Abbildung 3.8 sind die Dispersionsdiagramme für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit des verwendeten unidirektionalen CFK gegeben. Die zugehörige Frequenz-Dicken-Paarung des S_1-S_2 Modenpaars von 2.3 MHz mm, bei der sowohl dieselbe Phasen- als auch Gruppengeschwindigkeit vorliegt, ist markiert. Um den kumulativen Effekt bei der Ausbreitung der höher harmonischen Mode auszulösen, ist bei einer Probendicke von 2.3 mm eine Anregungsfrequenz von 1 MHz erforderlich. Mit einer Abtastrate von 105 MHz ist folglich sichergestellt, dass eine einwandfreie Bestimmung der benötigten Frequenzanteile bei 1 MHz und 2 MHz gewährleistet ist. Mögliche Aliasing-Effekte können ausgeschlossen werden.



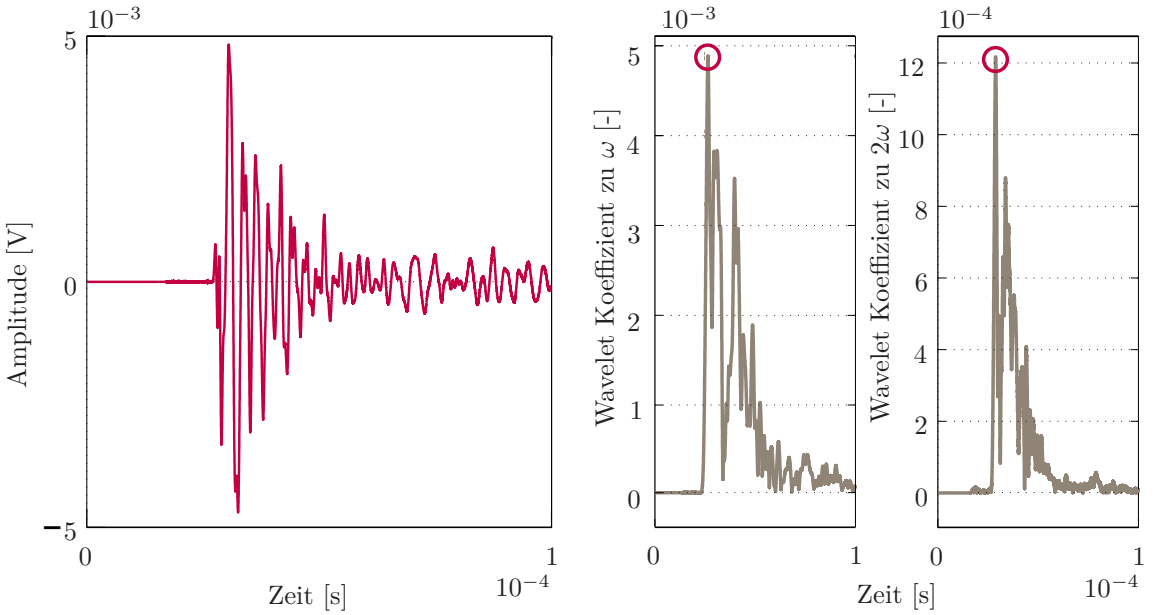
(a) Dispersionsdiagramm für die Phasengeschwindigkeit.

(b) Dispersionsdiagramm für die Gruppengeschwindigkeit.

Abbildung 3.8: Dispersionsdiagramme für das verwendete unidirektionale CFK.

3.3.2 Signalverarbeitung

Auf Grund der multi-modalen Eigenschaft von Lamb-Wellen wird für die Bestimmung der benötigten Amplituden der S_1- und S_2-Mode eine Zeit-Frequenz-Analysemethode benötigt. Hierzu hat sich die vorgestellte Wavelet-Transformation mit dem Morlet-Wavelet als Mutter-Wavelet als besonders geeignet erwiesen [82, 89, 142]. Bei der verwendeten Anregungsfrequenz von 1 MHz beinhaltet das primäre Wellenfeld nicht nur die benötigte S_1-Mode, sondern darüber hinaus noch die S_0-, A_0- and A_1-Mode, vgl. Abbildung 3.8(a). Betrachtet man zusätzlich Abbildung 3.8(b), wird ersichtlich, dass sich die einzelnen Moden des primären Wellenfeldes mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Es kommt zu einer Separation der einzelnen Moden. Da die benötigte S_1-Mode die höchste Gruppengeschwindigkeit besitzt, breitet sich diese am schnellsten aus und erreicht als



(a) Zeitsignal für die Messung des S_1-S_2 Modenpaars.

(b) Ergebnis der Wavelet-Transformation zur Bestimmung der zu der S_1- und S_2-Mode gehörenden Wavelet-Koeffizienten.

Abbildung 3.9: Signalverarbeitung.

Erste den piezoelektrischen Sensor. Demzufolge muss der erste Maximalwert in dem Zeitverlauf des zu ω gehörigen Wavelet-Koeffizienten die Amplitude der S_1-Mode wiedergeben. Da das sekundäre Wellenfeld ausschließlich die S_2-Mode enthält, kann der zugehörige Maximalwert direkt zugeordnet werden.

Abbildung 3.9(a) zeigt beispielhaft ein an dem piezoelektrischen Sensor aufgenommenes Zeitsignal bei einer Anregungsfrequenz von 1 MHz zur Analyse des S_1-S_2 Modenpaars. Die zeitlichen Verläufe der zu ω und 2ω gehörenden Wavelet-Koeffizienten als Ergebnis der Wavelet-Transformation sind in Abbildung 3.9(b) dargestellt. Die beiden Ausschläge, welche die Amplitude der S_1-Mode bei ω und S_2-Mode bei 2ω repräsentieren, sind gekennzeichnet. Mit Hilfe dieser Wavelet-Koeffizienten kann der zugehörige relative akustische Nichtlinearitätsparameter nach (2.184) ermittelt werden.

3.3.3 Untersuchung des Einflusses von Störfaktoren

Das Ergebnis der Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung kann durch eine Vielzahl von Störfaktoren beeinflusst werden. Dazu gehören Spannungs- und Stromschwankungen des Versorgernetzes sowie aus der Ankopplung der piezoelektrischen Elemente resultierende nichtlineare Effekte.

Um den Einfluss etwaiger Strom- und Spannungsschwankungen zu analysieren, wird die Messung für jeweils eine Probe je Zyklenzahl zehnmal durchgeführt und die Standardabweichung der Ergebnisse ermittelt. Die piezoelektrischen Elemente sind über den ganzen Versuchszeitraum fest auf der Struktur appliziert. Für eine Messung wird das Signal 1000-fach gemittelt. In Tabelle 3.3 sind die Standardabweichungen des relativen akustischen

Tabelle 3.3: Standardabweichung des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters β_2' auf Grund von Strom- und Spannungsschwankungen im Versorgungsnetz für den Probensatz I.

Probekörper	0	5000-1	10000-1	15000-1	20000-1
Standardabweichung	7.0%	5.7%	0.9%	2.3%	1.9%

Nichtlinearitätsparameters β_2' für die einzelnen Proben gegeben.

In einem zweiten Schritt wird der mögliche Einfluss nichtlinearer Effekte durch die Ankopplung der piezoelektrischen Elemente untersucht. Dazu wird an einer Probe die Messung viermal durchgeführt, wobei zwischen den einzelnen Messungen die piezoelektrischen Elemente von dem Probekörper gelöst und wieder appliziert werden. Auch hier erfolgt eine 1000-fache Mittelung des Signals. Es ergibt sich eine Standardabweichung für den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter β_2' von 5%.

Fasst man die Ergebnisse der Analyse möglicher Störfaktoren zusammen, kann davon ausgegangen werden, dass die Messung des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters mit einem relativen Fehler von 10% durchgeführt wird. Mögliche thermische Effekte sowie parasitäre Fremdanregungen können ausgeschlossen werden.

3.3.4 Ergebnisse

Als Ergebnis der Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ist in Tabelle 3.4 der normierte akustische Nichtlinearitätsparameter D_β gegeben. Dazu sind für jeden untersuchten Probensatz die Werte des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter β_2' mit dem jeweils kleinsten Wert ins Verhältnis gesetzt worden. Darüber hinaus sind für die Ergebnisse die dazu gehörigen Messunsicherheiten angegeben, welche mittels der Methode des totalen Differentials bestimmt wurden. Da die Messunsicherheit des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters β_2' nur approximiert ist und somit der größtmöglichen Fehler in Betracht gezogen werden muss, kommt dieses Verfahren zum Einsatz. Es ist definiert als

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i, \tag{3.17}$$

wobei x_i die Variablen der Funktion f kennzeichnet und Δx_i die dazugehörigen approximierten Messfehler. Somit ergibt sich für die Messunsicherheit des normierten akustischen Nichtlinearitätsparameters

$$\Delta D_\beta = \left| \frac{1}{\beta_0'} \right| \Delta\beta' + \left| -\frac{\beta'}{\beta_0'^2} \right| \Delta\beta_0'. \tag{3.18}$$

In Tabelle 3.4 ist zu erkennen, dass die Messunsicherheit des normierten akustischen Nichtlinearitätsparameters nicht die Bandbreite der gemessenen Werte abdeckt. Daraus kann geschlossenen werden, dass die einzelnen Proben ein unterschiedlich stark ausgeprägtes nichtlineares Verhalten aufweisen. Dieses nichtlineare Verhalten deutet unterschiedli-

Tabelle 3.4: Ergebnisse und Messunsicherheiten für den normierten relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter D_β.

Zyklen		0	5000	10000	15000	20000
I	1	1.98 ± 0.40	1.00 ± 0.20	1.90 ± 0.38	3.41 ± 0.68	3.62 ± 0.72
	2	-	4.92 ± 0.98	2.35 ± 0.47	1.10 ± 0.22	1.72 ± 0.34
II	1	-	6.26 ± 1.25	1.56 ± 0.31	3.35 ± 0.67	4.37 ± 0.87
	2	-	1.77 ± 0.35	2.26 ± 0.45	3.08 ± 0.62	5.05 ± 1.01
	3	-	1.34 ± 0.27	1.00 ± 0.20	5.28 ± 1.06	2.75 ± 0.55
III	1	-	2.24 ± 0.45	1.88 ± 0.38	1.92 ± 0.38	2.99 ± 0.60
	2	-	1.90 ± 0.38	1.16 ± 0.23	7.59 ± 1.52	2.00 ± 0.40
	3	-	1.83 ± 0.37	3.31 ± 0.66	1.29 ± 0.26	1.00 ± 0.20

che Schädigungsgrade der einzelnen Proben an, wobei erkennbar ist, dass eine höhere Anzahl von Lastwechseln nicht zwangsläufig zu einem stärkeren nichtlinearen Verhalten der Wellenausbreitung führen muss. Dies deckt sich mit den in Abschnitt 3.2.3 gewonnen Erkenntnissen.

3.4 Untersuchung der mechanischen Materialeigenschaften

3.4.1 Versuchsaufbau und -durchführung

Um den durch die zyklische Belastung entstandenen Schaden quantifizieren zu können und damit die Werkstoffdegradation zu beschreiben, wird der Elastizitätsmodul der einzelnen Proben mittels eines Zugversuches ermittelt. Da das Ergebnis der Wellenausbreitung nur eine Aussage über den Bereich unmittelbar zwischen den beiden piezoelektrischen Elementen macht, wird auch nur dieser Bereich zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls verwendet. Dazu wird dieser Bereich aus der Probe herausgetrennt. Dieses Vorgehen ermöglicht es, im Anschluss an die Bestimmung des Elastizitätsmoduls, eine Korrelationsanalyse der Ergebnisse aus der Wellenausbreitung und den mechanischen Eigenschaften durchzuführen. In Abbildung 3.10 ist die Probengeometrie für die einzelnen Analyseschritte dargestellt.

Die experimentelle Ermittlung des Elastizitätsmoduls erfolgt mittels konventioneller Zugversuche an einer Zwick Z50 Zugprüfmaschine. Die Messung der Verzerrung wird mit Hilfe eines Laserextensometers durchgeführt, welches zur Dehnungsermittlung ein Speckle Muster auf der Probenoberfläche generiert. Demzufolge ist keine weitere Probenpräparation erforderlich.

Für jede Probe wird der Elastizitätsmodul aus der Steigung der Verzerrung über die Spannung in einem Bereich von 4 kN bis 10 kN ermittelt. Für eine anschließende Messfehlerbetrachtung wird der Versuch je Probe 10-mal durchgeführt.

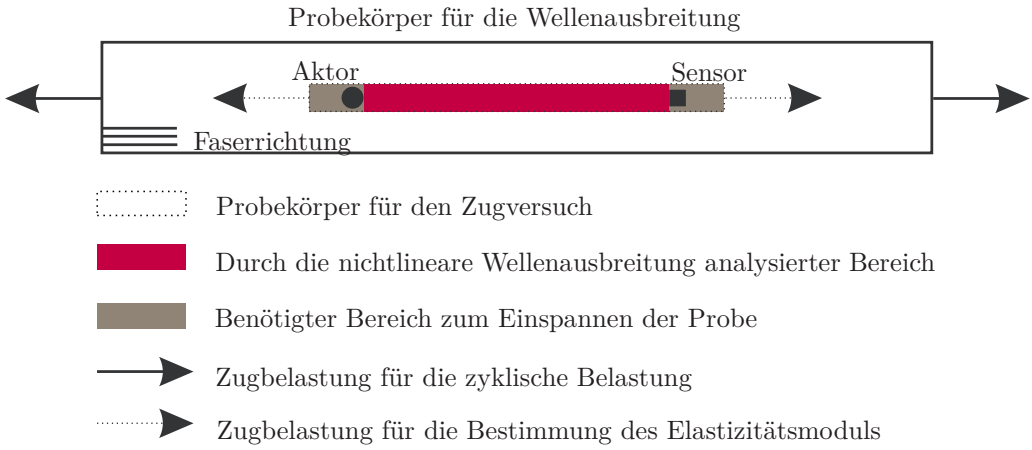


Abbildung 3.10: Geometrie des Probekörpers.

3.4.2 Messfehlerbetrachtung und Ergebnisse

Bevor die Ergebnisse aus der Wellenausbreitung mit den zu ermittelnden mechanischen Materialparametern in Verbindung gebracht werden, wird zunächst wie zuvor bei der Wellenausbreitung eine Messfehlerbetrachtung durchgeführt. Im Gegensatz zu der Messfehlerbetrachtung des normierten akustischen Nichtlinearitätsparameters sind die Messfehler der einzelnen Messgrößen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls bekannt. Des Weiteren kann davon ausgegangen werden, dass die einzelnen Messgrößen und die dazugehörigen Fehler unabhängig voneinander sind. Dies ermöglicht die Verwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes nach Gauss zur Bestimmung des Messfehlers für den Elastizitätsmodul, welches gegeben ist durch

$$\bar{s}_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{s}_i \right)^2}. \tag{3.19}$$

Dabei sind $\bar{s}_f$ und $\bar{s}_i$ die Messungenauigkeit der Funktion f, welche in Abhängigkeit der Messgrößen x_i berechnet wird, und die zugehörige Standardabweichung der einzelnen Messgrößen.

Ausgehend von den Messgrößen ergibt sich der Elastizitätsmodul in Faserrichtung E_1 aus

$$E_1 = \frac{(F_2 - F_1)l}{bt(\Delta l_2 - \Delta l_1)}, \tag{3.20}$$

wobei $(F_2 - F_1)$ die Kraftänderung, l die Messlänge des Extensometers, b die Breite, t die Dicke und Δl_2 bzw. Δl_1 die Längenänderungen der Probe bei F_2 bzw. F_1 sind. Tabelle 3.5 gibt die benötigten Standardabweichungen der einzelnen Messgrößen exemplarisch für die Messungen an der Probe 5000–1 aus dem Probensatz I an. Des Weiteren ist neben der Standardabweichung noch die Messungenauigkeit der jeweils verwendeten Messinstrumente gegeben. Es zeigt sich, dass für die Längenänderung die Standardabweichung geringer ist als die Messungenauigkeit des Laserextensometers. Im Gegensatz dazu ist die Standardabweichung der Probengeometrie deutlich größer als die Messungenauigkeit der verwendeten Bügelmessschraube. Dies liegt zum einem an der ungleichmäßigen Druckver-

Tabelle 3.5: Standardabweichung der einzelnen Messgrößen und Messgenauigkeit der zugehörigen Messinstrumente für die Probe 5000–1 des Probensatzes I.

Messgröße	Mittelwert	Standardabweichung	Messungenauigkeit
F_1	10 kN	0 kN	0.15%
F_2	4 kN	0 kN	0.15%
Δl_1	0.5533 mm	1.4 µm	0.5%
Δl_2	0.2217 mm	0.9 µm	0.5%
l	200 mm	0 µm	0.15%
b	12.2 mm	72 µm	2.5 µm
t	2.34 mm	14 µm	2.5 µm

teilung während des Fertigungsprozesses der CFK-Platte in Bezug auf die Probendicke und zum anderen an dem Herauslösen der Proben für den Zugversuch in Bezug auf die Probenbreite. Die übrigen Standardabweichungen sind null, weil zum einen die Kraftwerte in einem Intervall von 1 N gespeichert werden und zum anderen das System die Anfangslänge des Messbereichs für das Laserextensometer auf 200 mm setzt. Diese Werte liegen dann im Rahmen der angegebenen Messungenauigkeit.

Abschließend kann unter Verwendung von (3.19) und (3.20) der Messfehler von E_1 berechnet werden. Tabelle 3.6 beinhaltet für jede Probe den Mittelwert aus den zehn Messungen als Ergebnis für den Elastizitätsmodul E_1 sowie die zugehörige Messunsicherheit basierend auf dem Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Tabelle 3.6: Ergebnisse für den Elastizitätsmodul E_1 mit den zugehörigen Messunsicherheiten in GPa.

Zyklen		0	5000	10000	15000	20000
I	1	128.25 ± 1.32	126.46 ± 1.77	125.71 ± 0.87	125.03 ± 1.24	122.66 ± 1.10
	2	-	125.05 ± 1.25	124.58 ± 1.02	128.48 ± 1.01	123.43 ± 1.02
II	1	-	124.68 ± 1.54	128.04 ± 1.82	127.24 ± 0.81	125.35 ± 0.98
	2	-	125.92 ± 1.21	124.17 ± 2.40	124.54 ± 1.22	124.82 ± 1.49
	3	-	126.38 ± 1.75	128.98 ± 1.51	123.35 ± 1.00	126.69 ± 1.06
III	1	-	126.94 ± 0.77	123.12 ± 0.79	123.54 ± 1.30	126.54 ± 1.04
	2	-	123.88 ± 1.02	125.21 ± 0.63	123.54 ± 2.18	125.23 ± 1.36
	3	-	126.57 ± 0.90	127.13 ± 1.03	126.15 ± 0.79	130.27 ± 1.06

Die ermittelten Elastizitätsmoduln liegen zwischen 122.66 GPa und 130.27 GPa, bei einer mittleren Messungenauigkeit von ±1.22 GPa. Der Bereich der Streuung des Elastizitätsmoduls lässt sich also nicht durch die Messungenauigkeit der experimentellen Be-

stimmung erklären, so dass diese auf eine Werkstoffdegradation durch die zyklische Belastung sowie fertigungsbedingte Schäden zurückgeführt werden kann. Darüber hinaus ist ersichtlich, dass eine höhere Anzahl an Zyklen, wie in Abschnitt 3.2.3 diskutiert, nicht zwangsläufig zu einem ausgeprägteren Schadensbild führt. Vielmehr ist die individuelle Initialschädigung der einzelnen Proben entscheidend für die folgende Werkstoffdegradation, welche aus der zyklischen Belastung resultiert.

3.5 Korrelationsanalyse

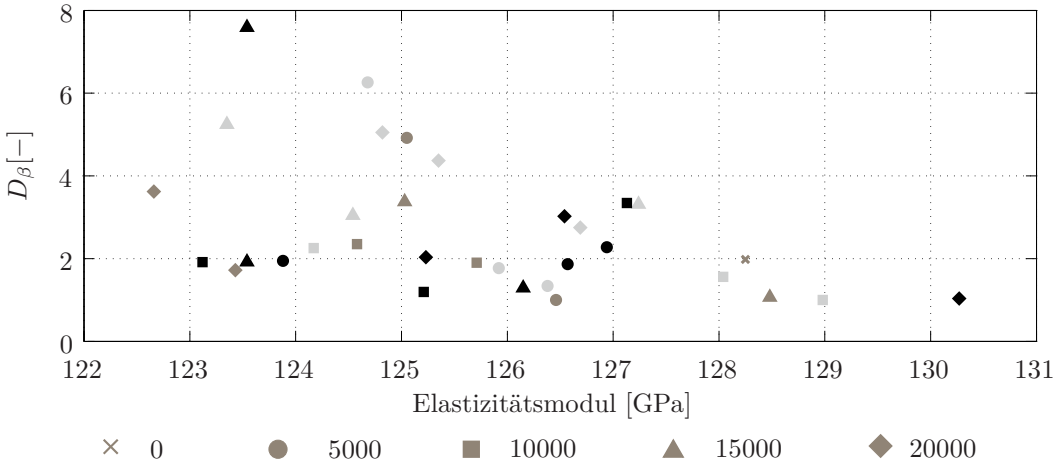
Schlussendlich wird eine Korrelationsanalyse durchgeführt, anhand derer ein möglicher Zusammenhang zwischen dem nichtlinearen Verhalten der Wellenausbreitung und der, durch die zyklische Belastung bedingten, Werkstoffdegradation diskutiert wird. Dazu sind in Abbildung 3.11(a) zunächst die Ergebnisse der beiden experimentellen Untersuchungen in einem Diagramm zusammengefasst. Die Datenpunkte verknüpfen das Ergebnis aus der Wellenausbreitung mit dem zugehörigen Elastizitätsmodul der einzelnen Proben. Die unterschiedlichen Graustufen der Datenpunkte kennzeichnen den jeweiligen Probensatz, dunkelgraue Datenpunkte gehören zu Probensatz I, hellgraue Datenpunkte zu Probensatz II und die schwarzen Datenpunkte zu Probensatz III. Es ist zu erkennen, dass zwischen den Ergebnissen der einzelnen Probensätze zueinander kein signifikant unterschiedliches Verhalten erkennbar ist. Vielmehr deutet die Gesamtheit der Ergebnisse auf eine mögliche Korrelation zwischen einem sinkenden Elastizitätsmodul bei steigendem normierten akustischen Nichtlinearitätsparameter hin. Diese Korrelation wird im Folgenden in Hinblick auf die in Abschnitt 3.3.3 und 3.4.2 bestimmten Messunsicherheiten detailliert analysiert.

In Abbildung 3.11(b) sind basierend auf den Messwerten verschiedene Regressionen unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zusätzlich zu den Datenpunkten eingezeichnet. Als Regressionsmodelle sind eine Gerade, eine Parabel sowie eine gebrochen-rationale Funktion der Form

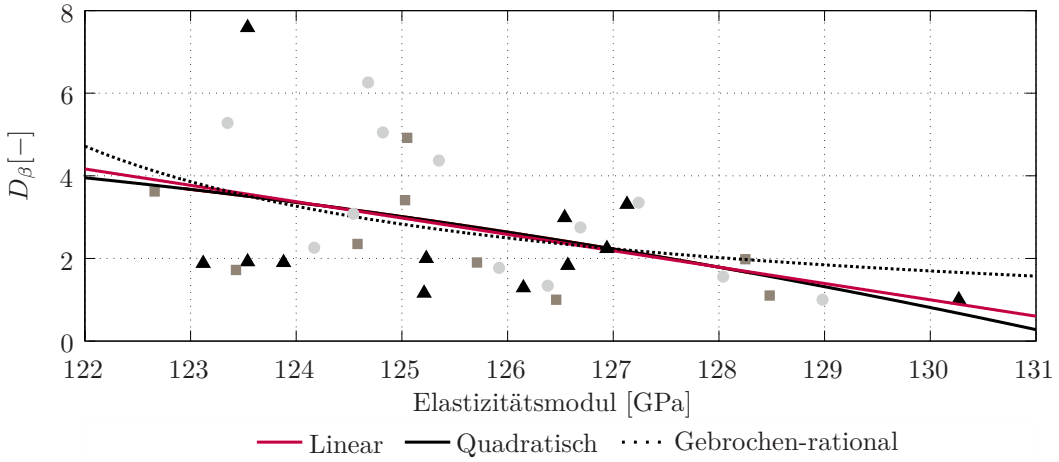
$$f(x) = \frac{x + a}{bx^2 + cx + d} \tag{3.21}$$

zur Anwendung gekommen. Alle Regressionsmodelle deuten auf denselben Zusammenhang zwischen dem Ergebnis der Wellenausbreitung und den mechanischen Eigenschaften der Proben hin, nämlich das bereits angedeutete Anwachsen des normierten akustischen Nichtlinearitätsparameters bei gleichzeitiger Verringerung der Steifigkeit. Basierend auf der Erkenntnis, dass alle Regressionsmodelle dieselbe Korrelation andeuten, wird im Folgenden mit dem einfachsten Modell, der linearen Regression, fortgefahren.

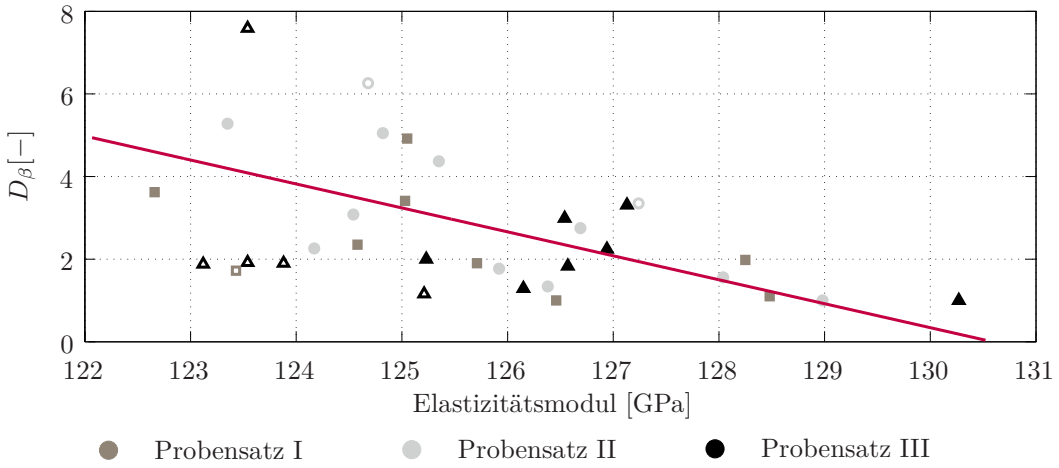
Bei der Ermittlung der Regressionsgeraden wird allein der Datenpunkt berücksichtigt, die vorhandenen Messungenauigkeiten werden vernachlässigt. Deshalb wird in einem zweiten Schritt eine Anpassung der Regressionsgeraden vorgenommen, wobei die Messungenauigkeiten mit berücksichtigt werden. Die ermittelten Messungenauigkeiten aus Tabelle 3.4 und 3.6 geben den Bereich an, in dem sich der tatsächliche Wert für den normierten akustischen Nichtlinearitätsparameter und für den Elastizitätsmodul befindet. Dieser Bereich kann mittels Fehlerbalken abgebildet werden, so dass sich für jeden Datenpunkt ein Rechteck ergibt, welches alle möglichen Messwerte für den jeweiligen Datenpunkt



(a) Experimentelle Ergebnisse der Analyse der Wellenausbreitung bezogen auf die ermittelten Elastizitätsmoduln.



(b) Ergebnisse der Regressionsmodelle.



(c) Endergebnis der Korrelationsanalyse.

Abbildung 3.11: Korrelationsanalyse der Ergebnisse aus der experimentellen Untersuchung der nichtlinearen Wellenausbreitung mit den Ergebnissen des Elastizitätsmoduls.

beinhaltet. Demzufolge ist nicht nur der Datenpunkt, sondern das aus den Fehlerbalken entstandene Rechteck für die Bestimmung der Regressionsgeraden von Interesse. Auf Grundlage der entstandenen Rechtecke wird die Regressionsgerade angepasst, wobei es das Ziel ist, so viele Rechtecke wie möglich mit der Regressionsgeraden zu berühren bzw. zu schneiden. In Abbildung 3.12 ist dieses Vorgehen exemplarisch anhand der Daten für den Probensatz I gezeigt. Zu den einzelnen Datenpunkten sind entsprechend der zugehörigen Messunsicherheiten Fehlerbalken eingezeichnet. Für einen Datenpunkt ist das daraus resultierende Rechteck angedeutet. Die gestrichelte Linie ist das Ergebnis der Regression, welche als Ausgangspunkt der Anpassung dient. Die Regressionsgerade repräsentiert nur vier der vorhandenen neun Datenpunkte. Als Ergebnis der Anpassung ergibt sich die durchgezogene Linie. Mit dieser werden nun acht von neun Punkten wiedergegeben.

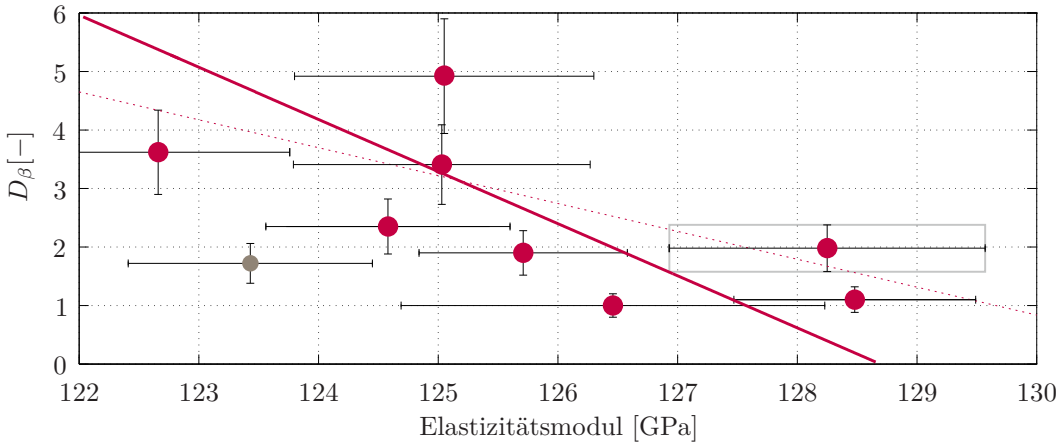


Abbildung 3.12: Anpassung der Regressionsgrade an die Messdaten unter Berücksichtigung der Messungenauigkeiten am Beispiel der Ergebnisse für den Probensatz I.

Das Endergebnis ist in Abbildung 3.11(c) dargestellt. Im bestmöglichen Fall können mittels der Regressionsgerade 25 der insgesamt 33 Messwerte abgebildet werden, welche durch gefüllte Symbole gekennzeichnet sind. Dieses Ergebnis untermauert die mögliche Korrelation zwischen einem steigenden normierten akustischen Nichtlinearitätsparameter bei einem sinkenden Elastizitätsmodul. Die Ausreißer nach oben und unten, welche nicht mittels der Regressionsgerade abgebildet werden können, sind zum einen auf mögliche Faservolumengehaltschwankungen sowie Schäden zurückzuführen, die den Elastizitätsmodul nicht beeinflussen. Eine genauere Analyse der Versuchsergebnisse folgt im nächsten Kapitel mittels numerischer Simulation.

Kapitel 4

Numerische Analyse der experimentellen Untersuchungsergebnisse

Basierend auf den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen erfolgt in diesem Kapitel eine genauere Analyse mittels numerischer Simulationen in der kommerziellen FE-Software ANSYS®. Dazu wird zunächst der Einfluss einer geometrischen Nichtlinearität auf die Wellenausbreitung im Allgemeinen und auf die Entstehung höher harmonischer Moden im Speziellen untersucht. Im Anschluss daran erfolgt die Modellierung der gefundenen Risse in der Struktur. Anhand des entstandenen numerischen Modells wird zum einen die Interaktion zwischen der Welle und dem Riss analysiert, zum anderen werden unterschiedliche Schädigungszustände generiert und der Einfluss auf den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter untersucht. Dies ermöglicht die numerische Abbildung der experimentellen Untersuchungen. Abschließend erfolgt auch hier die Ermittlung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit der unterschiedlichen Schädigungszustände.

Bevor die numerische Analyse der Versuchsergebnisse vorgestellt wird, werden zunächst die theoretischen Grundlagen der nichtlinearen Finite-Elemente-Methode präsentiert, welche für die numerischen Simulationen von Bedeutung sind.

4.1 Nichtlineare Finite-Element-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) dient als numerisches Verfahren zur Berechnung der Verformung und des Spannungszustandes komplexer Strukturen unter einer gegebenen Belastung. Dies wird benötigt, da das beschreibende System aus Differentialgleichungen in der Regel nicht analytisch zu lösen ist.

Im Folgenden wird die Finite-Elemente-Methode ausgehend von der Variationsformulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen hergeleitet. Dabei werden geometrische und materielle Nichtlinearitäten sowie zeitabhängige Belastungen berücksichtigt und geeignete Lösungsverfahren vorgestellt. Abschließend erfolgt eine kurze Darstellung der Behandlung von Kontaktproblemen. Die Ausführungen beruhen weitestgehend auf den Darstellungen in [8, 151]. Detailliert sind diese auch in [13, 18, 70, 110, 127] zu finden.

4.1.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die in Abschnitt 2.3 eingeführte lokale Form der Impulsbilanz in der Ausgangskonfiguration

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.31}$$

wird auch als NAVIER-CAUCHY'sche Bewegungsgleichung bezeichnet. Sie bildet zusammen mit der kinematischen Beziehung (vgl. Abschnitt 2.2) und den konstitutiven Gleichungen (vgl. Abschnitt 2.4) ein System gekoppelter Differentialgleichungen, welches unter Verwendung der Verschiebungs- (DIRICHLET-) und Spannungsrandbedingungen (NEUMANN-Randbedingung)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad S_u \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \quad \text{auf} \quad S_\sigma \tag{4.1}$$

zu lösen ist. Da im Allgemeinen keine geschlossene Lösung existiert, erfolgt in der Regel eine Näherungslösung auf Grundlage des Variationsprinzips, wie es z.B. bei der FEM der Fall ist. Dazu wird ausgehend von (2.31) eine schwache Formulierung der Bewegungsgleichung benötigt. Hierzu wird (2.31) mit einer Vektorfunktion $\delta\mathbf{u}$, auch als virtuelle Verschiebung bezeichnet, multipliziert und anschließend über das Volumen integriert. Die virtuellen Verschiebungen sind dabei beliebig, infinitesimal und stetig differenzierbar. Darüber hinaus müssen sie die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Es ergibt sich

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{V_0} (\mathrm{Div}\,\mathbf{P} + \rho_0\mathbf{b} - \rho_0\ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V_0 = 0. \tag{4.2}$$

Mit der Produktregel für die Divergenz folgt zunächst

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{V_0} \left[\mathrm{Div}(\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u}) - \mathbf{P} : \mathrm{Grad}(\delta\mathbf{u})\right]\ \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V_0 = 0. \tag{4.3}$$

Der Term $\int_{V_0} \mathrm{Div}(\mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{u})\ \mathrm{d}V_0$ kann unter Verwendung des GAUSS'schen Integralsatzes und Einsetzen des CAUCHY-Theorems (2.19) formuliert werden als

$$\int_{V_0} \mathrm{Div}(\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u})\ \mathrm{d}V_0 = \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}S_0. \tag{4.4}$$

Aus (4.3) ergibt sich mit (4.4) und der Spannungsrandbedingung aus (4.1) schlussendlich

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{V_0} \mathbf{P} : \mathrm{Grad}(\delta\mathbf{u})\ \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V_0 - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}S_0 = 0 \tag{4.5}$$

als schwache Formulierung für das Gleichgewicht. Die darin enthaltenen Terme beschreiben die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\int_{V_0} \mathbf{P} : \mathrm{Grad}(\delta\mathbf{u})\ \mathrm{d}V_0, \tag{4.6}$$

die virtuelle Arbeit der Massenträgheiten

$$\int_{V_0} \rho_0\ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V_0, \tag{4.7}$$

die virtuelle Arbeit der Volumenkräfte

$$-\int_{V_0} \rho_0\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V_0 \tag{4.8}$$

sowie die virtuelle Arbeit der äußeren Belastung

$$-\int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}S_0. \tag{4.9}$$

Als alternative Formulierung kann (4.5) auch mit Hilfe des zweiten anstatt des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors aufgestellt werden

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}V_0 - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}S_0 = 0, \tag{4.10}$$

wobei $\delta\mathbf{E}$ die Variation des Green-Lagrange-Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ ist, für die der Zusammenhang

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\delta\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^{\top}\,\delta\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^{\top}\,\delta\mathbf{u} \cdot \mathrm{Grad}\,\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^{\top}\,\mathbf{u} \cdot \mathrm{Grad}\,\delta\mathbf{u}) \tag{4.11}$$

gilt. Unter Verwendung des allgemeinen Hooke'schen Gesetzes ($\mathbb{C} : \mathbf{E}$) ergibt sich das Gleichgewicht in seiner nichtlinearen Form zu

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{V_0} \delta\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \, \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}V_0 - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}S_0 = 0, \tag{4.12}$$

welches kubisch in den Verschiebungen $\mathbf{u}$ ist und somit ein geometrisch nichtlineares Verhalten beschreibt [151].

Geht man von hyperelastischem Materialverhalten und damit der Existenz einer Verzerrungsenergiedichtefunktion Ψ aus (vgl. Kapitel 2.4), kann eine zu (4.10) äquivalente Formulierung aufgestellt werden. Ausgangspunkt ist das Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials, welches unter Berücksichtigung der im Körper gespeicherten elastischen Energie Ψ und der potentiellen Energie der eingeprägten Kräfte in Abhängigkeit der Verschiebung $\mathbf{u}$ geschrieben werden kann als [58]

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{V_0} \Psi(\mathbf{C}) \, \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}V_0 - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{u} \, \mathrm{d}S_0 \Rightarrow \mathrm{Min}. \tag{4.13}$$

Gesucht ist nun die Verschiebung $\mathbf{u}$, für die das Potential minimal wird. Die Berechnung erfolgt mittels der Variation und anschließender Richtungsableitung, symbolisiert mit $\mathcal{D}$. Es ergibt sich als schwache Formulierung des Gleichgewichts [58, 151]

$$\partial\Pi = \mathcal{D}\Pi(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{u} = \int_{V_0} \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{C}} \cdot \mathcal{D}\mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}V_0 + \int_{V_0} \rho_0(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}V_0 - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^{\mathrm{I}} \cdot \delta\mathbf{u} \, \mathrm{d}S_0 = 0. \tag{4.14}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Formulierung des Gleichgewichts in schwacher Form für hyperelastisches Materialverhalten stellt das Hu-Washizu-Variationsprinzip dar, welches

bei Potentialbeschreibungen der Form

$$\Psi = \Psi_{\text{iso}} + \Psi_{\text{vol}}, \tag{2.39}$$

also der Trennung des isochoren und volumetrischen Anteils, zur Anwendung kommt. Eine detaillierte Darstellung ist in [151] zu finden.

4.1.2 Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

Der vorgestellte Zusammenhang aus (4.5) stellt ein in den Verschiebungen $\mathbf{u}$ nichtlineares Randwertproblem dar, welches in der Regel nur mit Hilfe von Näherungsverfahren, wie z.B. bei der FEM, gelöst werden kann. Für die Anwendung solcher Näherungsverfahren bedarf es allerdings zunächst einer Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, wobei nur die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte linearisiert werden muss. Alle anderen Anteile sind unabhängig von den Verschiebungen. Die Linearisierung erfolgt auf Basis einer TAYLOR-Reihenentwicklung mit anschließender Richtungsableitung in einem Gleichgewichtszustand. Als Ergebnis erhält man für die linearisierte innere virtuelle Arbeit

$$\mathcal{DF}(\bar{\mathbf{u}}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} = \int_{V_0} \left(\operatorname{Grad} \delta\mathbf{u} : \operatorname{Grad} \Delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \delta\bar{\mathbf{E}} : \bar{\mathbb{C}} : \Delta\bar{\mathbf{E}} \right) \mathrm{d}V_0. \tag{4.15}$$

Der erste Term, welcher das Inkrement der Verschiebung $\Delta\mathbf{u}$ enthält, wird auch als Anfangsspannungsmatrix bezeichnet, der zweite Term beschreibt die Tangentensteifigkeit und enthält die Variation des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors

$$\delta\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^{\top} \cdot \operatorname{Grad} \delta\mathbf{u} + \operatorname{Grad}^{\top} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{F}}), \tag{4.16}$$

das Inkrement des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors

$$\Delta\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{F}}^{\top} \cdot \operatorname{Grad} \Delta\mathbf{u} + \operatorname{Grad}^{\top} \Delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{F}}) \tag{4.17}$$

sowie das Inkrement des Materialtensors

$$\bar{\mathbb{C}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial\mathbf{C}\partial\mathbf{C}}\bigg|_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}}. \tag{4.18}$$

Diese folgen aus der Linearisierung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors, welcher für $\mathbf{P}$ über den Zusammenhang

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \tag{4.19}$$

in (4.5) eingesetzt wird. Eine detaillierte Darstellung ist [151] zu entnehmen.

Mit Hilfe der Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen erhält man eine kontinuierliche, lineare Beschreibung des Gleichgewichts, deren Lösung mittels der Finiten-Elemente-Methode näherungsweise bestimmt werden kann.

4.1.3 Diskretisierung unter Verwendung des isoparametrischen Konzepts

Bei der Finiten-Elemente-Methode erfolgt die Lösung der Bewegungsgleichung für den Körper B in diskreter Form. Dazu wird dieser zunächst in diskrete Gebiete, so genannte finite Elemente, unterteilt (Abbildung 4.1(a)). Um die zugehörigen Feldgrößen, wie z.B. die Verschiebungen oder Verzerrungen, zu ermitteln, wird eine Approximation mittels Ansatzfunktionen an den Elementknoten durchgeführt. Mit deren Hilfe kann das Verschiebungsfeld eines Elements $\mathbf{u}_e$ durch die einzelnen Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_k$ abgebildet werden. Dies lässt sich formulieren als

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}\mathbf{u}_k, \tag{4.20}$$

wobei $\mathbf{N}$ die zu den Knotenverschiebungen gehörenden Ansatzfunktionen enthält. Verwendet man für die Approximation der einzelnen Feldgrößen sowie die Beschreibung der Geometrie dieselben Ansatzfunktionen, spricht man von dem isoparametrischen Konzept. Als Referenzkonfiguration dient ein Einheitsquadrat mit einem orthogonalen Koordinatensystem (Abbildung 4.1(b)). Dies bietet viele Vorteile mit Hinblick auf die Transformation in die Ausgangs- oder Momentankonfiguration sowie bei der Bildung benötigter Ableitungen. In Abhängigkeit der isoparametrischen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]^\top$ können die Ansatzfunktionen für den eindimensionalen Fall allgemein durch

$$\mathbf{N}_I(\xi) = \prod_{J=1;J\neq I}^{n} \frac{\xi_J - \xi}{\xi_J - \xi_I} \tag{4.21}$$

gebildet werden. Die enthaltenen Polynome $n-1$-ter Ordnung werden als LAGRANGE'sche Polynome und das dahinter stehende Prinzip als LAGRANGE'sches Konzept bezeichnet, welches die aus dem isopraramетrischen Konzept resultierenden Anforderungen erfüllt, siehe [151]. Die Ansatzfunktionen für den zwei- bzw. dreidimensionalen Fall erhält man durch

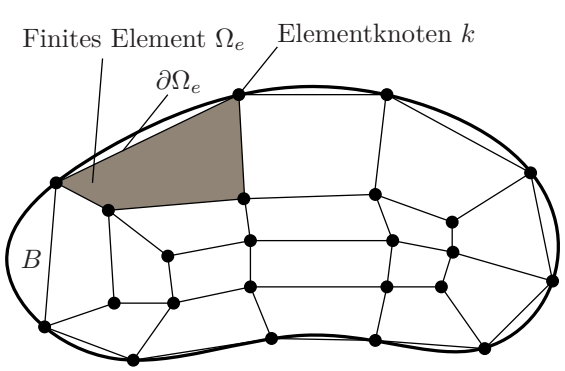
$$\mathbf{N}_J(\xi,\eta) = \mathbf{N}_I(\xi)\mathbf{N}_K(\eta) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{N}_J(\xi,\eta,\zeta) = \mathbf{N}_I(\xi)\mathbf{N}_K(\eta)\mathbf{N}_L(\zeta). \tag{4.22}$$

Charakteristisch für die LAGRANGE'schen Ansatzfunktionen ist dabei, dass diese für einen Knoten den Wert 1 und für alle anderen Knoten den Wert 0 annehmen. In Abbildung 4.1(c) sind die ein- und zweidimensionalen Ansatzfunktionen beispielhaft für ein 4-Knoten Scheibenelement abgebildet.

