BEITRAG ZUR BERECHNUNG VON LEICHTBAUPROFILEN UNTER KURZZEITIGER AXIALER STOßBELASTUNG MIT HILFE DER FINITEN STREIFEN METHODE

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

genehmigte

DISSERTATION

von

EKKEHARD STEMMER
aus Überlingen/Bodensee

Hamburg 2008

Referent:
Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Lammering
Institut für Mechanik
Fakultät für Maschinenbau
Helmut-Schmidt-Universität
Universität der Bundeswehr Hamburg

Korreferent:
Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Rapp
Institut für Leichtbau
Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik
Universität der Bundeswehr München

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 2008

Danksagung

Die Anfänge dieser Arbeit entstanden während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Leichtbau der Universität der Bundeswehr München. Während meiner Zeit als Leiter des Studentenfachbereiches A an der Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg erhielt ich dann die Möglichkeit, diese Arbeit zu vollenden.

Somit gilt an dieser Stelle zunächst mein ganz besonderer Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering, Lehrstuhlinhaber der Professur für Mechanik im Institut für Mechanik der Fakultät für Maschinenbau an der Helmut-Schmidt-Universität/Universität der Bundeswehr Hamburg, der mir diese Chance eröffnete. Zudem danke ich ihm in ganz besonderer Weise für die jederzeit gewährte, äußerst engagierte und hervorragende wissenschaftliche Betreuung sowie für sein in mich gesetztes Vertrauen.

Gleichzeitig gilt auch mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Helmut Rapp, Lehrstuhlinhaber der Professur für Leichatbau der Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität der Bundeswehr München, für die spontane und bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank an dieser Stelle meinem langjährigen Kameraden und Freund Herrn Dr.-Ing. Ottmar Breuer am Institut für Leichtbau der Universität der Bundeswehr München, der schon während meines Studiums der Luft- und Raumfahrttechnik meine Diplomarbeit betreute und auf dessen Anregung hin einige Jahre später diese Arbeit begonnen wurde. Auch er stand mir stets mit anregenden Diskussionen und äußerster Hilfsbereitschaft jeder Zeit zur Seite.

Abschließend möchte ich mich auch bei meiner Frau Sibylle für den Verzicht auf viele gemeinsame Stunden sowie für das entgegengebrachte Verständnis bedanken, ohne das letzten Endes diese Arbeit nicht hätte fertiggestellt werden können.

Zusammenfassung

Werden dünnwandige Leichtbaustrukturen einer axialen statischen oder dynamischen Belastung ausgesetzt, zeichnen sich insbesondere dünnwandige prismatische Stäbe dadurch aus, dass sie unter dieser Art von Belastung auf komplexe Art und Weise wie z.B. durch Beulen der Flansche und Stege oder durch Knicken, welchem in Abhängigkeit der geometrischen Verhältnisse auch ein sekundäres Beulen überlagert sein kann, versagen können.

Da im Leichtbau Profile wichtige Bauteile darstellen, wird in dieser Arbeit untersucht, inwieweit Parameter wie zum Beispiel die Stoßdauer, die Vorverformung oder die geometrischen Abmessungen Auswirkungen auf das dynamische Stabilitätsverhalten haben, wenn lokale Effekte mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Die bisher erschienen Aufsätze von BREUER [4], KONING und TAUB [14] sowie von TAUB [21], die das Strukturverhalten von Profilen unter einer kurzzeitigen axialen Stoßbelastung untersuchen, basieren auf der Anwendung der Balkentheorie und können daher die Auswirkung einer Kopplung zwischen lokalen und globalen Effekten nicht berücksichtigen.

Ein Verfahren, welches die Forderung nach hinreichender Genauigkeit aber dennoch überschaubarem Rechenaufwand erfüllt, ist die *Finite Streifen Methode (FSM)*. Vor diesem Hintergrund wird nun in dieser Arbeit die semi-analytische *FSM* als Berechnungsverfahren ausgewählt und erstmalig auf die oben beschriebene Problematik angewendet.

So erfolgt zunächst eine Einführung in die *FSM*. Danach werden die nichtlinearen kinematischen Beziehungen aufgestellt, die Gleichgewichtsbedingungen beschrieben, das linear elastische Materialgesetz sowie das Prinzip von *d'Alembert* in der *Lagrangeschen* Fassung eingeführt. Nach Festlegung der getroffenen Annahmen und Voraussetzungen für die Berechnung dünnwandiger Flächentragwerke gemäß der *Kirchhoffschen* Plattentheorie werden die allgemeingültigen Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums auf das in dieser Arbeit verwendete Platten-Scheibenelement übertragen. Nach der Beschreibung der für die Verschiebungsfelder verwendeten Ansatzfunktionen werden die Systemmatrizen abgeleitet. Zur Lösung des sich ergebenden Differentialgleichungssystems wird nun im Gegensatz zu den in den oben genannten Arbeiten verwendeten Lösungsalgorithmen das *Newmark*-Verfahren in nichtlinearer Formulierung eingeführt.

Nach der mathematischen Beschreibung der *FSM* wird diese zunächst auf das von WELLER [22] beschriebene Balkenelement mit Rechteckquerschnitt angewendet. Ziel ist es, den generellen Einfluss von Stoßdauer, Stoßform, Vorverformung und Randbedingung auf das dynamische Verhalten von Strukturen zu untersuchen. Gleichzeitig werden hier die Ergebnisse der *FSM* denen der Balkentheorie gegenübergestellt.

Als Auswertekriterium wird ein Spannungskriterium festgelegt. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass z.B. im Vergleich zur *Southwell*-Methode oder zum *Budiansky-Roth-*

Kriterium weitere Tragreserven der Struktur genutzt werden können.

Im Anschluss hieran erfolgt die Anwendung des Rechenverfahrens auf U-Profile mit unterschiedlichen Schlankheitsgraden und Verhältnissen der Flanschhöhe zur Stegbreite. Nach erfolgter Diskussion der Ergebnisse des dynamischen Lastfalles werden abschließend die mit Hilfe der *FSM* ermittelten Ergebnisse mit den von HERTEL [11] bestimmten statischen Experimenten verglichen.

Die numerische Umsetzung erfolgte mit Hilfe eines FORTRAN-Programms. Der Postprozessor zur Darstellung der räumlichen Verschiebungen wurde mittels MATHEMATICA und EXCEL realisiert.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole XI

Abbildungsverzeichnis XV

1 Einleitung 1

1.1 Problemstellung 1

1.2 Stand der Forschung 3

1.2.1 Dünnwandige Strukturen unter axialer Stoßbelastung 3

1.2.2 Die Finite Streifen Methode 5

1.2.2.1 Literatur zur linearen Statik 5

1.2.2.2 Literatur zur nichtlinearen Statik 7

1.2.2.3 Literatur zur Dynamik 11

1.3 Ziel und Gliederung der Arbeit 15

2 Die Finite Streifen Methode 16

2.1 Die Grundgleichungen der Mechanik 18

2.1.1 Die nichtlinearen kinematischen Beziehungen 18

2.1.4 Das Prinzip von d'Alembert 25

2.2 Die Anwendung auf vorverformte räumliche Strukturen 26

2.2.1 Annahmen und Voraussetzungen 26

2.2.2 Die Berücksichtung der Vorverformung in der Kinematik . . 27

2.2.3 Die Spannungs - Verzerrungsmatrix 30

2.3 Das Verschiebungsfeld 31

2.3.1 Der Reihenansatz zur Beschreibung der Biegeverformung . . 32

2.3.2 Der Reihenansatz zur Beschreibung der Membranverformung 33

2.3.3 Der Polynomansatz 36
2.4 Die Systemmatrizen 38
2.5 Das Lösungsverfahren für die Zeitintegration 40
2.5.1 Lösungsverfahren für lineare dynamische Probleme 41
2.5.2 Das Newmark-Verfahren in nichtlinearer Formulierung 43