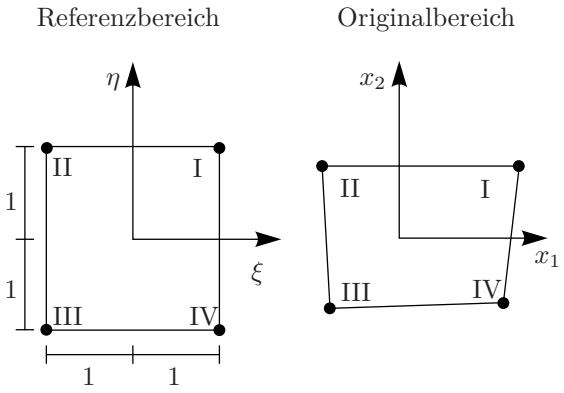
Ausgehend von (4.20) kann die zeitliche Ableitung über die Ansatzfunktionen beschrieben werden als

$$\ddot{\mathbf{u}}_e = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}_k. \tag{4.23}$$

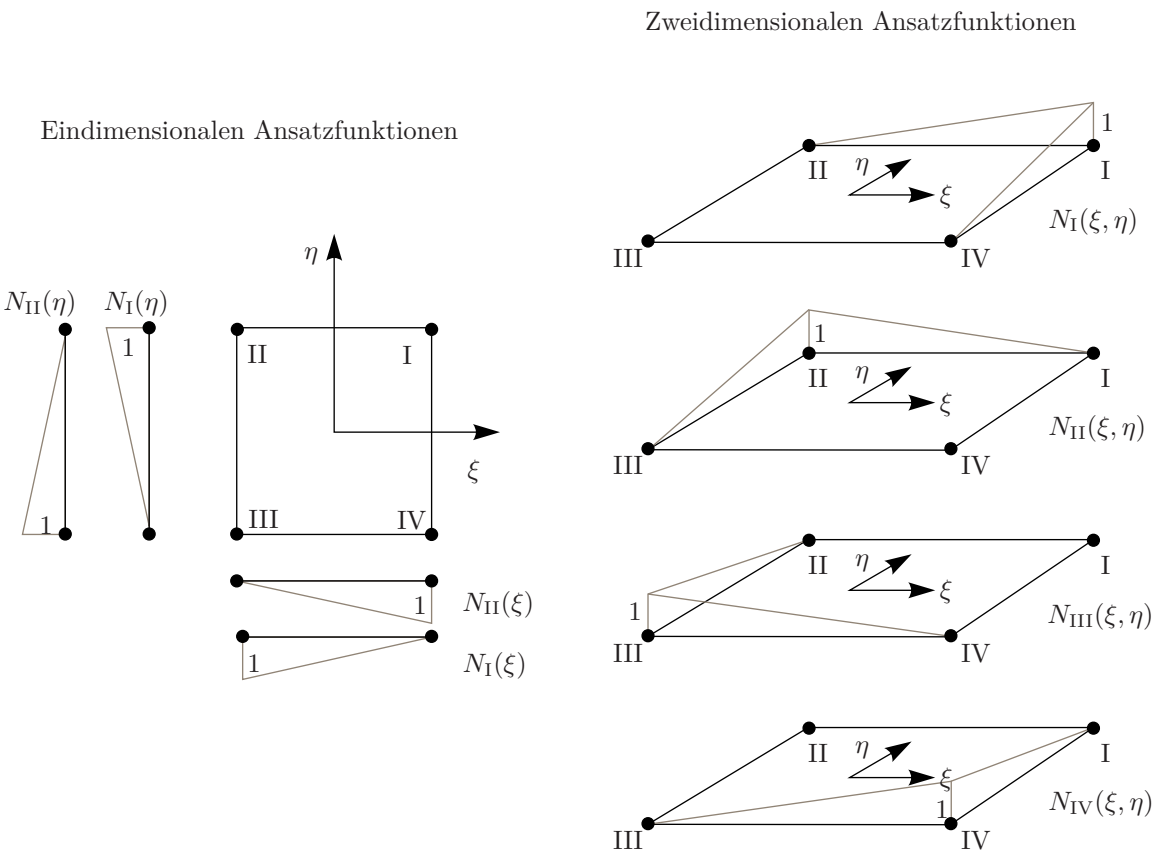
Zur Approximation des Prinzips der virtuellen Verschiebungen wird darüber hinaus die Diskretisierung von Grad $\mathbf{u}$ oder des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ benötigt. Für den GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors ergibt sich die Diskretisie-



(a) Diskretisierung des Körpers B durch finite Elemente.



(b) Finites Element im Referenz- und Originalbereich.



(c) Ein- und zweidimensionale Ansatzfunktionen für ein 4-Knoten Element nach dem LAGRANGE'schen Konzept.

Abbildung 4.1: Diskretisierung eines Körpers B mittels des isoparametrischen Konzepts.

rung basierend auf (4.20) zu

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \tag{4.24}$$

wobei $\mathbf{B}$ die Ortsableitungen der Ansatzfunktionen enthält. Da diese in isoparametrischen Koordinaten formuliert sind und für die Bestimmung des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors die Ableitungen bezüglich der Ausgangskonfiguration benötigt werden, erfolgt die Berechnung von $\mathbf{B}$ für den Knoten k mit Hilfe des materiellen Deformationsgradienten nach

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} F_{11}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} & F_{21}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} & F_{31}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ F_{12}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} & F_{22}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} & F_{32}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ F_{13}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & F_{23}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & F_{33}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} \\ F_{11}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} + F_{12}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} & F_{21}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} + F_{22}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} & F_{31}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} + F_{32}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ F_{12}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} + F_{13}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} & F_{22}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} + F_{23}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} & F_{32}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} + F_{33}\frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ F_{13}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} + F_{11}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & F_{23}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} + F_{21}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} & F_{33}\frac{\partial N_k}{\partial \xi} + F_{31}\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

vgl. [18].

Für die Approximation der Lösung von (4.10) wird die Diskretisierung der inneren virtuellen Arbeit, der Massenträgheit sowie der Volumen- und Oberflächenkräfte benötigt. Für die darin enthaltenen virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ sowie des virtuellen GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors $\delta\mathbf{E}$ ergeben sich nach (4.20) und (4.24)

$$\delta\mathbf{u}_e = \mathbf{N}\delta\mathbf{u}_k \qquad \text{bzw.} \qquad \delta\mathbf{E}_e = \mathbf{B}\delta\mathbf{u}_k. \tag{4.26}$$

Daraus resultiert für die virtuelle innere Arbeit eines Elementes mit dem Spannungsvektor $\mathbf{S}_e = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{23}, S_{13}, S_{12}]^\top$ in diskreter Form

$$\delta\mathbf{u}_k^\top \mathbf{r}_e = \delta\mathbf{u}_k^\top \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_e \, \mathrm{d}\Omega_e. \tag{4.27}$$

Der Vektor $\mathbf{r}_e$ beinhaltet dabei die nichtlinearen inneren Elementkräfte. Die Diskretisierung des Trägheitsterms liefert mit (4.23)

$$\delta\mathbf{u}_k^\top \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_k = \delta\mathbf{u}_k^\top \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}^\top \mathbf{N} \, \mathrm{d}\Omega_e \ddot{\mathbf{u}}_k, \tag{4.28}$$

wobei $\mathbf{M}_e$ als Elementmassenmatrix bezeichnet wird. Die Belastung durch die Volumen- und Oberflächenkräfte kann mittels der beiden Vektoren

$$\delta\mathbf{u}_k^\top \mathbf{f}_e^{\mathrm{V}} = \delta\mathbf{u}_k^\top \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}^\top \mathbf{b}_e \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{4.29}$$

für die Volumenkräfte sowie

$$\delta\mathbf{u}_k^\top \mathbf{f}_e^{\mathrm{O}} = \delta\mathbf{u}_k^\top \int_{\Omega_e} \rho_0 \mathbf{N}^\top \bar{\mathbf{t}}_e \, \mathrm{d}\Omega_e \tag{4.30}$$

für die Oberflächenkräfte bzw. äußeren Lasten diskretisiert werden. Setzt man die einzelnen Terme aus (4.27) bis (4.30) in (4.10) ein, erhält man als semi-diskrete Formulierung

für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für ein Element

$$\delta\mathbf{u}_k^\top\{\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{r}_e - \mathbf{f}_e\} = 0, \tag{4.31}$$

mit dem Elementlastvektor $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e^{\mathrm{V}} + \mathbf{f}_e^{\mathrm{O}}$. Da die virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}_k$ beliebig sind, muss der Klammerausdruck zu null werden. Die Approximation des Gesamtverschiebungsfeldes ergibt sich abschließend durch die Assemblierung der Elementmatrizen, so dass sich für die räumliche Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in der Ausgangskonfiguration

$$\bigcup_{e=1}^{n}\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{u}}_k + \bigcup_{e=1}^{n}\mathbf{r}_e - \bigcup_{e=1}^{n}\mathbf{f}_e = \mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{r} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{4.32}$$

ergibt. Dies stellt ein Gleichungssystem bestehend aus nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, durch welches die Verschiebungen eines Körpers in diskreter Form berechnet werden können. Eine zeitliche Diskretisierung ist an dieser Stelle noch nicht erfolgt.

4.1.4 Anwendung auf das linearisierte Prinzip der virtuellen Verschiebungen

In (4.32) liegt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in diskreter, nichtlinearer Form vor. Um dies lösen zu können, bedarf es einer Linearisierung. Die Linearisierung erfolgt dabei durch die Diskretisierung der linearisierten virtuellen inneren Arbeit aus (4.15). Betrachtet man zunächst den ersten Term aus (4.15) führt die Diskretisierung auf

$$\int_{V_0}\mathrm{Grad}\,\delta\mathbf{u} : \mathrm{Grad}\,\Delta\mathbf{u}\cdot\bar{\mathbf{S}}\ \mathrm{d}V_0 = \bigcup_{e=1}^{n}\delta\mathbf{u}_k^\top\int_{\Omega_e}\mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^\top\ \bar{\mathbf{S}}_e\ \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}\ \mathrm{d}\Omega_e\Delta\mathbf{u}_k. \tag{4.33}$$

Analog zu der Diskretisierung des Green-Lagrange'schen Verzerrungstensors mit Hilfe der Matrix $\mathbf{B}$ aus (4.25) erfolgt mittels der Matrix $\mathbf{B}_{\mathrm{NL}}$ die Darstellung des Gradienten des Verschiebungsfelds

$$\mathbf{B}_{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^2 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^2 & \cdots \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

mit

$$\mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial\xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial\eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial\zeta} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

vgl. [18].

Der zweite Term der linearisierten virtuellen inneren Arbeit enthält sowohl die Linearisierung des Stoffgesetzes als auch des Verzerrungsmaßes. In diskreter Form lässt sich dies

formulieren als

$$\int_{V_0} \delta\bar{\mathbf{E}} : \bar{\mathbb{C}} : \Delta\bar{\mathbf{E}} \, \mathrm{d}V_0 = \bigcup_{e=1}^{n} \delta\mathbf{u}_k^\top \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^\top \, \bar{\mathbb{C}} \, \mathbf{B} \, \mathrm{d}\Omega_e \Delta\mathbf{u}_k. \tag{4.36}$$

Zusammengefasst ergibt sich aus (4.33) und (4.36) als Diskretisierung der linearisierten virtuellen inneren Arbeit

$$\bigcup_{e=1}^{n} \delta\mathbf{u}_k^\top \bar{\mathbf{K}}_e \Delta\mathbf{u}_k = \delta\mathbf{u}_k^\top \mathbf{K}_{\mathrm{NL}} \Delta\mathbf{u}_k, \tag{4.37}$$

mit

$$\bar{\mathbf{K}}_e = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_{\mathrm{NL}}^\top \, \bar{\mathbf{S}}_e \, \mathbf{B}_{\mathrm{NL}} + \mathbf{B}^\top \, \bar{\mathbb{C}} \, \mathbf{B} \right) \mathrm{d}\Omega_e, \tag{4.38}$$

welche als Tangentenmatrix bezeichnet wird. Durch das Einführen von (4.37) in (4.32) erhält man für das linearisierte, diskrete Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\mathbf{M} \, \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K}_{\mathrm{NL}} \, \mathbf{u}_k - \mathbf{f} = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

Im Falle einer linearen Problemstellung, also linearem Materialverhalten und kleinen Verformungen, gilt $\mathbf{S}_e = \mathbf{0}$, so dass der erste Term aus (4.38) entfällt. Es resultiert die bekannte lineare Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^\top \, \mathbb{C} \, \mathbf{B}. \tag{4.40}$$

Auf die Beeinflussung durch Dämpfung wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen, da diese auch in den folgenden numerischen Simulationen nicht berücksichtigt wird.

4.1.5 Newton-Raphson-Verfahren

Um die linearisierte, diskrete Formulierung aus (4.39) zur Bestimmung des aus der Belastung resultierenden Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}$ zu lösen, bedarf es einer iterativen Lösung. Die am häufigsten dazu verwendete Methode ist das Newton-Raphson-Verfahren, welches in allen kommerziellen FE-Programmen zum Einsatz kommt. Es erfolgt eine iterative Lösung, wobei die auf das System wirkenden Kräfte gegebenenfalls inkrementell erhöht werden. Für die Lösung des Gesamtverschiebungsfeldes $\mathbf{u}$ muss ausgehend von der bekannten Lösung an der Stelle k für die noch unbekannte Lösung an der Stelle $k + \Delta k$ der Zusammenhang

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\mathrm{ext}} - {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\mathrm{int}} = \mathbf{0} \tag{4.41}$$

gelten, wobei ${}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\mathrm{ext}}$ die äußeren, auf das System wirkenden, Kräfte und ${}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\mathrm{int}}$ die Knotenpunktkräfte, welche den Elementspannungen entsprechen, an der Stelle $k + \Delta k$ sind. Ausgehend von einer bekannten Lösung für das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}^{i-1}$ im Iterationsschritt $i - 1$, sowie unter der Annahme konservativer Kräfte, ergibt sich mittels der

TAYLOR-Reihenentwicklung für (4.41)

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{{}^{k+\Delta k}\mathbf{u}^{i-1}} \left(\mathbf{u} - {}^{k+\Delta k}\mathbf{u}^{i-1}\right) = {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\text{int}}. \tag{4.42}$$

In dieser Darstellung geben die Kopfzeiger oben links das Lastinkrement und oben rechts den Iterationsschritt an, ferner werden Terme höherer Ordnung vernachlässigt. Darauf aufbauend kann aus (4.42) ein Verschiebungszusatz $\Delta\mathbf{u}^i$ bestimmt werden. Dieser ist gegeben durch

$${}^{k+\Delta k}\mathbf{K}^{i-1}\Delta\mathbf{u}^i = {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^{k+\Delta k}\mathbf{f}_{\text{int}} \tag{4.43}$$

mit der momentanen Tangentensteifigkeit, vgl. (4.38),

$${}^{k+\Delta k}\mathbf{K}^{i-1} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right)\Bigg|_{{}^{k+\Delta k}\mathbf{u}^{i-1}}. \tag{4.44}$$

Basierend auf dem ermittelten Verschiebungsinkrement $\Delta\mathbf{u}^i$ ergibt sich die verbesserte Lösung des Gesamtverschiebungsfeldes zu

$${}^{k+\Delta k}\mathbf{u}^i = {}^{k+\Delta k}\mathbf{u}^{i-1} + \Delta\mathbf{u}^i. \tag{4.45}$$

Abbildung 4.2 zeigt schematisch den Ablauf der iterativen Bestimmung des Gesamtverschiebungsfeldes für ein System mit einem Freiheitsgrad. Basierend auf dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren existieren eine Vielzahl weiterer modifizierter Methoden, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll. Ausführliche Herleitungen des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens können unter anderem [8, 151] entnommen werden.

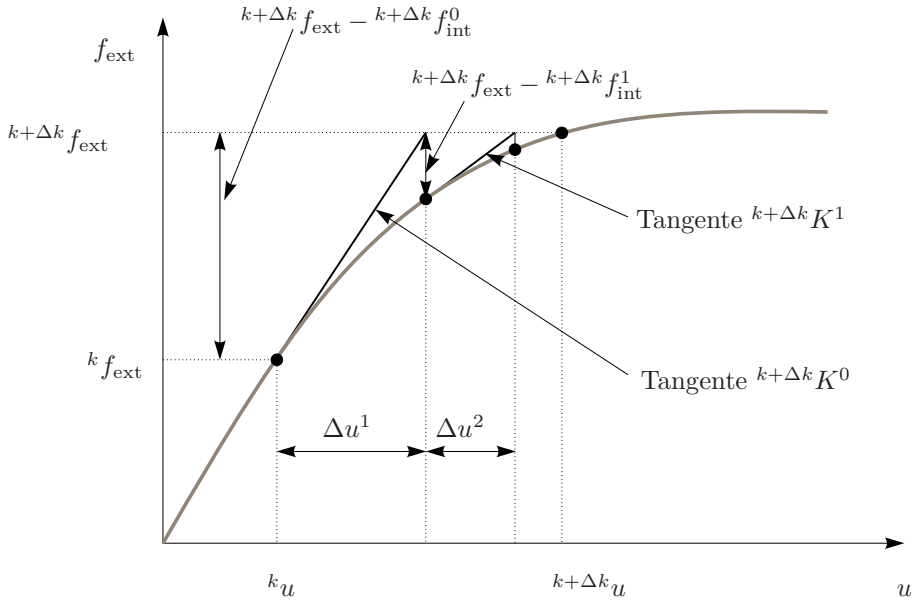


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Verfahren für ein System mit einem Freiheitsgrad nach [8].

4.1.6 NEWMARK-Verfahren

Die in (4.39) vorgestellte Gleichung ist zwar bezüglich des Ortes diskretisiert worden, im Zeitbereich liegt jedoch noch eine kontinuierliche Formulierung vor. Im Allgemeinen können nicht nur die Verschiebungen und damit auch die Beschleunigungen, sondern auch die Masse, Steifigkeit und äußeren Lasten zeitabhängig sein. Bei der Betrachtung der Wellenausbreitung in Festkörpern kann davon ausgegangen werden, dass die Masse und die Steifigkeit zeitunabhängig sind, so dass in diesem Fall (4.39) formuliert werden kann als

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_{\mathrm{NL}}\ \mathbf{u}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}, \tag{4.46}$$

wobei auch hier eine mögliche Dämpfung vernachlässigt werden soll. Zur Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung gibt es eine Vielzahl möglicher Methoden, wobei man ganz allgemein zwischen direkten und indirekten Lösungsverfahren unterscheidet. Bei direkten Lösungsverfahren erhält man als Lösung direkt die gesuchte Variable, wohin gegen es bei indirekten Lösungsverfahren noch eines zusätzlichen Rechenschrittes bedarf. Darüber hinaus teilen sich die direkten Methoden in explizite Verfahren, bei denen (4.46) für $\mathbf{u}$ und $\ddot{\mathbf{u}}$ zum Zeitpunkt t formuliert wird, und implizite Verfahren, bei denen dies für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ erfolgt. Im Folgenden soll das in dieser Arbeit verwendete NEWMARK-Verfahren kurz vorgestellt werden, ein direktes, implizites Lösungsverfahren.

Es ist die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}_{\mathrm{NL}}\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \tag{4.47}$$

zu lösen. Dies erfolgt unter der Annahme eines Beschleunigungsverlaufes, welcher durch die Wahl der beiden zur Verfügung stehenden Parameter α und β festgelegt wird. Die Verschiebungen und Geschwindigkeiten können dann mittels Integration des Beschleunigungsverlaufes bestimmt werden. Allgemein sind diese gegeben durch

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1-\alpha)\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t, \tag{4.48}$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{u}}_t + \beta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2. \tag{4.49}$$

Übliche Parameterpaare sind dabei

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{4} \qquad \text{für einen konstanten Beschleunigungsverlauf,} \tag{4.50}$$

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{6} \qquad \text{für einen linearen Beschleunigungsverlauf.} \tag{4.51}$$

Häufig werden (4.48) und (4.49) so umgestellt, dass $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ in Abhängigkeit der Verschiebungen angegeben werden können. Setzt man diese anschließend in die Bewe-

gungsgleichung aus (4.47) ein, erhält man das nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}-\mathbf{u}_t) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t - \frac{1-2\alpha}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_t\right] + \mathbf{K}_{\mathrm{NL}}\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{t+\Delta t} = \mathbf{0}. \tag{4.52}$$

Die Lösung der unbekannten Verschiebungen $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ können dann wieder mittels des Newton-Raphson-Verfahrens bestimmt werden. Es ergibt sich innerhalb eines Lastschritts der Algorithmus

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \mathbf{K}_{\mathrm{NL}}\ \mathbf{u}^i_{t+\Delta t}\right]\Delta\mathbf{u}^{i+1}_{t+\Delta t} &= -\mathcal{F}(\mathbf{u}^i_{t+\Delta t}),\\ \mathbf{u}^{i+1}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}^i_{t+\Delta t} + \Delta\mathbf{u}^{i+1}_{t+\Delta t},\end{aligned} \tag{4.53}$$

welcher für jeden einzelnen Zeitschritt gelöst werden muss. Als Startwert dient die Lösung des vorangegangenen Zeitschritts. Die tangentiale Steifigkeitsmatrix ergibt sich auch hier als partielle Ableitung nach $\mathbf{u}$ an der entsprechenden Stelle. Ausführliche Darstellungen sind unter anderem in [8, 18, 151] zu finden.

4.1.7 Kontaktprobleme

Zur Beschreibung von Kontaktproblemen bedarf es einer Anpassung der aus der Impulsbilanz entwickelten Bewegungsgleichung sowie der Formulierung zusätzlicher Zwangsbedingungen. Im Gegensatz zu den bisherigen Ausführungen wird dazu üblicherweise eine Betrachtung in der Momentankonfiguration vorgenommen. Dabei kann analog zu (4.10) eine schwache, nichtlineare Formulierung des Gleichgewichts bezüglich der Momentankonfiguration entwickelt werden. Es ergibt sich [8, 151]

$$\mathcal{F}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : (\operatorname{grad}\delta\mathbf{u}+\operatorname{grad}^\top\delta\mathbf{u})\,\mathrm{d}V + \int_V \rho(\ddot{\mathbf{u}}-\mathbf{b})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma}\hat{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S = 0. \tag{4.54}$$

Im Falle eines Kontaktes zweier Körper liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Variationsgleichung

$$\begin{aligned}\sum_{L=1}^{2}\left\{\int_{V_0}\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot(\operatorname{grad}\delta\mathbf{u}+\operatorname{grad}^\top\delta\mathbf{u})\,\mathrm{d}V_0\right\} &= \sum_{L=1}^{2}\left\{\int_{V_0}\rho\,(\mathbf{b}-\ddot{\mathbf{u}})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V_0\right.\\ &\left.+\int_{S_\sigma}\hat{\mathbf{t}}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S_0\right\} + \sum_{L=1}^{2}\left\{\int_{S_c}\mathbf{f}_c\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S_0\right\}.\end{aligned} \tag{4.55}$$

Da die Integration in diesem Fall über das Volumen und die Oberfläche in der Ausgangskonfiguration erfolgt, wird anstelle der Cauchy-Spannung der Kirchhoff Spannungstensor verwendet. Weiterhin beinhaltet $\mathbf{f}_c$ die aus dem Kontakt resultierenden zusätzlichen Kontaktspannungen, welche auf die Kontaktfläche S_c wirken. Abbildung 4.3 zeigt sche-

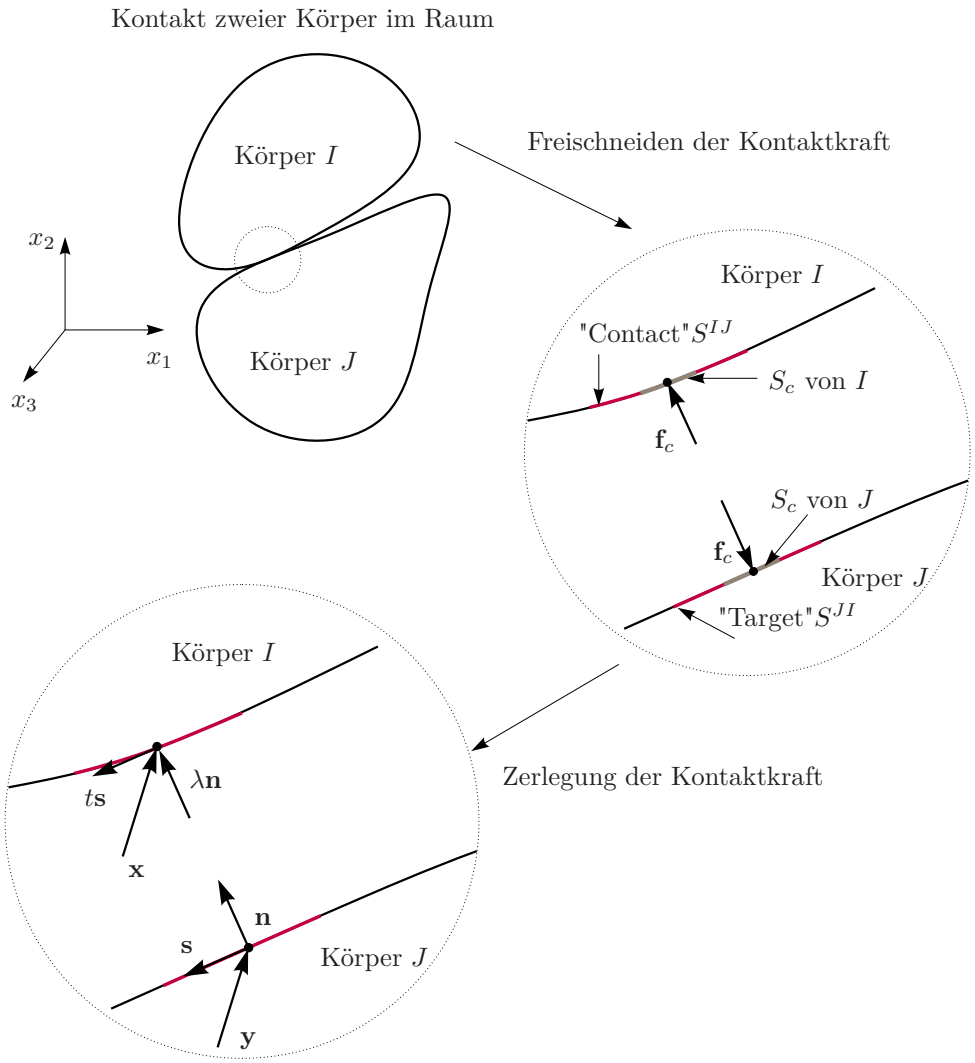


Abbildung 4.3: Betrachtung von Kontaktproblemen nach [8].

matisch den Kontakt zweier Körper und die daraus resultierenden Belastungen. Dabei ist es üblich, eine der beiden Kontaktflächen als *Contact* bzw. *Master* und die andere als *Target* bzw. *Slave* zu definieren. Die aktuelle, sich in Kontakt befindliche Fläche wird mit S_c gekennzeichnet. Die auf S_c wirkende Kraft kann entsprechend ihrer Orientierung in zwei Komponenten aufgeteilt werden. Dazu erfolgt eine Zerlegung von $\mathbf{f}_c$ in seine Normalkomponente entlang des Normalenvektors der Kontaktfläche $\mathbf{n}$ und Tangentialkomponente entlang des Oberflächentangentenvektors $\mathbf{s}$, welcher mit $\mathbf{n}$ eine rechtshändige Basis bildet. Für $\mathbf{f}_c$ kann so der Zusammenhang

$$\mathbf{f}_c = \lambda\mathbf{n} + t\mathbf{s} \tag{4.56}$$

formuliert werden, wobei λ die normalen und t die tangentialen Spannungskomponenten sind. Um die aktuelle Lage des Normalenvektors zu bestimmen, werden als Kontaktpunkte der jeweiligen Fläche die Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gewählt, welche den geringsten Abstand zuein-

ander haben. Somit ergibt sich für den Abstand des Punktes $\mathbf{x}$ zur gegenüberliegenden Fläche S^{JI}

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\top}\mathbf{n}. \tag{4.57}$$

Daraus resultieren die Zwangsbedingungen

$$\mathcal{G} \geqslant 0, \qquad \lambda \geqslant 0, \qquad \mathcal{G}\lambda = 0. \tag{4.58}$$

Um Reibungseffekte mit zu berücksichtigen, erfolgt eine punktweise Anwendung des Coulomb'schen Reibungsgesetzes auf der Kontaktfläche. Dazu wird die tangentiale Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = \left(\mathbf{v}^J|_{\mathbf{y}(\mathbf{x},t)} - \mathbf{v}^I|_{(\mathbf{x},t)}\right) \cdot \mathbf{s} \tag{4.59}$$

betrachtet und der dimensionslose Parameter

$$\tau = \frac{t}{\mu\lambda} \tag{4.60}$$

eingeführt, wobei $\mu\lambda$ den Reibungswiderstand beschreibt.

Zur Bestimmung der Lösung des Kontaktproblems muss (4.55) unter Beachtung der Randbedingungen aus (4.58) und gegebenenfalls der Reibung gelöst werden. In den meisten FE-Programmen werden hierzu das Penalty-Verfahren oder die Lagrange'sche-Multiplikator-Technik verwendet. Diese sind unter anderem in [8] ausführlich beschrieben.

4.2 Analyse der Wellenausbreitung

Die Analyse der Wellenausbreitung besteht aus drei Schritten. Zunächst wird der Einfluss der geometrischen Nichtlinearität auf die Wellenausbreitung untersucht, bevor in einem zweiten Schritt die Integration eines einzelnen Risses in die Struktur erfolgt, um auf diese Weise die Interaktion zwischen Welle und Riss auszuwerten. Dies umfasst auch mögliche Einflussfaktoren wie die Länge und Breite des Risses. Abschließend wird die reale Schädigung durch die Einführung eines, auf Mikroskopaufnahmen basierenden, *repräsentativen Master Damage Elements* (RMDE) in dem numerischen Modell abgebildet.

4.2.1 Numerisches Modell und Simulation

Allgemeines

Grundlage der numerischen Simulationen in dieser Arbeit ist ein zweidimensionales FE-Modell im ebenen Verzerrungszustand, welches den Querschnitt der Platte und damit des realen Probekörpers widerspiegelt. Diese Reduzierung ist möglich, da im Folgenden zur Analyse der Versuchsergebnisse und der späteren Modellierung ausschließlich Betrachtungen der Ausbreitung von Lamb-Wellen in isotropen Strukturen sowie transversalisotropen Platten in Faserrichtung vorgenommen werden. In diesen Fällen ist, wie in

Kapitel 2.5.2.3 beschrieben, von einer Entkopplung der Verschiebungsfelder der LAMB- und SH-Wellen auszugehen.

Zur Betrachtung höher harmonischer Modenpaare erfolgt die Anregung des primären Wellenfeldes mittels einer in-plane Verschiebung über die gesamte Bauteildicke am linken Rand. Als Anregungssignal kommt dabei ein gefensterter Sinus-Burst zum Einsatz. Neben der Verschiebungsrandbedingung an der linken Kante zur Anregung des primären Wellenfeldes wird zusätzlich an der rechten Kante die vertikale sowie im Mittelpunkt auch die horizontale Verschiebungskomponente festgesetzt.

Für die Diskretisierung werden je nach verwendeter Software auf Grund der unterschiedlichen Implementierungen 8-Knoten (PLANE183 in ANSYS® [4]) oder 9-Knoten (in FEAP® [138]) Scheibenelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Um darüber hinaus eine ausreichende Genauigkeit für die Simulation der Wellenausbreitung zu gewährleisten, sind für die Kantenlänge ΔI der Elemente sowie das Zeitintervall Δt folgende Bedingungen einzuhalten [8, 103, 158]

$$\Delta I = \frac{\lambda_{\min}}{8}, \tag{4.61}$$

$$\Delta t = \frac{1}{20 f_{\max}}. \tag{4.62}$$

Mit der Wahl der Kantenlänge nach dieser Bedingung ist auch eine adäquate Abbildung der Wellenstruktur höherer Moden über den Querschnitt sichergestellt [158]. Auf Grund der größeren Wellenlänge der beiden fundamentalen Moden S_0 und A_0 ist zusätzlich zu gewährleisten, dass mindestens vier Elemente über die Plattendicke vorhanden sind [150].

Abbildung 4.4 zeigt den Übergang von der realen Struktur aus den experimentellen Untersuchungen zum numerischen Modell. Die erläuterten Randbedingungen sind an den beiden Rändern eingezeichnet. Die geometrischen Abmaße l und t, die Anzahl n, der Ort a und das Intervall Δa der Abtastpunkte sowie das Materialmodell werden für die einzelnen numerischen Untersuchungen problemspezifisch gewählt.

Für die in diesem Kapitel durchgeführten numerischen Simulationen zur Analyse der Versuchsergebnisse wird ein Modell mit den Abmaßen 0.5 m x 2.3 mm verwendet. Das Zeitsignal der Wellenausbreitung wird nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m aufgenommen und ausgewertet. Dies entspricht der experimentellen Anordnung.

Zur Vereinfachung der Simulation wird anstelle von CFK Aluminium als Material verwendet. Dies ist möglich, da die Materialwahl auf die charakteristischen Eigenschaften der Entstehung kumulativ höher harmonischer Moden keinen Einfluss hat, vgl. Abschnitt 2.5.3.5. Neben den Bedingungen zur internen Resonanz für die Existenz eines kumulativen Effektes wird auch hier, wie bei den experimentellen Untersuchungen, die Gleichheit der Gruppengeschwindigkeit gefordert. Dies verhindert das Auseinanderlaufen des primären und sekundären Wellenfeldes. Die zur Bestimmung der Anregungsfrequenz benötigten Dispersionsdiagramme der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für Aluminium sind in Abbildung 4.5 dargestellt. Ferner können die zugehörigen Materialparameter der Tabelle 4.1 entnommen werden. Für das im Folgenden zu analysierende S_1-S_2 Modenpaar muss ein Frequenz-Dicken-Produkt von 3.614 MHz mm mit einer Phasengeschwindigkeit von $c_{\mathrm{p}}^{S_1\,\mathrm{Alu}} = 6197.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ für die primäre S_1-Mode gewählt werden, um das Kriterium der

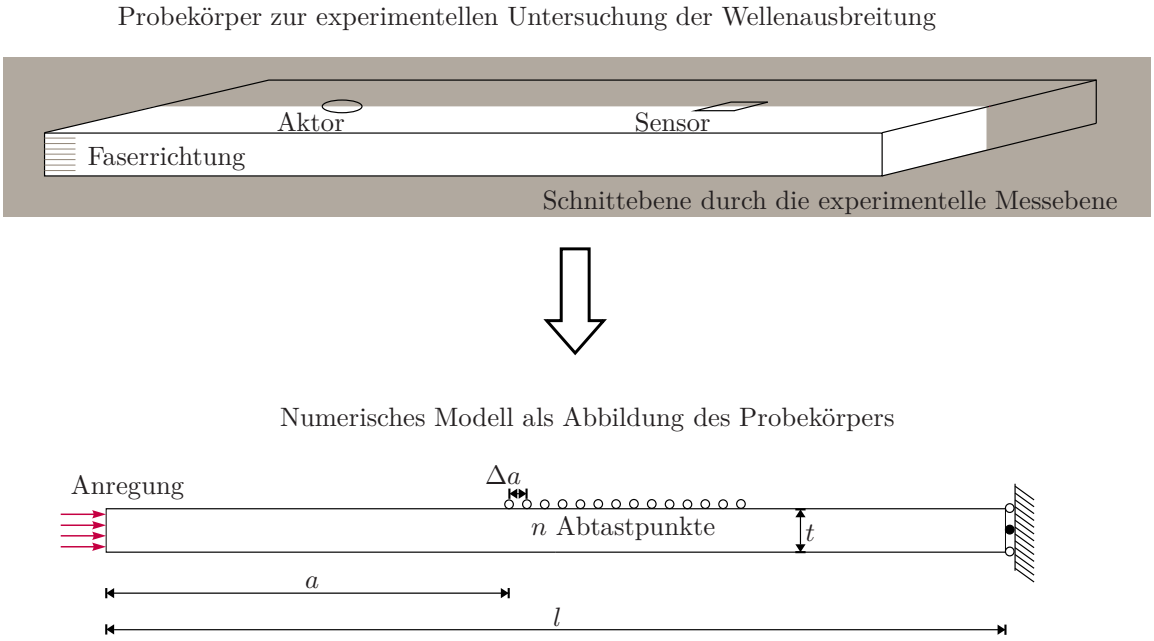
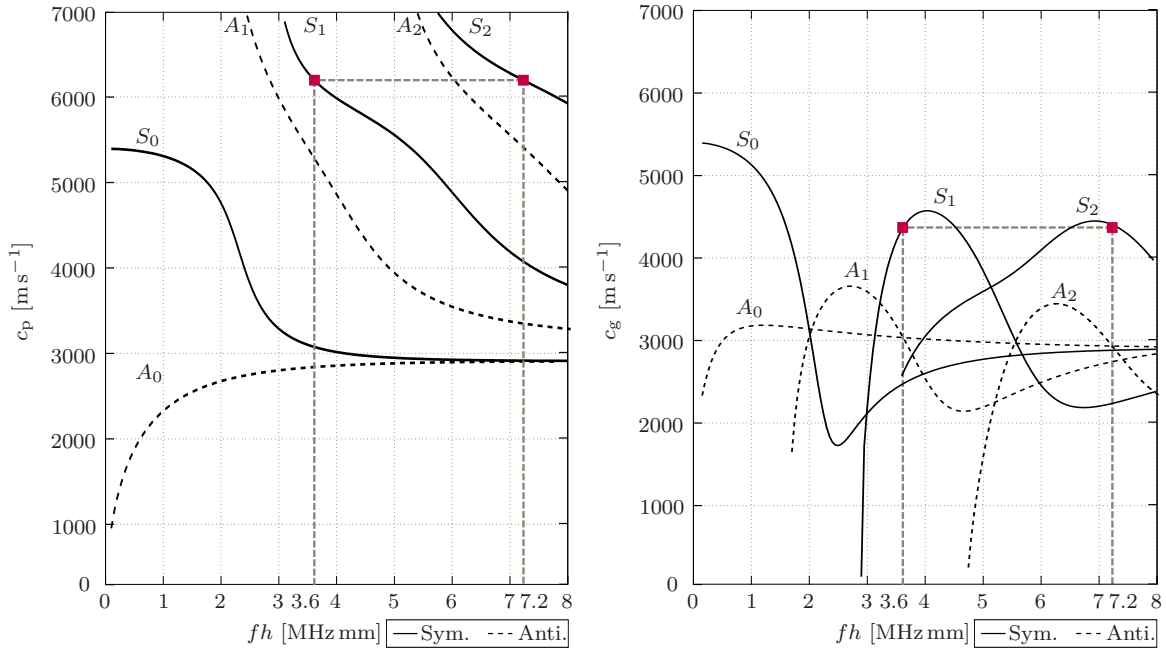


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung in dünnwandigen Flächenstrukturen.



(a) Dispersionsdiagramm Phasengeschwindigkeit. (b) Dispersionsbeziehung Gruppengeschwindigkeit.

Abbildung 4.5: Bestimmung der Anregungsfrequenz über die Gleichheit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für Aluminium.

Gleichheit der Phasengeschwindigkeit zu erfüllen. Unter Verwendung der Bedingungen aus (4.61) und (4.62) ergeben sich als Maximalwerte für die Element- und die Zeitschrittgröße mit Bezug auf die Plattendicke von 2.3 mm

$$\Delta I_{\max} = \frac{\lambda_{S_2}}{8} = 0.5\,\mathrm{mm}, \tag{4.63}$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{20 f_{S_2}} = 16\,\mathrm{ns}. \tag{4.64}$$

Um Konvergenzprobleme und unzureichende Elementgeometrien auf Grund des modellierten Risses zu verhindern werden zehn Elemente über die Dicke angeordnet, so dass sich eine Kantenlänge von $\Delta I = 0.23\,\mathrm{mm}$ ergibt, welche im Rahmen der geforderten Elementgröße liegt. Abschließend sind die Parameter zur Beschreibung des numerischen Modells und der Anregung nochmals in Tabelle 4.2 zusammenfassend dargestellt.

Tabelle 4.1: Materialparameter für Aluminium.

E	ν	ρ
70 GPa	0.33	$2700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

Tabelle 4.2: Abmaße des numerischen Modells und Parameter für die Simulation der Wellenausbreitung.

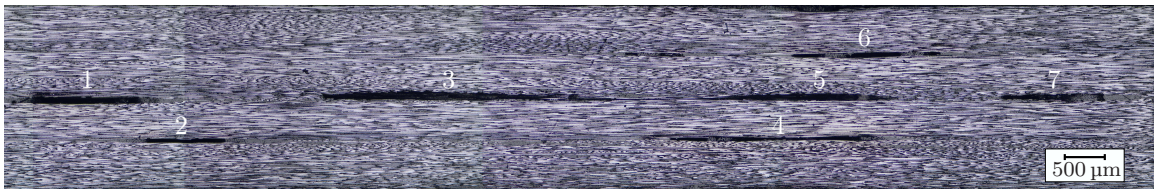
l	t	a	n	Δa	n_p	f	ΔI	Δt
0.5 m	2.3 mm	0.25 m	1	-	20	1.571 MHz	0.23 mm	16 ns

Nichtlineare Geometrie und einzelner Riss

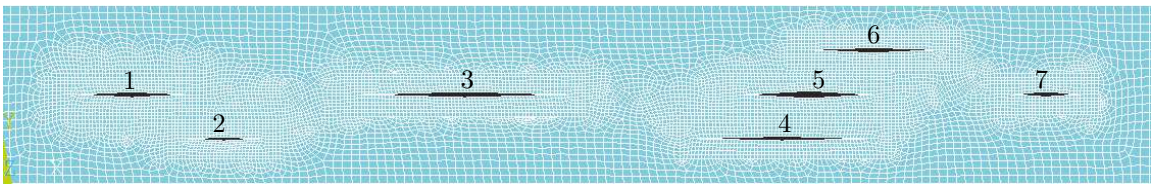
Für die Simulation von Kontaktproblemen in ANSYS® müssen große Verformungen zugelassen werden. Auf Grund der damit berücksichtigten quadratischen Anteile bei der Verzerrungsbestimmung, existiert, wie in Kapitel 2.5.3.5 gezeigt, ein sekundäres Wellenfeld. Somit führen bei der Simulation der Interaktion zwischen Welle und Riss streng genommen zwei Komponenten zur Entstehung höher harmonischer Moden. Zum einen die nichtlineare Geometrie, welche auch einen kumulativen Effekt zur Folge haben kann, und die Interaktion der Welle mit dem Riss, wodurch lokal durch das *Rissuferklappern* höher harmonische Moden generiert werden. Um diese beiden Effekte voneinander trennen zu können, wird zunächst die nichtlineare Wellenausbreitung auf Grund der nichtlinearen Geometrie simuliert. Im Anschluss erfolgt die Modellierung eines horizontal orientieren Risses unter der Berücksichtigung von Kontaktbedingungen, welche an den Rissoberflächen mittels der Elemente CONTA172 und TARGE169 [4] definiert werden. Um den Einfluss der Rissgröße auf die Wellenausbreitung zu untersuchen, wird zusätzlich die Rissbreite und -länge

Tabelle 4.3: Zu untersuchende Konfigurationen für die Analyse des Einflusses der nichtlinearen Geometrie und einzelner Risse auf die nichtlineare Wellenausbreitung.