3 Implementierung der Finiten Streifen Methode 44
3.1 Beschreibung der Berechnungsmöglichkeiten 44
3.2 Organisation des Computerprogramms 45
3.2.1 Programmablauf 45
3.2.2 Aufbau der Strukturmatrizen 47

4 Anwendung der Finiten Streifen Methode 50
4.1 Die Strukturantwort eines Stabes unter axialer Stoßbelastung 50
4.2 Die Variation der Stoßparameter 52
4.2.1 Einfluss der Stoßstauer auf das Strukturverhalten 52
4.2.2 Einfluss der Vorverformung auf das Strukturverhalten 54
4.2.3 Einfluss der Stoßform auf das Strukturverhalten 55
4.2.4 Einfluss der Randbedingung auf das Strukturverhalten 58
4.3 Einführung des Dynamischen Lastfaktors 59
4.4 Die dynamische Stabilität von U-Profilen 63
4.4.1 Profilauswahl 63
4.4.2 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 1 . . 65
4.4.3 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 2 . . 70
4.4.4 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 3 . . 78

5 Vergleich der dynamischen und statischen Versagensformen 84

6 Zusammenfassung und Ausblick 90

Literaturverzeichnis 94

Anhang A **Die Verzerrungs - Verkrümmungsmatrix** **104**

Anhang B **Übersicht über mögliche Verformungsansätze** **105**

Anhang C **Die Formfunktionsmatrix** **107**

Anhang D **Die lineare Verzerrungs - Verschiebungsmatrix** **108**

Anhang E **Die nichtlineare Verzerrungs - Verschiebungsmatrix** **109**

Anhang F **Die lineare Steifigkeitsmatrix** **111**

Anhang G **Die Massenmatrix** **113**

Anhang H **Integralzusammenstellung für die linearen Matrizen** **114**

Anhang I **Die Ableitung der Tangentensteifigkeitsmatrix** **115**

Anhang J **Die Matrix G** **119**

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen und Symbole

Zur besseren Unterscheidung der einzelnen Formelgrößen wird in dieser Arbeit folgende Nomenklatur verwendet: Skalare Größen werden mittels kursiver Buchstaben in Standardstrichstärke dargestellt. Für Vektoren, Matrizen und Tensoren hingegen werden kursive Buchstaben in Fettdruck verwendet.

Lateinische Buchstaben

a	Flanschbreite eines U-Profiles
a_i	Koeffizient der Polynomansatzfunktion
A	Fläche
b	Streifenbreite
C_i	Integrationskonstanten der Ansatzfunktion $g(x)$
$D_{ijkl} \quad (i,j,k,l = 1,2,3)$	Elemente des Elastizitätstensors
$D_{ij}^{p} \quad (i,j = 1,2,3)$	Elemente des Scheibenanteils der Elastizitätsmatrix
$D_{ij}^{b} \quad (i,j = 1,2,3)$	Elemente des Plattenanteils der Elastizitätsmatrix
E	Elastizitätsmodul
$g(x)$	allgemeine Ansatzfunktion der Verschiebungen in Streifenlängsrichtung
$g_k^u(x)$	Ansatzfunktion der u-Verschiebungen in Längsrichtung
$g_m^v(x)$	Ansatzfunktion der v-Verschiebungen in Längsrichtung
$g_n^w(x)$	Ansatzfunktion der w-Verschiebungen in Längsrichtung
I_y	Flächenträgheitsmoment
l	Streifenlänge
$M_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$	Schnittmomente
$N_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$	Schnittkräfte
h	Streifendicke
t	Zeit
T_S	Stoßdauer