Konfiguration	1	2	3	4	5
Risshöhe [µm]	-	70	70	50	100
Risslänge [mm]	-	1.0	2.7	1.7	1.7



(a) Mikroskopaufnahme, welche als Grundlage des repräsentativen Master Damage Elements dient.



(b) ANSYS® Modell des repräsentativen Master Damage Elements mit insgesamt sieben Rissen.

Abbildung 4.6: Repräsentatives Master Damage Element.

variiert. Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die unterschiedlichen Konfigurationen der einzelnen numerischen Simulationen.

Abbildung der experimentellen Untersuchungen

Für die adäquate Abbildung der experimentellen Untersuchungen wird ein realer Schädigungszustand in das Modell implementiert. Wie in Abschnitt 3.2.3 gezeigt, führt das Reißen der Vernähungen zu kleinen horizontalen Rissen in der Probe, welche unter der zyklischen Belastung wachsen. Das Reißen mehrere dieser Vernähungen resultiert dabei in mehreren verschieden großen horizontalen Rissen, welche über die Struktur verteilt sind. Abbildung 4.6(a) zeigt die Mikroskopaufnahme einer zyklisch belasteten Probe. Darin sind die über den Querschnitt verteilten horizontalen Risse unterschiedlicher Größe deutlich zu erkennen. Auf der Grundlage dieser Mikroskopaufnahme wird ein *repräsentatives Master Damage Element* (RMDE) mit den Abmaßen 15 mm x 2.3 mm entwickelt, in welchem die einzelnen Risse durch Kontaktbedingungen und einer entsprechenden Verfeinerung der Vernetzung in der unmittelbaren Rissumgebung modelliert werden, vgl. Abbildung 4.6(b). Die Abmaße der einzelnen Risse, die für die Modellierung herangezogen werden, sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

Um unterschiedliche Schädigungsgrade zu generieren, kann die Anzahl der RMDE über den Bereich zwischen Aktor und Sensor verändert werden. Für die numerische Simulation der Wellenausbreitung wird ein Modell verwendet, welches nur ein RMDE enthält, um

Tabelle 4.4: Abmaße der Risse, welche für die Entwicklung des RMDE herangezogen werden.

Riss	1	2	3	4	5	6	7
Höhe [µm]	80	50	100	60	95	65	70
Länge [mm]	1.4	1.0	2.7	2.4	1.7	1.8	0.9

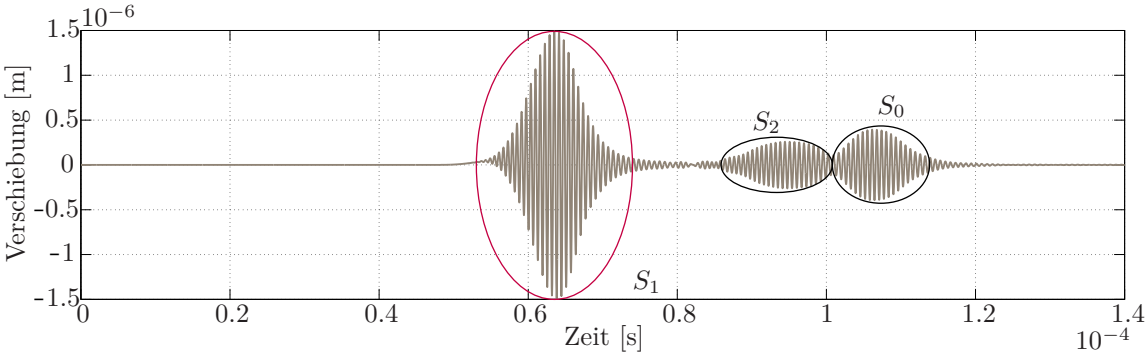
exemplarisch zu untersuchen, welchen Einfluss die Anzahl der Risse auf die nichtlineare Wellenausbreitung hat. Dazu wird im Anschluss das Ergebnis mit den Ergebnissen für die Simulation mit den Einzelrissen verglichen.

4.2.2 Höher harmonische Moden und kumulativer Effekt

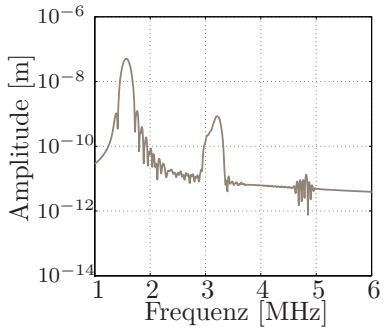
Abbildung 4.7(a) zeigt beispielhaft einen Zeitschrieb der Wellenausbreitung in einer Platte ohne Risse. Es sind deutlich die drei entstandenen Wellenpakete des primären Wellenfeldes zu erkennen. Basierend auf den Dispersionsdiagrammen in Abbildung 4.5 handelt es sich hierbei auf Grund der symmetrischen Anregung um die S_1-, S_2- und S_0-Mode, alle bei einer Frequenz-Dicken-Paarung von 3.614 MHz mm. Der Schnittpunkt der S_2-Mode mit dem verwendeten Frequenz-Dicken-Paar in Abbildung 4.5(a) liegt dabei oberhalb des dargestellten Geschwindigkeitsbereichs. Da diese drei Moden unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten besitzen, findet eine Separation der einzelnen Wellenpakete mit der Ausbreitungsstrecke statt. Dies ermöglicht die genaue Zuordnung der Frequenzanteile und der zugehörigen Amplituden zu den entsprechenden Moden bei einer Zeit-Frequenz-Analyse.

Hauptaugenmerk liegt im Folgenden auf der S_1-Mode des primären Wellenfeldes, da diese auf Grund der Interaktion der nichtlinearen Anteile des Verschiebungsfeldes ein sekundäres Wellenfeld generiert, welches die S_2-Mode bei $2f_0$ enthält. Darüber hinaus sind die Bedingungen zur Entstehung eines kumulativen Effektes gegeben. Um dies zu untersuchen wird zunächst von dem ersten Wellenpaket eine Frequenzanalyse mittels einer FFT durchgeführt. Dazu wird der entsprechende Teil aus dem Signal extrahiert, so dass es zu keinen parasitären Anteilen im Frequenzspektrum auf Grund der anderen Wellenpakete kommt. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7(b) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass neben der Anregungsfrequenz noch eine weitere Frequenzkomponente bei $2f_0$ in dem Signal vorkommt. Diese Komponente gehört zu der S_2-Mode des durch die geometrische Nichtlinearität entstandenen sekundären Wellenfeldes. Um den kumulativen Effekt zu untersuchen ist zusätzlich in Abbildung 4.7(c) das Amplitudenverhältnis über die Ausbreitungsstrecke in grau geplottet. Die Amplituden der beiden Moden S_1 und S_2 werden dabei mittels der Wavelet-Transformation ermittelt. Dies erspart das Extrahieren des Wellenpakets aus dem Zeitschrieb. Es ist deutlich sichtbar, dass mit zunehmender Ausbreitungsstrecke das Amplitudenverhältnis ansteigt. Es kommt somit zu einem kumulativen Effekt bei der Ausbreitung des sekundären Verschiebungsfeldes.

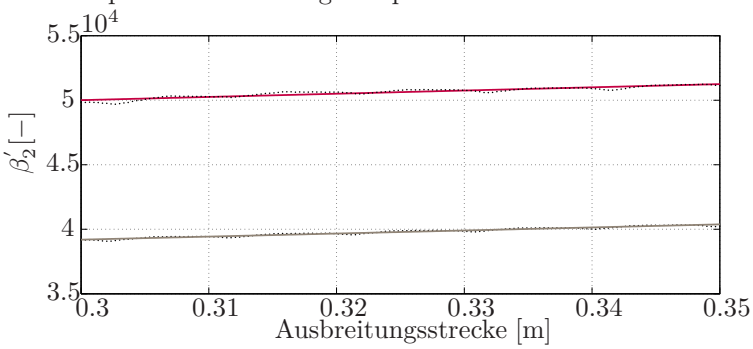
Neben dem Ergebnis für die nichtlineare Wellenausbreitung basierend auf der nichtlinearen Geometrie in grau ist in Abbildung 4.7(c) zusätzlich noch das Ergebnis für die Interaktion zwischen Welle und Riss der Konfiguration 2 in rot dargestellt. Die Steigung



(a) Zeitsignal der in-plane Verschiebungskomponente.



(b) Frequenzanteil des Wellenpakets 1.



(c) Auswertung des Amplitudenverhältnisses über die Ausbreitungsstrecke, grau: nichtlineare Geometrie, rot: nichtlineare Geometrie + horizontaler Riss.

Abbildung 4.7: Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Grund geometrischer Nichtlinearität ohne Riss bei einer Frequenz-Dicken-Paarung von 3.614 MHz mm nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m.

der beiden Kurven ist identisch. Allerdings ist die Kurve der Konfiguration 2 im Vergleich zu Konfiguration 1 leicht nach oben verschoben. Die Interaktion zwischen Welle und Riss hat somit neben der nichtlinearen Geometrie zusätzlich zu einem sekundären Wellenfeld geführt, weshalb die Amplitude der zweiten harmonischen S_2-Mode in diesem Fall etwas größer ist. Da der kumulative Effekt der Wellenausbreitung aber allein auf der geometrischen Nichtlinearität beruht, weisen die Steigungen der Kurven keinen signifikanten Unterschied auf.

4.2.3 Relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter

Für die Quantifizierung des Einflusses der Risse auf die nichtlineare Wellenausbreitung wird analog zu den experimentellen Untersuchungen nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m der relative akustische Nichtlinearitätsparameter β_2' bestimmt und auf den Wert ohne Riss normiert. Eine Auswertung über die Ausbreitungsstrecke ist hier, wie zuvor gezeigt, nicht sinnvoll. Die Ergebnisse für die normierten Werte D_β sind in Tabelle 4.5 zusammengefasst. Es ist zu erkennen, dass die Risse einen deutlichen Einfluss auf die Wellenausbreitung haben. Dabei ist nicht nur die Rissgeometrie von Bedeutung, sondern auch die Anzahl der Risse, wie die Berechnung mit dem RMDE zeigt.

Tabelle 4.5: Ergebnisse des normalisierten relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter D_β basierend auf der numerischen Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung.

Konfiguration	1	2	3	4	5	RMDE
D_β [-]	1.00	1.24	1.67	1.20	1.20	1.84

4.3 Untersuchung der Materialeigenschaften

4.3.1 Numerisches Modell und Simulation

Um im Rahmen der numerischen Untersuchungen eine Korrelationsanalyse durchzuführen und damit den Einfluss der modellierten Schäden auf die Materialeigenschaften und deren Detektierbarkeit hin zu untersuchen, wird der mögliche Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der Probenschädigung numerisch analysiert. Dazu erfolgt eine leichte Modifikation an dem für die Simulation der Wellenausbreitung verwendeten numerischen Modell aus Abbildung 4.4. Wie in Abbildung 4.8 dargestellt, beschränkt sich das Modell, analog zu den experimentellen Untersuchungen, nur noch auf den Bereich zwischen Anregung und Abtastung des Signals. Da das Laserextensometer maximal eine Strecke von 200 mm abdeckt, wird dies als Probenlänge verwendet. Im Gegensatz zu dem zuvor verwendeten Modell für die Wellenausbreitung kommt an dieser Stelle CFK mit den in Tabelle 3.1 gegebenen Materialparametern zum Einsatz, welches dem in den Experimenten verwendeten Material entspricht. Als Randbedingungen werden die linke Kante gegen horizontales und die unter Kante gegen vertikales Verschieben gesperrt, so dass es zu keiner parasitären Verschiebungskomponente kommen kann, welche das Ergebnis verfälscht. Die Belastung wird an der rechten Kante über eine in-plane Verschiebung von 2 mm umgesetzt. Anschließend erfolgt eine Mittelung der horizontalen Spannungskomponente an dieser Kante über die gesamte Bauteildicke. Unter Verwendung dieses Mittelwerts wird abschließend der Elastizitätsmodul ermittelt.

Um unterschiedliche Schädigungszustände zu untersuchen, wird die Simulation für eine unterschiedliche Anzahl an RMDE über die Probe durchgeführt. Enthält das Modell dabei kein RMDE und demnach keine Risse, liegt eine ungeschädigte Probe vor. Eine maximale Schädigung der Probe wird durch die Verwendung von insgesamt 13 RDME erreicht. In diesem Zustand weißt die komplette Probe über die Länge von 200 mm eine Schädigung auf. Für die Analyse wird der Elastizitätsmodul für Modelle mit 1, 4, 7, 10 und 13 RMDE bestimmt. Darüber hinaus erfolgt eine Simulation für die ungeschädigte Probe als Referenz.

4.3.2 Ergebnisse

In Tabelle 4.6 sind die Ergebnisse der Elastizitätsmodulbestimmung für die einzelnen Konfigurationen aufgeführt. Es ist zu erkennen, dass die Schädigung nur einen sehr geringen Einfluss auf den Elastizitätsmodul hat. Die Elastizitätsmodulverringerung beträgt maximal 1.9 GPa, was einer Veränderung von 1.5% gegenüber dem ungeschädigten Zustand

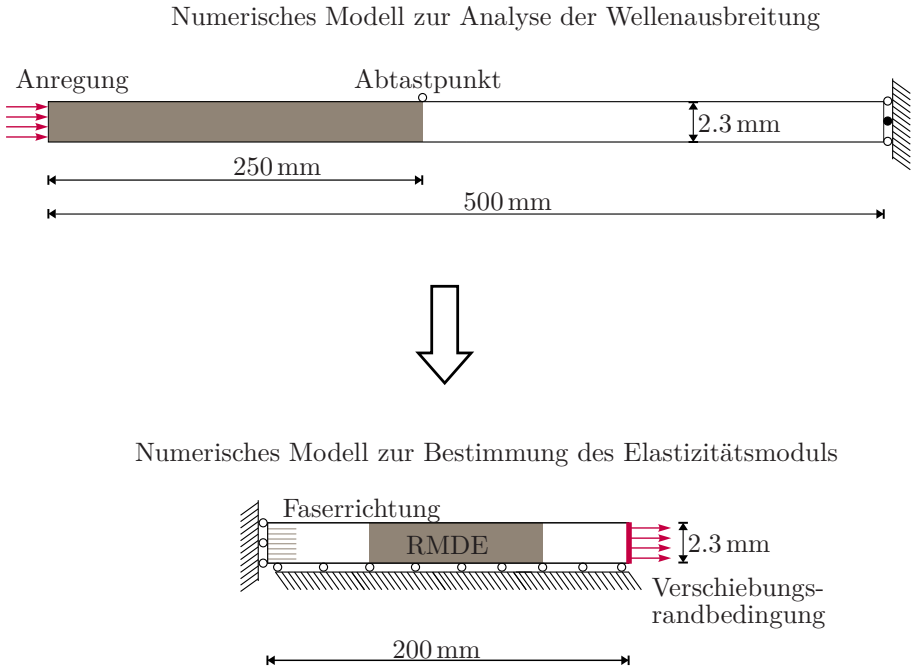


Abbildung 4.8: Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit der Schädigung.

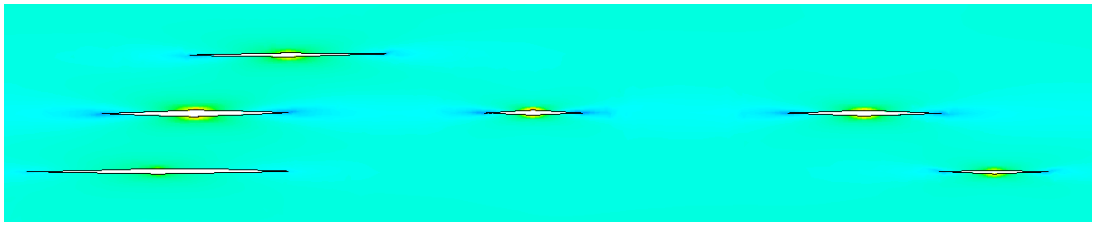


Abbildung 4.9: Spannungsverteilung in der Zugprobe auf Grund der Risse: Blau repräsentiert die maximalen Druckspannungen, rot dargestellt sind die maximalen Zugspannungen.

Tabelle 4.6: Ergebnisse für den Elastizitätsmodul basierend auf der numerischen Simulation unter Verwendung verschiedener Anzahlen an RMDE.

Schädigungsgrad	0	1	2	3	4	5
Anzahl RMDE	0	1	4	7	10	13
Elastizitätsmodul [GPa]	121.7	121.6	121.1	121.0	120.2	119.8

entspricht. Eine Betrachtung der Spannungsverteilung aus Abbildung 4.9 macht deutlich, dass es zwar unmittelbar im Bereich der Risse lokal zu sehr deutlichen Spannungsveränderungen kommt, diese aber nicht das globale Verhalten beeinflussen.

4.4 Korrelationsanalyse

Führt man die Ergebnisse aus der numerischen Simulation der Wellenausbreitung mit den Ergebnissen der Elastizitätsmodulbestimmung zusammen, wird ersichtlich, dass die modellierten horizontalen Risse einen signifikanten Einfluss auf die Wellenausbreitung haben, sie führen aber im Zugversuch zu keiner experimentell messbaren Werkstoffdegradation.

4.5 Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse

4.5.1 Vergleich

Vergleicht man die Ergebnisse der Experimente aus Kapitel 3 mit den Ergebnissen aus der numerischen Simulation, wird deutlich, dass die horizontalen Risse zu einer Generierung höher harmonischer Moden führen. Ferner zeigen die numerischen Simulationen, dass die Ausprägung des sekundären Wellenfeldes, ermittelt durch den relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter, durch die Rissanzahl und -größe beeinflusst wird. Somit können die experimentell beobachteten höher harmonischen Moden und die Variation des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters ein Resultat der unterschiedlichen Schädigungsgrade der einzelnen Proben sein, welche durch die Initialschädigung und der zyklischen Belastung entstanden sind.

Betrachtet man hingegen die Ergebnisse für die mechanischen Eigenschaften aus den Experimenten und den Ergebnissen aus der numerischen Simulation zeigt sich, dass die experimentell ermittelte Werkstoffdegradation nicht auf die sichtbaren und im numerischen Modell berücksichtigten horizontalen Risse zurückzuführen ist, da in der Simulation nur eine geringfügige Verringerung des Elastizitätsmoduls von maximal 1.9 GPa zu erkennen ist. Verglichen mit der mittleren Standardabweichung von ± 1.22 GPa bei der experimentellen Ermittlung, ist eine solche Variation im Versuch nicht als signifikant nachweisbar. Somit muss die beobachtete Werkstoffdegradation durch andere Faktoren oder Schädigungsarten, welche nicht in der numerischen Simulation abgebildet werden, verursacht werden. Im Folgenden soll dies näher beleuchtet werden.

4.5.2 Analyse weiterer Einflussfaktoren

Der wichtigste Einflussfaktor des Elastizitätsmoduls bei Faserverbunden ist der Anteil der Fasern an dem Faser-Matrix-Gemisch, welcher über den Faservolumengehalt ausgedrückt wird. Für ein Gemisch kann der Elastizitätsmodul in Faserrichtung E_1 über die Mischungsregel aus dem Faservolumengehalt ϕ_f und den Elastizitätsmoduln der Faser E_f und der Matrix E_m nach

$$E_1 = E_\mathrm{f}\ \phi_\mathrm{f} + E_\mathrm{m}(1 - \phi_\mathrm{f}) \tag{4.65}$$

berechnen werden [65]. Eine geeignete Messgröße um den Faservolumengehalt eines Bauteils zu bestimmen ist die Dicke des fertigen Faserverbundwerkstoffes. Es ist somit möglich, die Dicke der einzelnen Proben mit einem zu erwartenden Elastizitätsmodul in Relation zu setzen. Das verwendete Halbzeug, aus dem die Proben gefertigt sind, ist ein unidirektionales Gelege mit einem Trockenfaserflächengewicht (TFFG) von $600\,\mathrm{g\,m^{-2}}$. Für die Herstellung des Grundmaterials der Proben wurden vier vorimpregnierte Lagen dieses Geleges aufeinander abgelegt und unter Druck ausgehärtet. Der Faservolumengehalt der entstandenen Platte folgt dann aus dem Zusammenhang

$$\phi_\mathrm{f} = \frac{w_\mathrm{f}}{d\ \rho_\mathrm{f}}, \tag{4.66}$$

wobei w_f das TFFG, d die Dicke des entstandenen Faserverbundwerkstoffes und ρ_f die Dichte der Fasern sind. Durch Einsetzen von (4.66) in (4.65) kann zunächst der Elastizitätsmodul in Abhängigkeit der Probendicke formuliert werden als

$$E_1 = \frac{w_\mathrm{f}}{d\ \rho_\mathrm{f}}(E_\mathrm{f} - E_\mathrm{m}) + E_\mathrm{m}. \tag{4.67}$$

Durch die anschließende Anwendung des totalen Differentials erhält man die aus der Standardabweichung Δd der Dickenmessung resultierende Streuung des Elastizitätsmoduls. Diese ist gegeben durch

$$\Delta E_1 = \left| \frac{w_\mathrm{f}}{d^2\ \rho_\mathrm{f}} \left(E_\mathrm{m} - E_\mathrm{f}\right) \right| \Delta d. \tag{4.68}$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs werden für jede Probe, basierend auf der tatsächlichen Dicke und der dazugehörigen Standardabweichung, mittels (4.67) und (4.68) der zu erwartende Elastizitätsmodul und die aus der Standardabweichung resultierende Variation berechnet. Die Materialparameter der Faser und Matrix E_f, E_m und ρ_f werden zu $222.57\,\mathrm{GPa}$, $3.5\,\mathrm{GPa}$ and $1780\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ gesetzt, so dass sich der höchste gemessene Elastizitätsmodul von $130.27\,\mathrm{GPa}$ der Probe 20000-8 mit einer Dicke von $2.33\,\mathrm{mm}$ durch Einsetzen in (4.67) reproduzieren lässt. Vergleicht man die theoretischen Werte mit den experimentell bestimmten Elastizitätsmoduln der einzelnen Proben, liegt für jede Probe der aus der Geometrie zu erwartende Bereich deutlich über dem aus den Experimenten resultierenden Werten. Somit ist die Dickenvariation der Proben nicht der Grund für die gemessene Elastizitätsmodulvariation, vielmehr scheint es zu einer Werkstoffdegradation gekommen zu sein.

4.5.3 Fazit

Die numerische Analyse der experimentellen Versuchsergebnisse zeigt, dass die vertikalen Risse, welche auf den Mikroskopaufnahmen (siehe Abbildung 4.6(a)) deutlich sichtbar sind, nicht der Grund für die Werkstoffdegradation sein können. Ferner kann ausgeschlossen werden, dass mögliche Schwankungen des Faservolumengehalts zu den niedrigen Elastizitätsmoduln führen. Demzufolge muss die Werkstoffdegradation auf mikrostrukturellen Schädigungen beruhen, welche unter dem Mikroskop nicht sichtbar sind. Betrachtet man hierzu noch einmal das Endergebnis der Korrelationsanaylse aus Abbildung 3.11(c) kann

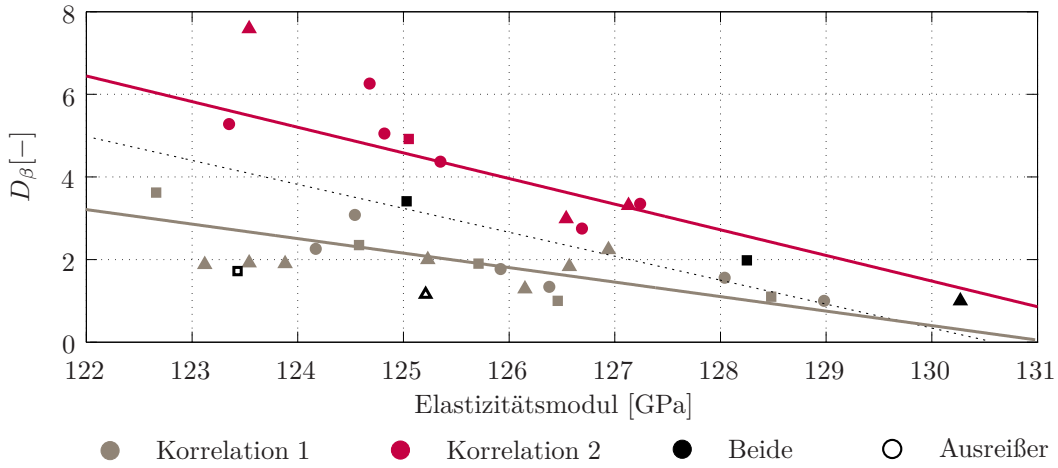


Abbildung 4.10: Aufteilen der Versuchsergebnisse in zwei Gruppen auf Grundlage der Ergebnisse der numerischen Simulation.

eine Unterteilung der Messwerte in zwei Gruppen vorgenommen werden, wie sie in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Basierend auf den Daten werden zwei getrennte Korrelationen durchgeführt. Eine Korrelation bildet die unteren Punkte ab, hier in Grau dargestellt, die andere die oberen Punkte, in Rot dargestellt. Die jeweils durch die Kurve abgebildeten Punkte sind durch die gleiche Farbe gekennzeichnet. Zwei Punkte können auch hier nicht abgebildet werden, und zwar die schwarzen Symbole ohne Füllung, drei andere können sowohl der einen als auch der anderen zugeordnet werden. Diese sind in Schwarz gekennzeichnet.

Die so entstandene Aufteilung der Datenpunkte kann wie folgt interpretiert werden. Die grauen Punkte repräsentieren Proben die überwiegend durch mikrostrukturelle Schädigungen gekennzeichnet sind. Diese führen zwar zu einer signifikanten Werkstoffdegradation, beeinflussen die nichtlineare Wellenausbreitung aber nicht so deutlich wie die horizontalen Risse. Die in rot gekennzeichneten Punkte hingegen gehören zu Proben, welche eine Vielzahl an horizontalen Rissen enthalten. Diese haben zwar nur einen sehr geringen Einfluss auf den Elastizitätsmodul, führen aber zu einem deutlich stärkeren nichtlinearen Verhalten bei der Wellenausbreitung. Die zu den schwarzen Punkten gehörenden Proben weisen sowohl mikrostrukturelle Schäden als auch horizontale Risse auf, wobei keine der beiden Schadenstypen überwiegt. Die beiden Punkte, die weder durch die eine noch die andere Korrelation abgebildet werden, können als Ausreißer angesehen werden.

Kapitel 5

Abbildung der Werkstoffdegradation durch ein nichtlineares Materialmodell

Die numerische Analyse der Versuchsergebnisse zeigt, dass die beobachtete nichtlineare Wellenausbreitung neben den horizontalen Rissen auch auf mikrostrukturelle Schädigungen zurückzuführen ist, welche nicht durch eine Sichtprüfung detektiert werden können. Diese mikrostrukturellen Schäden sind maßgeblich verantwortlich für die zu beobachtende Werkstoffdegradation, welche zur Folge hat, dass mit zunehmender Betriebsdauer dieselbe Belastung zu größeren Verformungen führt. Eine klassische Methode, um diese größer werdenden Verformungen und damit die Werkstoffdegradation abzubilden, und Grundlage der Auswertung der Differentialgleichungen zur Beschreibung der nichtlinearen Wellenausbreitung in Kapitel 2.5.3.5 sind degressive nichtlineare Materialmodelle, so wie sie unter anderem in Kapitel 2.4 dargestellt sind. Da die für die Herleitung der nichtlinearen Wellenausbreitung verwendete nichtlineare Potentialformulierung nach Murnaghan zum einen nicht in kommerzieller FE-Software implementiert ist und zum anderen für komplexere Materialien wie kohlefaserverstärkte Kunststoffe eine Vielzahl von Materialparametern zur Modellierung benötigt werden, wird im Folgenden ein Ansatz vorgestellt, der die möglichst einfache numerische Simulation der nichtlinearen Ausbreitung von Lamb-Wellen und die daraus resultierende Entstehung kumulativ höher harmonischer Moden bietet. Dazu sollen zunächst für isotrope Materialien die Verwendung bekannter und implementierter Materialmodelle auf ihre Eignung hin untersucht werden, im Anschluss erfolgt die Entwicklung eines hyperelastischen nichtlinearen Materialmodells auf Basis bereits bekannter linearer Formulierungen zur numerischen Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung in unidirektionalem CFK. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf der Reduktion der benötigten Materialparameter zur Abbildung des nichtlinearen Materialverhaltens gegenüber der Erweiterung der Potentialformulierung nach Murnaghan.

5.1 Isotrope Modellbildung

5.1.1 Analyse des Einflusses der Nichtlinearität auf das Materialverhalten und die Wellenausbreitung

Die Beschreibung des Wellenausbreitungsverhaltens und die Bestimmung der Anregungsfrequenz zur Entstehung kumulativ höher harmonischer Moden erfolgt in der Regel auf der Grundlage der zugehörigen Dispersionsdiagramme, welche unter Verwendung der in Kapitel 2.5.2.4 vorgestellten Lösung der linearen Bewegungsgleichung ermittelt werden. Deshalb soll zunächst der Einfluss des nichtlinearen Mediums auf die Wellenausbreitung untersucht werden. Dazu wird die Wellenausbreitung jeweils in einem linearen und einem

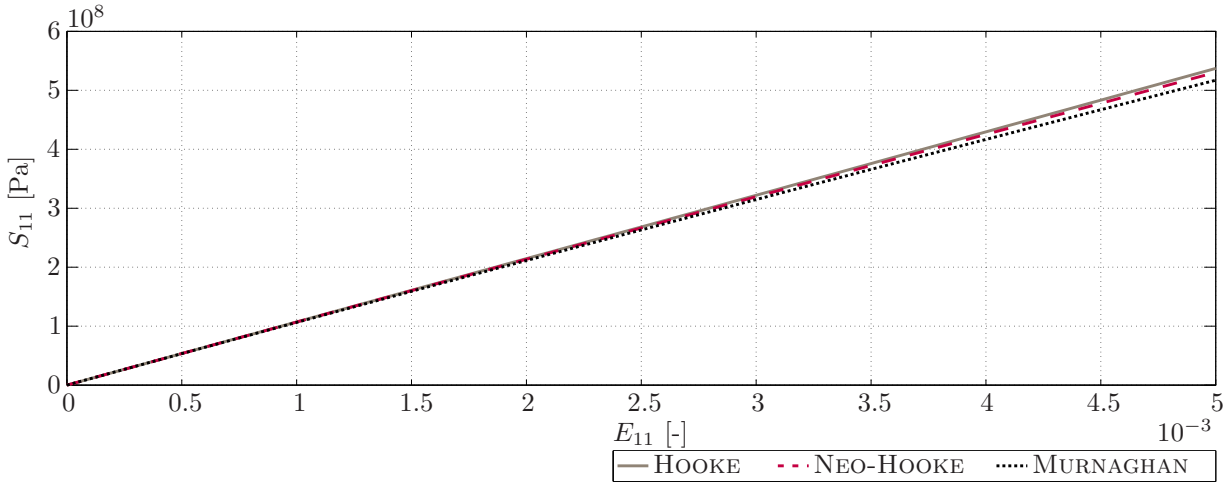


Abbildung 5.1: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für die uniaxiale Zugbelastung basierend auf dem linear elastischen HOOKE'schen Gesetz, dem NEO-HOOKE'schen Materialmodell und der Potentialformulierung nach MURNAGHAN.

nichtlinearen Medium unter Verwendung von ANSYS® simuliert und anschließend die Ergebnisse miteinander verglichen. Als Materialmodell für das nichtlineare Medium wird hierbei die NEO-HOOKE'sche Potentialformulierung verwendet. Diese stellt die einfachste phänomenologische hyperelastische Beschreibung für isotropes Material dar, bei der, ähnlich wie für das HOOKE'sche Gesetz, zwei Parameter für kompressibles Materialien benötigt werden (vgl. Kapitel 2.4.3). Um mit dieser Potentialbeschreibung das Materialverhalten von Aluminium nach Tabelle 4.1 abzubilden, werden die beiden Parameter zu $c_{10} = \frac{\mu}{2} = 13.16\,\text{GPa}$ und $K = 68.6\,\text{GPa}$ gesetzt.

Bevor die Wellenausbreitung analysiert wird, erfolgt in einem ersten Schritt der Vergleich der nichtlinearen Effekte des NEO-HOOKE'schen Materialmodells mit dem der Potentialformulierung nach MURNAGHAN. Dazu ist in Abbildung 5.1 ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eine uniaxiale Zugbelastung gegeben. Darin sind die Kurven für linear elastisches Materialverhalten sowie für das NEO-HOOKE'sche Materialmodell und die Potentialformulierung nach MURNAGHAN eingezeichnet. Für die Steifigkeiten dritter Ordnung werden die in [88] gegebenen Werte $A = -351.2\,\text{GPa}$, $B = -149.4\,\text{GPa}$ und $C = -102.8\,\text{GPa}$ verwendet. Entsprechend des erwarteten degressiven Verhaltens zur Abbildung der Werkstoffdegradation führen die beiden nichtlinearen Modelle im Vergleich zu der linearen Theorie bei großen Verzerrungen zu kleineren Spannungen. Dabei ist das nichtlineare Verhalten der Potentialformulierung nach MURNAGHAN deutlich ausgeprägter, als das des NEO-HOOKE'schen Materialmodells. Es kann somit ausgeschlossen werden, dass durch die Verwendung des NEO-HOOKE'schen Materialmodells zusätzliche nichtlineare Effekte auftreten.

Für die Untersuchung der Wellenausbreitung bezüglich der Dispersionsdiagramme werden die beiden fundamentalen Moden S_0 und A_0 in Aluminium betrachtet. Das verwendete numerische Modell beruht auf dem bereits vorgestellten zweidimensionalen Plattenquerschnitt aus Abbildung 4.4 mit denselben Diskretisierungseigenschaften, allerdings erfolgt hier keine symmetrische Anregung. Vielmehr wird die Generierung eines Wellenfeldes mit

Tabelle 5.1: Parameter der numerischen Simulation der fundamentalen Moden.

l	t	n_p	f	f_max	λ_min	ΔI	Δt
0.5 m	1 mm	10	500 kHz	1 MHz	5.3 mm	0.25 mm	50 ns

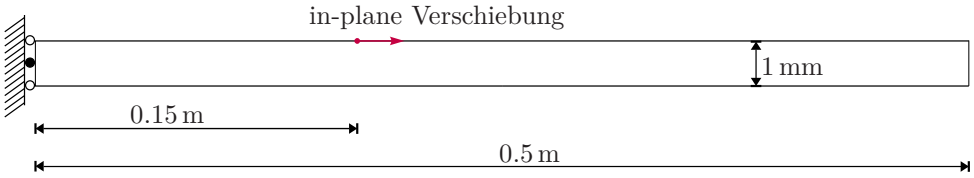
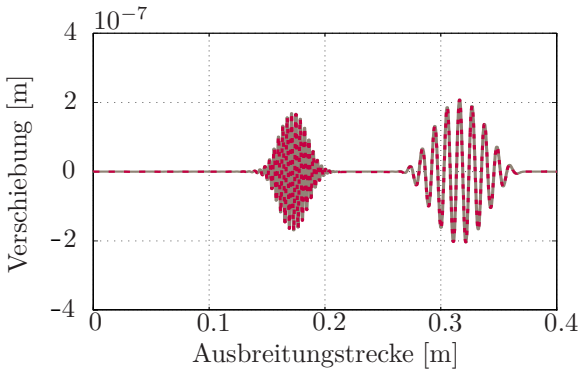


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Simulation der fundamentalen Moden A_0 und S_0.

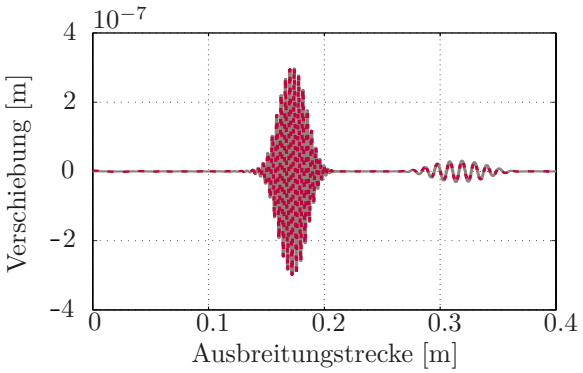
den beiden fundamentalen Moden S_0 und A_0 über eine in-plane Verschiebung an einem Knoten der Oberkante bestehend aus zehn gefensterten Sinusperioden bei 500 kHz realisiert. Dies gewährleistet, im Gegensatz zu den Simulationen in Kapitel 4.2, die Anregung sowohl der symmetrischen als auch antisymmetrischen Wellenmoden bei der gewählten Anregungsfrequenz. Die maximale Verschiebung beträgt dabei 1 µm und die Plattendicke 1 mm. Abbildung 5.2 zeigt eine schematische Darstellung des numerischen Modells. Ferner sind in Tabelle 5.1 die benötigten Parameter für dieses Modell und der Simulation der Wellenausbreitung aufgeführt.

Für die Analyse des Einflusses des nichtlinearen Materialmodells auf die Ausbreitungseigenschaften der beiden fundamentalen Wellenmoden sind in Abbildung 5.3 ein Ortsschrieb, ein Zeitschrieb sowie das Ergebnis einer FFT basierend auf der symmetrischen Mode sowohl für die in- als auch die out-of-plane Bewegung gegeben. Die in Abbildung 5.3(a) und 5.3(b) dargestellten Verschiebungsfelder zum Zeitpunkt $t = 70\,\mu\mathrm{s}$ zeigen zum einen, dass sowohl für das lineare als auch das nichtlineare Medium der Separationsprozess der antisymmetrischen und symmetrischen Mode auf Grund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten identisch abläuft, zum anderen unterscheiden sich die Verschiebungsfelder der linearen und nichtlinearen Wellenausbreitung nicht erkennbar in der Amplitude, der Wellenlänge, der Geschwindigkeit und der Phase. Dementsprechend können weiterhin die Dispersionsdiagramme basierend auf der Lösung der linearen Bewegungsgleichung auch für die Beschreibung der Wellenausbreitung in einem schwach nichtlinearen Medium verwendet werden. Dies deckt sich mit den in [34] vorgestellten Untersuchungsergebnissen zu diesem Thema. Betrachtet man hierzu zusätzlich die Zeitsignale der in- und out-of-plane Verschiebungskomponente in einem Abstand von 0.25 m zum Ort der Anregung aus Abbildung 5.3(c) bzw. 5.3(d), ist auch hier kein signifikanter Unterschied zwischen der linearen und nichtlinearen Wellenausbreitung zu erkennen. Auf Grund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten enthalten die Zeitschriebe allerdings nur die S_0-Mode, welche für die spätere Analyse des sekundären Wellenfeldes von Bedeutung ist.

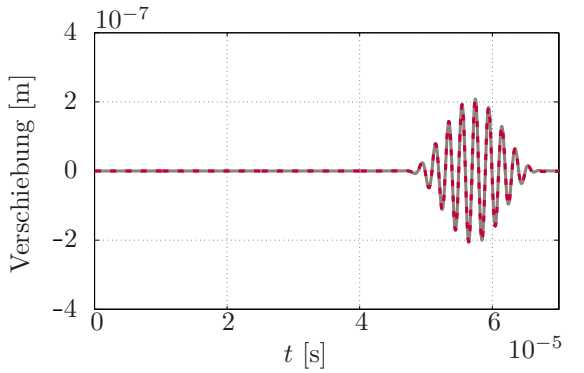
Im Gegensatz zu den Orts- und Zeitschrieben, wird bei der Auswertung der Frequenz-



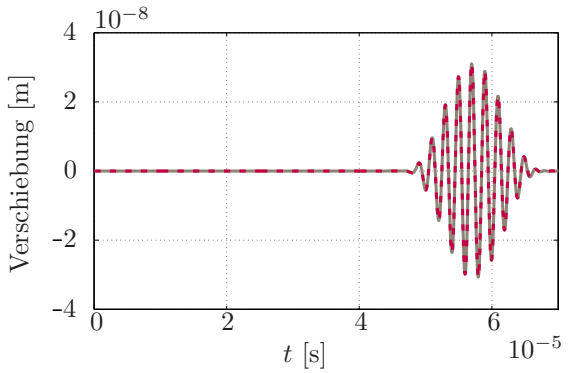
(a) In-plane Verschiebungsfeld nach 70 µs.



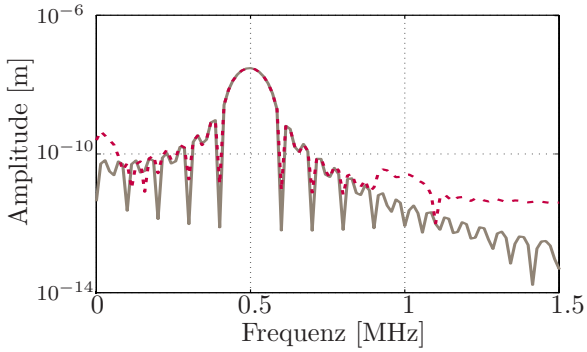
(b) Out-of-plane Verschiebungsfeld nach 70 µs.



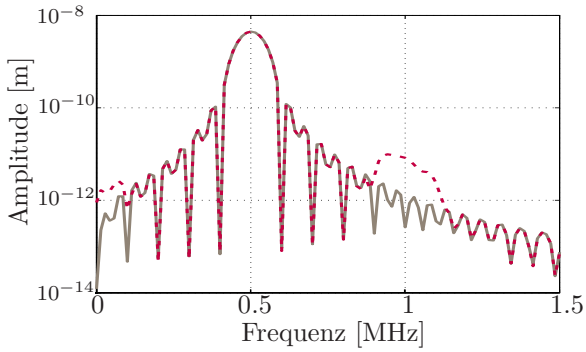
(c) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m.



(d) Out-of-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m.



(e) Frequenzanteile in-plane Signal.



(f) Frequenzanteile out-of-plane Signal.

Abbildung 5.3: Vergleich des Veschiebungsfeldes und der darin enthaltenen Frequenzanteile für die Wellenausbreitung in einem isotropen linearen und einem isotropen nichtlinearen Medium bei 500 kHz.

analyse des Zeitsignals der Unterschied zwischen der Wellenausbreitung in einem linearen und einem nichtlinearen Medium deutlich. In den Abbildungen 5.3(e) und 5.3(f) sind dazu die Frequenzspektren der symmetrischen Mode gegeben. Bei der Ausbreitung der Welle in dem linearen Medium enthält das Frequenzspektrum nur einen Anteil bei 500 kHz, was der Anregungsfrequenz entspricht. Im Gegensatz dazu weist das Frequenzspektrum basierend auf dem nichtlinearen Medium einen weiteren Frequenzanteil bei 1 MHz auf. Es kommt somit bei der Verwendung des NEO-HOOKE'schen Materialmodells zur Generierung höher harmonischer Moden auf Grund der materiellen Nichtlinearität, das charakteristische Verhalten der nichtlinearen Wellenausbreitung.

5.1.2 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung

Im Folgenden soll untersucht werden, inwiefern bei Verwendung der in kommerzieller und weit verbreiteter FE-Software implementierten isotropen hyperelastischen nichtlinearen Materialmodelle NEO-HOOKE und MOONEY-RIVLIN ein Leistungsfluss zwischen dem primären und sekundären Wellenfeld existiert und damit die Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung auch mit Blick auf kumulative Modenpaare ermöglicht. Diese Analyse erfolgt zunächst analytisch, wobei die Symmetrieeigenschaften der beiden Potentialformulierungen für die anschließende Auswertung der in (2.150) gegebenen Leistungsflussbedingung bestimmt werden. Schlussendlich erfolgt die Überprüfung der Leistungsflussbedingung durch die numerische Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung.

5.1.2.1 Analytische Betrachtung

Für die analytische Betrachtung der Leistungsflussbedingung werden der Oberflächen- und Volumenleistungsfluss aus (2.148) bzw. (2.149) für die beiden isotropen hyperelastischen Materialmodelle NEO-HOOKE und MOONEY-RIVLIN ausgewertet. Dazu wird die in der verwendeten FE-Software ANSYS® verwendete Potentialformulierung herangezogen. In Anlehnung an die Ausführungen in Kapitel 2.4.3 sind diese dort wie folgt hinterlegt

$$\Psi_{\mathrm{Neo}}(\bar{I}_1, J) = \frac{\mu}{2}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + \frac{1}{d}\left(J^2 - 1\right)^2, \tag{5.1}$$

$$\Psi_{\mathrm{Moo}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = c_{10}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + c_{01}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + \frac{1}{d}\left(J^2 - 1\right)^2. \tag{5.2}$$

Es kommt in diesem Fall demnach zur Anwendung der modifizierten Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors und somit zur Trennung des isochoren und volumetrischen Anteils. Ferner gelten die beiden Zusammenhänge

$$c_{10} + c_{01} = \frac{\mu}{2} \qquad \text{und} \qquad d = \frac{2}{K} \tag{5.3}$$

für die dort verwendeten Materialparameter. Zunächst wird die Leistungsflussbedingung für das NEO-HOOKE'sche Materialmodell untersucht. Anschließend erfolgt die Betrachtung der Potentialformulierung nach MOONEY-RIVLIN. Ausführlich sind die Inhalte in Anhang B.1 dargestellt.

Um die Symmetrieeigenschaften der Einträge des nichtlinearen Anteils des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors und der dazugehörigen Divergenz mit Bezug auf den Gradienten des Verschiebungsfeldes zu untersuchen, muss der rechte CAUCHY-GREEN Deformationstensor umformuliert werden. Dieser kann unter Verwendung des materiellen Deformationsgradienten in der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \tag{5.4}$$

in Abhängigkeit des Gradienten des Verschiebungsfeldes ausgedrückt werden. Setzt man dies in die Definition des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors aus (2.7) ein, erhält man

$$\mathbf{C} = (\mathbf{H} + \mathbf{I})^{\top} \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{I}) \tag{5.5}$$

$$= \mathbf{H}^{\top} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{H}^{\top} + \mathbf{H} + \mathbf{I}. \tag{5.6}$$

Die für die Potentialformulierung des NEO-HOOKE'schen Materialmodells verwendete Invariante folgt somit als

$$I_1 = H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2 + H_{11} + H_{33} + 3. \tag{5.7}$$

Diese sowie alle folgenden Formulierungen berücksichtigen dabei die Vereinfachung der Wellenausbreitung in der $x_1 - x_3$-Ebene und beruhen somit auf dem ebenen Verzerrungszustand. Ferner kann mit Hilfe der Kettenregel der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor bestimmt werden zu

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo}} = 2\frac{\partial \Psi_{\mathrm{Neo}}}{\partial \mathbf{C}} = 2\frac{\partial \Psi_{\mathrm{Neo}}}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + 2\frac{\partial \Psi_{\mathrm{Neo}}}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \tag{5.8}$$

$$= 2\left[\frac{\mu}{2} J^{-\frac{2}{3}}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1}\right) + \frac{1}{d}(J-1)J\mathbf{C}^{-1}\right]. \tag{5.9}$$

An dieser Stelle soll zunächst der volumetrische Anteil der Potentialformulierung betrachtet werden. Hierzu wird die Inverse des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors benötigt, welche mittels der Adjunkten formuliert werden kann. In diesem Zusammenhang gilt [111]

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \mathbf{C}^{*}, \tag{5.10}$$

wobei die Elemente von $\mathbf{C}^{*}$ die jeweiligen Unterdeterminanten enthalten. Setzt man dies in den volumetrischen Anteil aus (5.9) ein, ergibt sich zunächst

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo,v}} = \frac{2}{d}\,\frac{(J-1)J}{\det \mathbf{C}}\,\mathbf{C}^{*}. \tag{5.11}$$

Für die Symmetrieeigenschaften sind hierbei der skalare Vorfaktor, bestehend aus den Determinanten von $\mathbf{F}$ und $\mathbf{C}$, und der Tensor $\mathbf{C}^{*}$ mit den Unterdeterminanten von Bedeutung, da diese Größen von $\mathbf{H}$ abhängig sind. Die beiden Determinanten können formuliert

werden als

$$J = \det \mathbf{F} = H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} + H_{11} + H_{33} + 1 \tag{5.12}$$

sowie

$$\begin{aligned} \det \mathbf{C} &= (H_{11}^2 + H_{31}^2 + H_{11} + 1)(H_{13}^2 + H_{33}^2 + H_{33} + 1) \\ &\quad - (H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33} + H_{13} + H_{31})^2 \qquad (5.13) \\ &= H_{11}^2 + H_{33}^2 + H_{11}H_{33} - 2H_{13}H_{31} \\ &\quad + H_{11} + H_{33} + 1, \qquad (5.14) \end{aligned}$$

wobei Terme oberhalb zweiter Ordnung nicht weiter berücksichtigt werden. Da bei der Ausbreitung von Lamb-Wellen die Partikelbewegungen gegenüber der Plattengeometrie sehr klein sind, kann angenommen werden, dass

$$\| \operatorname{Grad} \mathbf{H} \| \ll 1 \tag{5.15}$$

gilt. Auf Grundlage dieser Annahme vereinfacht sich (5.11) zu

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo,v}} = \frac{2}{d}(J^2 - J)\mathbf{C}^*. \tag{5.16}$$

Bestimmt man nun ausgehend von (5.16) den nichtlinearen Anteil des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor, erhält man als Ergebnis der Symmetrieauswertung der Elemente bezüglich der Mittelachse

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Neo,v}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

für den volumentrischen Anteil der Potentialformulierung. Für den isochoren Anteil führt eine analoge Betrachtung zu demselben Ergebnis. Ausgehend von (5.15) lässt sich dieser zunächst reduzieren zu

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo,i}} = \mu(\mathbf{I} - 2\mathbf{C}^*). \tag{5.18}$$

Auf Grund der Unabhängigkeit des Einheitstensors von $\mathbf{H}$, führt der Übergang vom zweiten zum ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor zu einer linearen Abhängigkeit in $\mathbf{H}$, so dass der erste Term keinen Einfluss auf den nichtlinearen Anteil hat. Somit ist nur $\mathbf{C}^*$ auszuwerten, was auf die gleichen Symmetrieeigenschaften führt, wie sie auch für den volumetrischen Anteil gefunden wurden. Somit ergibt sich als Endergebnis für die Symmetrieeigenschaft der Elemente des nichtlinearen Anteils des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Neo}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

und für die Einträge der zugehörigen Divergenz

$$\operatorname{Div} \mathbf{P}_{\mathrm{Neo}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Da die Ausbreitung von LAMB-Wellen keine Geschwindigkeitskomponente in x_2-Richtung aufweist, sind für diese Symmetrieeigenschaften, wie bereits in Kapitel 2.5.3.5 gezeigt, die Leistungsflussbedingungen erfüllt, so dass dieses Materialmodell für die numerische Simulation der kumulativ höher harmonischen Moden verwendet werden kann.

Für die Potentialformulierung nach MOONEY-RIVLIN ergibt sich durch Differenzieren für den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor zunächst der Zusammenhang

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Moo}} = 2\left\{c_{10}(\mathbf{I} - I_1\mathbf{C}^{-1}) + c_{01}\left[I_1\mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{4}{3}I_2\mathbf{C}^{-1}\right] + \frac{1}{d}(J-1)J\mathbf{C}^{-1}\right\}, \tag{5.21}$$

wobei bereits die Bedingung aus (5.15) berücksichtigt ist. Dies hat zur Folge, dass die Faktoren $J^{-\frac{2}{3}}$ und $J^{-\frac{4}{3}}$ sich zu eins ergeben. Da das Potential nach MOONEY-RIVLIN für $c_{01} = 0$ dem NEO-HOOKE'schen Materialmodell entspricht, muss für die Analyse der Symmetrieeigenschaften nur der verbleibende mittlere Term ausgewertet werden. Für die anderen beiden Ausdrücke können die bereits vorgestellten Lösungen übernommen werden.

Neben der Inversen des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors aus (5.10) wird für den verbleibenden Term zusätzlich die zweite Invariante benötigt. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{C})^2 + \operatorname{tr}\mathbf{C}^2\right] && (2.35)\\ &= \frac{1}{2}\Big[(H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2 + H_{11} + H_{33} + 3)^2 \\ &\quad + (H_{11}^2 + H_{31}^2 + H_{11} + 1)^2 \\ &\quad + 2(H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33} + H_{13} + H_{31})^2 + 1 && (5.22)\\ &\quad + (H_{13}^2 + H_{33}^2 + H_{33} + 1)^2\Big]. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Zusammenhang sowie die Formulierungen des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors aus (5.6) und dessen Inverse aus (5.10) in (5.22) ein und bestimmt nach (2.75) den nichtlinearen Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors, besitzen dessen Einträge dieselben Symmetrieeigenschaften bezüglich der Mittelebene wie die Elemente der entsprechenden Spannungskomponente basierend auf dem NEO-HOOKE'schen Materialmodell. Somit ist auch für diese Potentialfunktion die Leistungsflussbedingung erfüllt, was die numerische Simulation kumulativ höher harmonischer Moden bei der Wahl einer entsprechenden Anregungsfrequenz ermöglicht.

5.1.2.2 Numerisches Modell und Simulation

Die numerische Validierung der Leistungsflussbedingung kann auf zwei Wegen durchgeführt werden. Auf der einen Seite ist es naheliegend, ein kumulatives Modenpaar zu betrachten. Bei der Wahl der entsprechenden Anregungsfrequenz, für die die Gleichheit der Phasengeschwindigkeiten gewährleistet und analytisch bei dem verwendeten Stoffgesetz ein Leistungsfluss vorhanden ist, ist ein linearer Anstieg der Amplitude der höher harmonischen Mode zu erwarten. Betrachtet man hierzu das schon in Kapitel 4.2 zur Anwendung gekommene S_1-S_2 Modenpaar bei der dazu gehörigen Frequenz-Dicken-Paarung von 3.614 MHz mm ergeben sich mit Bezug auf eine 1 mm dicke Platte die maximale Kantenlänge des finiten Elements und das mindestens erforderliche Zeitintervall nach (4.61) und (4.62) zu

$$\Delta I_{\max} = \frac{\lambda_{S_2}}{8} = 0.1\,\mathrm{mm}, \tag{5.23}$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{20 f_{S_2}} = 7\,\mathrm{ns}. \tag{5.24}$$

Die numerische Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung für das kumulative Modenpaar ist somit auf Grund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden und Zeitschritten sehr rechenaufwendig.

Betrachtet man hingegen ein Modenpaar, bei dem die Gleichheit der Phasengeschwindigkeit nicht erfüllt ist, kann der Rechenaufwand deutlich reduziert werden. Ein mögliches Modenpaar ist hier das S_0-S_0 Modenpaar bei niedrigen Frequenzen. Auf Grund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten des primären und sekundären Wellenfeldes weist die Amplitude der höher harmonischen Mode ein oszillierendes Verhalten auf, welches durch die in (2.151) definierte Dispersionslänge beschrieben wird. Die numerische Untersuchung der Leistungsflussbedingung erfolgt dann über den Vergleich der aus der Simulation erhaltenen Dispersionslänge mit dem theoretischen Wert basierend auf (2.151). Führt man diese Untersuchung bei einer primären Anregungsfrequenz von 0.5 MHz mm durch und legt ebenfalls eine Plattendicke von 1 mm zu Grunde, ergeben sich für die maximale Kantenlänge und das geforderte maximal Zeitinkrement

$$\Delta I_{\max} = \frac{\lambda_{S_0^{2\omega}}}{8} = 0.66\,\mathrm{mm}, \tag{5.25}$$

$$\Delta t_{\max} = \frac{1}{20 f_{S_0^{2\omega}}} = 50\,\mathrm{ns}. \tag{5.26}$$

Da für die errechnete maximale Kantenlänge $\Delta I_{\max} > \frac{t}{4}$ gilt, muss bei der Modellbildung zusätzlich die Anzahl der Elemente über die Bauteildicke berücksichtigt werden, so dass $\Delta I_{\max} = 0.25\,\mathrm{mm}$ folgt. Auf Grundlage dieser Werte kann die Anzahl der Freiheitsgrade und der benötigten Zeitschritte deutlich reduziert werden, weswegen die numerische Untersuchung der Leistungsflussbedingung im Folgenden nicht unter Verwendung des S_1-S_2, sondern des S_0-S_0 Modenpaares bei 0.5 MHz mm erfolgt, vgl. Abbildung 2.7.

Für die Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung wird, wie in Kapitel 4.2, ein zweidimensionales Modell im ebenen Verzerrungszustand verwendet, welches die Abma-

Tabelle 5.2: Parameter des numerischen Modells zur Analyse der Amplitude der höher harmonischen Mode.

l	t	n_p	f	a	Δa	n	ΔI	Δt
0.8 m	1 mm	10	500 kHz	0.5 mm	0.125 mm	2797	0.25 mm	50 ns

Tabelle 5.3: Materialparameter für die hyperelastischen isotropen Materialmodelle.

Konfiguration	Modell	c_{10} [GPa]	c_{01} [GPa]	K [GPa]	ρ [kg m^{-3}]
1	Neo-Hooke	13.16	-	68.6	2700
2	Mooney-Rivlin	13.16	0	68.6	2700
3	Mooney-Rivlin	6.58	6.58	68.6	2700
4	Mooney-Rivlin	0	13.16	68.6	2700

ße 0.7 m x 1 mm besitzt. Die Diskretisierung erfolgt auch hier mittels des PLANE183 Elements, wobei die Kantenlänge $\Delta I = \Delta I_\mathrm{max} = 0.25\,\mathrm{mm}$ gewählt wird. Die Randbedingungen und die Umsetzung der Anregung sind identisch. Allerdings wird wegen der deutlich größeren Wellenlänge die Anzahl der verwendeten Zyklen von 20 auf 10 reduziert.

Zur Untersuchung des Amplitudenverhaltens der höher harmonischen S_0-Mode wird beispielhaft die in-plane Verschiebung an jedem Knoten im Bereich von 0.5 mm bis 0.35 m ausgehend von der linken Kante betrachtet, weil dies die dominante Verschiebungskomponente bei symmetrischen Moden ist. Eine entsprechende Auswertung der out-of-plane Komponente führt zu denselben Ergebnissen. Da das sekundäre Wellenfeld ausschließlich den Frequenzanteil von S_0 bei 2ω enthält, kann die zugehörige Amplitude mittels einer FFT der einzelnen Zeitschriebe ermittelt werden. Eine Übersicht der Simulationsparameter ist in Tabelle 5.2 aufgeführt.

Die allgemeine Analyse der Existenz des Leistungsflusses, beruhend auf dem S_0-S_0 Modenpaar, wird sowohl für das NEO-HOOKE'sche als auch das MOONEY-RIVLIN Materialmodell durchgeführt, welches zur Beschreibung kompressibler Materialien die drei Parameter c_{10}, c_{01} und den Kompressionsmodul K zur Verfügung stellt, vgl. (2.58). Um den Einfluss der beiden frei wählbaren Parameter c_{10} und c_{01} auf die Wellenausbreitung zu untersuchen, werden insgesamt drei Materialparameterpaare betrachtet, wobei der Zusammenhang $c_{10} + c_{01} = \frac{\mu}{2}$ berücksichtigt wird. Eine Übersicht über die einzelnen Konfigurationen für die numerische Simulation ist in Tabelle 5.3 gegeben.

Im Anschluss an die Untersuchung des oszillierenden Verhaltens der höher harmonischen Amplitude soll ferner die Möglichkeit der quasi kumulativen Wellenausbreitung ausgehend von dem S_0-S_0 Modenpaar bei niedrigen Frequenzen untersucht werden, wie sie in [146], basierend auf der nichtlinearen Potentialformulierung nach MURNAGHAN, für isotropes Materialverhalten diskutiert wird.

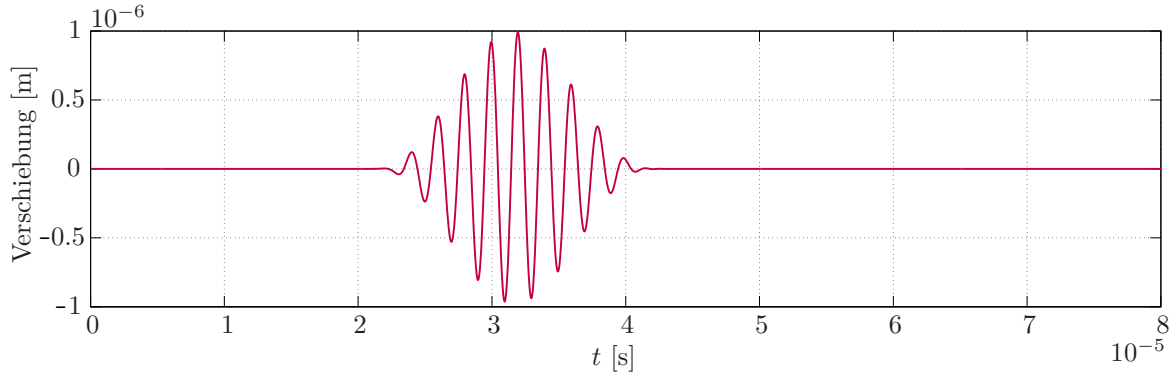
5.1.2.3 Analyse des Amplitudenverhaltens

Die Ergebnisse für die Analyse des Amplitudenverhaltens der höher harmonischen Mode mit zunehmender Ausbreitungsstrecke sind in Abbildung 5.4 zusammengefasst. Zunächst gibt der Plot aus Abbildung 5.4(a) ein Zeitsignal der in-plane Verschiebungskomponente nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.115 m wieder. Aus Abbildung 5.4(b) können die zugehörigen Frequenzanteile entnommen werden. Dabei ist zu erkennen, dass die Frequenz der höher harmonischen Moden nicht exakt 1 MHz entspricht, vielmehr ergibt sich ein Wert von 1.003 MHz. Ausgehend von diesem Wert und der Anregungsfrequenz von 0.5 MHz folgt aus (2.151) eine theoretische Dispersionslänge von 0.42 m. Betrachtet man hierzu den Verlauf der höher harmonischen Amplitude mit zunehmender Ausbreitungsstrecke, ist zu beachten, dass die Disperionslänge zwei Oszillationen umfasst, so dass Abbildung 5.4(c) nur das numerische Ergebnis für die halbe Dispersionslänge entnommen werden kann. Als Ergebnis der numerischen Betrachtung erhält damit zunächst

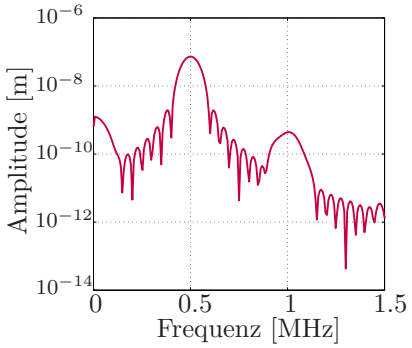
$$\frac{L_{\text{num}}}{2} = 0.225\,\text{m}. \tag{5.27}$$

Vergleicht man dies mit dem theoretischen Wert ist eine gute Übereinstimmung trotz einer leichten Abweichung von 7% zu erkennen. Diese Abweichung ist vor allem durch das schon relativ stark ausgeprägte dispersive Verhalten der S_0-Mode im Bereich von 1 MHz zu erklären. Selbst eine geringfügige Veränderung der Frequenz dieser Mode hat einen signifikanten Einfluss auf die zugehörige Dispersionslänge. Um dies zu verdeutlichen ist in Abbildung 5.5 das Verhalten der Dispersionslänge des S_0-S_0 Modenpaares für geringfügig variierende Frequenzen dargestellt. Dabei ist für das primäre Wellenfeld der Frequenzbereich von 0.495 MHz bis 0.505 MHz und für das sekundäre Wellenfeld von 0.995 MHz bis 1.005 MHz zu Grunde gelegt worden. Es ist deutlich zu erkennen, dass eine Veränderung der primären Frequenz einen geringeren Einfluss auf die Dispersionslänge hat als eine Veränderung des sekundären Frequenzanteils. Für den untersuchten primären Frequenzbereich variiert die Dispersionslänge um 5 mm, für den sekundären Frequenzbereich schon um 13 mm. Der minimale und maximale Wert liegen bei 0.422 m bzw. 0.440 m. Dieses Verhalten ist bedingt durch das unterschiedlich stark ausgeprägte dispersive Verhalten der S_0-Mode in den jeweiligen Frequenzbereichen.

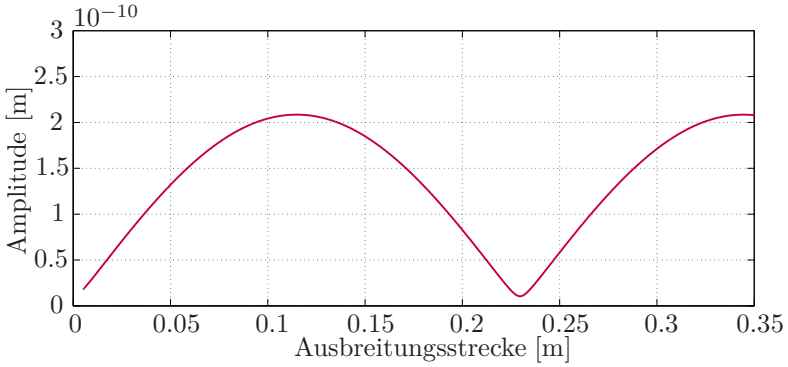
Neben der Analyse für die Neo-Hooke'sche Potentialformulierung, wird dieselbe Betrachtung, wie oben beschrieben, auch mit den unterschiedlichen Parameterpaarungen für die Mooney-Rivlin Potentialformulierung durchgeführt. Das Ergebnis für das Amplitudenverhalten ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Dieser kann entnommen werden, dass die Wahl der Potentialformulierung zunächst keinen Einfluss auf das oszillierende Verhalten der höher harmonischen Amplitude hat. Für alle vier untersuchten isotropen hyperelastischen Potentiale ergibt sich dieselbe Dispersionslänge. Dies bestätigt die Ergebnisse aus dem vorangegangen Kapitel 5.1.1. Auch wenn die Bestimmungsgleichung der Dispersionslänge nach (2.151) zunächst unabhängig von der Wahl des Materials erscheint, übt der Werkstoff über die Phasengeschwindigkeit als Ergebnis der Auswertung der Dispersionsbeziehung aus (2.105) indirekt einen Einfluss auf die Dispersionslänge aus. Somit verdeutlicht die Gleichheit der Disperionslänge für die einzelnen Potentialformulierungen,



(a) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.115 m.



(b) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(c) Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode mit zunehmender Ausbreitungsstrecke.

Abbildung 5.4: Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz unter Verwendung der Neo-Hooke'schen Potentialfunktion.

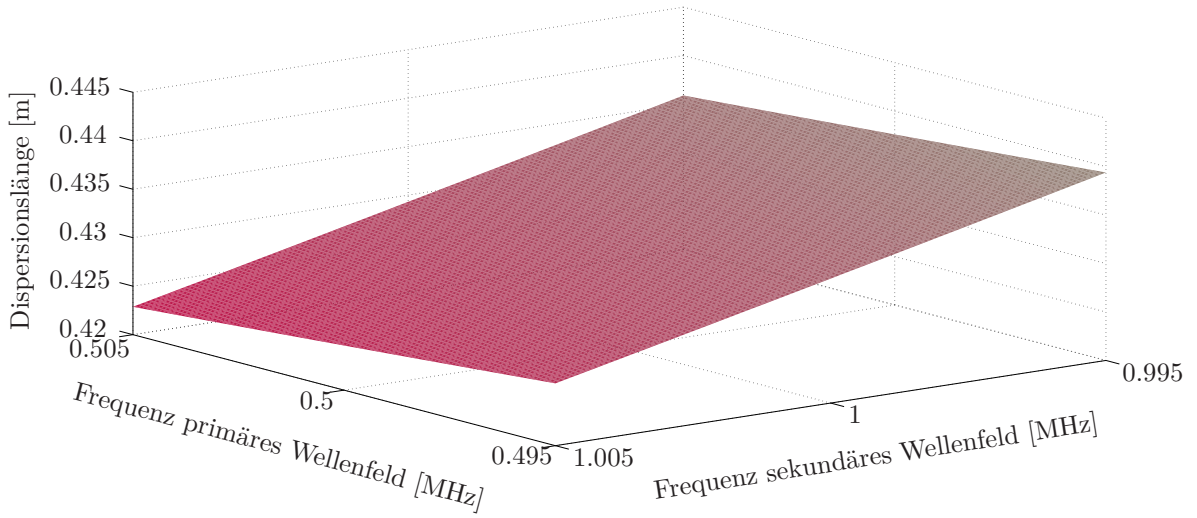


Abbildung 5.5: Einfluss der Frequenzen des primären und sekundären Wellenfeldes auf die analytische Dispersionslänge.

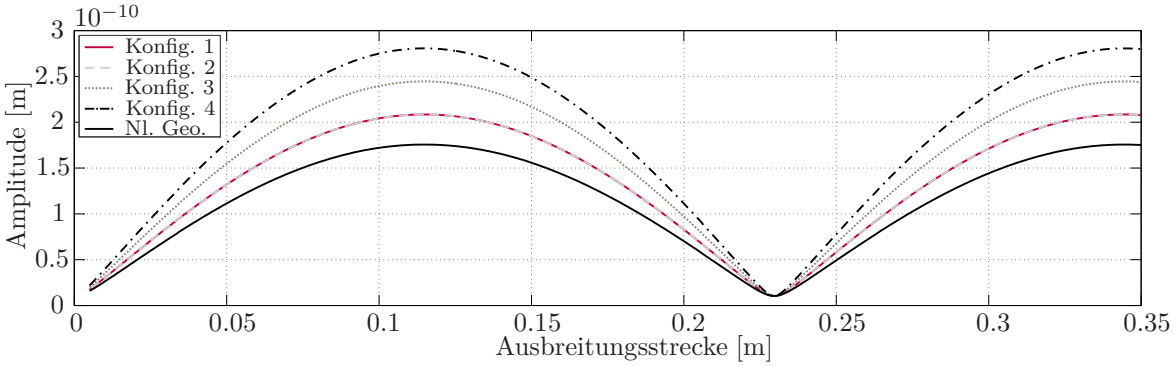


Abbildung 5.6: Vergleich des Verhaltens der höher harmonischen Amplitude über die Ausbreitungsstrecke für unterschiedliche isotrope nichtlineare Potentialformulierungen für das S_0-S_0 Modenpaar bei 500 kHz.

dass diese keinen Einfluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der LAMB-Wellen haben und somit auch für schwach nichtlineares Material die Dispersionsbeziehungen ausgehend von der linearen Bewegungsgleichung aus (2.79) gültig sind. Untermauert wird dies durch eine zusätzliche Kurve in Abbildung 5.6. Diese zeigt das Verhalten der höher harmonischen Amplitude auf Grund reiner geometrischer Nichtlinearität, deren Verlauf identisch zu den bereits diskutierten Kurven ist. Ferner zeigt die Grafik, dass die verschiedenen Potentialformulierungen zu einer unterschiedlich starken Ausprägung des sekundären Wellenfelds führen. Der Einfluss des nichtlinearen Materialmodells auf die Wellenausbreitung kann demnach über die beiden Parameter c_{10} und c_{01} gesteuert werden. Darüber hinaus ist festzustellen, dass die Ergebnisse für das NEO-HOOKE'sche und MOONEY-RIVLIN Materialmodell mit den beiden Parametern $c_{10} = \frac{\mu}{2}$ und $c_{01} = 0$ gleich sind. Dies ist durch die resultierenden identischen Potentialformulierungen begründet. Die gewonnenen Erkenntnisse decken sich mit den in [121] vorgestellten numerischen Ergebnissen auf Grundlage der Ausbreitung des S_1-S_2 Modenpaares.

5.1.2.4 Quasi kumulative Wellenausbreitung

In einem letzten Schritt wird für die isotrope Modellbildung die Möglichkeit der quasi kumulativen nichtlinearen Wellenausbreitung untersucht, so wie sie auch in [146] vorgestellt wird. Grundgedanke dabei ist, das Frequenzpaar des primären und sekundären Wellenfeldes so zu wählen, dass die daraus resultierende Dispersionslänge sehr groß wird und somit für die zu untersuchende Ausbreitungsstrecke ein kumulatives Verhalten vorliegt. Der Grenzfall, für den

$$\lim_{|c_p^{2\omega} - c_p^{\omega}| \to 0} \left| \frac{\pi c_p^{2\omega} c_p^{\omega}}{\omega (c_p^{2\omega} - c_p^{\omega})} \right| = \infty \tag{5.28}$$

gilt, stellt gerade den Sonderfall für kumulative Modenpaare dar. Betrachtet man hierzu den Verlauf der Dispersionskurve der S_0-Mode, so wird ersichtlich, dass es zwar zu keiner Gleichheit der Phasengeschwindigkeit im niederfrequenten Bereich kommt, sich die beiden aber immer weiter annähern. Dazu gibt Tabelle 5.4 eine Übersicht über die Phasengeschwindigkeiten des primären und sekundären Wellenfeldes und der daraus resultierenden

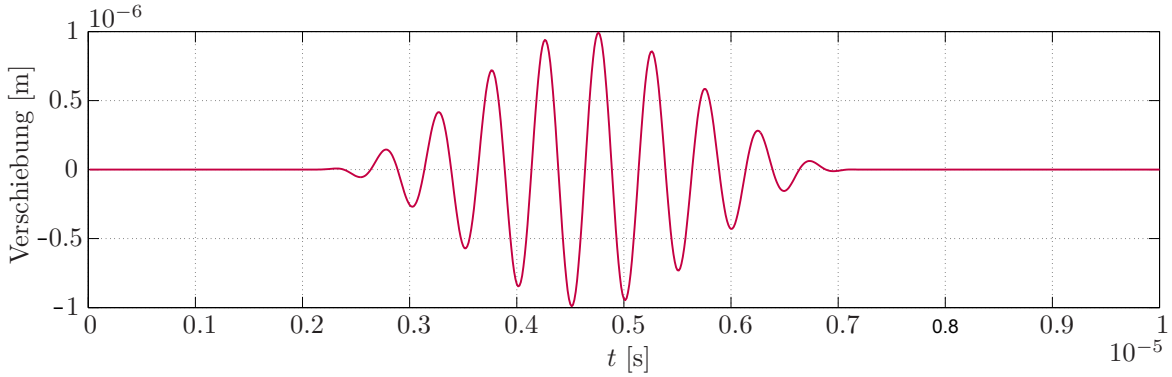
Tabelle 5.4: Phasengeschwindigkeiten und die zugehörigen Dispersionslängen für das S_0-S_0 Modenpaar in einem Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz .

f	c_{p}^{ω} [m s^{-1}]	$c_{\mathrm{p}}^{2\omega}$ [m s^{-1}]	L [m]
500	5375	5309	0.43
400	5382	5342	0.91
300	5387	5366	2.27
200	5391	5382	7.96
100	5393	5391	65.0

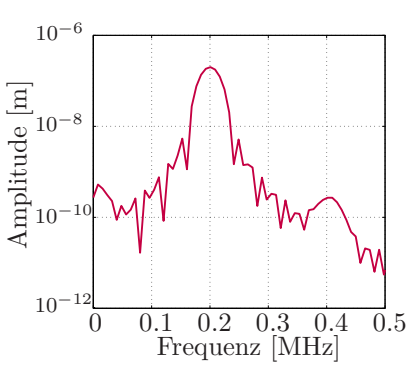
Dispersionslänge in einem Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz.

Ausgehend von den Ergebnissen der Dispersionslänge in Tabelle 5.4 wird im Folgenden das S_0-S_0 Modenpaar bei einer Anregungsfrequenz von 200 kHz näher betrachtet, wobei das Vorgehen analog zu den Untersuchungen bei 500 kHz ist. Ferner wird das in Kapitel 5.1.2.2 vorgestellte numerische Modell mit einem angepassten Zeitinkrement von $\Delta t = 12.5\,\mu$s verwendet. In Abbildung 5.7 sind der Zeitschrieb der in-plane Bewegung, das zugehörige Frequenzspektrum und das Verhalten der höher harmonischen Amplitude mit zunehmender Laufstrecke unter Verwendung der Neo-Hooke'schen Potentialformulierung dargestellt. Dabei kann dem Frequenzspektrum aus Abbildung 5.7(b) die Existenz der zusätzlichen Komponente bei 400 kHz entnommen werden. Darauf aufbauend zeigt der Kurvenverlauf aus Abbildung 5.7(c) den linearen Anstieg der höher harmonischen Amplitude mit zunehmender Ausbreitungsstrecke, für die bereits zuvor betrachtete Ausbreitungsstrecke von 0.35 m. Die Bestimmung einer Ausgleichsgerade mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate liefert zusätzlich ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0.9992$. Über eine entsprechende, zuvor bestimmte Ausbreitungsstrecke weist das S_0-S_0 Modenpaar somit ein quasi kumulatives Verhalten auf. Es ist demnach möglich das kumulative Verhalten der nichtlinearen Wellenausbreitung auch bei deutlich geringeren Frequenzen zu verwenden, welche experimentell wesentlich einfacher zu handhaben sind. Dies liegt zum einen darin begründet, dass bei diesen niedrigen Frequenzen nur die beiden fundamentalen Moden S_0 und A_0 angeregt werden und somit ein komplexes Wellenfeld vermieden werden kann. Darüber hinaus kommt es bei höheren Frequenzen zu Problemen mit der elektromagnetischen Verträglichkeit, also störenden elektrischen und elektromagnetischen Effekten, zwischen den einzelnen Komponenten des Versuchsaufbaus (EMV-Probleme).

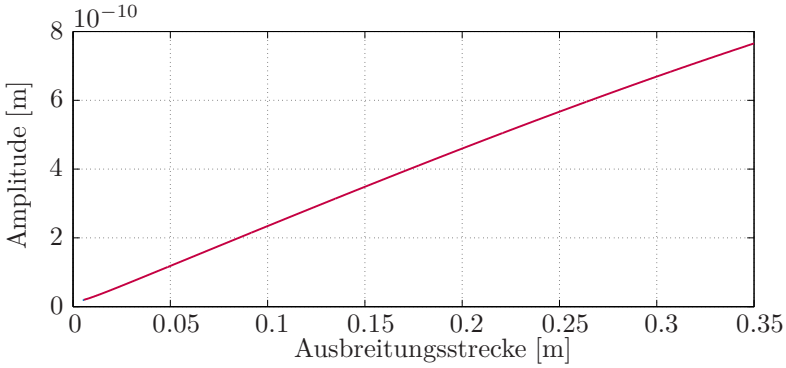
Abschließend sind auch für diese Untersuchung die Ergebnisse für die unterschiedlichen Potentialformulierungen nach Tabelle 5.2 zusammen in Abbildung 5.8 dargestellt. Es können, ausgehend von den Kurvenverläufen, dieselben Schlussfolgerungen gezogen werden, wie für die Untersuchung der höher harmonischen Amplitude bei einer primären Anregungsfrequenz von 500 kHz. Auch hier ist zu erkennen, dass sich die qualitativen Kurvenverläufe für die einzelnen Potentialformulierungen nicht unterscheiden. Einzig die Ausprägung des sekundären Wellenfelds wird beeinflusst. Darüber hinaus fallen erwartungsgemäß die Kurven für das Neo-Hooke'sche und Mooney-Rivlin Materialmodell mit den beiden Parametern $c_{10} = \frac{\mu}{2}$ und $c_{01} = 0$ zusammen.



(a) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.115 m.



(b) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(c) Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode mit zunehmender Ausbreitungsstrecke.

Abbildung 5.7: Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 200 kHz unter Verwendung der Neo-Hooke'schen Potentialfunktion.

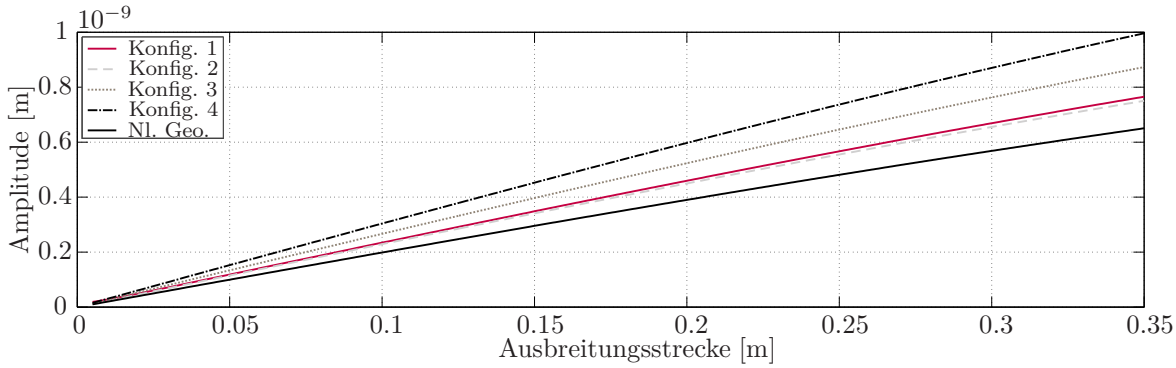


Abbildung 5.8: Vergleich des Verhaltens der höher harmonischen Amplitude über die Ausbreitungsstrecke für unterschiedliche isotrope nichtlineare Potentialformulierungen für das S_0-S_0 Modenpaar bei 200 kHz.

5.2 Erweiterung der Modellbildung auf transversal-isotropes Materialverhalten

5.2.1 Entwicklung eines transversal-isotropen hyperelastischen nichtlinearen Materialmodels

5.2.1.1 Potentialfunktion

Die bisher entwickelten hyperelastischen nichtlinearen transversal-isotropen Materialmodelle kommen fast ausschließlich im Bereich der Biomechanik zur Anwendung und dienen der Abbildung menschlichen Gewebes. Auf Grund der Gewebebeschaffenheit sind diese auf der Annahme inkompressiblen Verhaltens entwickelt. Es gilt demnach

$$I_3 = 1. \tag{5.29}$$

Vergleicht man dies mit den Eigenschaften von kohlenstofffaserverstärkten Kunststoffen, trifft diese Annahme nicht zu. Das häufig als Matrixmaterial verwendete Epoxidharz besitzt eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0.35 - 0.4$ und ist somit kompressibel. Diese Eigenschaft der Matrix wird auch durch die Zugabe von Kohlefasern nicht verändert, so dass angenommen werden kann, dass auch der Verbund aus Fasern und Matrix ein gewisses kompressibles Verhalten besitzt. Um dies in der nichtlinearen Beschreibung des Materialverhaltens von transversal-isotropen Strukturen zu berücksichtigen, erfolgt die Entwicklung einer neuen Potentialfunktion auf Grundlage bereits existierender linearer inkompressibler Formulierungen sowie bekannter Beschreibungen kompressiblen Verhaltens.

Wie bereits in Kapitel 2.4 vorgestellt, gibt es zwei Potentialformulierungen, welche das lineare Verhalten von transversal-isotropem Material beschreiben. Im Folgenden wird die Formulierung nach [123] verwendet, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{C}} = {} & c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_2-3) - 2c_2(I_1-3) + c_3(I_4-1)^2 \\ & + c_4(I_5-1) - 2c_4(I_4-1) + c_5(I_4-1)(I_1-3).\end{aligned} \tag{2.60}$$

Um das kompressible Verhalten von isotropen Strukturen zu modellieren, gibt es eine Reihe von bekannten Potentialfunktionen. Einige Beispiele sind [4, 10, 16, 123, 133]

$$\Psi_{\text{Bel}} = \frac{1}{2}\lambda_0 (\ln J)^2 - \mu_0 \ln J, \tag{5.30}$$

$$\Psi_{\text{Blatz}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{1-2\nu}{\nu}\left(J^{-2\frac{\nu}{1-2\nu}} - 1\right), \tag{5.31}$$

$$\Psi_{\text{Reese}} = -\mu_0 \ln J - \frac{\lambda_0}{4}\left(\ln J^2 - 1 - 2\ln J\right) \tag{5.32}$$

$$\Psi_{\text{Simo}} = \frac{K}{4}\left(J^2 - 1 - 2\ln J\right), \tag{5.33}$$

$$\Psi_{\text{Ansys}} = \frac{K}{2}(J-1)^2. \tag{5.34}$$

Für die Modellierung des kompressiblen Verhaltens von faserverstärkten Kunststoffen

wird in dieser Arbeit die Formulierung nach SIMO [133] verwendet. Diese ist eine Erweiterung der in kommerziellen FE-Programmen verwendeten Beschreibung, welche im Druckbereich Instabilitäten aufweist [134]. Daraus resultiert als Potentialformulierung für transversal-isotropes kompressibles Materialverhalten

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{ti}} &= \Psi_{\mathbf{C}} + \Psi_{\text{Simo}} \qquad (5.35)\\ &= c_1(I_1-3)^2 + c_2(I_2-3) - 2c_2(I_1-3) + c_3(I_4-1)^2 + c_4(I_5-1)\\ &\quad - 2c_4(I_4-1) + c_5(I_4-1)(I_1-3) + \frac{K}{4}\left(J^2-1-2\ln J\right). \qquad (5.36)\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der linearen Potentialformulierung in (2.60) berücksichtigt das entwickelte hyperelastische Potential aus (5.36) nichtlineares Materialverhalten, da der Stofftensor nicht mehr unabhängig von der Deformation ist. Im Gegensatz zu der Formulierung nach MURNAGHAN werden darüber hinaus anstelle von 14 nur 6 Parameter benötigt, um das Materialverhalten zu beschreiben. In einem nächsten Schritt wird die Bestimmung dieser Parameter erläutert.