T_B	Periodendauer der Biegeschwingung
T_L	Periodendauer der Längsschwingung
u	Verschiebungen der Streifenmittelfläche in x-Richtung
u^0	Vorverformung der Streifenmittelfläche in x-Richtung
U_i	Elemente des Verschiebungsvektor eines Partikels im Abstand z zur Mittelfläche
v	Verschiebungen der Streifenmittelfläche in y-Richtung
v^0	Vorverformung der Streifenmittelfläche in y-Richtung
$\dot{v}$	Geschwindigkeit
V	Volumen
w	Verschiebungen der Streifenmittelfläche in z-Richtung
w^0	Vorverformung der Streifenmittelfläche in z-Richtung
W_a	Arbeit der äußeren Kräfte
W_i	Arbeit der inneren Kräfte
W_T	Arbeit der Trägheitskräfte

Griechische Buchstaben

β	Transformationswinkel
δ	Variationszeichen
δ_{ij}	Kroneckersymbol
ε	Toleranzgrenze
ε_x, ε_y	Dehnungen in x- und y-Richtung
ε_{ij} $(i,j = 1,2,3)$	Elemente des Verzerrungstensors
η	auf Streifenbreite normierte y-Koordinate
$\Phi(y)$	allgemeine Ansatzfunktion der Verschiebungen in Streifenquerrichtung
$\Phi_k^u(y)$	Ansatzfunktion der u-Verschiebungen in Querrichtung
$\Phi_m^v(y)$	Ansatzfunktion der v-Verschiebungen in Querrichtung
$\Phi_n^w(y)$	Ansatzfunktion der w-Verschiebungen in Querrichtung
γ_{xy}	Gleitung
κ_x, κ_y	Krümmung der Streifenmittelfläche

κ_{xy}	Verwindung der Streifenmittelfläche
λ	*Lamésche* Konstante
λ	Schlankheitsgrad
ν	Querkontraktionszahlen
μ	*Lamésche* Konstante
$\bar{\mu}$	von der Randbedingung abhängiger Parameter in der Ansatzfunktion $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Neigung der Plattenmittelfläche am jeweiligen Schnittufer
ω	Eigenkreisfrequenz
ρ	Dichte
$\Delta \boldsymbol{d}$	inkrementeller Verschiebungszuwachs
ξ	auf Streifenlänge normierte $\boldsymbol{x}$-Koordinate

Matrizen und Vektoren

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{d})$	Gesamtverzerrungs-Verformungsmatrix
$\boldsymbol{B}_L(\boldsymbol{d})$	lineare Verzerrungs-Verformungsmatrix
$\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d})$	nichtlineare Verzerrungs-Verformungsmatrix
$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{d}_0)$	Vorverformungsanteil der nichtlinearen Verzerrungs-Verformungsmatrix
$\boldsymbol{D}$	Elastizitätstensor
$\boldsymbol{E}$	*Lagrangescher* Verzerrungstensor
$\boldsymbol{E}^0$	*Lagrangescher* Verzerrungstensor der Vorverformungen
$\tilde{\boldsymbol{E}}$	$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^0$
$\boldsymbol{F}(t)$	Kraftvektor der äußeren Belastung in Abängigkeit der Zeit
$\bar{\boldsymbol{F}}$	materieller Deformationsgradient
$\boldsymbol{I}$	Einheitsmatrix
$\boldsymbol{J}$	Verformungsgradient
$\hat{\boldsymbol{K}}$	effektive Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{K}$	Sekantensteifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{K}_T$	Tangentensteifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{M}$	Gesamtmassenmatrix
$\boldsymbol{N}$	Formfunktionsmatrix