5.2.1.2 Bestimmung der Materialparameter

Basierend auf der Potentialformulierung aus (2.60) ergeben sich der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungs- und der Elastizitätstensor nach (2.42) bzw. (2.43) zunächst für den linearen Anteil $\Psi_{\mathbf{C}}$ zu

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathbf{C}} = 4c_1(I_1-3)\mathbf{I} \;&+\; 2c_2\left(I_1\mathbf{I}-\mathbf{C}\right) - 4c_2\mathbf{I}\\ &+\; 4c_3(I_4-1)\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + 2c_4\left(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbf{C}\cdot\mathbf{a}_0\right)\\ &-\; 4c_4\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + 2c_5\left[\mathbf{I}(I_4-1) + (I_1-3)\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0\right] \qquad (5.37)\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{\mathbf{C}} = 8c_1\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \;&+\; 4c_2\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}-\mathbb{I}^s\right)\\ &+\; 4c_3\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + 4c_4\left(\mathbf{a}_0\cdot\mathbb{I}^s\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbb{I}^s\cdot\mathbf{a}_0\right)\\ &+\; 4c_5\left[\mathbf{I}\otimes\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{I}\right]. \qquad (5.38)\end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, dass dieser Anteil des Elastizitätstensors unabhängig von der Deformation des Körpers ist und somit das lineare Materialverhalten abbildet. Für die Beschreibung des kompressiblen Verhaltens resultieren für die beiden Tensoren die Ausdrücke

$$\mathbf{S}_{\text{Simo}} = \frac{K}{2}\left(J^2-1\right)\mathbf{C}^{-1}, \qquad (5.39)$$

$$\mathbb{C}_{\text{Simo}} = K\left[J\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1} + \left(J^2-1\right)\frac{\partial\mathbf{C}^{-1}}{\partial\mathbf{C}}\right]. \qquad (5.40)$$

Die Beschreibung des kompressiblen Verhaltens ist demnach eine nichtlineare Formulierung, da für diesen Teil des Potentials der Elastizitätstensor nicht mehr unabhängig von der Verformung des Körpers ist. Die Materialparameterbestimmung erfolgt deshalb im

unverformten Zustand. Für diesen Fall kann unter Verwendung der VOIGT-Notation die Stoffmatrix $\bar{\mathbb{C}}$ gebildet werden. Diese kann formuliert werden als

$$\bar{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{C}}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbb{C}}_{22} \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

mit

$$\bar{\mathbb{C}}_{11} = \begin{bmatrix} 8(c_1+c_3+c_4+c_5)+K & 4(2c_1+c_2+c_5)+K & 4(2c_1+c_2+c_5)+K \\ 4(2c_1+c_2+c_5)+K & 8c_1+K & 8c1+4c_2+K \\ 4(2c_1+c_2+c_5)+K & 8c1+4c_2+K & 8c_1+K \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

und

$$\bar{\mathbb{C}}_{22} = \begin{bmatrix} -2c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2c_2+2c_4 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_2+2c_4 \end{bmatrix}. \tag{5.43}$$

Die auf der entwickelten Potentialformulierung beruhende Stoffmatrix besitzt demnach dieselben Symmetrieeigenschaften wie die linear elastische Beschreibung transversal-isotropen Materialverhaltens. Dies ermöglicht die Bestimmung der Materialparameter mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs. Hierzu muss allerdings zuvor eine der sechs unbekannten Größen vorgegeben werden, weil das linear elastische Modell nur fünf unabhängige Konstanten beinhaltet. Da das kompressible Verhalten des faserverstärkten Kunststoffs maßgeblich durch das Matrixmaterial beeinflusst wird, soll an dieser Stelle zunächst der zugehörige Kompressionsmodul für den Parameter K verwendet werden. Die verbleibenden Materialkonstanten c_i können anschließend über den Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Dazu ist die Stoffmatrix für den linear elastischen Fall gegeben durch

$$\tilde{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{C}}_{22} \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

mit

$$\tilde{\mathbb{C}}_{11} = \begin{bmatrix} C_{1111} & 2\nu_{12}(\lambda+G_{23}) & 2\nu_{12}(\lambda+G_{23}) \\ 2\nu_{12}(\lambda+G_{23}) & \lambda+2G_{23} & \lambda \\ 2\nu_{12}(\lambda+G_{23}) & \lambda & \lambda+2G_{23} \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

und

$$\tilde{\mathbb{C}}_{22} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \tag{5.46}$$

Die beiden Materialparameter λ und C_{1111} können formuliert werden als

$$\lambda = \frac{\nu_{12}\nu_{21}+\nu_{23}}{(1-\nu_{23}+2\nu_{12}\nu_{21})(1+\nu_{23})} E_2 \tag{5.47}$$

und

$$C_{1111} = \frac{1 - \nu_{23}}{1 - \nu_{23} + 2\nu_{12}\nu_{21}} E_1. \tag{5.48}$$

Verwendet man die in Tabelle 3.1 gegebenen Materialwerte und einen Kompressionsmodul von 3.89 GPa für Epoxidharz, ergeben sich für die Koeffizienten c_i die in Tabelle 5.5 aufgeführten Werte, mit deren Hilfe das betrachtete CFK als hyperelastisches nichtlineares Material abgebildet werden kann.

Tabelle 5.5: Koeffizienten c_i für das hyperelastische nichtlineare transversal-isotrope Materialmodell.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	K
0.527 GPa	−1.875 GPa	13.66 GPa	1.25 GPa	0.568 GPa	3.89 GPa

5.2.1.3 Untersuchung der Leistungsflussbedingung

Unter Verwendung des vorgestellten Materialmodells wird die Möglichkeit zur numerischen Simulation des sekundären Wellenfeldes und damit verbunden der Ausbreitung höher harmonischer Moden in einer unidirektionalen CFK Platte untersucht. Dazu erfolgt in diesem Kapitel zunächst die Analyse, ob für dieses Materialmodell ebenfalls der, in Kapitel 2.5.3.5 diskutierte, Leistungsfluss von dem primären zum sekundären Wellenfeld vorhanden ist. Dementsprechend werden analog zu den Betrachtungen für das isotrope hyperelastische Materialmodell die einzelnen Komponenten des Leistungsflusses über die Oberfläche aus (2.148) und durch das Volumen aus (2.149) mit Bezug auf die Symmetrieeigenschaften ausgewertet. Da das vorgestellte transversal-isotrope Potential in Abhängigkeit der Invarianten des rechten Cauchy-Green Deformationstensors formuliert ist, können zunächst die Formulierungen des rechten Cauchy-Green Deformationstensors aus (5.6) und der ersten Invariante aus (5.7) übernommen werden. Ferner wird für die Umformulierung des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors in Abhängigkeit von $\mathbf{H}$ und der anschließenden Bestimmung des nichtlinearen Anteils des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors die vierte Invariante bei transversal-isotropen Materialverhalten benötigt. Diese kann für den ebenen Verzerrungszustand formuliert werden als

$$I_4 = H_{11}^2 + H_{31}^2 + H_{11} + 1. \tag{5.49}$$

Dabei wird angenommen, dass die Faserrichtung in Richtung der X_1-Achse liegt, also entlang der Platte, so wie es bei den experimentellen Untersuchungen ebenfalls der Fall ist. Daraus resultiert

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.50}$$

Mit Hilfe dieser Größen kann für den linearen Anteil der Potentialformulierung zunächst der zweite Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor in Abhängigkeit des Gradienten des

Verschiebungsfeldes und anschließend der nichtlineare Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors nach (2.75) bestimmt werden. Wertet man dessen Einträge in Hinblick auf die Symmetrieeigenschaften des Verschiebungsfeldes bezüglich der Mittelebene einer dünnwandigen Struktur aus, erhält man

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

als Ergebnis sowohl für ein symmetrisches als auch ein antisymmetrisches primäres Wellenfeld.

Um den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor für den nichtlinearen Anteil des Potentials zu bestimmen, wird zusätzlich die Inverse des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors aus (5.10) benötigt. Setzt man diese unter Berücksichtigung von (5.15) in (5.39) ein, ergibt sich

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Simo}} = \frac{K}{2}(J^2 - 1)\mathbf{C}^*, \tag{5.52}$$

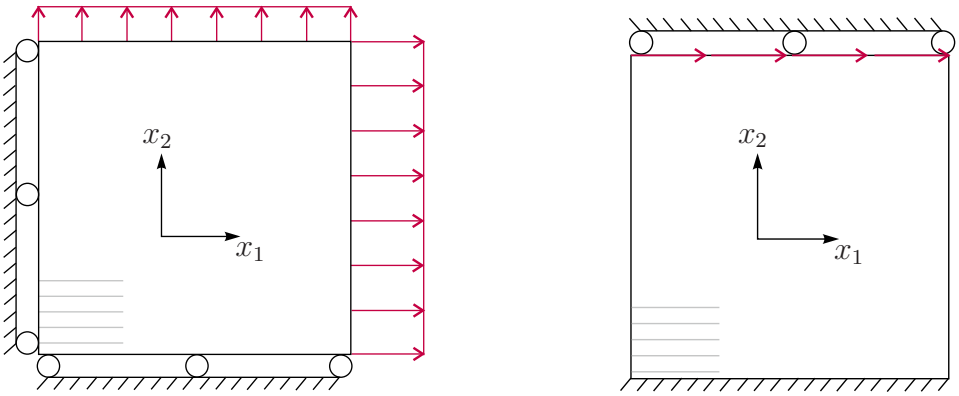
wobei sich der Vorfaktor durch den Gradienten des Verschiebungsfeldes unter Vernachlässigung von Termen oberhalb zweiter Ordnung formulieren lässt als

$$\begin{aligned} J^2 - 1 &= (H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} + H_{11} + H_{33} + 1)^2 - 1 && (5.53) \\ &= H_{11}^2 + H_{33}^2 + 4H_{11}H_{33} - 2H_{13}H_{31} \\ &\quad + 2H_{11} + 2H_{33}. && (5.54) \end{aligned}$$

Wird ausgehend von (5.52) der nichtlineare Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor berechnet, ergibt sich für diesen dieselbe Symmetrieeigenschaft wie bei der vorangegangen Betrachtung des linearen Anteils des hyperelastischen transversalisotropen Potentials. Damit resultiert

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

für die Divergenz, auch hier sowohl für ein symmetrisches als auch ein antisymmetrisches primäres Wellenfeld. Die Auswertung der Symmetrieeigenschaften führt somit zu denselben Ergebnisse, wie sie in [158] basierend auf der Erweiterung der nichtlinearen Potentialformulierung nach MURNAGHAN auf transversal-isotropes Material präsentiert werden. Setzt man diese in die Bestimmungsgleichungen der beiden Leistungsflussanteile aus (2.148) und (2.149) ein, kann gezeigt werden, dass für ein symmetrisches sekundäres Wellenfeld diese ungleich null sind. Für ein antisymmetrisches sekundäres Wellenfeld hingegen existiert kein Leistungsfluss zwischen der primär angeregten und der höher harmonischen Mode. Eine detaillierte Darstellung der Zusammenhänge ist in Anhang B.2 zu finden.



(a) Zugversuch. (b) Schubversuch.

Abbildung 5.9: Schematische Darstellung der numerischen Modelle für den Zug- und Scherversuch zur statischen Validierung des hyperelastischen Materialmodells.

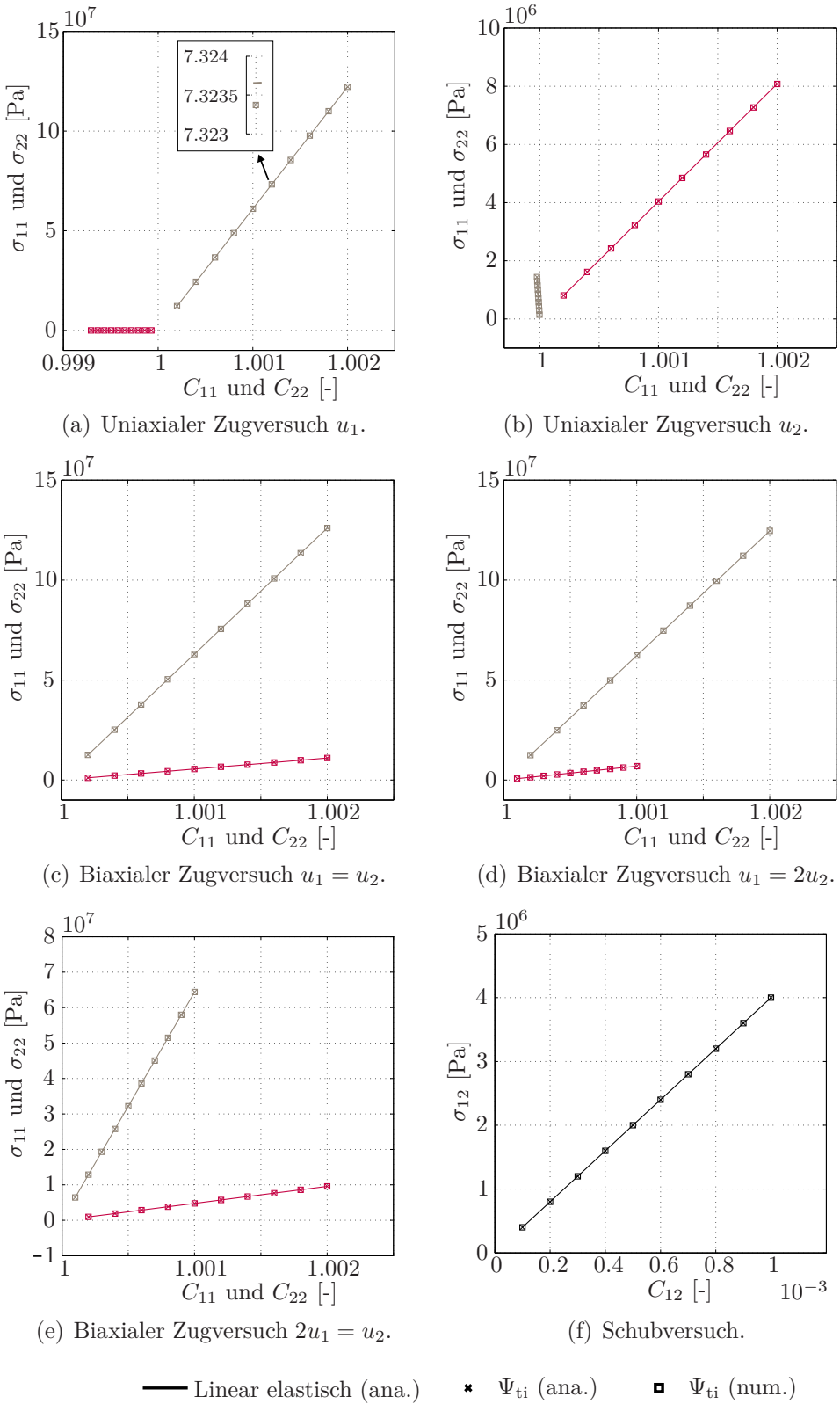
5.2.2 Validierung

Bevor die Existenz des Leistungsfluss von dem primären zum sekundären Wellenfeld auch numerisch für das präsentierte hyperelastische transversal-isotrope Materialmodell untersucht wird, erfolgt eine Validierung des Stoffgesetzes hinsichtlich seines mechanischen Verhaltens und der Implementierung in der FE-Software FEAP® [138]. Dazu werden sowohl das grundlegende statische als auch dynamische Verhalten des Materials untersucht.

5.2.2.1 Statische Validierung

Die statische Validierung für den zweidimensionalen Fall erfolgt mit Hilfe von uniaxialen und biaxialen Zugversuchen. Betrachtet wird dazu eine Scheibe im ebenen Spannungszustand, an deren unteren Kante die vertikale und an deren linken Kante die horizontale Verschiebungskomponente festgesetzt ist, um mögliche parasitäre Verschiebungskomponenten zu verhindern. An den anderen beiden Kanten wird je nach Art des Zugversuchs eine entsprechende Verschiebung aufgebracht. Der uniaxiale Zugversuch wird sowohl in als auch quer zur Faserrichtung durchgeführt. Für den biaxialen Zugversuch kommen drei unterschiedliche Konfiguration zu Anwendung, $u_1 = u_2$, $u_1 = 2u_2$ und $2u_2 = u_1$. Zusätzlich wird noch ein Schubversuch durchgeführt. Hierfür ist an der unteren Kante der Scheibe sowohl der horizontale als auch der vertikale Freiheitsgrad gesperrt. An der oberen Kante wird eine vertikale Verschiebung nicht zugelassen, wobei dort zusätzlich eine horizontale Verschiebung aufgebracht wird. In Abbildung 5.9 ist eine schematische Darstellung der numerischen Modelle für die statische Validierung gegeben.

Sowohl für linear elastisches als auch für das hyperelastische Materialmodell erfolgt die Berechnung der Verschiebung auf Grund der gegebenen Belastung zunächst analytisch. Für das hyperelastische Materialmodell wird zusätzlich eine numerische Rechnung durchgeführt. Dies ermöglicht zum einen den Vergleich zwischen analytischen und numerischen Ergebnissen für das nichtlineare Materialmodell zur Überprüfung der Implemen-



(a) Uniaxialer Zugversuch u_1.

(b) Uniaxialer Zugversuch u_2.

(c) Biaxialer Zugversuch $u_1 = u_2$.

(d) Biaxialer Zugversuch $u_1 = 2u_2$.

(e) Biaxialer Zugversuch $2u_1 = u_2$.

(f) Schubversuch.

Abbildung 5.10: Statische Zug- und Schubversuche zur physikalischen Validierung des entwickelten nichtlinearen hyperelastischen transversal-isotropen Materialmodells und dessen Implementierung in FEAP®, für die Zugversuche sind in grau die Ergebnisse für die 1-Richtung und in rot für die 2-Richtung dargestellt.

tierung und zum anderen den Vergleich zum linearen Materialverhalten. Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Belastungen sind in Abbildung 5.10 dargestellt. In den einzelnen Spannungs-Dehnungs-Diagrammen ist dazu die CAUCHY-Spannung über dem rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensor aufgetragen. Diese Kombination wird gewählt, da das hyperelastische Potential in Abhängigkeit der Invarianten von $\mathbf{C}$ formuliert ist und FEAP®, wie die meisten FE-Programme, $\boldsymbol{\sigma}$ als Spannung ausgibt. Ferner enthalten die jeweiligen Diagramme für die Zugversuche sowohl die Ergebnisse in 1- als auch in 2-Richtung, wobei die 1-Richtung der Faserrichtung und somit der x_1-Achse entspricht. Analog fällt die x_2-Achse mit der 2-Richtung zusammen. Für die Faserrichtung sind die Kurven in grau dargestellt, quer zur Faser in rot.

Die Bestimmung der Materialparameter für das hyperelastische Materialmodell erfolgt auf Grundlage der Annahme, dass das kompressible Verhalten maßgeblich durch das Matrixmaterial beeinflusst wird. Somit sind die in Tabelle 5.5 gegebenen Materialparameter gültig. Für das linear elastische Modell kommen die Parameter aus Tabelle 3.1 zum Einsatz.

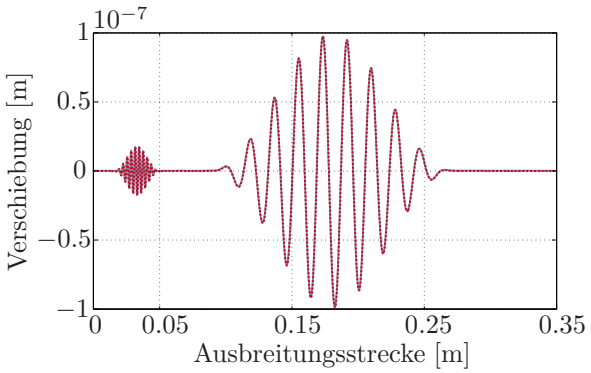
Der Vergleich der einzelnen Spannungs-Dehnungs-Kurven zeigt zunächst, dass die Implementierung des hyperelastischen Materialmodells korrekt ist. Die Ergebnisse der analytischen und numerischen Berechnung für das hyperelastische Stoffgesetz sind identisch. Ferner wird das typische Verhalten von unidirektionalen Faserverbunden, charakterisiert durch die höhere Steifigkeit in Faserrichtung, richtig abgebildet. Darüber hinaus weichen die Ergebnisse des nichtlinearen Materialmodells nur sehr gering von dem linearen Verhalten ab, wobei die Spannungen bei einer gegebenen Verformung für nichtlineares Verhalten erwartungsgemäß etwas geringer sind als bei linearem Materialverhalten, vgl. Abbildung 5.10(a). Einzig die Schubverformung zeigt für das hyperelastische Modell kein nichtlineares Verhalten. Dies passt zu dem Ansatz der Modellierung, da der dazu gehörige Anteil des Elastizitätstensors keine nichtlinearen Anteile enthält, vgl. (5.43).

5.2.2.2 Dynamische Validierung

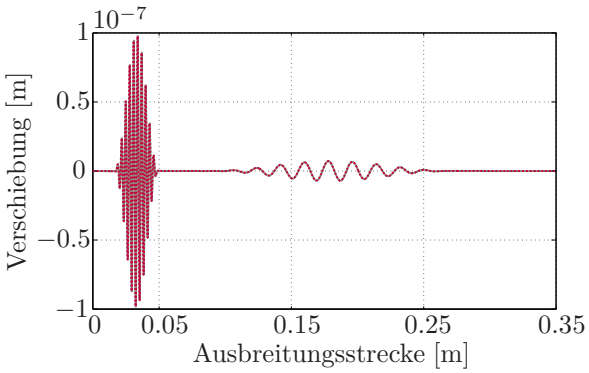
Um das dynamische Verhalten des vorgestellten hyperelastischen nichtlinearen Materialmodells zu überprüfen, wird in einem ersten Schritt die Ausbreitung der beiden fundamentalen Moden A_0 und S_0 in dem nichtlinearen Medium ausgewertet und mit den Ergebnissen der linearen Wellenausbreitung auf Grund linear elastischen Materialverhaltens verglichen. Dazu erfolgt die Simulation der Wellenausbreitung in einem zweidimensionalen Plattenquerschnitt bei 500 kHz in FEAP®, analog zu dem in Kapitel 5.1.1 vorgestellten numerischen Modell. Wie bereits erwähnt, werden in FEAP® anstatt der 8-Knoten 9-Knoten Scheibenelemente zur Diskretisierung verwendet. Die Materialparameter für das lineare und nichtlineare Modell werden aus der vorangegangenen statischen Validierung übernommen.

Für die Auswertung der Wellenausbreitung wird analog zur isotropen Betrachtung aus Kapitel 5.1.1 zunächst das in- und out-of-plane Verschiebungsfeld zu einem festen Zeitpunkt sowie nach einer festen Ausbreitungsstrecke aufgezeichnet. Basierend auf diesen Daten erfolgt anschließend die Bestimmung der Frequenzanteile des Signals. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.11 dargestellt.

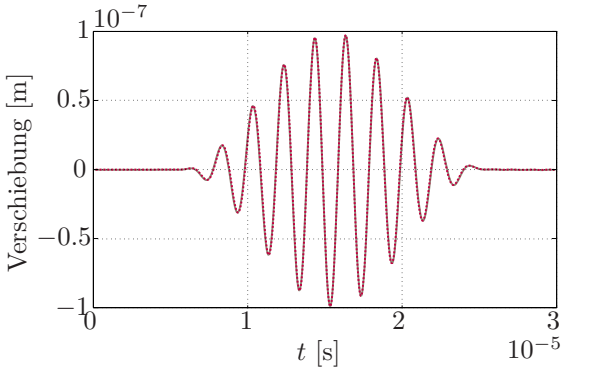
Abbildung 5.11(a) und 5.11(b) zeigen das in- und out-of-plane Verschiebungsfeld nach



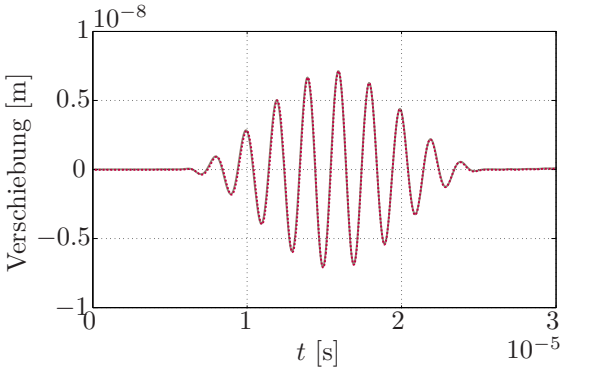
(a) In-plane Verschiebungsfeld nach 30 µs.



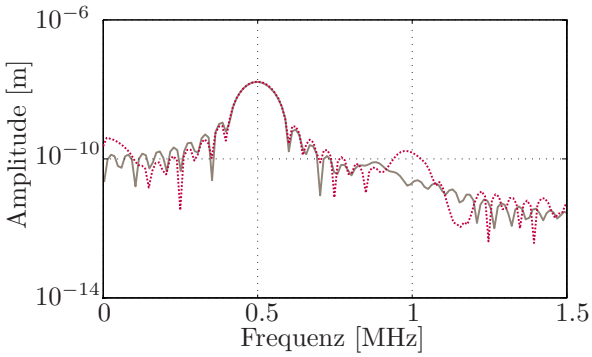
(b) Out-of-plane Verschiebungsfeld nach 30 µs.



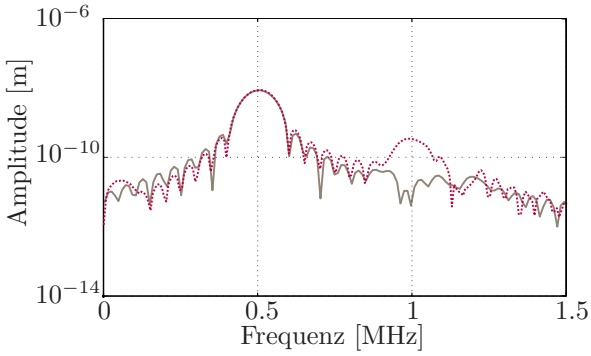
(c) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm.



(d) Out-of-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm.



(e) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(f) Frequenzanalyse des out-of-plane Zeitsignals.

Abbildung 5.11: Vergleich des Verschiebungsfeldes und der darin enthaltenen Frequenzanteile in einem transversal-isotropen linearen und nichtlinearen Medium bei 500 kHz.

30 µs. In beiden Komponenten des Verschiebungsfeldes sind die generierten fundamentalen Moden zu erkennen. Zunächst wird die schnellere S_0-Mode mit der größeren Wellenlänge und der dominierenden in-plane Verschiebungskomponente aufgezeichnet, dahinter folgt die langsamere A_0-Mode mit der deutlich kürzeren Wellenlänge und der ausgeprägteren out-of-plane Verschiebungskomponente. Vergleicht man die Ausbreitung in dem linearen Medium mit der nichtlinearen Wellenausbreitung, sind keine signifikanten Unterschiede zu erkennen. Die Wellen breiten sich in beiden Medien mit identischer Amplitude, Wellenlänge, Phase und Geschwindigkeit aus. In Abbildung 5.11(c) und 5.11(d) sind als nächstes die Zeitsignale für die in- und out-of-plane Bewegung nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm gegeben. Die Zeitschriebe enthalten dementsprechend nur die symmetrische Mode, die antisymmetrische Mode hat sich auf Grund der deutlich geringeren Gruppengeschwindigkeit noch nicht so weit ausgebreitet. Auch in der zeitlichen Auflösung der Wellenausbreitung ist kein Unterschied zwischen den beiden Verschiebungsfeldern zu erkennen. Betrachtet man hingegen in einem letzten Schritt die Frequenzanteile der symmetrischen Mode in Abbildung 5.11(e) und 5.11(f), so ist ersichtlich, dass im Gegensatz zu der linearen Wellenausbreitung die Verwendung des nichtlinearen hyperelastischen Materialmodells zu einer Generierung von höher harmonischen Moden führt. Diese ist charakterisiert durch den zusätzlichen Frequenzanteil bei 1 MHz, welcher sowohl in der in-plane als auch der out-of-plane Verschiebung enthalten ist.

Die Ergebnisse der dynamischen Validierung zeigen somit, dass das präsentierte hyperelastische nichtlineare Materialmodell zunächst auch physikalisch richtige Ergebnisse für die Simulation der Wellenausbreitung liefert. Ferner führt dieses Material zu dem erwarteten nichtlinearen Verhalten der Wellenausbreitung, charakterisiert durch die Entstehung höher harmonischer Moden. Basierend auf diesen Erkenntnissen für die Ausbreitung der fundamentalen Lamb-Wellenmoden wird im nächsten Schritt die Leistungsflussbedingung auch numerisch ausgewertet.

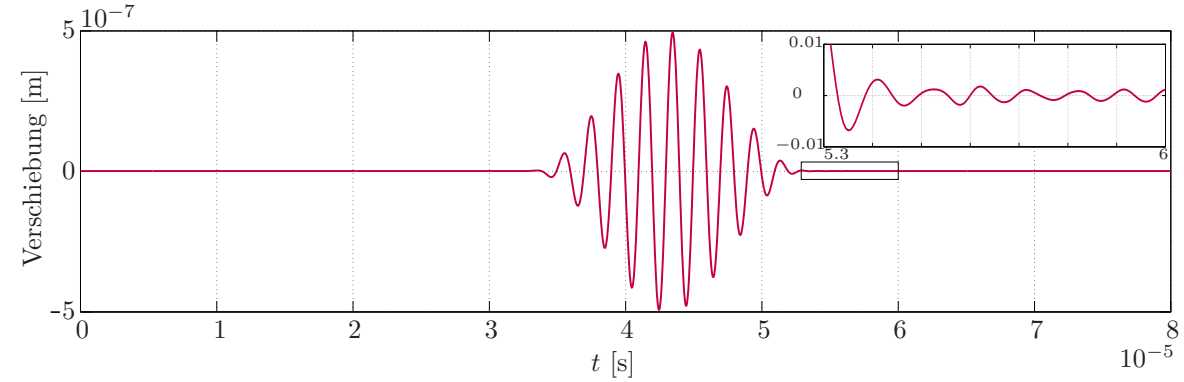
5.2.3 Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung

Im Folgenden wird das Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode numerisch untersucht und die Dispersionslänge bestimmt, um diese anschließend mit dem theoretischen Wert nach (2.151) zu vergleichen. Abschließend erfolgt auch hier, wie bereits zuvor bei der isotropen Modellbildung, die Diskussion einer möglichen quasi kumulativen Wellenausbreitung im niederfrequenten Bereich.

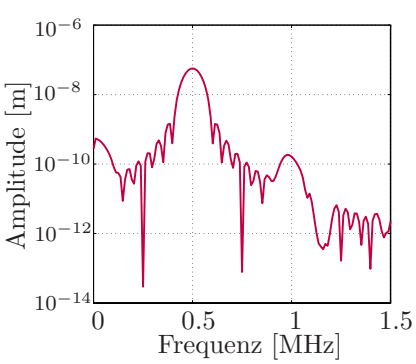
5.2.3.1 Numerisches Modell und Simulation

Um die Leistungsflussbedingung für das vorgestellte nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Materialmodell numerisch zu untersuchen, wird ebenfalls das oszillierende Verhalten des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz untersucht. Dazu kommt das in Kapitel 5.1.2.2 vorgestellte, zweidimensionale Modell zur Anwendung. Auf Grund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten zwischen unidirektionalem CFK und Aluminium bei 1 MHz ergibt sich zunächst für die maximale Elementgröße die Randbedingung

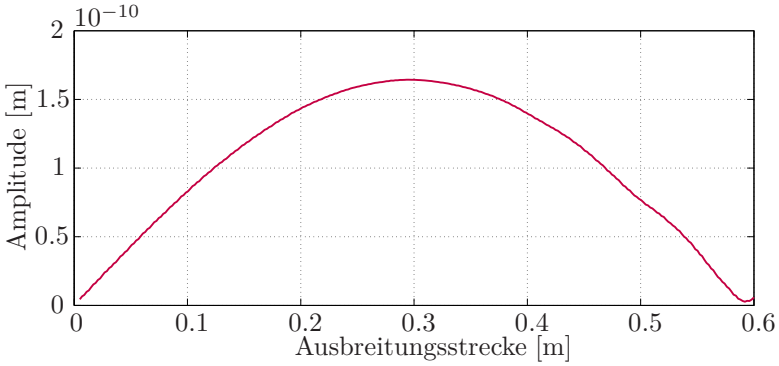
$$\Delta I_{\max} = \frac{\lambda_{S_0^{2\omega}}}{8} = 1.13\,\mathrm{mm}. \tag{5.56}$$



(a) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.30 m.



(b) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(c) Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode mit zunehmender Ausbreitungsstrecke.

Abbildung 5.12: Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz unter Verwendung der vorgestellten transversal-isotropen Potentialfunktion.

Um die Mindestanzahl der Elemente über die Bauteildicke mit zu berücksichtigen, folgt auch hier eine maximale Elementgröße von $\Delta I_{\max} = 0.25\,\text{mm}$. Somit können für die Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung in unidirektionalem CFK die Parameter aus Tabelle 5.2 bezüglich des numerischen Modells und der Anregung übernommen werden. Allerdings wird auf Grund der zu erwartenden Dispersionslänge der Auswertungsbereich von 0.35 m auf 0.6 m vergrößert, so dass eine Auswertung an insgesamt 4797 Knoten erfolgt.

Als Materialmodell kommt die vorgestellte nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Potentialformulierung zur Anwendung, wobei auch hier zunächst der Parameter K mit dem Kompressionsmodul für Epoxidharz gleichgesetzt wird. Es gelten demnach die in Tabelle 5.5 aufgeführten Materialparameter.

5.2.3.2 Analyse des Amplitudenverhaltens

In Abbildung 5.12 sind die Ergebnisse der numerischen Simulation zur Untersuchung des Amplitudenverhaltens dargestellt. Analog zu dem Vorgehen für isotropes nichtlineares Material sind dazu ein Zeitschrieb der in-plane Bewegung und das dazu gehörige Er-

gebnis der FFT sowie das Amplitudenverhalten mit zunehmender Ausbreitungsstrecke dargestellt. Zunächst zeigt Abbildung 5.12(b), dass das Zeitsignal auf Grund der materiellen Nichtlinearität eine zusätzliche Frequenzkomponente bei 1 MHz enthält. Die Existenz des sekundären Wellenfeldes kann auch dem Zeitschrieb aus Abbildung 5.12(a) entnommen werden. Indikator dafür ist ein zusätzliches Wellenpaket mit einer sehr geringen Amplitude, welches hinter dem primären, deutlich sichtbaren Wellenfeld entsteht. Teile dieses entstandenen sekundären Wellenfeldes sind in Abbildung 5.12(a) durch den hervorgehobenen Ausschnitt des Zeitsignals sichtbar gemacht. Darüber hinaus ist auch hier eine geringfügige Abweichung der Frequenz des sekundären Wellenfeld festzustellen. Der Maximalwert der Amplitude liegt bei einer Frequenz von 0.985 MHz. Daraus resultiert nach (2.151) eine analytische Dispersionslänge von 1.2 m. Als numerisches Ergebnis kann aus Abbildung 5.12(c) für die halbe Dispersionslänge der Wert 0.591 m abgelesen werden. Somit stimmen der analytische und numerische Wert für die Dispersionslänge sehr gut über ein (1.5% Abweichung). Die, im Vergleich zur isotropen Betrachtung, bessere Übereinstimmung kann vor allem auf das weniger ausgeprägte dispersive Verhalten der generierten höher harmonischen Mode in dem zugehörigen Frequenzbereich zurückgeführt werden.

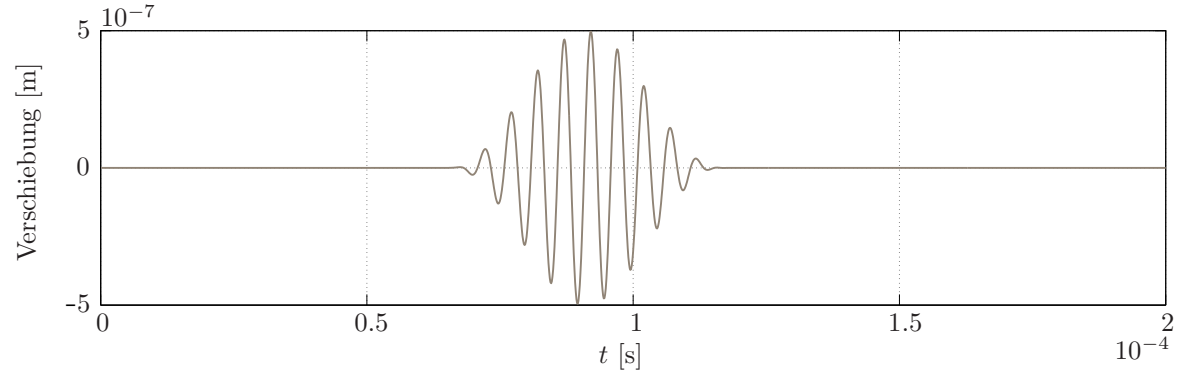
5.2.3.3 Quasi kumulative Wellenausbreitung

Nach der Analyse des Amplitudenverhaltens des S_0-S_0 Modenpaars und der Diskussion des oszillierenden Verhaltens soll auch für transversal-isotropes Materialverhalten die Möglichkeit der quasi kumulativen Wellenausbreitung im niederfrequenten Bereich beleuchtet werden. Betrachtet man hierzu nochmal Abbildung 3.8, wird ersichtlich, dass gerade dieses Modenpaar im niederfrequenten Bereich der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit sehr nahe kommt. Die S_0-Mode besitzt dazu über einen Bereich von fast 300 kHz eine nahezu horizontale Tangente, was die Möglichkeit der quasi kumulativen Wellenausbreitung stark begünstigt und den geeigneten Frequenzbereich erhöht. Um dies genauer zu analysieren sind in Tabelle 5.6 für den Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz die Phasengeschwindigkeiten der primären und sekundären S_0-Mode und die zugehörige Dispersionslänge nach (2.151) aufgeführt. Es zeigt sich, dass ausgehend von der bisher betrachteten Anregungsfrequenz von 500 kHz schon eine geringfügige Reduzierung zu einem signifikanten Anstieg der Dispersionslänge führt. Vergleicht man diese Entwicklung der Dispersionslänge mit den Werten aus Tabelle 5.4 für Aluminium, wird ersichtlich, dass der geeignete Frequenzbereich zur Anwendung der quasi kumulativen Wellenausbreitung bei transversal-isotropem Material in Faserrichtung deutlich größer ist. Allerdings muss hierbei immer die Ausbreitungsrichtung mit berücksichtigt werden, da diese einen maßgeblichen Einfluss auf die Gestalt der Dispersionsdiagramme hat.

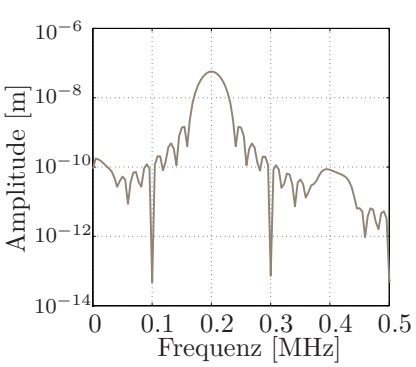
Für die numerische Untersuchung der quasi kumulativen Wellenausbreitung, wird auch hier eine Anregungsfrequenz von 200 kHz bei identischem numerischem Modell verwendet. Die Ergebnisse der Auswertung können Abbildung 5.13 entnommen werden. Abbildung 5.13(a) und 5.13(b) zeigen das Zeitsignal der in-plane Bewegung und die darin enthaltenen Frequenzanteile mit dem Anteil des sekundären Wellenfeldes bei 400 kHz. Wertet man das Amplitudenverhalten wie zuvor bei 500 kHz über eine Laufstrecke von 0.6 m aus, ist in Abbildung 5.13(c) deutlich der lineare Anstieg der höher harmonischen Amplitude

Tabelle 5.6: Phasengeschwindigkeiten und die zugehörigen Dispersionslängen für das S_0-S_0 Modenpaar in einem Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz .

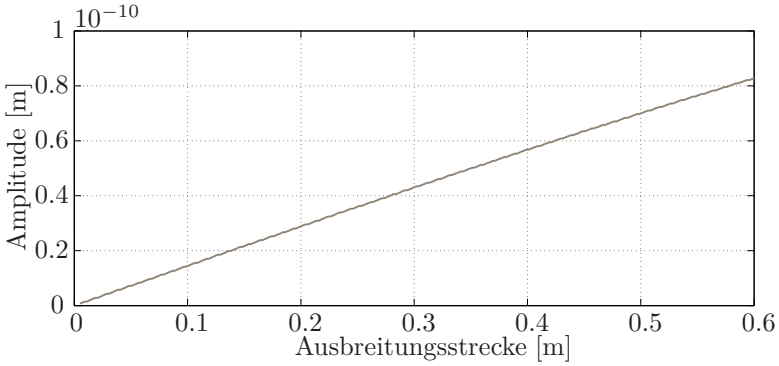
f	c_{p}^{ω} [m s^{-1}]	$c_{\mathrm{p}}^{2\omega}$ [m s^{-1}]	L [m]
500	9111	9034	1.07
400	9114	9091	4.50
300	9116	9107	15.6
200	9117	9114	65.5
100	9118	9117	589



(a) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.60 m.



(b) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(c) Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode mit zunehmender Ausbreitungsstrecke.

Abbildung 5.13: Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 200 kHz unter Verwendung der vorgestellten transversal-isotropen Potentialfunktion.

erkennbar. Approximiert man dieses Verhalten mit Hilfe einer linearen Funktion unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0.9996$. Somit ist das S_0-S_0 Modenpaar sehr gut für die Anwendung der quasi kumulativen Wellenausbreitung geeignet. Ferner deckt die betrachtete quasi kumulative Ausbreitungsstrecke von 0.6 m übliche experimentell untersuchte Bereiche ab, so dass auch eine experimentelle Umsetzung dieser Methode möglich ist.

5.2.4 Analyse der Abbildung des nichtlinearen Verhaltens im Stoffgesetz

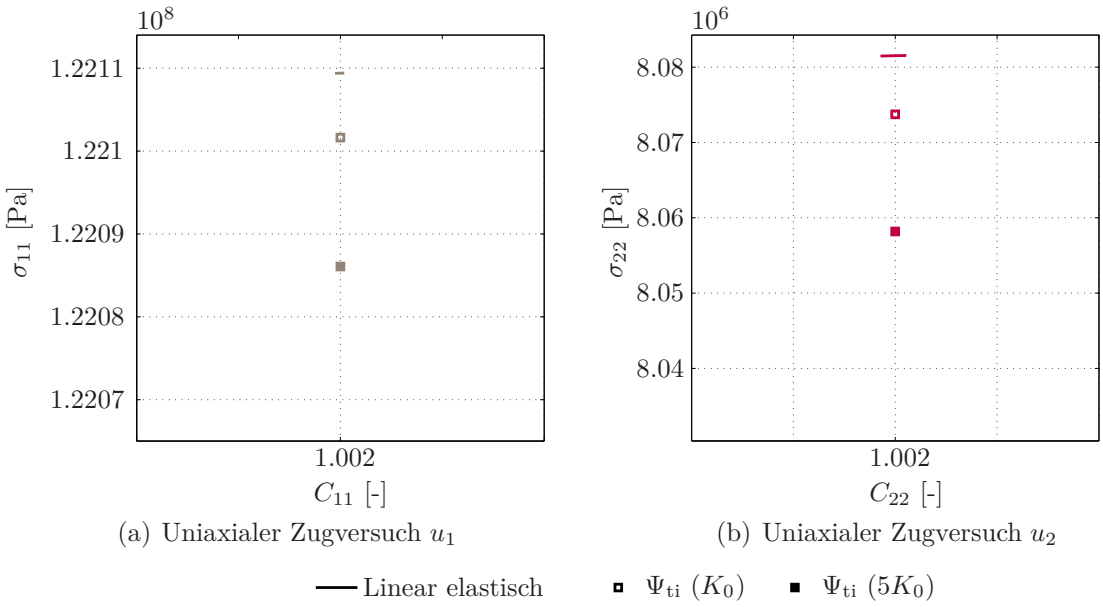
In einem letzten Schritt erfolgt die Analyse der Abbildung des nichtlinearen Materialverhaltens in dem vorgestellten Stoffgesetz. Dazu wird der maßgeblich daran beteiligte Materialparameter K variiert und die daraus resultierende Veränderung des nichtlinearen Verhaltens untersucht. Dies erfolgt analog zu dem in Kapitel 5.2.2 durchgeführten Validierungsablauf. Dementsprechend wird zunächst eine statische Betrachtung mit einer Variation von K durchgeführt, bevor das dynamische Verhalten bei der Wellenausbreitung der beiden fundamentalen Moden A_0 und S_0 für unterschiedliche Werte von K ausgewertet und abschließend das Amplitudenverhalten in Abhängigkeit von K analysiert wird.