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{d})$	Vektor der inneren Knotenlinienkräfte
$\boldsymbol{U}$	Verschiebungsvektor eines Partikels im Abstand z zur Mittelfläche
${}^{0}\boldsymbol{a}$	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
${}^{t}\boldsymbol{a}$	Ortsvektor der Momentankonfiguration
$\boldsymbol{d}$	Vektor der Freiheitsgrade
$\boldsymbol{n}$	Normaleneinheitsvektor
$\boldsymbol{t}$	Spannungsvektor
$\boldsymbol{u}$	Verschiebungsvektor bezogen auf Mittelfläche
$\boldsymbol{u}^{0}$	Verschiebungsvektor der Vorverformung
$\tilde{\boldsymbol{u}}$	Gesamtverschiebungsvektor bezogen auf Mittelfläche
$\ddot{\boldsymbol{u}}$	Beschleunigung
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Dehnungsvektor
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor

Indizierungen

b	Biegegröße
$,j$	Ableitung nach j im Rahmen der Indexschreibweise
k	Iterationsschritt
$krit$	kritisch
$\max$	Maximalwert
p	Membrangröße
t	Zeitpunkt
Δt	Zeitinkrement

Abbildungsverzeichnis

Bild 1: Diskretisierung einer Struktur mit Hilfe der *Finiten Element Methode* und der *Finiten Streifen Methode* 16

Bild 2: Übergang eines Körpers K von der Referenz- in die Momentankonfiguration 18

Bild 3: Körper K unter äußerer Belastung 21

Bild 4: Schnitt durch den Körper K mit Schnittkraftvektor und vereinfachter Darstellung der Komponenten des Spannungsvektors 22

Bild 5: Infinitesimales Volumenelement mit den Komponenten des Spannungstensors 22

Bild 6: Gleichgewicht an einem infinitesimalen Tetraederelement 23

Bild 7: Plattenausschnitt mit Punkt P in der Referenzkonfiguration im Abstand z von der Mittelfläche 28

Bild 8: Plattengeometrie im verformten Zustand unter Berücksichtigung der Vorverformung und der Annahme der Schubstarrheit 28

Bild 9: Prinzipielle Darstellung eines Finiten Streifen Elementes 31

Bild 10: Globale Inkompatibilität benachbarter Knotenlinien bei räumlichen Strukturen 35

Bild 11: LO2 und HO4 Element und deren Freiheitsgrade 36

Bild 12: Unterteilung der Lösungsverfahren für dynamische Problemstellungen 41

Bild 13a: Schematische Darstellung des Programmablaufs 46

Bild 13b: Schematische Darstellung des Programmablaufs - Fortsetzung 47

Bild 14: Koordinatentransformation 48

Bild 15: Schematische Darstellung der Gruppierung der einzelnen Anteile der Elementmatrizen 49

Bild 16: Struktur der Gesamtmatrix 49

Bild 17: Der vorverformte Druckstab 50

Bild 18: Vergleich der *FSM* mit der Balkentheorie bei $F/F_{krit} = 0{,}8$; $w^0/h = 0{,}1$ und $T_s/T_p = 0{,}5$ 51

Bild 19: Amplitudenverlauf in Abhängigkeit der Stoßdauer 52

Bild 20a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßdauer bei $w^0/h=0,1$ 53

Bild 20b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßdauer bei $w^0/h = 0,1$ 53

Bild 21a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Vorverformung bei $T_s/T_p = 0,5$ 54

Bild 21b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Vorverformung bei $T_s/T_p = 0,5$ 54

Bild 22: Amplitudenverlauf in Abhängigkeit der Vorverformung 55

Bild 23a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0,1$ und identischem Kraftstoß 56

Bild 23b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0,1$ und identischem Kraftstoß 57

Bild 24: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0,1$ und identischer Stoßdauer 57

Bild 25a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Randbedingung bei $w^0/h = 0,1$ und $T_s/T_p = 0,5$ 58

Bild 25b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Randbedingung bei $w^0/h = 0,1$ und $T_s/T_p = 0,5$ 58