5.2.4.1 Statische Analyse

Aus der Belegung des Elastizitätstensors für das entwickelte hyperelastische nichtlineare Stoffgesetz aus (5.36) geht hervor, das der von der Deformation des Körpers abhängige Teil mit dem Materialparameter K verknüpft ist. Da das Potential dieses Materialmodells über sechs unabhängige Materialparameter verfügt, muss zur Bestimmung dieser Größen ein Parameter gewählt werden, um anschließend einen Koeffizientenvergleich mit dem linear elastischen Elastizitätstensor durchführen zu können. Hierfür wurde ebenfalls der Parameter K verwendet. Als einen ersten Anhaltspunkt und aus einer physikalischen Betrachtung heraus erfolgte die Wahl $K = K_0 = 3.89\,\text{GPa}$. Um nun das nichtlineare Verhalten genauer zu untersuchen, werden analog zu Kapitel 5.2.2.1 die statischen Zug- und Schubversuche für unterschiedliche Werte von K durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen. Dazu sind in Abbildung 5.14 die Punkte aus den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen für den uniaxialen Zugversuch bei 0.2% Dehnung in Faserrichtung und quer zu dieser erneut dargestellt. Neben den bereits bekannten Ergebnissen für $K = K_0$ sind zusätzlich noch Werte für $K = 5K_0$ in den Diagrammen enthalten. Es ist zu erkennen, dass die Vergrößerung von K zu einer deutlichen Reduzierung der Spannungen bei konstanter Dehnung führen. Das statische nichtlineare Verhalten ist somit, wie zu erwarten, eindeutig von dem Materialparameter K abhängig. Eine Übersicht der Materialparameter für $K = 5K_0$ ist in Tabelle 5.7 gegeben.

Tabelle 5.7: Materialparameter c_i für das hyperelastische nichtlineare Materialmodell mit $K = 5K_0$.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	K
$-1.418\,\text{GPa}$	$-1.875\,\text{GPa}$	$13.66\,\text{GPa}$	$1.25\,\text{GPa}$	$0.568\,\text{GPa}$	$19.45\,\text{GPa}$



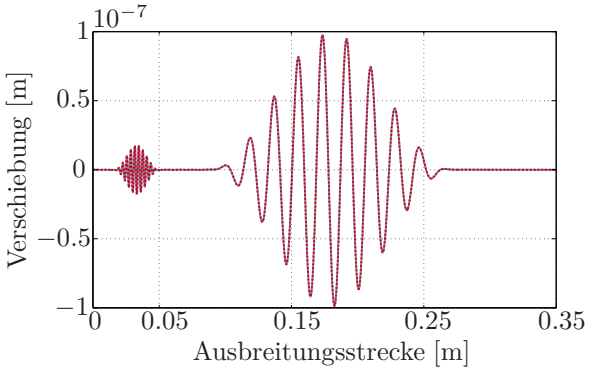
(a) Uniaxialer Zugversuch u_1 (b) Uniaxialer Zugversuch u_2

Abbildung 5.14: Analyse der Einflusses von K auf das Verhalten des hyperelastischen Materials bei einem Zugversuch in Faserrichtung und quer dazu.

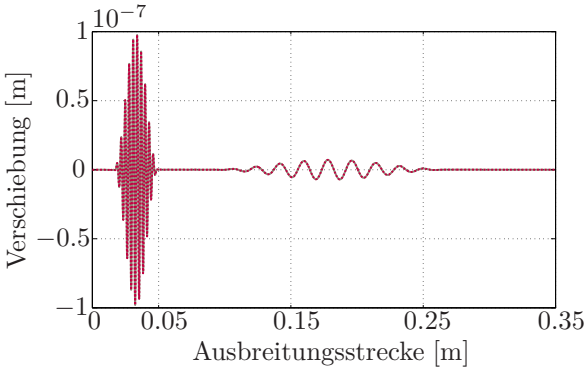
5.2.4.2 Dynamische Analyse

Fundamentale Moden Führt man unter Verwendung desselben numerischen Modells aus Kapitel 5.2.2.2 die numerische Simulation der fundamentalen Moden mit den in Tabelle 5.7 gegebenen Materialparametern durch und vergleicht diese mit den bekannten Lösungen für die nichtlineare Wellenausbreitung mit $K = K_0$, erhält man die in Abbildung 5.15 gegebenen Ergebnisse. Wie auch schon während des Validierungsprozesses in Kapitel 5.2.2.2 sind auch hier zunächst das in- und out-of-plane Verschiebungsfeld nach 30 µs in Abbildung 5.15(a) und 5.15(b) dargestellt. Für $K = 5K_0$ sind ebenfalls die typischen Charakteristika der Ausbreitung von Lamb-Wellen zu erkennen, so dass kein signifikanter Unterschied der Verschiebungsfelder in Abhängigkeit des Parameters K zu beobachten ist. Dies wird untermauert von der Darstellung der in- und out-of-plane Verschiebungskomponente der S_0-Mode nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm in Abbildung 5.15(c) und 5.15(d). Die Wellenfelder weisen keine erkennbaren Abweichungen untereinander auf.

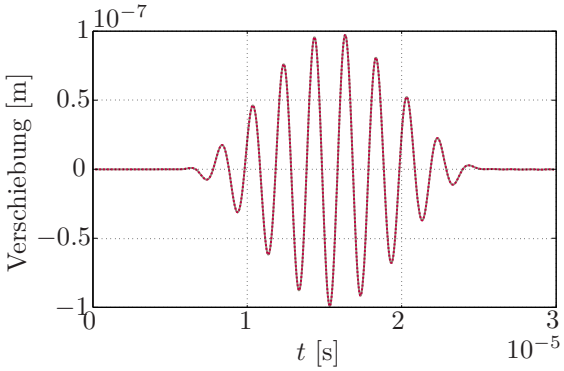
Führt man hingegen für die Wellenausbreitung basierend auf $K = 5K_0$ ebenfalls eine FFT durch und vergleicht das Frequenzspektrum mit den Ergebnissen für $K = K_0$, ist die Beeinflussung des nichtlinearen Verhaltens der Wellenausbreitung zu erkennen. Dabei resultiert ein größerer Wert von K in einer Verringerung der Amplitude des sekundären Wellenfeldes. Dieses Verhalten scheint auf den ersten Blick nicht den Erwartungen zu entsprechen. Ausgehend von den experimentellen Untersuchungen wird ein größerer Schädigungsgrad der Struktur mit einem ausgeprägteren nichtlinearen Verhalten der Wellenausbreitung und damit einhergehend einer größeren Amplitude der höher harmonischen Mode verbunden. Allerdings ist zu beachten, dass für die hier vorgestellten numerischen Simulationen die Anregung des primären Wellenfeldes weggesteuert umgesetzt ist. Ver-



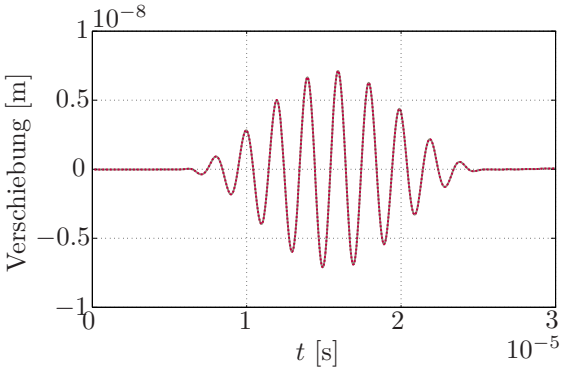
(a) In-plane Verschiebungsfeld nach 30 µs.



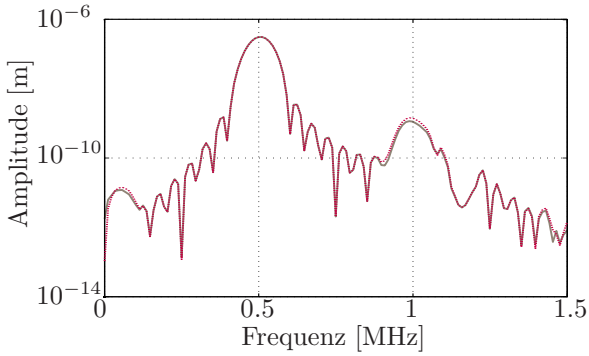
(b) Out-of-plane Verschiebungsfeld nach 30 µs.



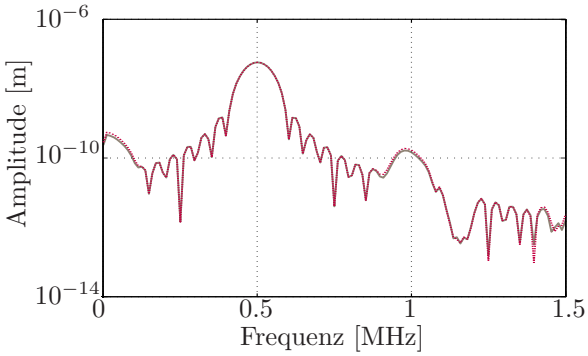
(c) In-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm.



(d) Out-of-plane Zeitsignal nach einer Ausbreitungsstrecke von 5 mm.



(e) Frequenzanalyse des in-plane Zeitsignals.



(f) Frequenzanalyse des out-of-plane Zeitsignals.

$\Psi_{\mathrm{ti}}(K = K_0)$ $\Psi_{\mathrm{ti}}(K = 5K_0)$

Abbildung 5.15: Analyse des Einflusses von K auf die nichtlineare Wellenausbreitung bei 500 kHz.

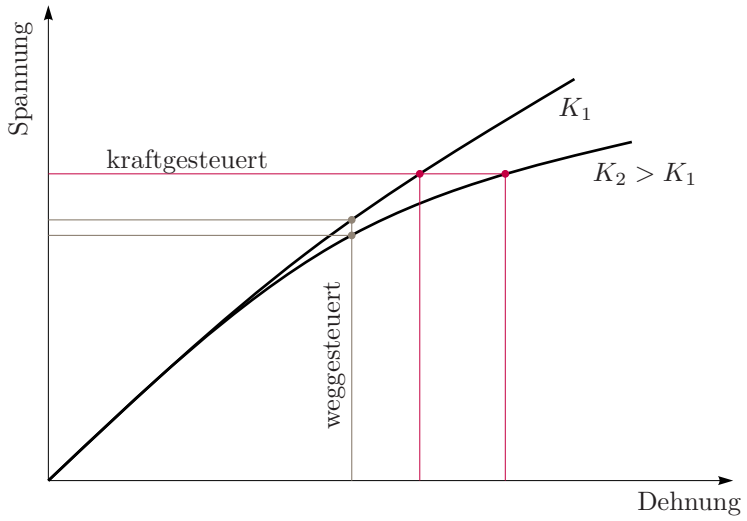


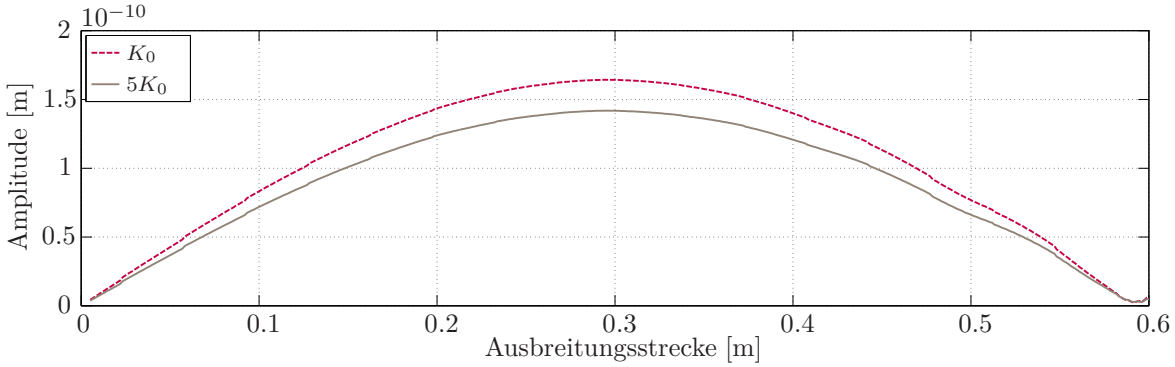
Abbildung 5.16: Einfluss der materiellen Nichtlinearität auf die Wellenausbreitung bei weg- bzw. kraftgesteuerter Anregung.

knüpft man dies mit dem statischen Verhalten des nichtlinearen Materialmodells, führt ein höherer Wert für K zunächst zu einem ausgeprägteren nichtlinearen Verhalten, welches durch eine Reduzierung des vorherrschenden Spannungszustandes bei gleicher Verformung gekennzeichnet ist, vgl. Abbildung 5.14(a). Ausgehend von dem niedrigeren Spannungsniveau folgt aus (2.81) eine weniger stark ausgeprägte Anregung des sekundären Wellenfeldes und damit einhergehend eine kleiner Amplitude der höher harmonischen Mode. Bei einer kraftgesteuerten Anregung hingegen führt ein größerer Wert für den Parameter K zu einer größeren Verformung bei einem gleichbleibenden Spannungsniveau. Dies führt zu einer größeren Anregungsamplitude und damit zu einem Zuwachs der höher harmonischen Amplitude. In Abbildung 5.16 ist der Unterschied zwischen einer kraft- und weggesteuerten Anregung bei unterschiedlich stark ausgeprägtem nichtlinearem Materialverhalten verdeutlicht.

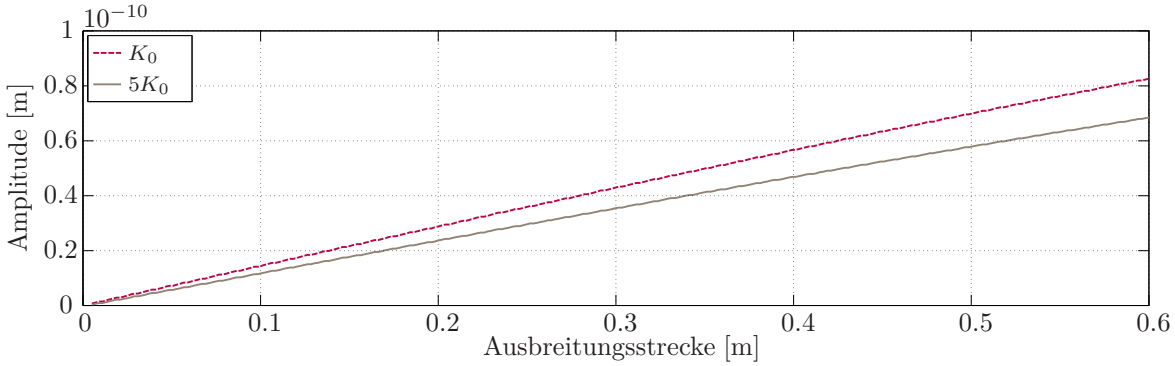
Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode Abschließend wird der Einfluss des Parameters K auf das Amplitudenverhalten der höher harmonischen Mode untersucht. Dazu werden die zuvor gewonnenen Erkenntnisse aus Kapitel 5.2.3 für $K = K_0$ bei 200 kHz und 500 kHz mit den Ergebnisse für $K = 5K_0$ verglichen. Als Simulationsgrundlage dient dasselbe numerische Modell, wie es auch für $K = K_0$ verwendet wurde.

In Abbildung 5.17 sind die Verläufe der Amplitude mit zunehmender Ausbreitungsstrecke für die beiden Anregungsfrequenzen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Parameter K keinen Einfluss auf die Dispersionslänge bei 500 kHz hat, vgl. Abbildung 5.17(a). Einzig die Amplitude wird in der bereits diskutierten Weise beeinflusst, so dass die maximale Amplitude mit größer werdendem K auf Grund der weggesteuerten Anregung abnimmt. Dieselben Schlussfolgerungen können auch für das Amplitudenverhalten bei 200 kHz gezogen werden, wie in Abbildung 5.17(b) zu erkennen.

Somit kann festgehalten werden, dass der Parameter K maßgeblich das nichtlineare Verhalten bezüglich der Amplitude beeinflusst und wie die Steifigkeiten dritter Ordnung als



(a) 500 kHz.



(b) 200 kHz.

Abbildung 5.17: Analyse des Einflusses von K auf die Amplitude der höher harmonischen Mode.

Schädigungsparameter zur Modellierung der nichtlinearen Wellenausbreitung verwendet werden kann.

5.3 Fazit

Die numerische Simulation der Wellenausbreitung in isotropen Strukturen zeigt, dass die bekannten und weit verbreiteten hyperelastischen Materialmodelle Neo-Hooke und Mooney-Rivlin geeignete Alternativen zu der nichtlinearen Potentialformulierung nach Murnaghan sind. Das sekundäre Wellenfeld entsteht auf Grund der materiellen Nichtlinearität, wobei die Amplitude auf Grund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten der primären und sekundären Mode des S_0-S_0 Modenpaares ein oszillierendes Verhalten aufweist und die sich ergebene Dispersionslänge mit dem theoretischen Wert gut übereinstimmt.

Die anschließende Modellierung von nichtlinearem transversal-isotropem Materialverhalten mit Hilfe einer nichtlinearen Potentialformulierung, welche kompressible Effekte berücksichtigt ohne dabei die modifizierten Invarianten zu verwenden, ist zumindest für den zweidimensionalen Fall eine geeignete Alternative gegenüber der Potentialformulierung von Murnaghan zur Modellierung von unidirektionalen Faserverbundstrukturen. Sowohl die statische als auch dynamische Validierung dieses Materialmodells führen zu

physikalisch sinnvollen und in Hinblick auf die lineare Theorie zu vergleichbaren Ergebnissen, wobei der nichtlineare Anteil zu einer Materialdegradation führt und zusätzlich höher harmonische Anteile im Frequenzsprektum bei der Wellenausbreitung verursacht. Auch hier wird eine gute Übereinstimmung zwischen der theoretischen und numerisch bestimmten Dispersionslänge festgestellt. Im Gegensatz zu der Erweiterung der nichtlinearen Potentialformulierung nach MURNAGHAN ist das nichtlineare Materialverhalten allerdings nur durch einen anstatt neun Parametern charakterisiert. Mit Hilfe dieses Koeffizienten kann das nichtlineare Verhalten des Materialmodells beeinflusst werden. Dieses Materialmodell stellt somit eine sehr gute Alternative zur Simulation der nichtlinearen LAMB-Wellenausbreitung in unidirektionalen Faserverbundstrukturen entlang einer Symmetrieachse dar.

Zusätzlich führen die Untersuchungen der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Grundlage des S_0-S_0 Modenpaares zu der Erkenntnis, dass eine Reduzierung der Anregungsfrequenz und der damit verbundenen steigenden Dispersionslänge über eine signifikante Ausbreitungsstrecke zu einer quasi kumulativen Ausbreitung der sekundären S_0-Mode führt.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit ist es, die Anwendbarkeit der nichtlinearen Wellenausbreitung unter Verwendung von Lamb-Wellen als zerstörungsfreie Prüfmethode für FVK Bauteilen zu analysieren. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Detektierbarkeit von mikrostrukturellen Schäden und der daraus resultierenden Werkstoffdegradation auf Grund einer zyklischen Zugbeanspruchung in unidirektionalem CFK. Neben der experimentellen Analyse umfasst dies auch die numerische Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung unter Verwendung eines geeigneten hyperelastischen Stoffgesetzes für FVK. Die Untersuchungen beschränken sich dabei auf unidirektionales CFK, wobei die Fasern in Probenlängsrichtung orientiert sind.

Die durchgeführten experimentellen Untersuchungen gliedern sich in drei Abschnitte, die Schädigung der Proben, die Analyse der Wellenausbreitung und die Bestimmung der Werkstoffdegradation infolge der zyklischen Zugbeanspruchung. Das durch die zyklische Zugbeanspruchung in Faserrichtung generierte Schadensmuster weist überwiegend Risse in Faserrichtung auf, welche auf Grund des Versagens der Vernähungen zwischen den einzelnen Prepreglagen entstehen. Die Anzahl der Lastwechsel ist dabei nicht ausschlaggebend für den Grad der Schädigung. Dieser wird vielmehr maßgeblich durch die Initialschädigung infolge der nach wenigen Lastwechseln versagenden Vernähungen beeinflusst. In einem zweiten Schritt erfolgt die Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung. Dazu wird mittels eines piezoelektrischen Aktors ein Wellenfeld angeregt und dieses anschließend mittels eines piezoelektrischen Sensors wieder aufgezeichnet. Die Auswertung der aufgezeichneten Signale bestätigt die Existenz höher harmonischer Moden auf Grund der mikrostrukturellen Schädigung in den Proben. Ein Rückschluss auf die Anzahl der Lastzyklen durch die Wellenausbreitung ist dabei nicht möglich. Des Weiteren werden durch die unabhängige Untersuchung mehrerer Probensätze mögliche äußere Einflüsse auf die Versuchsanordnung ausgeschlossenen, da kein signifikanter Unterschied zwischen den Ergebnissen der einzelnen Probensätzen zu erkennen ist. Um die Werkstoffdegradation zu ermitteln erfolgt im letzten Schritt die Elastizitätsmodulbestimmung für die einzelnen Proben. Auf Grundlage dieser Ergebnisse führt eine Korrelationsanalyse zu der Erkenntnis, dass eine stärkere Ausprägung des sekundären Wellenfeldes, gekennzeichnet durch einen größeren relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter, mit einer zunehmenden Werkstoffdegaradation korreliert. Somit deuten die experimentellen Untersuchungen an, dass mit Hilfe der nichtlinearen Wellenausbreitung eine mögliche Werkstoffdegradation auf Grund der Strukturschädigung detektiert werden kann.

Im Anschluss an die experimentellen Untersuchungen werden die Ergebnisse mit Hilfe numerischer Simulationen diskutiert und die Schlussfolgerungen verifiziert. In einem ersten Schritt erfolgt dazu die Umsetzung der Probekörperquerschnitte in ein zweidimen-

sionales Modell, welches auf Grundlage von Mikroskopaufnahmen mikrostrukturelle Risse mit den zugehörigen Kontaktbedingungen enthält. Die numerische Simulation der Wellenausbreitung bestätigt die Generierung höher harmonischer Moden auf Grund dieser Risse. Dabei haben sowohl die Ausdehnung eines einzelnen Risses als auch deren Anzahl einen Einfluss auf die Ausprägung des sekundären Wellenfeldes. Statische Simulationen zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls der geschädigten Struktur zeigen allerdings, dass die horizontal orientierten Risse die Steifigkeit des Probekörpers nur lokal beeinflussen, sie haben aber keinen im Experiment messbaren Einfluss auf den Elastizitätsmodul. Daraus ergibt sich, dass die experimentell beobachtbare Werkstoffdegradation auf mikrostrukturelle Veränderungen zurück zu führen ist, welche auf den Mikroskop- und CT-Aufnahmen sowie durch die Ultraschalluntersuchung nicht detektierbar sind. Weitere Einflussfaktoren wie z.B. ein unterschiedlicher Faservolumengehalt der einzelnen Proben können ausgeschlossen werden.

Um die mikrostrukturellen Schädigungen in der numerischen Simulation und die daraus resultierende Entstehung eines sekundären Wellenfeldes abbilden zu können, bedarf es eines nichtlinearen Materialmodells. Die bisher veröffentlichten Simulationsergebnisse beruhen dabei alle auf der nichtlinearen Potentialformulierung von Murnaghan. Da diese in keiner der weit verbreiteten FE-Programme implementiert ist, wird zunächst für isotropes Materialverhalten ein Ansatz präsentiert, welcher auf bekannten und implementierten Potentialformulierungen beruht. Es wird gezeigt, dass die beiden hyperelastischen Materialmodelle Neo-Hooke und Mooney-Rivlin dazu verwendet werden können, um die Entstehung und Ausbreitung eines sekundären Wellenfeldes auf Grund des nichtlinearen Materialverhaltens in isotropen Strukturen numerisch abzubilden. Die analytisch nachgewiesene Existenz eines Leistungsflusses wird durch die numerische Simulation bestätigt. Anstelle eines kumulativen Modenpaares wird allerdings das S_0-S_0 Modenpaar bei 500 kHz verwendet. Die daraus resultierende Dispersionslänge der oszillierenden höher harmonischen Amplitude stimmt mit dem theoretischen Wert sehr gut über ein. Zusätzlich wird gezeigt, dass durch eine Reduzierung der Anregungsfrequenz und der damit verbundenen geringeren Abweichung der beiden Phasengeschwindigkeiten des primären und sekundären Wellenfeldes die Dispersionslänge zunimmt. Bei einer Anregungsfrequenz von 200 kHz resultiert daraus bereits für eine Ausbreitungsstrecke von 0.35 m ein quasi kumulatives Verhalten.

Die gewonnen Erkenntnisse werden in einem letzten Schritt auf die Anwendung bei transversal-isotropen Materialverhalten übertragen. Allerdings ist an dieser Stelle die Verwendung von bereits implementierten Potentialfunktionen nicht möglich, da diese in Abhängigkeit der modifizierten Invarianten formuliert sind. Die Verwendung dieser Invarianten kann zu physikalisch nicht sinnvollen Ergebnissen führen, da sich nur vier statt fünf unabhängige Materialparameter ergeben. Auf Grund dessen wird eine neue Potentialformulierung präsentiert, mit deren Hilfe das nichtlineare Materialverhalten von FVK abgebildet werden kann und gleichzeitig die Anzahl der unabhängigen Materialparameter im Vergleich zur Erweiterung der Formulierung nach Murnaghan reduziert wird. Für diese komplexe Formulierung mit insgesamt 14 unabhängigen Materialparametern ist es bis heute nicht gelungen, alle nichtlinearen Materialparameter experimentell zu bestimmen. Ausgangspunkt der neuen Potentialformulierung bildet die lineare Beschreibung

transversal-isotropen Materialverhaltens in Abhängigkeit des rechten Cauchy-Green Deformationstensors nach Reese [123], wobei diese keine kompressiblen Effekte berücksichtigt. Da allerdings zumindest das Matrixmaterial mit einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.35 - 0.4$ kompressible Effekte aufweist und diese Eigenschaft durch die Fasern nicht verändert wird, wird ein zusätzlicher, kompressibler Term an die lineare Formulierung additiv ergänzt. Das daraus resultierende Potential beschreibt nunmehr nichtlineares Materialverhalten. Statische und dynamische Validierungen des neuen Materialmodells auf Grundlage eines zweidimensionalen numerischen Modells führen zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen, wobei der nichtlineare Effekt bei der statischen Analyse zu größeren Dehnungen bei gleichbleibender Spannung führt. Bei der dynamischen Validierung ist zunächst kein Unterschied zu der Wellenausbreitung in einem linearen Medium zu erkennen. Allerdings entsteht im Frequenzspektrum ein zusätzlicher, höher harmonischer Anteil. Somit ist es möglich dieses Materialmodell für die Simulation der Entstehung und Ausbreitung höher harmonischer Moden zu verwenden. Die analytisch bewiesene Existenz eines Kraftflusses wird durch die numerische Simulation auf Grundlage des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz bestätigt. Ferner wird auch hier gezeigt, dass eine Reduzierung der Anregungsfrequenz zu einem quasi kumulativen Ausbreitungsverhalten über eine signifikante Ausbreitungsstrecke führt. Das präsentierte Materialmodell ist somit geeignet, die nichtlineare Wellenausbreitung auf Grund mikrostruktureller Schädigungen, welche eine Werkstoffdegradation zur Folge haben, abzubilden.

Zusammenfassend zeigen die experimentellen und numerischen Untersuchungen, dass die Verwendung der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Grundlage der Entstehung kumulativ höher harmonischer Moden ein geeigneter Ansatz ist, um mikrostrukturelle Schädigungen auch in Faserverbundbauteilen auf Grund von Ermüdungserscheinungen zu detektieren und zu überwachen. Ferner ermöglicht die vorgestellte hyperelastische Potentialformulierung die numerische Simulation der Entstehung und Ausbreitung eines sekundären Wellenfeldes auf Grund der materiellen Nichtlinearität in transversal-isotropen Strukturen.

Ausgehend von den hier präsentierten Untersuchungsergebnissen ergeben sich eine Reihe neuer forschungsrelevanter Fragestellungen. Diese beinhalten zunächst die Validierung der formulierten Potentialfunktion für den dreidimensionalen Fall, was in einem weiteren Schritt auf der einen Seite die Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung unter Einbeziehung von SH-Wellen ermöglicht. Auf der anderen Seite kann der Ansatz dann auch auf die Wellenausbreitung außerhalb der Symmetrierichtung und für geschichtete Strukturen mit unterschiedlich ausgerichteten unidirektionalen Schichten erweitertet werden. In diesen Fällen ist auf Grund der Kopplung von Lamb- und SH-Wellen eine zweidimensionale Betrachtung nicht mehr ausreichend. Zusätzlich bieten die hier vorgestellten Ergebnisse der numerischen Simulation die Möglichkeit der Reduzierung des experimentellen Aufwandes bei der Betrachtung der nichtlinearen Wellenausbreitung. Bei der Verwendung kumulativer Modenpaare werden auf Grund der multimodalen Eigenschaft von Lamb-Wellen bei der Anregung des primären Wellenfeldes eine Reihe weiterer Moden erzeugt, welche für die Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung nicht von Bedeutung sind. Darüber hinaus sind die kumulativen Modenpaare mit einem hohen Frequenz-Dicken-Produkt verbunden, was zum einen eine Abtastung z.B. mittels eines Laservibrometers

unmöglich macht. Zum anderen gehen damit in der Regel elektrische und elektromagnetische Effekte einher, welche die Messsignale stark beeinflussen können. Wählt man hingegen passend zu der zu beobachtenden Ausbreitungsstrecke die Anregungsfrequenz für das S_0-S_0 Modenpaar so, dass über die Laufstrecke eine quasi kumulative Wellenausbreitung vorliegt, beschränkt sich das primäre Wellenfeld auf die beiden fundamentalen Moden S_0 und A_0. Zusätzlich kann so die Anregungsfrequenz deutlich gesenkt werden, wodurch bei ausreichender Amplitude auch andere Signalerfassungstechniken verwendet werden können.

Literaturverzeichnis

[1] J. Abdessalem, I. K. Kallel und D. Fakhreddine. „Theory and finite element implementation of orthotropic and transversely isotropic incompressible hyperelastic membrane“. In: *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures* 7.4 (2011), S. 424–439.

[2] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[3] J. Altenbach und H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart: B.G. Teubner, 1994.

[4] ANSYS, Inc., ANSYS® Acadamic Research, Release 14.5. *ANSYS Mechnical User's Guide*. 2012.

[5] B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Bd. 1. New York, NY: Wiley, 1973.

[6] B. A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*. Bd. 2. Malabar, FL: Krieger, 1990.

[7] Y. Başar und D. Weichert. *Nonlinear continuum mechanics of solids: Fundamental concepts and perspectives*. New York, Berlin, Paris [u.a.]: Springer, 2000.

[8] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin [u.a.]: Springer, 2002.

[9] R. Bechmann, R. F. S. Hearmon und S. K. Kurtz. *Elastische, piezoelektrische, pyroelektrische, piezooptische, elektrooptische Konstanten und nichtlineare dielektrische Suszeptibilitäten von Kristallen, Gruppe 3, Band 2*. Landolt-Börnstein Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik : Neue Serie. Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[10] T. Belytschko, W. K. Liu und B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd., 2000.

[11] C. Bermes, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „Experimental characterization of material nonlinearity using Lamb waves“. In: *Applied Physics Letters* 90.2 (2007), S. 021901.

[12] C. Bermes, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „Nonlinear Lamb waves for the detection of material nonlinearity“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 22.3 (2008), S. 638–646.

[13] J. Betten. *Finite Elemente für Ingenieure*. Berlin und Heidelberg: Springer, 1998.

[14] J. Betten. *Kontinuumsmechanik: Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Berlin [u.a.]: Springer, 2001.

[15] B. D. Blackburn. *Ultrasonic Determination of Combinitions of Third-Order Elastic Constants of Small Cubic Single Crystals: Office of Naval Research Technical Report 20*. Knoxville, TE, May 1981.

[16] P. J. Blatz. „On the Thermostatic Behavior of Elastomers“. In: *Polymer Networks*. Boston, MA: Springer US, 1971, S. 23–45.

[17] M. Born. *Handbuch der Physik, Band XXIV, 2. Teil*. Berlin: Springer Berlin, 1933.

[18] R. de Borst, M. A. Crisfield, J. C. Remmers und C. V. Verhoosel. *Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von Festkörpern und Strukturen*. Weinheim: Wiley, 2014.

[19] M. A. Breazeale und D. O. Thompson. „Finite-Amplitude Ultrasonic Waves in Aluminum“. In: *Applied Physics Letters* 3.5 (1963), S. 77.

[20] L. Brillouin. *Tensors in mechanics and elasticity*. New York, NY: Academic Press, 1964.

[21] D. Broda, W. J. Staszewski, A. Martowicz, T. Uhl und V. V. Silberschmidt. „Modelling of nonlinear crack–wave interactions for damage detection based on ultrasound – A review“. In: *Journal of Sound and Vibration* 333.4 (2014), S. 1097–1118.

[22] K. Brugger. „Thermodynamic Definition of Higher Order Elastic Coefficients“. In: *Physical Review* 133 (6A 1964), A1611–A1612.

[23] K. Brugger. „Determination of Third-Order Elastic Coefficients in Crystals“. In: *Journal of Applied Physics* 36.3 (1965), S. 768–772.

[24] J. H. Cantrell. „Substructural organization, dislocation plasticity and harmonic generation in cyclically stressed wavy slip metals“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 460.2043 (2004), S. 757–780.

[25] J. H. Cantrell. „Nonlinear dislocation dynamics at ultrasonic frequencies“. In: *Journal of Applied Physics* 105.4 (2009), S. 043520.

[26] J. H. Cantrell und W. T. Yost. „Determination of precipitate nucleation and growth rates from ultrasonic harmonic generation“. In: *Applied Physics Letters* 77.13 (2000), S. 1952–1954.

[27] J. H. Cantrell und W. T. Yost. „Nonlinear ultrasonic characterization of fatigue microstructures“. In: *International Journal of Fatigue* 23.1 (2001), S. 487–490.

[28] W. D. Cash und W. Cai. „Dislocation contribution to acoustic nonlinearity: The effect of orientation-dependent line energy“. In: *Journal of Applied Physics* 109.1 (2011), S. 014915.

[29] W. D. Cash und W. Cai. „Contribution of dislocation dipole structures to the acoustic nonlinearity“. In: *Journal of Applied Physics* 111.7 (2012), S. 074906.

[30] N. Chevaugeon, E. Verron und B. Peseux. „Finite Element Analysis of Nonlinear Transversaly Isotropic Hyperelastic Membranes for Thermoforming Applications“. In: *Proceedings of the European Congress on Computational Methods on Applied Sciences and Engineering*. 2000, S. 1–17.

[31] V. K. Chillara und C. J. Lissenden. „Interaction of guided wave modes in isotropic weakly nonlinear elastic plates: Higher harmonic generation“. In: *Journal of Applied Physics* 111.12 (2012), S. 124909.

[32] V. K. Chillara und C. J. Lissenden. „Nonlinear guided waves in plates: a numerical perspective“. In: *Ultrasonics* 54.6 (2014), S. 1553–1558.

[33] V. K. Chillara und C. J. Lissenden. „Review of nonlinear ultrasonic guided wave nondestructive evaluation: theory, numerics, and experiments“. In: *Optical Engineering* 55.1 (2016), S. 011002.

[34] M. Deng. „Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate“. In: *Journal of Applied Physics* 85.6 (1999), S. 3051.

[35] M. Deng. „Analysis of second-harmonic generation of Lamb modes using a modal analysis approach“. In: *Journal of Applied Physics* 94.6 (2003), S. 4152.

[36] M. Deng und J. Pei. „Assessment of accumulated fatigue damage in solid plates using nonlinear Lamb wave approach“. In: *Applied Physics Letters* 90.12 (2007), S. 121902.

[37] M. Deng, P. Wang und X. Lv. „Experimental observation of cumulative second-harmonic generation of Lamb-wave propagation in an elastic plate“. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 38.2 (2005), S. 344–353.

[38] M. Deng, P. Wang und X. Lv. „Experimental verification of cumulative growth effect of second harmonics of Lamb wave propagation in an elastic plate“. In: *Applied Physics Letters* 86.12 (2005), S. 124104.

[39] M. Deng, Y. Xiang und L. Liu. „Time-domain analysis and experimental examination of cumulative second-harmonic generation by primary Lamb wave propagation“. In: *Journal of Applied Physics* 109.11 (2011), S. 113525.

[40] M. Fiolka. „Theorie und Numerik volumetrischer Schalenelemente zur Delaminationsanalyse von Faserverbundlaminaten“. Diss. Kassel: Universität Kassel, März 2007.

[41] I. J. Fritz. „Third-order elastic constants for materials with transversely isotropic symmetry“. In: *Journal of Applied Physics* 48.2 (1977), S. 812–814.

[42] J. Frouin, S. Sathish, T. E. Matikas und J. K. Na. „Ultrasonic Linear and Nonlinear Behavior of Fatigued Ti–6Al–4V“. In: *Journal of Materials Research* 14.04 (1999), S. 1295–1298.

[43] R. X. Gao und R. Yan. *Wavelets: Theory and Applications for Manufacturing*. Boston, MA: Springer Science+Business Media LLC, 2011.

[44] T. C. Gasser, R. W. Ogden und G. A. Holzapfel. „Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations“. In: *Journal of the Royal Society, Interface* 3.6 (2006), S. 15–35.

[45] A. A. Gedroits und V. A. Krasil'Nikov. „Finite Amplitude Elastic Waves in Solids and Deviations from Hooke's Law“. In: *Soviet Physics J.E.T.P.* 16 (1963), S. 1122–1126.

[46] V. Giurgiutiu. *Structural Health Monitoring: with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Burlington, MA: Elsevier/Academic Press, 2008.

[47] R. E. Green und H. Herman. *Treatise on materials science and technology*. New York und London: Academic Press, 1973.

[48] R. Greve. *Kontinuumsmechanik: Ein Grundkurs*. Berlin [u.a.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[49] H. G. Hahn. *Elastizitätstheorie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1985.

[50] B. Harris. *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics*. Boca Raton, FL und Cambridge, U.K.: CRC Press und Woodhead, 2003.

[51] P. Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. Berlin und New York: Springer, 2000.

[52] R. F. S. Hearmon. „'Third-order' elastic coefficients". In: *Acta Crystallographica* 6.4 (1953), S. 331–340.

[53] B. Hennings. „Elastische Wellen in faserverstärkten Kunststoffplatten - Modellierung und Berechnung mit spektralen finiten Elementen im Zeitbereich -". Diss. Hamburg: Helmut-Schmidt-Universität, Dezember 2014.

[54] A. Hikata, B. B. Chick und C. Elbaum. „Dislocation Contribution to the Second Harmonic Generation of Ultrasonic Waves". In: *Journal of Applied Physics* 36.1 (1965), S. 229–236.

[55] A. Hikata und C. Elbaum. „Generation of Ultrasonic Second and Third Harmonics Due to Dislocations. I". In: *Physical Review* 144.2 (1966), S. 469–477.

[56] R. Hoffmann. *Signalanalyse und -erkennung: Eine Einführung für Informationstechniker*. Berlin, Heidelberg [u.a.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998.

[57] R. Hoffmann und M. Wolff. *Intelligente Signalverarbeitung 1: Signalanalyse*. Berlin: Springer Berlin, 2015.

[58] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester: Wiley, 2010.

[59] G. A. Holzapfel und T. C. Gasser. „A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications". In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190.34 (2001), S. 4379–4403.

[60] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser und R. W. Ogden. „A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models". In: *Journal of Elasticity* 61.1–3 (2000), S. 1–48.

[61] G. A. Holzapfel, T. C. Gasser und M. Stadler. „A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis". In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 21.3 (2002), S. 441–463.

[62] G. A. Holzapfel und H. W. Weizsäcker. „Biomechanical behavior of the arterial wall and its numerical characterization". In: *Computers in Biology and Medicine* 28.4 (1998), S. 377–392.

[63] M. Hong, Z. Su, Q. Wang, L. Cheng und X. Qing. „Modeling nonlinearities of ultrasonic waves for fatigue damage characterization: Theory, simulation, and experimental validation“. In: *Ultrasonics* 54.3 (2014), S. 770–778.

[64] K.-Y. Jhang. „Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: A review“. In: *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 10.1 (2009), S. 123–135.

[65] R. M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Philadelphia, PA: Taylor & Francis, Inc., 1999.

[66] M. Kaliske. „A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185.2-4 (2000), S. 225–243.

[67] U. Karrenberg. *Signale - Prozesse - Systeme: Eine multimediale und interaktive Einführung in die Signalverarbeitung*. Berlin, Heidelberg [u.a.]: Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[68] U. Kiencke, M. Schwarz und T. Weickert. *Signalverarbeitung: Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. München: Oldenbourg, 2008.

[69] J.-Y. Kim, J. Qu, L. J. Jacobs, J. W. Littles und M. F. Savage. „Acoustic Nonlinearity Parameter Due to Microplasticity“. In: *Journal of Nondestructive Evaluation* 25.1 (2006), S. 28–36.

[70] B. Klein. *FEM*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.

[71] V. A. Korneev, K. T. Nihei und L. R. Myer. „Nonlinear Interaction of Plane Elastic Waves“. Diss. Berkeley: University of California, Juni 1998.

[72] G. Küffner. *Spitzentechnik in Deutschland*. Wiesbaden: Gabler Verlag, 1987.

[73] S. K. Kyriacou, J. D. Humphrey und C. Schwab. „Finite element analysis of nonlinear orthotropic hyperelastic membranes“. In: *Computational Mechanics* 18.4 (1996), S. 269–278.

[74] H. Lamb. „On Waves in an Elastic Plate“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 93.648 (1917), S. 114–128.

[75] L. D. Landau und E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity: Course of Theoretical Physics Volume 7*. Oxford: Pergamon Press, 1959.

[76] T. Lasota und J. Bursa. „Simulation of Mechanical Tests of Composite Material Using Anisotropic Hyperelastic Constitutive Models“. In: *Engineering Mechanics* 18.1 (2011), S. 23–32.

[77] W. Li, Y. Cho und J. D. Achenbach. „Detection of thermal fatigue in composites by second harmonic Lamb waves“. In: *Smart Materials and Structures* 21.8 (2012), S. 085019.

[78] W. Li, Y. Cho, T. Ju, H. S. Choi, N. Kim und I. Park. „Evaluation of Material Degradation of Composite Laminates Using Nonlinear Lamb Waves“. In: *Nondestructive Testing of Materials and Structures* (2013), S. 593–598.

[79] W. Li, Y. Cho, J. Lee und J. D. Achenbach. „Assessment of Heat Treated Inconel X-750 Alloy by Nonlinear Ultrasonics“. In: *Experimental Mechanics* 53.5 (2013), S. 775–781.

[80] W. Li, S. Hyun und Y. Cho. „Characteristics of ultrasonic nonlinearity by thermal fatigue“. In: *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* 13.6 (2012), S. 935–940.

[81] W. J. N. de Lima und M. F. Hamilton. „Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates“. In: *Journal of Sound and Vibration* 265.4 (2003), S. 819–839.

[82] J. Lin und L. Qu. „Feature Extraction Based on Morlet Wavelet and its Application for Mechanical Fault Diagnosis“. In: *Journal of Sound and Vibration* 234.1 (2000), S. 135–148.

[83] C. J. Lissenden, Y. Liu, G. W. Choi und X. Yao. „Effect of Localized Microstructure Evolution on Higher Harmonic Generation of Guided Waves“. In: *Journal of Nondestructive Evaluation* 33.2 (2014), S. 178–186.

[84] Y. Liu, V. K. Chillara und C. J. Lissenden. „On selection of primary modes for generation of strong internally resonant second harmonics in plate“. In: *Journal of Sound and Vibration* 332.19 (2013), S. 4517–4528.

[85] Y. Liu, G. Choi, C. J. Lissenden und J. L Rose. „Effect of Localized Platic Deformation on Higher Harmonic Guided Wave mode Generation in Plate“. In: *Proceedings of the 9th International Workshop on Structural Health Monitoring 2013: A Roadmap to Intelligent Structures*. Lancaster, PA: DEStech Publications, Inc., 2013.

[86] Y. Liu, J.-Y. Kim, L. J. Jacobs und Z. Li. „Modal Preference of cumulative second harmonic generation in Lamb waves“. In: *Review of Progress in Qunatitative Nondestructive Evalutaion: Volume 31*. Bd. 1430. AIP Conference Proceedings. 2012, S. 277–283.