Bild 26: Statisches Stabilitätsverhalten eines Druckstabes 60

Bild 27: Stabilitätskriterium nach BUDIANSKY 60

Bild 28: Stabilitätskriterium nach SOUTHWELL 61

Bild 29: Stabilitätskriterium nach WELLER 62

Bild 30: Stabilitätsversagen eines U-Profils 63

Bild 31: Profilauswahl 64

Bild 32: Konfiguration der U-Profile 64

Bild 33: Maximale v-Verschiebung in Abhängigkeit der Stoßdauer 65

Bild 34: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßdauer 65

Bild 35: Qualitative Darstellung der Spannungsumlagerung vom Steg in die Flansche 66

Bild 36a: u-Verformung über dem Umfang bei $F/F_{krit} = 0,6$ 66

Bild 36b: u-Verformung über dem Umfang bei $F/F_{krit} = 1,4$ 66

Bild 37: Einfluss der Vorverformung v^0 auf den Verformungszustand eines U-Profils mit $b/a = 0,25$; $T_s/T_p = 0,5$; $v^0/h = 0,1$ und $F/F_{krit} = 3,0$ 67

Bild 38: Verformungen über dem Umfang für das Profil aus Bild 37 67

Bild 39: Strukturverhalten aufgrund der Variation der Vorverformung bei T_s/T_p = 0,5 68

Bild 40: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer für unterschiedliche Vorverformungen 68

Bild 41: Einfluss der Vorverformung w^0 auf den Verformungszustand eines U-Profils mit b/a = 0,25; T_s/T_p = 0,5; w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,8 69

Bild 42: Verformungen über dem Umfang für das Profil aus Bild 41 69

Bild 43: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer 70

Bild 44: Einfluss der Stoßdauer bei einem U-Profil mit b/a = 0,5 70

Bild 45: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Vorverformungen v^0 71

Bild 46a: u-Verformung bei v^0/h = 0,05 und F/F_{krit} = 1,4 72

Bild 46b: u-Verformung bei v^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,0 72

Bild 47a: v-Verformung bei v^0/h = 0,05 und F/F_{krit} = 1,4 72

Bild 47b: v-Verformung bei v^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,0 72

Bild 48a: w-Verformung bei v^0/h = 0,05 und F/F_{krit} = 1,4 72

Bild 48b: w-Verformung bei v^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,0 72

Bild 49a: Verformungszustand bei v^0/h = 0,05 und F/F_{krit} = 1,4 73

Bild 49b: Verformungszustand bei v^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,0 73

Bild 50: Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Vorverformungen 73

Bild 51a: Vergleichsspannung bei F/F_{krit} = 0,8 74

Bild 51b: Vergleichsspannung bei F/F_{krit} = 1,0 74

Bild 52: Qualitative Spannungsverteilung bei unterschiedlichen Laststufen und Vorverformungen 74

Bild 53: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Vorverformungen w^0/h 75

Bild 54a: u-Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,6 75

Bild 54b: u-Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,8 75

Bild 55a: v-Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,6 76

Bild 55b: v-Verformung bei w^0/h = 0,1 F/F_{krit} = 1,8 76

Bild 56a: w-Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,6 76

Bild 56b: w-Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,8 76

Bild 57a: Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,6 76

Bild 57b: Verformung bei w^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 1,8 76

Bild 58: Qualitative Verteilung der Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Laststufen und Vorverformungen 77

Bild 59: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Stoßdauern T_s/T_p 78

Bild 60: Maximale Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Stoßdauern . . 79

Bild 61a: u-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 1,4 79

Bild 61b: u-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 2,0 79

Bild 62a: v-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 1,4 80

Bild 62b: v-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 2,0 80

Bild 63a: w-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 1,4 80

Bild 63b: w-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 2,0 80

Bild 64a: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,0 und v^0/h = 0,1 81

Bild 64b: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,8 und v^0/h = 0,1 81

Bild 65a: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,0 und w^0/h = 0,1 82

Bild 65b: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,8 und w^0/h = 0,1 82

Bild 66: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer 82

Bild 67: Versagen von U-Profilen mit unterschiedlichem Schlankheitsgrad λ unter statischer Belastung nach HERTEL [11] 84

Bild 68: Profil 1; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 0,5 und Schlankheitsgrad λ = 80 (re) sowie Verformungszustände aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,6 und v^0/h = 0,1 (Mi) sowie v^0/h = -0,1 (re); T_s/T_p = 1,0 85

Bild 69: Profil 2; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 0,5 und Schlankheitsgrad λ = 50 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,0 (Mi) und F/F_{krit} = 3,0 (li); v^0/h = 0,1; T_s/T_p = 1,0 86

Bild 70: Profil 3; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 50 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,0 und v^0/h = 0,1(Mi) sowie w^0/h=0,1(re); T_s/T_p = 1,0 86

Bild 71: Profil 4; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 30 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,0 (Mi) und F/F_{krit} = 3,0 (li); w^0/h = 0,1; T_s/T_p = 1,0 87

Bild 72: Profil 4; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 30 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 3,0 und w^0/h = 0,1 (Mi) sowie w^0/h = 0,2 (re); T_s/T_p = 1,0 88

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Aufgrund der heutigen Situation auf dem Energiemarkt und der ständig steigenden Energiepreise kommt im modernen Flugzeug-, Schiffs- oder Fahrzeugbau unter anderem nicht nur der Auslegung der Antriebssysteme oder der Aerodynamik, sondern auch der Strukturauslegung selbst, verbunden mit einer konsequenten Umsetzung des Leichtbaus, eine besondere Bedeutung zu.

Obwohl in den oben genannten Konstruktionen die Lastaufnahmen weitestgehend über Platten- und Schalentragwerke realisiert werden, sind profilierte prismatische Stäbe auch weiterhin wichtige Strukturbauteile. So kommen sie zum Beispiel als eigenständiges Tragwerk, wie z.B. als Fahrwerksstrebe oder als Versteifungselement von Platten- und Schalentragwerken zur Anwendung, um eine höhere Lastaufnahme zu ermöglichen.

Besonders gefährdet sind jedoch dünnwandige Leichtbaustrukturen, die einer statischen axialen Druckbelastung ausgesetzt sind. Insbesondere dünnwandige prismatische Stäbe können unter dieser Art von Belastung auf zwei grundlegende Arten versagen. Zum einen durch Beulen der Flansche und Stege und zum anderen durch Knicken. WIEDEMANN [23] führt in diesem Zusammenhang aus, dass

> "bei einer Optimalauslegung die Dicken und Breiten der Einzelstreifen so abzustimmen [sind], dass sie jeweils für sich etwa gleichzeitig beulen würden, wie schließlich auch Stabknicken und Profilbeulen bei gleicher Last auftreten sollten."

SCHÖPPACH [80] verweist an dieser Stelle auf eine Arbeit von LOUGHLAN und RHODES [15], in der ausgeführt wird, dass bei der Kopplung eines Beul- und Knickproblems Strukturversagen bereits weit im elastischen Bereich auftreten kann und dass durch den Einfluss von Imperfektionen in realen Stäben das Tragverhalten gegenüber dem eines idealen Stabes stark reduziert ist.

In der Realität treten jedoch nicht nur rein statische Belastungsfälle auf. Vielmehr unterliegen Konstruktionen auch dynamischen Einflüssen. Neben der kontinuierlichen Anregung können Strukturen auch einer kurzzeitigen, stoßartigen Belastung, wie sie z.B. bei Landestößen, Windböen, Wellenschlag oder beim Durchfahren von Schlaglöchern auftritt, ausgesetzt sein.

Da bei der Formulierung dieser Problemstellung die Stoßdauer als zusätzliche Variable eingeführt wird und die Massenträgheit mit Berücksichtigung findet, stellt sich nun die Frage, inwieweit durch diese Größen das Tragverhalten von dünnwandigen Leichtbaustrukturen beeinflusst wird.