[87] Y. Liu, J.-Y. Kim, L. J. Jacobs, J. Qu und Z. Li. „Experimental investigation of symmetry properties of second harmonic Lamb waves“. In: *Journal of Applied Physics* 111.5 (2012), S. 053511.

[88] Y. Liu, C. J. Lissenden und J. L. Rose. „Strongly cumulative second harmonic generation in a plate with quadratic nonlinearity: Finite element simulation“. In: *Review of Progress in Qunatitative Nondestructive Evalutaion: Volume 32*. AIP Conference Proceedings. 2013, S. 151–158.

[89] Y. Liu, L. Zheng und W. Zhang. „Crack detection of fibre reinforced composite beams based on continuous wavelet transform“. In: *Nondestructive Testing and Evaluation* 25:1 (2010), S. 25–44.

[90] M. Kaminski, F. Laurin, J.-F. Maire, C. Rakotoarisoa und E. Hémon. „Fatigue Damage Modeling of Composite Structures“. In: *Journal AerospaceLab* 9 (2015), AL09–06.

[91] E. Madelung. „Molekulare Eigenschwingungen“. In: *Physikalische Zeitschrift* 11 (1910), S. 898–905.

[92] L. E. Malvern. *Introducation to the Mechnics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969.

[93] H. A. Mang und G. Hofstetter. *Festigkeitslehre*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[94] K. H. Matlack, J.-Y. Kim, L. J. Jacobs und J. Qu. „Experimental characterization of efficient second harmonic generation of Lamb wave modes in a nonlinear elastic isotropic plate“. In: *Journal of Applied Physics* 109.1 (2011), S. 014905.

[95] K. H. Matlack, J.-Y. Kim, L. J. Jacobs, J. Qu, D. O. Thompson und D. E. Chimenti. „On the Efficient Exication of Second Harmonic Generation Using Lamb Waves Modes“. In: *Review of Progress in Qunatitative Nondestructive Evalutaion: Volume 30A; Volume 30B*. AIP Conference Proceedings. 2011, S. 291–297.

[96] N. Matsuda und S. Biwa. „Frequency Dependence of Second-Harmonic Generation in Lamb Waves“. In: *Journal of Nondestructive Evaluation* 33.2 (2014), S. 169–177.

[97] A. Mertins. *Signaltheorie: Grundlagen der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2010.

[98] M. Meyer. *Signalverarbeitung: Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.

[99] C. Mondal, A. Mukhopadhyay und R. Sarkar. „A study on precipitation characteristics induced strength variation by nonlinear ultrasonic parameter“. In: *Journal of Applied Physics* 108.12 (2010), S. 124910.

[100] M. Mooney. „A Theory of Large Elastic Deformation“. In: *Journal of Applied Physics* 11.9 (1940), S. 582–592.

[101] J. Morlet. „Sampling Theory and Wave Propagation“. In: *Issues in Acoustic Signal — Image Processing and Recognition*. Bd. 1. NATO ASI Series. Springer Berlin Heidelberg, 1983, S. 233–261.

[102] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau und D. Giard. „Wave propagation and sampling theory – Part II: Sampling theory and complex waves“. In: *Geophysics* 47.2 (1982), S. 222–236.

[103] F. Moser, L. J. Jacobs und J. Qu. „Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method“. In: *NDT & E International* 32.4 (1999), S. 225–234.

[104] M. F. Müller, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „Characteristics of second harmonic generation of Lamb waves in nonlinear elastic plates“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 127.4 (2010), S. 2141–2152.

[105] F. D. Murnaghan. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York, NY: Dover Publications, 1951.

[106] A. H. Nayfeh. „The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.4 (1991), S. 1521–1531.

[107] A. H. Nayfeh. *Wave propagation in layered anisotropic media: With applications to composites*. Bd. 39. North-Holland series in applied mathematics and mechanics. Amsterdam und New York: Elsevier, 1995.

[108] M. A. Nazari. „Biomechanical Face Modeling: Control of Orofacial Gestures for Speech Production“. Diss. Grenoble: Universite de Grenoble, September 2011.

[109] M. Niethammer, L. J. Jacobs, J. Qu und J. Jarzynski. „Time-frequency representation of Lamb waves using the reassigned spectrogram“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 107.5 (2000), S. L19–L24.

[110] J. T. Oden. *Finite elements of nonlinear continua*. Advanced engineering series. New York, NY: McGraw-Hill, 1972.

[111] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Mit zahlreichen Rechenbeispielen und einer ausführlichen Integraltafel*. Wiesbaden: Vieweg, 2006.

[112] K. Pfleiderer. „Frequenzkonversion aufgrund nichtlinearer akustischer Phänomene: Grundlagen und Anwendung zur defekselektiven zerstörungsfreien Prüfung“. Diss. Stuttgart: Universität Stuttgart, September 2006.

[113] B. E. Powell und M. J. Skove. „A combination of third-order elastic constants of aluminum“. In: *Journal of Applied Physics* 53.1 (1982), S. 764–765.

[114] W. H. Prosser. *Ultrasonic Characterization of Nonlinear Elastic Properties of Unidirectional Graphite/Epoxy Composite: NASA Contractor Report 4100*. Baltimore, MD, 1987.

[115] W. H. Prosser. „Stress Dependence of Ultrasonic Velocity in Unidirectional Graphite/Epoxy Composites for Longitudinal Waves Propagating Along the Direction of Stress“. In: *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*. Boston, MA: Springer US, 1990, S. 1701–1707.

[116] C. Pruell, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „Evaluation of plasticity driven material damage using Lamb waves“. In: *Applied Physics Letters* 91.23 (2007), S. 231911.

[117] C. Pruell, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „A nonlinear-guided wave technique for evaluating plasticity-driven material damage in a metal plate“. In: *NDT & E International* 42.3 (2009), S. 199–203.

[118] C. Pruell, J.-Y. Kim, J. Qu und L. J. Jacobs. „Evaluation of fatigue damage using nonlinear guided waves“. In: *Smart Materials and Structures* 18.3 (2009), S. 035003.

[119] N. Rauter und R. Lammering. „Experimental investigation of impact damages in composites by second harmonic Lamb waves.“ In: *Proceedings of the 6th ECCOMAS Conference on Smart Structures and Materials*. 2013.

[120] N. Rauter und R. Lammering. „Impact Damage Detection in Composite Structures Considering Non-linear Lamb Wave Propagation“. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 22.1-2 (2015), S. 44–51.

[121] N. Rauter und R. Lammering. „Numerical simulation of elastic wave propagation in isotropic media considering material and geometrical nonlinearities“. In: *Smart Materials and Structures* 24.4 (2015), S. 045027.

[122] N. Rauter, M. N. Neumann, R. Lammering, B. Hennings und A. Asmus. *Skriptum zum Oberseminar "Wellenausbreitung in Festkörpern" (unveröffentlicht)*. Hamburg: Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg, 2013.

[123] S. Reese, T. Raible und P. Wriggers. „Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes“. In: *International Journal of Solids and Structures* 38.52 (2001), S. 9525–9544.

[124] R. S. Rivlin und D. W. Saunders. „Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. VII. Experiments on the Deformation of Rubber“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 243.865 (1951), S. 251–288.

[125] S. I. Rokhlin und L. Wang. „Ultrasonic waves in layered anisotropic media: characterization of multidirectional composites“. In: *International Journal of Solids and Structures* 39.21-22 (2002), S. 5529–5545.

[126] J. L. Rose. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge und New York: Cambridge University Press, 1999.

[127] W. Rust. *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, 2011.

[128] S. P. Sagar, S. Das, N. Parida und D. Bhattacharya. „Non-linear ultrasonic technique to assess fatigue damage in structural steel“. In: *Scripta Materialia* 55.2 (2006), S. 199–202.

[129] J. Schröder und P. Neff. „Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions“. In: *International Journal of Solids and Structures* 40.2 (2003), S. 401–445.

[130] F. Schubert und B. Köhler. „Numerische Modellierung nichtlinear-elastischer Wellen“. In: *DGZfP Jahrestagung 2001 Zerstörungsfreie Materialprüfung*. Bd. 75. 2001, S. 1–11.

[131] M. D. Seale, B. T. Smith und W. H. Prosser. „Lamb wave assessment of fatigue and thermal damage in composites“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 103.5 (1998), S. 2416.

[132] Y. Shen und V. Giurgiutiu. „Predictive modeling of nonlinear wave propagation for structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors“. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 25.4 (2014), S. 506–520.

[133] J. C. Simo und C. Miehe. „Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 98.1 (1992), S. 41–104.

[134] J. C. Simo und R. L. Taylor. „Penalty function formulations for incompressible nonlinear elastostatics“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 35.1 (1982), S. 107–118.

[135] I. Y. Solodov. „Ultrasonics of non-linear contacts: propagation, reflection and NDE-applications“. In: *Ultrasonics* 36.1-5 (1998), S. 383–390.

[136] A. J. M. Spencer. *Deformation of Fibre-reinforced Materials: Oxford Science Research Papers*. London: Oxford University Press, 1972.

[137] A. Srivastava und F. Lanza di Scalea. „On the existence of antisymmetric or symmetric Lamb waves at nonlinear higher harmonics“. In: *Journal of Sound and Vibration* 323.3-5 (2009), S. 932–943.

[138] Z. A. Taylor, O. Comas, M. Cheng, J. Passenger, D. J. Hawkes, D. Atkinson und S. Ourselin. „On modelling of anisotropic viscoelasticity for soft tissue simulation: numerical solution and GPU execution“. In: *Medical image analysis* 13.2 (2009), S. 234–244.

[139] R. N. Thurston und K. Brugger. „Third-Order Elastic Constants and the Velocity of Small Amplitude Elastic Waves in Homogeneously Stressed Media“. In: *Physical Review* 135 (6A 1964), A1604–A1610.

[140] A. Trilaksono, N. Watanabe, A. Kondo, H. Hoshi und Y. Iwahori. „Automatic Damage Detection and Monitoring of a Stitch Laminate System Using a Fiber Bragg Grating Strain Sensor“. In: *Open Journal of Composite Materials* 04.01 (2014), S. 47–60.

[141] H. S. Tuan und B. Marvalova. „Constitutive Material Model of Fiber-Reinforced Composites at Finite Strains on Comsol Multiphysics“. In: *Proceedings of Konference Technical Computing Prague 2007* (2007).

[142] A. Ungethüm. „Migrationsbasierte Lokalisierung von Schadensereignissen und Schäden in flächigen anisotropen Strukturen“. Diss. Hamburg: Helmut-Schmidt-Universität, Oktober 2011.

[143] A. Ungethüm und R. Lammering. „Damage Localization of Carbon-Fibre-Reinforced Plastic Plates“. In: *PAMM* 10.1 (2010), S. 19–22.

[144] M. R. Usal, M. Usal und A. Kabul. „A Mathematical Model for Fiber Reinforced Hyperelastic Material and Results with Finite Element Method“. In: *Journal of Applied Sciences* 5.9 (2005), S. 1617–1631.

[145] L. Vergori, M. Destrade, P. McGarry und R. W. Ogden. „On anisotropic elasticity and questions concerning its Finite Element implementation“. In: *Computational Mechanics* 52.5 (2013), S. 1185–1197.

[146] X. Wan, P. W. Tse, G. H. Xu, T. F. Tao und Q. Zhang. „Analytical and numerical studies of approximate phase velocity matching based nonlinear S0 mode Lamb waves for the detection of evenly distributed microstructural changes“. In: *Smart Materials and Structures* 25.4 (2016), S. 045023.

[147] X. Wan, Q. Zhang, G. Xu und P. W. Tse. „Numerical simulation of nonlinear Lamb waves used in a thin plate for detecting buried micro-cracks“. In: *Sensors* 14.5 (2014), S. 8528–8546.

[148] Q. Wang, Z. Su, L. Cheng und C. Zhou. „Detection of Fatigue Cracks in Train Structures Using Nonlinear Lamb Waves“. In: *Proceedings of the 1st IWHIR* (2012), S. 267–277.

[149] B. Westphal-Kay. „Festigkeits- und Verformungsverhalten von Fugendichtstoffen im Kreuzfugenbereich“. Diss. Berlin: Technische Universität Berlin, Dezember 2005.

[150] C. Willberg, S. Duczek, J. M. Vivar Perez, D. Schmicker und U. Gabbert. „Comparison of different higher order finite element schemes for the simulation of Lamb waves“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 241-244 (2012), S. 246–261.

[151] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin [u.a.]: Springer, 2001.

[152] Y. Xiang, M. Deng und F.-Z. Xuan. „Creep damage characterization using nonlinear ultrasonic guided wave method: A mesoscale model“. In: *Journal of Applied Physics* 115.4 (2014), S. 044914.

[153] Y. Xiang, M. Deng, F.-Z. Xuan, H. Chen und D.-Y. Chen. „Creep Damage Evaluation of Titanium Alloy Using Nonlinear Ultrasonic Lamb Waves“. In: *Chinese Physics Letters* 29.10 (2012), S. 106202.

[154] Y. Xiang, M. Deng, F.-Z. Xuan und C.-J. Liu. „Cumulative second-harmonic analysis of ultrasonic Lamb waves for ageing behavior study of modified-HP austenite steel“. In: *Ultrasonics* 51.8 (2011), S. 974–981.

[155] Y. Xiang, M. Deng, F.-Z. Xuan und C.-J. Liu. „Experimental study of thermal degradation in ferritic Cr–Ni alloy steel plates using nonlinear Lamb waves“. In: *NDT & E International* 44.8 (2011), S. 768–774.

[156] Y. Xiang, M. Deng, F.-Z. Xuan und C.-J. Liu. „Effect of precipitate-dislocation interactions on generation of nonlinear Lamb waves in creep-damaged metallic alloys“. In: *Journal of Applied Physics* 111.10 (2012), S. 104905.

[157] Y. Xiang, W. Zhu, C.-J. Liu, F.-Z. Xuan, Y.-N. Wang und W.-C. Kuang. „Creep degradation characterization of titanium alloy using nonlinear ultrasonic technique“. In: *NDT & E International* 72 (2015), S. 41–49.

[158] J. Zhao, V. K. Chillara, B. Ren, H. Cho, J. Qiu und C. J. Lissenden. „Second harmonic generation in composites: Theoretical and numerical analyses“. In: *Journal of Applied Physics* 119.6 (2016), S. 064902.

[159] C. Zhou, M. Hong, Z. Su, Q. Wang und L. Cheng. „On Quantitative Evaluation of Fatigue Cracks: An Active Way Using Nonlinear Acousto-Ultrasonic Waves“. In: *Proceedings of the 6th European Workshop on Structural Health Monitoring* (2012).

[160] C. Zhou, M. Hong, Z. Su, Q. Wang und L. Cheng. „Evaluation of fatigue cracks using nonlinearities of acousto-ultrasonic waves acquired by an active sensor network“. In: *Smart Materials and Structures* 22.1 (2013), S. 015018.

Anhang A

Ergänzungen zur nichtlineare Kontinuumsmechanik

A.1 Dispersionsbeziehungen

A.1.1 Getrennte Dispersionsbeziehungen für die symmetrischen und antisymmetrischen LAMB- und SH-Wellenmoden in Einzelschichten

Ausgehend von dem Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \sigma_i^{\mathrm{u}} \\ \sigma_i^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} = \mathrm{i}k \begin{bmatrix} D_{ij}^{+} & D_{il}^{-} H_{jl} \\ D_{il}^{+} H_{jl} & D_{ij}^{-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_l^{+} \\ A_l^{-} \end{bmatrix} e^{\mathrm{i}(kx_1 - \omega t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

aus Kapitel 2.5.2.2 ergibt sich für die Koeffizientenmatrix auf der Grundlage eines einheitlichen Koordinatensystems und der Berücksichtigung der Eigenschaften von d_{ij} bezüglich der Eigenwerte α_j

$$\begin{bmatrix} d_{11}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{12}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{13}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{11}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{12}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{13}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{21}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{22}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{23}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{21}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{22}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{23}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{31}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & d_{31}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{11}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{12}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{13}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{11}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{12}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{13}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{21}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{22}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{23}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{21}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{22}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{23}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{31}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33}^{+} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & d_{31}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33}^{+} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

welche umgestellt werden kann zu

$$\begin{bmatrix} d_{11} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{11} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{12} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{12} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{13} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{13} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{21} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{21} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{22} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{22} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{23} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{23} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{31} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{31} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{32} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & d_{33} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{11} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{11} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{12} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{12} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{13} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{13} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{21} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & -d_{21} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{22} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & -d_{22} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{23} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & -d_{23} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \\ d_{31} e^{-\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{31} e^{\mathrm{i}k\alpha_1 \frac{h}{2}} & d_{32} e^{-\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{32} e^{\mathrm{i}k\alpha_2 \frac{h}{2}} & d_{33} e^{-\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} & d_{33} e^{\mathrm{i}k\alpha_3 \frac{h}{2}} \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Durch Addition und Subtraktion der Zeilen und Spalten nach dem in Abbildung A.1 gezeigten Schema und unter Verwendung der Eulerformeln

$$\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \right) \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \right) \tag{A.3}$$

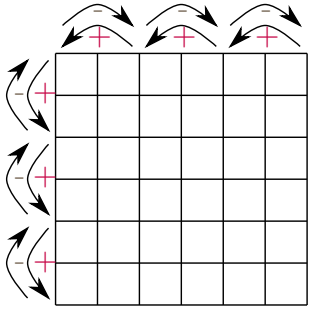


Abbildung A.1: Schema zur Addition und Subtraktion der Zeilen und Spalten.

folgt

$$\begin{bmatrix}
0 & 4id_{11}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{12}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{13}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) \\
4d_{11}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{12}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{13}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 \\
0 & 4id_{21}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{22}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{23}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) \\
4d_{21}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{22}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{23}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 \\
4id_{31}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{32}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4id_{33}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 \\
0 & 4d_{31}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{32}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 0 & 4d_{33}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2})
\end{bmatrix}. \quad \text{(A.4)}$$

Sortiert man die Zeilen und Spalten entsprechend um, kann die Koeffizientenmatrix schließlich geschrieben werden als

$$\begin{bmatrix}
4d_{11}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4d_{12}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4d_{13}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 & 0 & 0 \\
4d_{21}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4d_{22}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4d_{23}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 & 0 & 0 \\
4id_{31}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4id_{32}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4id_{33}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4id_{11}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4id_{12}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4id_{13}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) \\
0 & 0 & 0 & 4id_{21}\sin(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4id_{22}\sin(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4id_{23}\sin(k\alpha_3\frac{h}{2}) \\
0 & 0 & 0 & 4d_{31}\cos(k\alpha_1\frac{h}{2}) & 4d_{32}\cos(k\alpha_2\frac{h}{2}) & 4d_{33}\cos(k\alpha_3\frac{h}{2})
\end{bmatrix}. \quad \text{(A.5)}$$

In (A.5) sind somit zwei voneinander getrennte Untermatrizen entstanden, deren Determinanten die Dispersionsbeziehungen für die symmetrischen und die antisymmetrischen Wellenmoden beinhalten. Bildet man die Determinanten und setzt diese zu null, ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für die antisymmetrischen Moden

$$d_{31}\ \tan(k\alpha_1\frac{h}{2})(d_{12}\ d_{23} - d_{22}\ d_{13}) + d_{32}\ \tan(k\alpha_2\frac{h}{2})(d_{13}\ d_{21} - d_{23}\ d_{11}) + d_{33}\ \tan(k\alpha_3\frac{h}{2})(d_{11}\ d_{22} - d_{21}\ d_{12}) = 0 \quad (2.109)$$

und die symmetrischen Moden

$$d_{31}\ \cot(k\alpha_1\frac{h}{2})(d_{12}\ d_{23} - d_{22}\ d_{13}) + d_{32}\ \cot(k\alpha_2\frac{h}{2})(d_{13}\ d_{21} - d_{23}\ d_{11}) + d_{33}\ \cot(k\alpha_3\frac{h}{2})(d_{11}\ d_{22} - d_{21}\ d_{12}) = 0. \quad (2.110)$$

Analoges Vorgehen unter Beachtung des Entkopplungseffekts für transversal-isotropes

Material führt auf (2.129) und (2.130).

A.1.2 Herleitung der RAYLEIGH-LAMB Wellengleichung aus der Dispersionsbeziehung für die LAMB-Wellenausbreitung in transversal-isotropen Einzelschichten

Ausgehend von (2.129) und (2.130) kann auf Grund der identischen Steifigkeitstensorbelegung für isotropes und transversal-isotropes Material die RAYLEIGH-LAMB Gleichung (2.133) hergeleitet werden. Zunächst können analog zu der Formulierung der RAYLEIGH-LAMB Gleichung

$$\frac{\tan q\frac{h}{2}}{\tan p\frac{h}{2}} = \left(-\frac{4k^2pq}{(q^2-k^2)^2}\right)^{\pm 1} \tag{2.133}$$

(2.129) und (2.130) zusammengefasst werden zu

$$\frac{\tan(k\alpha_1\frac{h}{2})}{\tan(k\alpha_3\frac{h}{2})} = \left(\frac{d_{13}d_{31}}{d_{11}d_{33}}\right)^{\pm 1}. \tag{A.6}$$

Um nun (A.6) in (2.133) zu überführen, werden die Eigenwerte α_n und die Eigenvektoren $\mathbf{p}_n$ der CHRISTOFFEL-Gleichung auf Grundlage isotropen Materialverhaltens bestimmt und anschließend die Dispersionsbeziehung aufgestellt. In diesem Fall ist der Elastizitätstensor unter Verwendung der LAMÉ-Konstanten definiert als

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \tag{A.7}$$

so dass sich das folgende Eigenwertproblem aus der CHRISTOFFEL-Gleichung ergibt

$$\left(\lambda_{11}-\rho c_{\mathrm{p}}^2\right)\left(\lambda_{33}-\rho c_{\mathrm{p}}^2\right)-\lambda_{13}^2=0. \tag{A.8}$$

Einsetzen der Elemente von $\mathbb{C}$ für die Koeffizienten λ_{il} nach (2.93) liefert

$$\left[(\lambda+2\mu)+\mu\alpha^2-\rho c_{\mathrm{p}}^2\right]\left[\mu+(\lambda+2\mu)\alpha^2-\rho c_{\mathrm{p}}^2\right]-(\lambda+\mu)^2\alpha^2=0. \tag{A.9}$$

Diese biquadratische Gleichung kann umgestellt werden zu

$$\left[\alpha^2+\frac{\mu-2\rho c_{\mathrm{p}}^2}{\mu}\right]\left[\alpha^2+\frac{(\lambda+2\mu)-\rho c_{\mathrm{p}}^2}{\lambda+2\mu}\right]=0 \tag{A.10}$$

und hat somit die Lösungen

$$\alpha_1^2 = -\frac{\mu - \rho c_\mathrm{p}^2}{\mu} \quad \vee \quad \alpha_3^2 = -\frac{(\lambda + 2\mu) - \rho c_\mathrm{p}^2}{\lambda + 2\mu} \tag{A.11}$$

bzw.

$$\alpha_1^2 = \frac{\rho c_\mathrm{p}^2 - \mu}{\mu} \quad \vee \quad \alpha_3^2 = \frac{\rho c_\mathrm{p}^2 - (\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}. \tag{A.12}$$

In Abhängigkeit der Parameter p und q aus (2.134) kann daraus

$$\alpha_1^2 = \frac{q^2}{k^2} \quad \vee \quad \alpha_3^2 = \frac{p^2}{k^2} \tag{A.13}$$

abgeleitet werden. Unter Verwendung dieser Lösungen für α_n lassen sich die Komponenten des Polarisationsvektors bestimmen. Ausgehend von $p_{1n} = 1$ ergeben sich für p_{3n} die beiden Bestimmungsgleichungen

$$p_{3n} = -\frac{\lambda_{11} - \rho c_\mathrm{p}^2}{\lambda_{13}} \quad \text{und} \quad p_{3n} = -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33} - \rho c_\mathrm{p}^2}. \tag{A.14}$$

Um möglichst einfache Ausdrücke für p_{3n} zu erhalten werden anschließend in (A.14) für α_i^2 die Werte aus (A.12) und für α_i die Werte aus (A.13) eingesetzt. Außerdem wird für p_{31} die linke und für p_{33} die rechte Bestimmungsgleichung aus (A.14) verwendet. Somit können die Parameter p_{31} und p_{33} umgeformt werden zu

$$p_{31} = -\frac{k}{q} \qquad \text{und} \qquad p_{33} = \frac{p}{k}. \tag{A.15}$$

Damit sind alle Größen zur Bestimmung der Koeffizienten d_{il} bekannt. Aus (2.104) folgen für die benötigten Koeffizienten

$$d_{1l} = C_{66}(\alpha_l + p_{3l}) \qquad \text{und} \qquad d_{3l} = C_{13} + C_{33}\alpha_l p_{3l}. \tag{A.16}$$

Um nun (A.6) in (2.133) zu überführen, werden die Lösungen für α_n aus (A.13), die Parameter p_{31} und p_{33} aus (A.15) sowie die Koeffizienten d_{1l} und d_{3l} aus (A.16) in (A.6) eingesetzt und die jeweils rechte und linke Seite der beiden Gleichungen getrennt voneinander gleichgesetzt. Die linke Seite von (A.6) lässt sich nach Einsetzen der entsprechenden Größen darstellen als

$$\frac{\tan(k\alpha_1\frac{h}{2})}{\tan(k\alpha_3\frac{h}{2})} = \frac{\tan\left(k\sqrt{\frac{q^2}{k^2}}\frac{h}{2}\right)}{\tan\left(k\sqrt{\frac{p^2}{k^2}}\frac{h}{2}\right)} = \frac{\tan\left(q\frac{h}{2}\right)}{\tan\left(p\frac{h}{2}\right)}. \tag{A.17}$$

Die rechte Seite kann zunächst überführt werden in

$$\frac{d_{13}d_{31}}{d_{11}d_{33}} = \frac{d_{13}}{d_{33}}\,\frac{d_{31}}{d_{11}} = \frac{C_{66}(\alpha_3 + p_{33})}{C_{13} + C_{33}\alpha_3 p_{33}}\,\frac{C_{13} + C_{33}\alpha_1 p_{31}}{C_{66}(\alpha_1 + p_{31})}, \tag{A.18}$$

bzw. mit den Werten für p_{31} und p_{33} aus (A.15) sowie für α_i aus (A.13)

$$\frac{d_{13}}{d_{33}}\,\frac{d_{31}}{d_{11}} = \frac{C_{66}(\frac{p}{k} + \frac{p}{k})}{C_{13} + C_{33}\frac{p}{k}\frac{p}{k}}\,\frac{C_{13} + C_{33}\frac{q}{k}(-\frac{k}{q})}{C_{66}(\frac{q}{k} - \frac{k}{q})}, \tag{A.19}$$

welches umgeformt werden kann zu

$$\frac{d_{13}}{d_{33}}\,\frac{d_{31}}{d_{11}} = -\frac{4pqk^2}{(q^2 - k^2)^2} \tag{A.20}$$

und damit der rechten Seite der Rayleigh-Lamb Gleichung entspricht.

A.2 Leistungsflussbedingung

Ausgehend von den Verschiebungsfeldern aus Abbildung 2.6 wird zunächst deutlich, dass Lamb-Wellen im entkoppelten Zustand keine Verschiebungskomponente in X_2-Richtung besitzen. Des Weiteren sind u_1 und u_3 unabhängig von X_2, so dass

$$u_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial X_2} = \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 0 \tag{A.21}$$

gelten muss. Basierend darauf kann zunächst ganz allgemein für den Gradienten des Verschiebungsfeldes der Zusammenhang

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

aufgestellt werden. Da es bei dieser Betrachtung des Verschiebungsfeldes um die Symmetrieeigenschaften bezüglich der X_3-Achse geht, wird diese nur durch die Ableitung nach X_3 verändert. Die Ableitung nach X_1 hat darauf keinen Einfluss [104]. Somit ergibt sich für die symmetrische und die antisymmetrische Wellenmode der Gradient des Verschiebungsfeldes zu

$$\mathbf{H}^{\text{sym}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}^{\text{anti}} = \begin{bmatrix} A & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 \\ S & 0 & A \end{bmatrix}. \tag{2.154}$$

Darüber hinaus gelten die Rechenregeln [31, 104]

$$S(X_3)S(X_3) = A(X_3)A(X_3) = S(X_3), \tag{A.23}$$
$$A(X_3)S(X_3) = A(X_3)S(X_3) = A(X_3), \tag{A.24}$$
$$S(X_3) + S(X_3) = S(X_3), \tag{A.25}$$
$$A(X_3) + A(X_3) = A(X_3). \tag{A.26}$$

Unter Anwendung dieser Rechenregeln können die Symmetrieeigenschaften der Einträge des nichtlinearen Anteils des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor untersucht werden. Dieser ist zunächst gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{5k}^{NL} = &\frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H})\mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\cdot(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) \\ &+ \frac{\lambda}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H})\mathbf{I} + C\operatorname{tr}(\mathbf{H})^2\mathbf{I} + \mu\mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H} + B\operatorname{tr}(\mathbf{H})(\mathbf{H}+\mathbf{H}^\top) \\ &+ \frac{B}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H})\mathbf{I} + \frac{A}{4}[\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^\top + (\mathbf{H}^\top)^2]\end{aligned} \tag{2.160}$$

mit den einzelnen Anteilen

$$\operatorname{tr}(\mathbf{H}) = H_{11} + H_{33} \tag{A.27}$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top + \mathbf{H}) = 2(H_{11} + H_{33}) \tag{A.28}$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2) = H_{1i}H_{i1} + H_{3i}H_{i3} \tag{A.29}$$
$$\operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H}) = H_{i1}H_{i1} + H_{i3}H_{i3} \tag{A.30}$$
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H}) &= \operatorname{tr}(\mathbf{H}^2) + \operatorname{tr}(\mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H}) \\ &= H_{1i}H_{i1} + H_{3i}H_{i3} + H_{i1}H_{i1} + H_{i3}H_{i3}\end{aligned} \tag{A.31}$$

sowie

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix}H_{11} & 0 & H_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{31} & 0 & H_{33}\end{bmatrix} \tag{A.32}$$

$$\mathbf{H}^\top + \mathbf{H} = \begin{bmatrix}2H_{11} & 0 & H_{31}+H_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{13}+H_{31} & 0 & 2H_{33}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix}H_{1i}H_{i1} & 0 & H_{1i}H_{i3}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{3i}H_{i1} & 0 & H_{3i}H_{i3}\end{bmatrix} \tag{A.33}$$

$$\mathbf{H}^\top\cdot\mathbf{H} = \begin{bmatrix}H_{i1}H_{i1} & 0 & H_{i1}H_{i3}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{i3}H_{i1} & 0 & H_{i3}H_{i3}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^\top = \begin{bmatrix}H_{1i}H_{1i} & 0 & H_{1i}H_{3i}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{3i}H_{1i} & 0 & H_{3i}H_{3i}\end{bmatrix} \tag{A.34}$$

$$\mathbf{H}^{\top}\cdot\mathbf{H}^{\top}=\begin{bmatrix}H_{i1}H_{1i} & 0 & H_{i1}H_{3i}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{i3}H_{1i} & 0 & H_{i3}H_{3i}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{H}\cdot(\mathbf{H}^{\top}+\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{H}}$$
$$=\begin{bmatrix}H_{1i}\hat{H}_{i1} & 0 & H_{1i}\hat{H}_{i3}\\ 0 & 0 & 0\\ H_{3i}\hat{H}_{i1} & 0 & H_{3i}\hat{H}_{i3}\end{bmatrix},\tag{A.35}$$

wobei die Eigenschaften aus (A.21) berücksichtigt werden. Daraus resultiert für die Elemente von $\mathbf{P}_{5\mathrm{k}}^{\mathrm{NL}}$

$$\begin{aligned}P_{11}^{\mathrm{NL}}&=\frac{\lambda}{2}2(H_{11}+H_{33})H_{11}+\mu\left[2H_{33}^2+H_{31}(H_{13}+H_{31})\right]\\&+\frac{\lambda}{2}(H_{11}^2+H_{31}^2+H_{13}^2+H_{33}^2)+C(H_{11}^2+2H_{31}H_{13}^2+H_{33}^2)+\mu(H_{11}^2+H_{31}^2)\\&+B(H_{11}+H_{33})2H_{11}+\frac{B}{2}(2H_{11}^2+2H_{13}H_{31}+2H_{33}^2+H_{31}^2+H_{13}^2)\\&+\frac{A}{4}(4H_{11}^2+2H_{13}H_{31}+H_{31}^2+H_{13}^2),\end{aligned}\tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}P_{33}^{\mathrm{NL}}&=\frac{\lambda}{2}2(H_{11}+H_{33})H_{33}+\mu\left[2H_{11}^2+H_{13}(H_{13}+H_{31})\right]\\&+\frac{\lambda}{2}(H_{11}^2+H_{31}^2+H_{13}^2+H_{33}^2)+C(H_{11}^2+2H_{31}H_{13}^2+H_{33}^2)+\mu(H_{13}^2+H_{33}^2)\\&+B(H_{11}+H_{33})2H_{33}+\frac{B}{2}(2H_{11}^2+2H_{13}H_{31}+2H_{33}^2+H_{31}^2+H_{13}^2)\\&+\frac{A}{4}(4H_{11}^2+2H_{13}H_{31}+H_{31}^2+H_{13}^2),\end{aligned}\tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}P_{13}^{\mathrm{NL}}&=\frac{\lambda}{2}2(H_{11}+H_{33})H_{13}+\mu\left[H_{13}2H_{33}+H_{11}(H_{13}+H_{31})\right]\\&+\mu(H_{11}H_{13}+H_{31}H_{33})+B(H_{11}+H_{33})(H_{13}+H_{31})\\&+\frac{A}{4}2(+H_{11}H_{13}+H_{13}H_{33}+H_{11}H_{31}+H_{31}H_{33}),\end{aligned}\tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}P_{31}^{\mathrm{NL}}&=\frac{\lambda}{2}2(H_{11}+H_{33})H_{31}+\mu\left[H_{31}2H_{11}+H_{33}(H_{13}+H_{31})\right]\\&+\mu(H_{11}H_{13}+H_{31}H_{33})+B(H_{11}+H_{33})(H_{13}+H_{31})\\&+\frac{A}{4}2(+H_{11}H_{13}+H_{13}H_{33}+H_{11}H_{31}+H_{31}H_{33})\end{aligned}\tag{A.39}$$

und

$$P_{22}^{\mathrm{NL}}=P_{12}^{\mathrm{NL}}=P_{21}^{\mathrm{NL}}=P_{22}^{\mathrm{NL}}=P_{23}^{\mathrm{NL}}=P_{32}^{\mathrm{NL}}=0.\tag{A.40}$$

Führt man die Symmetrieeigenschaften von **H** ein, ist zu erkennen, dass es keinen Unterschied zwischen dem Ergebnis basierend auf einer primären symmetrischen oder antisymmetrischen Welle gibt. In beiden Fällen erhält man

$$\mathbf{P}_{5k}^{NL} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}. \tag{A.41}$$

Die dazugehörige Divergenz von $\mathbf{P}_{5k}^{NL}$ kann zunächst formuliert werden als

$$\mathrm{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{NL}) = (\mathbf{P}_{5k}^{NL})_{ij,j} \tag{A.42}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11,1} + P_{13,3} \\ 0 \\ P_{31,1} + P_{33,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{,1} + A_{,3} \\ 0 \\ A_{,1} + S_{,3} \end{bmatrix}, \tag{A.43}$$

so dass analog zur Gradientenberechnung

$$\mathrm{Div}(\mathbf{P}_{5k}^{NL}) = \begin{bmatrix} S + S \\ 0 \\ A + A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \tag{A.44}$$

folgt.

A.3 Herleitung der Lösung für das Gesamtverschiebungsfeld

Ausgangspunkt der Herleitung des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters β' ist die Wellenausbreitung der Longitudinalwelle in einer Struktur mit nichtlinearem Materialverhalten, beschrieben durch die nichtlineare Potentialformulierung nach Murnaghan. Basierend auf der Taylor-Reihenentwicklung ergibt sich zunächst ganz allgemein für den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$S_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijklmn}E_{kl}E_{mn}. \tag{A.45}$$

Führt man an dieser Stelle den absoluten akustischen Nichtlinearitätsparameter β als negatives Verhältnis der linearen und nichtlinearen Steifigkeiten für den eindimensionalen Fall ein, gegeben durch

$$\beta = -\frac{A + 3B + C}{E}, \tag{2.177}$$

erhält man für die im eindimensionalen Fall relevante Komponente des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$S_{11} = E(1 - \frac{1}{2}\beta E_{11})E_{11}. \tag{2.176}$$

Auf Grundlage der Bewegungsgleichung einer Longitudinalwelle [64]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \tag{2.178}$$

mit $S_{11} = \sigma$ und unter der Annahme kleiner Verschiebungen, kann folgende Differentialgleichung aufgestellt werden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[E\left(E_{11} - \frac{1}{2}\beta E_{11}^2\right)\right] \tag{A.46}$$

$$= \frac{E}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{A.47}$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \tag{A.48}$$

Mit dem Ansatz

$$u = u_1 + \beta u_2, \tag{A.49}$$

für das Gesamtverschiebungsfeld, wobei $\beta \ll 1$ sei, folgt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{u}_1 + \beta\ddot{u}_2 = c^2\left[u_1'' + \beta u_2'' - \beta\left(u_1' + \beta u_2'\right)\left(u_1'' + \beta u_2''\right)\right]. \tag{A.50}$$

Unter der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung in β lässt sich daraus die zu lösende Differentialgleichung zur Beschreibung des Gesamtverschiebungsfeldes formulieren als

$$\ddot{u}_1 + \beta\ddot{u}_2 = c^2\left(u_1'' + \beta u_2'' - \beta u_1' u_2''\right). \tag{A.51}$$

Als Lösungsansatz wird für das primäre Wellenfeld der bekannte Ansatz

$$u_1 = u_0\cos(kx - \omega t) \tag{2.179}$$

verwendet, welcher eine sinusförmige Wellenausbreitung beschreibt. Setzt man diesen, mit den zugehörigen Ableitungen

$$\dot{u}_1 = \omega u_0\sin(kx - \omega t), \tag{A.52}$$

$$\ddot{u}_1 = -\omega^2 u_0\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 u_1 \tag{A.53}$$

und

$$u_1' = -k u_0\sin(kx - \omega t), \tag{A.54}$$

$$u_1'' = -k^2 u_0\cos(kx - \omega t) = -k^2 u_1, \tag{A.55}$$

in den lineare Anteil der Bewegungsgleichung, welcher das primäre Wellenfeld repräsentiert,

$$\ddot{u}_1 = c^2 u_1'' \tag{A.56}$$

ein, erhält man als Lösung

$$-\omega^2 = c^2(-k^2) \tag{A.57}$$

bzw. den aus (2.89) bekannten Zusammenhang

$$c = \frac{\omega}{k}. \tag{A.58}$$

Ausgehend von der quadratischen Nichtlinearität des Mediums ergibt sich zunächst für das sekundäre Wellenfeld der Ansatz

$$u_2 = A_2 x \sin^2(kx - \omega t) = A_2 x \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2kx - 2\omega t)\right]. \tag{A.59}$$

Mit Hilfe der zugehörigen Ableitungen von u_1 (siehe (A.52) – (A.55)) und u_2

$$\dot{u}_2 = -\omega A_2 x \sin(2kx - 2\omega t) \tag{A.60}$$
$$\ddot{u}_2 = 2\omega^2 A_2 x \cos(2kx - 2\omega t) \tag{A.61}$$

bzw.

$$u_2^{'} = \frac{1}{2} A_2 \left[1 - \cos(2kx - 2\omega t) + 2kx \cos(2kx - 2\omega t)\right] \tag{A.62}$$
$$u_2^{''} = 2A_2 k \left[2\sin(2kx - 2\omega t) + 2k \cos(2kx - 2\omega t)\right] \tag{A.63}$$

kann die nichtlineare Bewegungsgleichung (A.51) in der Form

$$\begin{aligned} &- \omega^2 u_0 \cos(kx - \omega t) + 2\omega^2 A_2 x \beta \cos(2kx - 2\omega t) \\ &= c^2 \Big\{ - k^2 u_0 \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} A_2 \beta \Big[4k \sin(2kx - 2\omega t) \\ &+ 4k^2 x \cos(2kx - 2\omega t) \Big] - \beta \Big[k^3 u_0^2 \sin(kx - \omega t) \cos(kx - \omega t) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{A.64}$$

bzw. mit (A.58) als

$$\begin{aligned} &c^2 k^2 \left[-u_0 \cos(kx - \omega t) + 2A_2 x \beta \cos(2kx - 2\omega t) \right] \\ &= c^2 k^2 \Big[- u_0 \cos(kx - \omega t) + 2A_2 \beta x \cos(2kx - 2\omega t) \\ &+ \frac{2A_2 \beta}{k} \sin(2kx - 2\omega t) - \frac{1}{2} \beta k u_0^2 \sin(2kx - 2\omega t) \Big] \end{aligned} \tag{A.65}$$

dargestellt werden. Daraus resultiert für die ungestörte Amplitude A_2 des sekundären Wellenfeldes der Ausdruck

$$A_2 = \frac{1}{4} k^2 u_0^2. \tag{A.66}$$

Als Endergebnis kann das Gesamtverschiebungsfeld durch Einsetzen in (A.49) abschließend formuliert werden als [24]

$$u(x,t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\beta}{8}(k u_0)^2 x \left\{1 - \cos\left[2(kx - \omega t)\right]\right\} . \tag{2.181}$$

Anhang B

Ergänzungen zur Abbildung der Werkstoffdegradation durch ein nichtlineares Materialmodell

B.1 Detaillierte Darstellung der Auswertung der Leistungsflussbedingung für das vorgestellte nichtlineare hyperelastische isotrope Materialmodell

Im Folgenden soll detailliert dargestellt werden, wie für die beiden verwendeten isotropen hyperelastischen Materialmodelle Neo-Hooke und Mooney-Rivlin die Symmetrieeigenschaften der jeweiligen nichtlinearen Anteile der Spannungstensoren ausgewertet werden können. Dazu werden zunächst die benötigten Größen in Abhängigkeit des Gradienten des Verschiebungsfeldes formuliert und anschließend in die aus den Potentialfunktionen resultierenden zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensoren eingesetzt. Ausgehend von diesen kann dann der nichtlineare Anteil des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors für jede Potentialfunktion bestimmt und die Symmetrieeigenschaften der Elemente bezüglich der Plattenmittelebene analysiert werden.

B.1.1 Allgemeines

Die Formulierung der beiden Potentialfunktionen erfolgt in Abhängigkeit des rechte Cauchy-Green Deformationstensor, welcher durch den Gradienten des Verschiebungsfeldes und unter Berücksichtigung der Wellenausbreitung in der $X_1 - X_3$-Ebene formuliert werden kann als

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} H_{11}^2 + H_{31}^2 + H_{11} + 1 & 0 & H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33} + H_{13} + H_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33} + H_{13} + H_{31} & 0 & H_{13}^2 + H_{33}^2 + H_{33} + 1 \end{bmatrix}. \tag{B.1}$$

Führt man hiervon ausgehend für den rechten Cauchy-Green Deformationstensor die Notation

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{bmatrix}, \tag{B.2}$$

ein, ergibt sich die benötigte Inverse des rechten Cauchy-Green Deformationstensors zu [111]

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{aei - ceg} \begin{bmatrix} ei & 0 & -ce \\ 0 & ai - cg & 0 \\ -eg & 0 & ae \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

bzw. unter Berücksichtigung, dass $e = 1$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{ai - cg} \begin{bmatrix} i & 0 & -c \\ 0 & ai - cg & 0 \\ -g & 0 & a \end{bmatrix}. \tag{B.4}$$

Setzt man im nächsten Schritt in (B.4) die entsprechenden Werte aus (B.1) ein, resultieren für die einzelnen Einträge Polynome unterschiedlicher Ordnung als Funktionen des Gradienten des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{A}(\mathbf{H}^4) + \mathcal{B}(\mathbf{H}^3) + \mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{F}(\mathbf{H}) + 1 & 0 & \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{A}(\mathbf{H}^4) + \mathcal{B}(\mathbf{H}^3) \\ & +\mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 & 0 \\ \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{I}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{J}(\mathbf{H}) + 1 \end{bmatrix}. \tag{B.5}$$

Die hier abgekürzten Anteile der einzelnen Polynome sind in Kapitel B.1.4 tabellarisch aufgeführt, wobei zusätzlich die Symmetrieeigenschaften der jeweiligen Ausdrücke für ein symmetrisches und antisymmetrisches primäres Wellenfeld angegeben sind. Da für die Auswertung des nichtlinearen Anteils des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors maximal quadratische Terme betrachtet werden und generell angenommen werden kann, dass $\| \operatorname{Grad} \mathbf{H} \| \ll 1$ (vgl. (5.15)), vereinfacht sich (B.5) zu

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{F}(\mathbf{H}) + 1 & 0 & \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 & 0 \\ \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{I}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{J}(\mathbf{H}) + 1 \end{bmatrix}. \tag{B.6}$$

Neben der Inverse des rechten Cauchy-Green Deformationstensors werden für die Auswertung der Leistungsflussbedingung zusätzlich die drei zugehörigen Invarianten bei isotropem Materialverhalten benötigt, wobei anstelle der dritten Invariante auf die Determinante des materiellen Deformationsgradienten zurückgegriffen wird. Diese beiden Größen sind über den Zusammenhang

$$I_3 = J^2 \tag{B.7}$$

miteinander verbunden. Ausgehend von der Definition des materiellen Deformationsgradient kann dieser zunächst über den Gradienten des Verschiebungsfeldes nach (5.4) ausgedrückt werden als

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} H_{11}+1 & 0 & H_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ H_{31} & 0 & H_{33}+1 \end{bmatrix}, \tag{B.8}$$

so dass sich für die Determinante J

$$J = H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} + H_{11} + H_{33} + 1 \tag{5.12}$$

und für J^2

$$\begin{aligned} J^2 &= (H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} + H_{11} + H_{33} + 1)^2 && \text{(B.9)} \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{H}^4) + \mathcal{K}(\mathbf{H}^3) + \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) + 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 && \text{(B.10)} \end{aligned}$$

ergeben. Für die anderen beiden Invarianten I_1 und I_2 folgen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\mathbf{C} && \text{(2.35)} \\ &= H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2 + H_{11} + H_{33} + 3 && \text{(5.7)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{C})^2 + \operatorname{tr}\mathbf{C}^2\right] && \text{(2.35)} \\ &= \frac{1}{2}\Big[(H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2 + H_{11} + H_{33} + 3)^2 \\ &\quad + (H_{11}^2 + H_{31}^2 + H_{11} + 1)^2 \\ &\quad + 2(H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33} + H_{13} + H_{31})^2 + 1 && \text{(5.22)} \\ &\quad + (H_{13}^2 + H_{33}^2 + H_{33} + 1)^2\Big]. \end{aligned}$$

Führt man in (5.22) die Multiplikation aus und vernachlässigt Terme oberhalb zweiter Ordnung, kann diese formuliert werden als

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{P}(\mathbf{H}^2) + 6\mathcal{D}(\mathbf{H}) + 9 + \mathcal{R}(\mathbf{H}^2) + 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) + 3\right] \\ &= \mathcal{S}(\mathbf{H}^2) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H}) + 6. && \text{(B.11)} \end{aligned}$$

Abschließend kann allgemein für die Transformation des zweiten in den ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor unter Verwendung der eingeführten Notation der Zusammenhang

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})S_{11}^{\mathrm{L}} + \mathcal{M}(\mathbf{H})S_{31}^{\mathrm{L}} & 0 & \mathcal{J}(\mathbf{H})S_{13}^{\mathrm{L}} + \mathcal{M}(\mathbf{H})S_{33}^{\mathrm{L}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{Q}(\mathbf{H})S_{11}^{\mathrm{L}} + \mathcal{F}(\mathbf{H})S_{31}^{\mathrm{L}} & 0 & \mathcal{Q}(\mathbf{H})S_{13}^{\mathrm{L}} + \mathcal{F}(\mathbf{H})S_{33}^{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

aufgestellt werden.

B.1.2 Neo-Hooke'sches Materialmodell

Mit Hilfe der nun bekannten Größen können ausgehend von dem zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor aus (5.9) die für die Leistungsflussbedingung relevanten Größen $\mathbf{P}_{\text{Neo}}^{\text{NL}}$ und die zugehörige Divergenz für das Neo-Hooke Materialmodell aufgestellt werden. Der Term $\mu\mathbf{I}$ kann hierbei vernachlässigt werden, da dieser nur zu linearen Termen in $\mathbf{H}$ für den ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor führt. Berücksichtigt man ferner auch hier die Bedingung aus (5.15), kann (5.9) überführt werden in

$$\mathbf{S}_{\text{Neo}} = 2\left[-\frac{1}{3}\mu I_1 \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{d}(J-1)J\mathbf{C}^{-1}\right]. \tag{B.13}$$

Im Folgenden werden der isochore und volumetrische Anteil des Spannungstensors getrennt voneinander betrachtet. Setzt man die entsprechenden, zuvor vorgestellten Größen, zunächst in den isochoren Anteil ein, ergeben sich für die benötigten linearen und nichtlinearen Anteile des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$\mathbf{S}_{\text{Neo,i}}^{\text{L}} = -\frac{2}{3}\mu \begin{bmatrix} 3\mathcal{F}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 3\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & 4\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ 3\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & 3\mathcal{J}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

und

$$\mathbf{S}_{\text{Neo,i}}^{\text{NL}} = -\frac{2}{3}\mu \begin{bmatrix} 3\mathcal{E}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 & 3\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) \\ +\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{F}(\mathbf{H}) & & +\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & 3\mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 \\ & +\mathcal{D}^2(\mathbf{H}) & \\ 3\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) & 0 & 3\mathcal{I}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) \\ +\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & & +\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{J}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}. \tag{B.15}$$

Unter Verwendung von (2.75) kann anschließend der nichtlineare Anteil des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor aufgestellt werden als

$$\mathbf{P}_{\text{Neo,i}}^{\text{NL}} = \mathbf{S}_{\text{Neo,i}}^{\text{NL}} - \frac{2}{3}\mu \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})[3\mathcal{F}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H})] & 0 & 3\mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ +3\mathcal{M}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & & +\mathcal{M}(\mathbf{H})[3\mathcal{J}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H})] \\ 0 & 0 & 0 \\ 3\mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})[3\mathcal{J}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H})] \\ +\mathcal{Q}(\mathbf{H})[3\mathcal{F}(\mathbf{H}) + \mathcal{D}(\mathbf{H})] & & +3\mathcal{Q}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}. \tag{B.16}$$

Wertet man nun die Symmetrieeigenschaften der einzelnen Elemente bezüglich der Plattenmittelebene aus, kann gezeigt werden, dass der erste Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor beruhend auf dem isochoren Anteil der Potentialformulierung die folgenden

Symmetrieeigenschaften besitzt

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Neo,i}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}. \tag{B.17}$$

Für die Analyse des volumetrischen Anteils des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors muss zunächst der Vorfaktor bestimmt werden. Dieser ergibt sich unter Verwendung von (5.12) und (B.10) zu

$$\begin{aligned} J^2 - J &= \mathcal{A}(\mathbf{H}^4) + \mathcal{K}(\mathbf{H}^3) + \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) + 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 && \text{(B.18)} \\ &\quad - (H_{11}H_{33} - H_{13}H_{31} + H_{11} + H_{33} + 1) \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{H}^4) + \mathcal{K}(\mathbf{H}^3) + \mathcal{O}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) && \text{(B.19)} \end{aligned}$$

Da der Vorfaktor keine Konstante enthält, kann für die Bestimmung des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors die Inverse des rechten Cauchy-Green Deformationstensors weiter vereinfacht werden zu

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(\mathbf{H}) + 1 & 0 & \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 & 0 \\ \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{J}(\mathbf{H}) + 1 \end{bmatrix}, \tag{B.20}$$

so dass

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo,v}}^{\mathrm{L}} = \frac{2}{d} \begin{bmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.21}$$

und

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Neo,v}}^{\mathrm{NL}} = \frac{2}{d} \left(\begin{bmatrix} \mathcal{O}(\mathbf{H}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{O}(\mathbf{H}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{O}(\mathbf{H}^2) \end{bmatrix} + \mathcal{D}(\mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathcal{F}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{H}(\mathbf{H})) \\ 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{I}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \right) \tag{B.22}$$

folgen. Bildet man auch hier den nichtlinearen Anteil des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors mit Hilfe von (2.75) erhält man

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Neo,v}}^{\mathrm{NL}} = \mathbf{S}_{\mathrm{Neo,v}}^{\mathrm{NL}} + \frac{2}{d} \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}, \tag{B.23}$$

welcher dieselben Symmetrieeigenschaften wie der Ausdruck zur Beschreibung des isochoren Anteils aufweist, so dass als Endergebnis für die Symmetrieeigenschaften des nichtlinearen Anteils des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors basierend auf dem

NEO-HOOKE'schen Materialmodell

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Neo}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

sowie für die zugehörige Divergenz

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}_{\mathrm{Neo}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

folgen.

B.1.3 MOONEY-RIVLIN Materialmodell

Für die Potentialformulierung nach MOONEY-RIVLIN kann der zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor unter Berücksichtigung von (5.15) ausgedrückt werden als

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Moo}} = 2\left\{c_{10}(\mathbf{I} - I_1\mathbf{C}^{-1}) + c_{01}\left[I_1\mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{4}{3}I_2\mathbf{C}^{-1}\right] + \frac{1}{d}(J-1)J\mathbf{C}^{-1}\right\}. \tag{5.21}$$

Dies entspricht für den Fall, dass $c_{01} = 0$ dem zuvor untersuchten Spannungstensor für das NEO-HOOKE'sche Materialmodell. Dementsprechend muss für die Untersuchung der Leistungsflussbedingung für das MOONEY-RIVLIN Materialmodell nur noch der Term

$$c_{01}\left[I_1\mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{4}{3}I_2\mathbf{C}^{-1}\right] \tag{B.24}$$

analysiert werden. Für die anderen beiden Terme sind die Ergebnisse in (5.19) und (5.20) für den nichtlinearen Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors und der zugehörigen Divergenz gegeben. Die drei Anteile des verbleibenden Terms werden im Folgenden der Übersichtlichkeit halber getrennt voneinander ausgewertet.

Aus $I_1\mathbf{I}$ ergibt sich zunächst als zweiter PIOLA-KIRCHHOFF'scher Spannungstensor

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathrm{Moo},2.1} &= \mathbf{S}_{\mathrm{Moo},2.1}^{\mathrm{NL}} + \mathbf{S}_{\mathrm{Moo},2.1}^{\mathrm{L}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.25}$$

und somit für den nichtlinearen Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors

$$\mathbf{P}_{\mathrm{Moo},2.1}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{N}(\mathbf{H}^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

mit den Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.1} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}. \tag{B.27}$$

Basierend auf der Definition des rechten Cauchy-Green Deformationstensors aus (B.1) und unter Vernachlässigung konstanter Größen, kann der zweiten Anteil des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathrm{Moo},2.2} &= \mathbf{S}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.2} + \mathbf{S}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{Moo},2.2} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{I}(\mathbf{H}^2) & 0 & -\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) & 0 & \mathcal{H}(\mathbf{H}^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{B.28}$$

woraus für den nichtlinearen Anteil des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.2} = \mathbf{S}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.2} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})^2 & 0 & \mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ & & +\mathcal{M}(\mathbf{H})\mathcal{F}(\mathbf{H}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})^2 \\ +\mathcal{Q}(\mathbf{H})\mathcal{J}(\mathbf{H}) & & \end{bmatrix} \tag{B.29}$$

mit den Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.2} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{B.30}$$

resultiert.

Als letztes Element verbleibt der Anteil mit der zweiten Invariante und der Inversen des rechten Cauchy-Green Defomrationstensors. Multipliziert man dazu (B.11) mit (B.6), erhält man zunächst für diesen Anteil des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathrm{Moo},2.3} = 6 &\begin{bmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{F}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ \mathcal{G}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{I}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{J}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \\ &+ 4\mathcal{D}(\mathbf{H}) \begin{bmatrix} \mathcal{F}(\mathbf{H}) + 1 & 0 & \mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{D}(\mathbf{H}) + 1 & 0 \\ \mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{J}(\mathbf{H}) + 1 \end{bmatrix} + \mathcal{S}(\mathbf{H}^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{B.31}$$

Diese Formulierung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors kann in Bezug auf $\mathbf{H}$ in einen linearen und einen quadratischen Anteil in der Form

$$\mathbf{S}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{Moo},2.3} = \begin{bmatrix} 6\mathcal{F}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 6\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & 10\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ 6\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & 6\mathcal{J}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.32}$$

und

$$\mathbf{S}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.3} = \begin{bmatrix} 6\mathcal{E}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{S}(\mathbf{H}^2) & 0 & 6\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) \\ +4\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{F}(\mathbf{H}) & & +4\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & 6\mathcal{C}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{S}(\mathbf{H}^2) & 0 \\ & +4\mathcal{D}(\mathbf{H})^2 & \\ 6\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) & 0 & 6\mathcal{I}(\mathbf{H}^2) + \mathcal{S}(\mathbf{H}^2) \\ +4\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & & +4\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{J}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.33}$$

aufgeteilt werden. Die Bestimmung des nichtlinearen Anteils des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors liefert dann

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.3} = \mathbf{S}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.3} + \begin{bmatrix} \mathcal{J}(\mathbf{H})[6\mathcal{F}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H})] & 0 & 6\mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 6\mathcal{M}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & & \mathcal{M}(\mathbf{H})[6\mathcal{J}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H})] \\ 0 & 0 & 0 \\ 6\mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})[6\mathcal{J}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H})] \\ \mathcal{Q}(\mathbf{H})[6\mathcal{F}(\mathbf{H}) + 4\mathcal{D}(\mathbf{H})] & & 6\mathcal{Q}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.34}$$

mit den Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo},2.3} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}. \tag{B.35}$$

Damit ergibt sich für den nichtlinearen Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors basierend auf der Potentialbeschreibung nach MOONEY-RIVLIN, auf der Grundlage der zuvor gewonnenen Teilergebnissen, die Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo}} &= \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{B.36}$$

und damit für die Divergenz

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{Moo}} = \begin{bmatrix} S \\ 0 \\ A \end{bmatrix}, \tag{B.37}$$

so dass auch für dieses Materialmodell analytisch die Existenz eines Leistungsflusses vom primären zum sekundären Wellenfeld bestehend aus symmetrischen Moden nachgewiesen werden kann.

B.1.4 Funktionsübersicht

Tabelle B.1: Funktionsübersicht zur Untersuchung der Symmetrieeigenschaften von $\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}$ und der zugehörigen Divergenz.

Funktionsname	Funktion	Symmetrieeigenschaft sym. PW	anti. PW
$\mathcal{A}(\mathbf{H}^4)$	$H_{11}^2H_{33}^2 + H_{13}^2H_{31}^2$ $-2H_{11}H_{13}H_{31}H_{33}$	S	S
$\mathcal{B}(\mathbf{H}^3)$	$H_{11}^2H_{33} + H_{11}H_{33}^2 + H_{31}^2H_{33}$ $-(2H_{11}H_{13}H_{31} + 2H_{13}H_{31}H_{33} + H_{11}H_{13}^2)$	S	A
$\mathcal{C}(\mathbf{H}^2)$	$H_{11}^2 + H_{33}^2 + H_{11}H_{33}$	S	S
$\mathcal{D}(\mathbf{H})$	$H_{11} + H_{33}$	S	A
$\mathcal{E}(\mathbf{H}^2)$	$H_{13}^2 + H_{33}^2$	S	S
$\mathcal{F}(\mathbf{H})$	H_{33}	S	A
$\mathcal{G}(\mathbf{H}^2)$	$-(H_{11}H_{13} + H_{31}H_{33})$	A	S
$\mathcal{H}(\mathbf{H})$	$H_{13} + H_{31}$	A	S
$\mathcal{I}(\mathbf{H}^2)$	$H_{11}^2 + H_{31}^2$	S	S
$\mathcal{J}(\mathbf{H})$	H_{11}	S	A
$\mathcal{K}(\mathbf{H}^3)$	$-(2H_{11}H_{13}H_{31} + 2H_{13}H_{31}H_{33})$	A	S

Tabelle B.1 – fortgesetzt

Funktionsname	Funktion	Symmetrieeigenschaft sym. PW	anti. PW
$\mathcal{L}(\mathbf{H}^2)$	$H_{11}^2 + H_{33}^2 + 4H_{11}H_{33} - 2H_{13}H_{31}$	S	S
$\mathcal{M}(\mathbf{H})$	H_{13}	S	A
$\mathcal{N}(\mathbf{H}^2)$	$H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2$	S	S
$\mathcal{O}(\mathbf{H}^2)$	$3H_{11}H_{33} + H_{13}H_{31}$	S	S
$\mathcal{P}(\mathbf{H}^2)$	$7H_{11}^2 + 6H_{13}^2 + 6H_{31}^2 + 7H_{33}^2 + 2H_{11}H_{33}$	S	S
$\mathcal{Q}(\mathbf{H})$	H_{31}	S	A
$\mathcal{R}(\mathbf{H}^2)$	$3H_{11}^2 + 4H_{13}^2 + 4H_{31}^2 + 3H_{33}^2 + 4H_{11}H_{33}$	S	S
$\mathcal{S}(\mathbf{H}^2)$	$5(H_{11}^2 + H_{13}^2 + H_{31}^2 + H_{33}^2) + 3H_{11}H_{33}$	S	S

B.2 Detaillierte Darstellung der Auswertung der Leistungsflussbedingung für das vorgestellte nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Materialmodell

In diesem Kapitel wird die Auswertung der Leistungsflussbedingung für die vorgestellte transversal-isotrope Potentialformulierung detailliert dargestellt. Da das Potential, wie auch schon bei der isotropen Modellbildung, in Abhängigkeit der Invarianten des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensors angegeben ist, können die Formulierungen aus Kapitel 5.1.2.1 und B.1 für diesen sowie die zugehörigen Invarianten und der Inversen übernommen werden.

Basierend auf der in Kapitel 5.2.1.1 entwickelten Potentialformulierung zur Beschreibung für nichtlineares hyperelastisches transversal-isotropes Materialverhalten ist der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor gegeben als

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\mathrm{tr}} = 4c_1(I_1-3)\mathbf{I} \quad &+ \quad 2c_2\left(I_1\mathbf{I}-\mathbf{C}\right) - 4c_2\mathbf{I} \\ &+ \quad 4c_3(I_4-1)\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + 2c_4\left(\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbf{C}\cdot\mathbf{a}_0\right) \\ &- \quad 4c_4\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 + 2c_5\left[\mathbf{I}(I_4-1) + (I_1-3)\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0\right] \\ &+ \quad \frac{K}{2}\left(J^2-1\right)\mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \tag{B.38}$$

Unter der Vorgabe, dass die Fasern in X_1-Richtung verlaufen, gilt

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \tag{5.50}$$

so dass sich für die Terme $\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0$ und $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbf{C}\cdot\mathbf{a}_0$ bei der Überführung in die Matrixschreibweise die Belegungen

$$\mathbf{a}_0\otimes\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{B.39}$$

und

$$\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{C}\otimes\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_0\otimes\mathbf{C}\cdot\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix}2C_{11}&C_{21}&C_{31}\\C_{12}&0&0\\C_{13}&0&0\end{bmatrix} \tag{B.40}$$

ergeben.

Im Folgenden wird zunächst nur der lineare Anteil der Potentialformulierung und der daraus resultierende zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor aus (5.37) betrachtet. Setzt man dazu die Formulierungen aus (5.7), (5.49) und (B.1) für die erste und vierte Invariante sowie den rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensor in (B.38) ein und verwendet die in Kapitel B.1 eingeführte Notation, kann der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche

Spannungstensor umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\mathrm{tr},1} &= \mathbf{S}_{\mathrm{tr},1}^{\mathrm{NL}} + \mathbf{S}_{\mathrm{tr},1}^{\mathrm{L}} \\
&= \begin{bmatrix}
(4c_3+2c_5+4c_4)\mathcal{I}(\mathbf{H}^2) & & \\
+(4c_1+2c_5)\mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 & -2c_4\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) \\
+2c_2\mathcal{E}(\mathbf{H}^2) & & \\
& 2c_5\mathcal{I}(\mathbf{H}^2) & \\
0 & +4c_1\mathcal{N}(\mathbf{H}^2) & 0 \\
& +2c_2\mathcal{E}(\mathbf{H}^2) & \\
& & 2c_5\mathcal{I}(\mathbf{H}^2) \\
-2c_4\mathcal{G}(\mathbf{H}^2) & 0 & +4c_1\mathcal{N}(\mathbf{H}^2) \\
& & +2c_2\mathcal{E}(\mathbf{H}^2)
\end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix}
(4c_3+2c_5+4c_4)\mathcal{J}(\mathbf{H}) & & \\
+(4c_1+2c_5)\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & -2c_4\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\
+2c_2\mathcal{F}(\mathbf{H}) & & \\
& 2c_5\mathcal{J}(\mathbf{H}) & \\
0 & +4c_1\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\
& +2c_2\mathcal{F}(\mathbf{H}) & \\
& & 2c_5\mathcal{J}(\mathbf{H}) \\
-2c_4\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & +4c_1\mathcal{D}(\mathbf{H}) \\
& & +2c_2\mathcal{F}(\mathbf{H})
\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Die von $\mathbf{H}$ unabhängigen Anteile in (B.38) heben sich gegenseitig auf, so dass nur noch lineare und quadratische Anteile in $\mathbf{H}$ verbleiben. Unter Verwendung von (2.75) ergibt sich so für den nichtlinearen Anteil des ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathrm{tr},1}^{\mathrm{NL}} &= \mathbf{S}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{NL}} + \\
&\begin{bmatrix}
\mathcal{J}(\mathbf{H})[\mathcal{J}(\mathbf{H})+\mathcal{D}(\mathbf{H})+\mathcal{F}(\mathbf{H})] & 0 & \mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\
+\mathcal{M}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & & +\mathcal{M}(\mathbf{H})[\mathcal{J}(\mathbf{H})+\mathcal{D}(\mathbf{H})+\mathcal{F}(\mathbf{H})] \\
0 & 0 & 0 \\
\mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{F}(\mathbf{H})[\mathcal{J}(\mathbf{H})+\mathcal{D}(\mathbf{H})+\mathcal{F}(\mathbf{H})] \\
+\mathcal{Q}(\mathbf{H})[\mathcal{J}(\mathbf{H})+\mathcal{D}(\mathbf{H})+\mathcal{F}(\mathbf{H})] & & +\mathcal{Q}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H})
\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

mit den Symmetrieeigenschaften

$$\mathbf{P}_{\mathrm{tr},1}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix}. \tag{5.51}$$

Die Materialparameter wurden an dieser Stelle der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Dies ist möglich, da sie keinen Einfluss auf das Symmetrieverhalten haben.

Für die Betrachtung des nichtlinearen Teils der Potentialformulierung, muss der Anteil des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors ausgewertet werden, welcher auf die Kompressiblitätsformulierung von SIMO zurückgeht. Neben der Inverse des rechten CAUCHY-GREEN Deformationstensor wird dazu das Quadrat der Determinante des materiellen Deformationsgradienten benötigt. Unter Berücksichtigung der Bedingung aus (5.15) kann dazu (5.39) zunächst vereinfacht werden zu

$$\mathbf{S}_{\text{Simo}} = \frac{K}{2}\left(J^2 - 1\right)\mathbf{C}^*. \tag{B.43}$$

Für das Quadrat der Determinante ergibt sich nach (B.10)

$$J^2 - 1 = \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) + 2\mathcal{D}(\mathbf{H}), \tag{B.44}$$

wobei nur maximal quadratische Terme berücksichtigt werden. Ferner heben sich die beiden Konstanten gegenseitig auf. Somit können bei der Multiplikation mit $\mathbf{C}^*$, die dort enthaltenen quadratischen Terme vernachlässigt werden und anstelle von (B.6) die Formulierung aus (B.20) verwendet werden. Damit resultiert für den linearen und den nichtlinearen Anteil des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors

$$\mathbf{S}^{\text{L}}_{\text{tr},2} = \begin{bmatrix} 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.45}$$

bzw.

$$\mathbf{S}^{\text{NL}}_{\text{tr},2} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) \\ +2\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{F}(\mathbf{H}) & 0 & 2\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) \\ 0 & \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) \\ & +2\mathcal{D}(\mathbf{H})^2 & 0 \\ 2\mathcal{D}(\mathbf{H})\mathcal{H}(\mathbf{H}) & 0 & \mathcal{L}(\mathbf{H}^2) \\ & & +2\mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix}. \tag{B.46}$$

Mit (2.75) kann abschließend der nichtlineare Anteil des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors bestimmt werden. Dieser ergibt sich zu

$$\mathbf{P}^{\text{NL}}_{\text{tr},2} = \mathbf{S}^{\text{NL}}_{\text{tr},2} + \begin{bmatrix} 2\mathcal{J}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mathcal{F}(\mathbf{H})\mathcal{D}(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{B.47}$$

und weist demnach dieselben Symmetrieeigenschaften auf, wie der bereits untersuchte nichtlineare Anteil auf Grundlage des linearen Teils der Potentialformulierung. Somit führt das vorgestellte nichtlineare hyperelastische transversal-isotrope Potential zu einem nichtlinearen ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor welcher die Symmetrie-

eigenschaften

$$\mathbf{P}_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{NL}} = \begin{bmatrix} S & 0 & A \\ 0 & S & 0 \\ A & 0 & S \end{bmatrix} \tag{B.48}$$

besitzt, so dass ein Leistungsfluss von einem primären Wellenfeld zu einer symmetrischen höher harmonischen Mode existiert.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Entwicklung der Anwendung von Bauteilen aus faserverstärkten Kunststoffen in der zivilen Luftfahrt anhand des Beispiels Airbus [140]. 2
1.2 Potential zur Beschreibung der intermolekularen Bindung (nach [114]). . . 4

2.1 Abbildung eines Punktes P_0 des Körpers B_0 in der Ausgangskonfiguration auf den Punkt P des Körpers B in die Momentankonfiguration. 12
2.2 Bestimmung der Spannungsvektoren und -tensoren. 15
2.3 Geometrie zur Beschreibung der Wellenausbreitung. 28
2.4 Superposition der sechs Teilwellen. 30
2.5 Dispersionsdiagramme der Phasengeschwindigkeit für LAMB- und SH-Wellen in einer transversal-isotropen Einzelschicht bei Wellenausbreitung in Faserrichtung. 36
2.6 Verschiebungsfelder der fundamentalen LAMB- und SH-Wellenmoden (nach [53]). 37
2.7 Auswertung der Gleichheit der Phasengeschwindigkeit als zweite Bedingung für die interne Resonanz. 45

3.1 Vergleich der Auflösung des Spektrogramm für die STFT und der Wavelet-Transformation. 52
3.2 Einfluss der Skale a auf die zeitliche Ausdehnung und das Frequenzspektrum anhand des Morlet-Wavelets. 54
3.3 Ergebnis einer Dekomposition des Signals s in die Wavelet-Details d_i und den zugehörigen Resten a_i mittels einer DWT. 54
3.4 Verwendetes unidirektionales CFK. 55
3.5 Belastungszyklus. 56
3.6 Schadensbild infolge einer schwellenden Zugbelastung in unidirektionalem CFK. 57
3.7 Schema des Versuchsaufbaus. 58
3.8 Dispersionsdiagramme für das verwendete unidirektionale CFK. 59
3.9 Signalverarbeitung. 60
3.10 Geometrie des Probekörpers. 63
3.11 Korrelationsanalyse der Ergebnisse aus der experimentellen Untersuchung der nichtlinearen Wellenausbreitung mit den Ergebnissen des Elastizitätsmoduls. 66
3.12 Anpassung der Regressionsgrade an die Messdaten unter Berücksichtigung der Messungenauigkeiten am Beispiel der Ergebnisse für den Probensatz I. 67

4.1 Diskretisierung eines Körpers B mittels des isoparametrischen Konzepts. . 74

4.2 Schematische Darstellung des Newton-Raphson-Verfahren für ein System mit einem Freiheitsgrad nach [8]. 78
4.3 Betrachtung von Kontaktproblemen nach [8]. 81
4.4 Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung in dünnwandigen Flächenstrukturen. 84
4.5 Bestimmung der Anregungsfrequenz über die Gleichheit der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für Aluminium. 84
4.6 Repräsentatives Master Damage Element. 86
4.7 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung auf Grund geometrischer Nichtlinearität ohne Riss bei einer Frequenz-Dicken-Paarung von 3.614 MHz mm nach einer Ausbreitungsstrecke von 0.25 m. 88
4.8 Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit der Schädigung. 90
4.9 Spannungsverteilung in der Zugprobe auf Grund der Risse: Blau repräsentiert die maximalen Druckspannungen, rot dargestellt sind die maximalen Zugspannungen. 90
4.10 Aufteilen der Versuchsergebnisse in zwei Gruppen auf Grundlage der Ergebnisse der numerischen Simulation. 93

5.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für die uniaxiale Zugbelastung basierend auf dem linear elastischen Hooke'schen Gesetz, dem Neo-Hooke'schen Materialmodell und der Potentialformulierung nach Murnaghan. 96
5.2 Schematische Darstellung des numerischen Modells zur Simulation der fundamentalen Moden A_0 und S_0. 97
5.3 Vergleich des Veschiebungsfeldes und der darin enthaltenen Frequenzanteile für die Wellenausbreitung in einem isotropen linearen und einem isotropen nichtlinearen Medium bei 500 kHz. 98
5.4 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz unter Verwendung der Neo-Hooke'schen Potentialfunktion. 106
5.5 Einfluss der Frequenzen des primären und sekundären Wellenfeldes auf die analytische Dispersionslänge. 106
5.6 Vergleich des Verhaltens der höher harmonischen Amplitude über die Ausbreitungsstrecke für unterschiedliche isotrope nichtlineare Potentialformulierungen für das S_0-S_0 Modenpaar bei 500 kHz. 107
5.7 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 200 kHz unter Verwendung der Neo-Hooke'schen Potentialfunktion. 109
5.8 Vergleich des Verhaltens der höher harmonischen Amplitude über die Ausbreitungsstrecke für unterschiedliche isotrope nichtlineare Potentialformulierungen für das S_0-S_0 Modenpaar bei 200 kHz. 109
5.9 Schematische Darstellung der numerischen Modelle für den Zug- und Scherversuch zur statischen Validierung des hyperelastischen Materialmodells. . 115

5.10 Statische Zug- und Schubversuche zur physikalischen Validierung des entwickelten nichtlinearen hyperelastischen transversal-isotropen Materialmodells und dessen Implementierung in FEAP®, für die Zugversuche sind in grau die Ergebnisse für die 1-Richtung und in rot für die 2-Richtung dargestellt. 116
5.11 Vergleich des Verschiebungsfeldes und der darin enthaltenen Frequenzanteile in einem transversal-isotropen linearen und nichtlinearen Medium bei 500 kHz. 118
5.12 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 500 kHz unter Verwendung der vorgestellten transversal-isotropen Potentialfunktion. 120
5.13 Analyse der nichtlinearen Wellenausbreitung ausgehend von der in-plane Verschiebung des S_0-S_0 Modenpaares bei 200 kHz unter Verwendung der vorgestellten transversal-isotropen Potentialfunktion. 122
5.14 Analyse der Einflusses von K auf das Verhalten des hyperelastischen Materials bei einem Zugversuch in Faserrichtung und quer dazu. 124
5.15 Analyse des Einflusses von K auf die nichtlineare Wellenausbreitung bei 500 kHz. 125
5.16 Einfluss der materiellen Nichtlinearität auf die Wellenausbreitung bei weg- bzw. kraftgesteuerter Anregung. 126
5.17 Analyse des Einflusses von K auf die Amplitude der höher harmonischen Mode. 127

A.1 Schema zur Addition und Subtraktion der Zeilen und Spalten. 146

Tabellenverzeichnis

3.1 Materialparameter des verwendeten Werkstoffes. 55
3.2 Übersicht Lastwechsel mit der zugehörigen Anzahl an Proben. 56
3.3 Standardabweichung des relativen akustischen Nichtlinearitätsparameters β_2' auf Grund von Strom- und Spannungsschwankungen im Versorgungsnetz für den Probensatz I. 61
3.4 Ergebnisse und Messunsicherheiten für den normierten relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter D_β. 62
3.5 Standardabweichung der einzelnen Messgrößen und Messgenauigkeit der zugehörigen Messinstrumente für die Probe 5000–1 des Probensatzes I. . . 64
3.6 Ergebnisse für den Elastizitätsmodul E_1 mit den zugehörigen Messunsicherheiten in GPa. 64

4.1 Materialparameter für Aluminium. 85
4.2 Abmaße des numerischen Modells und Parameter für die Simulation der Wellenausbreitung. 85
4.3 Zu untersuchende Konfigurationen für die Analyse des Einflusses der nichtlinearen Geometrie und einzelner Risse auf die nichtlineare Wellenausbreitung. 86
4.4 Abmaße der Risse, welche für die Entwicklung des RMDE herangezogen werden. 87
4.5 Ergebnisse des normalisierten relativen akustischen Nichtlinearitätsparameter D_β basierend auf der numerischen Simulation der nichtlinearen Wellenausbreitung. 89
4.6 Ergebnisse für den Elastizitätsmodul basierend auf der numerischen Simulation unter Verwendung verschiedener Anzahlen an RMDE. 90

5.1 Parameter der numerischen Simulation der fundamentalen Moden. 97
5.2 Parameter des numerischen Modells zur Analyse der Amplitude der höher harmonischen Mode. 104
5.3 Materialparameter für die hyperelastischen isotropen Materialmodelle. . . . 104
5.4 Phasengeschwindigkeiten und die zugehörigen Dispersionslängen für das S_0-S_0 Modenpaar in einem Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz 108
5.5 Koeffizienten c_i für das hyperelastische nichtlineare transversal-isotrope Materialmodell. 113
5.6 Phasengeschwindigkeiten und die zugehörigen Dispersionslängen für das S_0-S_0 Modenpaar in einem Frequenzbereich von 100 kHz bis 500 kHz 122
5.7 Materialparameter c_i für das hyperelastische nichtlineare Materialmodell mit $K = 5K_0$. 123

B.1 Funktionsübersicht zur Untersuchung der Symmetrieeigenschaften von $\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}$ und der zugehörigen Divergenz. 165

Nomenklatur

Symbole

A	Amplitude
A	Fläche
A	Antisymmetrische Funktion bzgl. der Plattenmittelebene
A, B, C	Steifigkeiten dritter Ordnung nach [105]
a	Skale
b	Breite des Probekörpers
c_g	Gruppengeschwindigkeit
c_L	Geschwindigkeit der Longitudinalwelle
c_p	Phasengeschwindigkeit
c_T	Geschwindigkeit der Transversalwelle
D_β	Normalisierter relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter
E	Elastizitätsmodul
E_1	Elastizitätsmodul in Faserrichtung
E_f	Elastizitätsmodul der Faser
E_m	Elastizitätsmodul der Matrix
e	EULER-Zahl
f	Frequenz
f_n^surf	Leistungsfluss über die Oberfläche
f_n^vol	Leistungsfluss durch das Volumen
$\mathcal{H}$	Heaviside Funktion
h	Plattendicke
i	Imaginäre Einheit
I_i	Verzerrungsinvarianten
J	Determinante des materiellen Deformationsgradienten
J_i	Verzerrungsinvarianten
K	Kompressionsmodul
k	Wellenzahl
L	Dispersionslänge
l, m, n	Steifigkeiten dritter Ordnung nach [75]
m	Masse

$\mathcal{P}_{mn}$	Leistungsfluss der Mode m zur Mode n
T	Periodendauer
t	Dicke des Probekörpers
t	Zeit
S	Oberfläche
S	Symmetrische Funktion bzgl. der Plattenmittelebene
V	Volumen
v	Geschwindigkeit
w	Trockenfaserflächengewicht

$\mathbf{B}, B_{ij}$	Matrix mit den Ableitungen der Ansatzfunktionen
$\mathbf{b}, b_{ij}$	Linker Cauchy-Green Deformationstensor
$\mathbf{C}, C_{ij}$	Rechter Cauchy-Green Deformationstensor
$\mathbf{E}, E_{ij}$	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
$\mathbf{e}, e_{ij}$	Almansi-Verzerrungstensor
$\mathbf{F}, F_{ij}$	Materieller Deformationsgradient
$\mathbf{H}, H_{ij}$	Gradient des Verschiebungsfeldes
$\mathbf{I}, I_{ij}$	Einheitstensor 2. Stufe
$\mathbf{k}, k_i$	Wellenzahlvektor
$\mathbf{N}, N_i$	Normalenvektor in der Ausgangskonfiguration
$\mathbf{N}, N_{ij}$	Matrix mit den Ansatzfunktionen
$\mathbf{n}, n_i$	Normalenvektor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{P}, P_{ij}$	Erster Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\mathbf{p}, p_i$	Polarisationsvektor
$\mathbf{R}, R_{ij}$	Rotationsmatrix
$\mathbf{S}, S_{ij}$	Zweiter Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor
$\mathbf{t}, t_i$	Spannungsvektor
$\mathbf{U}, U_{ij}$	Rechter Strecktensor
$\mathbf{u}, u_i$	Verschiebungsvektor
$\dot{\mathbf{u}}, \dot{u}_i$	Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{u}_i$	Beschleunigungsvektor
$\mathbf{V}, V_{ij}$	Linker Strecktensor
$\mathbf{v}, v_i$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{X}, X_i$	Ortsvektor in der Ausgangskonfiguration
$\mathbf{x}, x_i$	Ortsvektor in der Momentankonfiguration

$\mathbb{C}$	Elastizitätstensor 4. Stufe
$\mathbb{I}$	Einheitstensor 4. Stufe
α	Wellenausbreitungsrichtung
β	Absoluter akustischer Nichtlinearitätsparameter
β'	Relativer akustischer Nichtlinearitätsparameter
δ_{ij}	KRONEKER Delta
λ, μ	LAMÉ-Konstanten
λ	Wellenlänge
λ_i	Streckungsverhältnis
ν	Querkontraktionszahl
Π	Gesamtpotential
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
ϕ	Faservolumengehalt
Ψ	Verzerrungsenergiedichtefunktion
ω	Kreisfrequenz
$\boldsymbol{\epsilon}, \epsilon_{ij}$	Linearisierter Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}, \tau_{ij}$	KIRCHHOFF Spannungstensor
$\boldsymbol{\varphi}, \varphi_i$	Vektorfunktion
det	Determinante
Div	Divergenz mit Bezug auf die Ausgangskonfiguration
div	Divergenz mit Bezug auf die Momentankonfiguration
Grad	Gradient mit Bezug auf die Ausgangskonfiguration
grad	Gradient mit Bezug auf die Momentankonfiguration
$\mathcal{D}()$	Richtungsableitung
d()	Totales Differential
$\partial()$	Partielles Differential
$\delta()$	Virtuelle Größe
$\dot{()}, \ddot{()}$	Zeitableitung
$()', ()''$	Ortsableitung

Abkürzungen

CAN	Contact-Acustic Nonlinearity
CFK	Kohlefaserverstärkter Kunststoff
CWT	Kontinuierliche Wavelet-Transformation
DFT	Diskrete FOURIER-Transformation
DWT	Diskrete Wavelet-Transformation
EMV	Elektromagnetische Verträglichkeit
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente Methode
FFT	Schnelle FOURIER-Transformation
FVK	Faserverstärkte Kunststoffe
NDT	Zerstörungsfreie Prüfung
PW	Primäres Wellenfeld
RMDE	Repräsentatives Master Damage Element
SH-Wellen	Horizontale Scherwellen
SW	Sekundäres Wellenfeld
SHM	Structural Health Monitoring
STFT	Kurz-Zeit FOURIER-Transformation
TFFG	Trockenfaserflächengewicht
UD	Unidirektional

Lebenslauf

Allgemeine Angaben

Name:	**Rauter, Natalie**
Geburtsdatum:	27.02.1988

Beruflicher Werdegang

Seit 10.2016	**Entwicklungsingenieurin** Bereich Engineering, Nordex Energy GmbH, Hamburg
11.2012 – 09.2016	**Wissenschaftliche Mitarbeiterin** Institut für Mechanik, Fakultät für Maschinenbau, Helmut-Schmidt-Universität/ Universität der Bundeswehr Hamburg

Studium

03.2011 – 10.2012	**Master of Science** Flugzeugbau, Schwerpunkt Entwurf und Leichtbau Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg
09.2007 – 02.2011	**Bachelor of Engineering** Flugzeugbau, Schwerpunkt Entwurf und Leichtbau Hochschule für angewandte Wissenschaften Hamburg

Schulbildung

07.1998 – 06.2007	**Allgemeine Hochschulreife** Goetheschule Essen

Publikationen

Artikel

N. Rauter, R. Lammering und T. Kühnrich. On the detection of fatigue damage in composites by use of second harmonic guided waves, *Composite Structures*, **152**: 247–258, 2016.

N. Rauter und R. Lammering. Numerical simulation of the nonlinear wave propagation based on the cumulative second harmonic lamb wave generation in isotropic media considering material and geometrical nonlinearities, *Smart Materials and Structures*, **24**: 045027, 2015.

N. Rauter und R. Lammering. Impact Damage Detection in Composite Structures Considering Non-linear Lamb Wave Propagation, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **22**: 44–51, 2015.

Konferenzbeiträge

N. Rauter und R. Lammering. Second Harmonic Lamb Waves in Unidirectional Composite, *Book of Abstracts 9th German-Greek-Polish Symposium on Recent Advances in Mechanics*, pp. 21–22, 2016.

R. Lammering und N. Rauter. Nonlinear Elastic Waves for Evaluation of Composite Material Deterioration, *Tagungsbeitrag 40th Solid Mechanics Conference*, 2016.

N. Rauter und R. Lammering. Numerical Simulation of the Cumulative Higher Harmonic Generation in Unidirectional Composites, *Proceedings 8th European Workshop on Structural Health Monitoring*, 2016.

N. Rauter und R. Lammering. Development of a hyperelastic transversally isotropic material law for the simulation of the higher harmonic Lamb wave generation in composite structures, *Proceedings 10th International Workshop on Structural Health Monitoring*, 2015.

N. Rauter und R. Lammering. Investigation of the Higher Harmonic Lamb Wave Generation in Hyperelastic Isotropic Material, Proceedings in *Physics Procedia*, **70**: 309–313, 2015.

N. Rauter und R. Lammering. Experimental Investigation of Fatigue Damage in Composite Structures Considering Second Harmonic Lamb Waves, *Proceedings 7th European Workshop on Structural Health Monitoring*, 2014.

N. Rauter und R. Lammering. Die Anwendung höherharmonischer Lamb-Wellen zur Untersuchung von Impactschädigungen in Faserverbunden, *Tagungsbeitrag 132. Norddeutsches Mechanik-Kolloquium*, 2013

N. Rauter und R. Lammering. Experimental Investigation of Impact Damages in Composite by Second Harmonic Lamb Waves, *Proceedings IV Eccomas Thematic Conference on Smart Structures and Materials*, 2013.

Berichte

N. Rauter. *Beurteilung der Degradation von Faserverbunden mit Hilfe der integrierten Bauteilüberwachung*, Bericht über das Förderungsjahr 2013 im Rahmen des Pro Exzellenzia Promotionsstipendiums, Januar 2014.