1.2 Stand der Forschung

Im Folgenden werden zunächst grundlegende Arbeiten vorgestellt, die sich mit der Thematik des Tragverhaltens dünnwandiger Strukturen unter stoßartiger axialer Belastung beschäftigen. Anschließend wird der Stand der Arbeiten bezüglich des in dieser Arbeit angewandten Berechnungsverfahrens der *Finiten Streifen Methode* (*FSM*) dargestellt. Hieraus abgeleitet erfolgt dann die Beschreibung der Zielsetzung und Gliederung dieser Arbeit.

1.2.1 Dünnwandige Strukturen unter axialer Stoßbelastung

Die Anfänge bezüglich der Untersuchungen zum Tragverhalten von dünnwandigen Strukturen unter stoßartiger Belastung gehen auf den Anfang des 20. Jahrhunderts zurück. Im Jahr 1933 veröffentlichten KONING und TAUB [14], [21] in der Zeitschrift *Luftfahrtforschung* zwei Aufsätze, die sich mit der stoßartigen Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich beschäftigten. Hierin wurde ein beidseits gelenkig gelagerter Rechteckstab einer stoßartigen axialen Belastung, die einer Sprungfunktion entsprach, ausgesetzt und das Antwortverhalten der Struktur untersucht. Die Belastungsamplitude wurde dabei konstant gehalten, während die Zeitdauer der Belastung variiert wurde. Um diese Problemstellung analytisch behandeln zu können, musste eine Entkopplung der Diffentialgleichungen für die Axial- und Transversalbewegung erreicht werden. KONING und TAUB lösten dies, indem sie die axialen Massenträgheitsmomente vernachlässigten.

Auf dieser Grundlage setzten in der Folge Arbeiten weiterer Wissenschaftler auf, die den Einfluss der von KONING und TAUB getroffenen Annahmen auf die Strukturantwort näher untersuchten. Darüber hinaus wurde im Laufe der Zeit die Theorie weiter verfeinert. So wurde z.B. die Annahme der Schubstarrheit fallengelassen und das Differentialgleichungssystem um die entsprechenden Terme ergänzt. Weiterhin wurden Nichtlinearitäten in den Bereichen der Geometrie und des Materials sowie Dämpfungseinflüsse berücksichtigt. An dieser Stelle sei auf die sehr ausführlich zusammengestellte Literatursicht in BREUER [4] verwiesen.

BREUER selbst hat die Auswirkungen einer stoßartigen axialen Belastung auf schlanke dünnwandige Stäbe untersucht. Er beschreibt die oben geschilderte Problemstellung zunächst mit Hilfe der Balkentheorie in der geometrisch nichtlinearen Formulierung unter Einbeziehung der Annahme der Schubstarrheit bezüglich den Querkräften und des Erhalts der Querschnittsgestalt (*Bernoulli*-Balken). Für die Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen führt BREUER dann Einflussfunktionen ein, mit deren Hilfe für den statischen Lastfall die Feld- bzw. Randeinflussfunktionsmatrizen bestimmt werden. Die dynamischen Anteile, Imperfektionen und Randbedingungen werden in einem Lastvektor berücksichtigt. Die so erhaltenen *Fredholmschen* Integralgleichungen 2. Art werden dann mittels einer Doppel-*Fourier*-Reihenentwicklung in der Ortskoordinate in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem in reiner Abhängigkeit der Zeit überführt. Anschließend erfolgt die Lösung in der Darstellung von Zustandsgrößen. Auf der Basis dieses Berechnungsverfahrens konnte BREUER ebenfalls eine durch die Massenkräfte hervorgerufene Erhöhung der Traglasten bei Profilen unter kurzzeitiger axialer Stoßbelastung nachweisen.

WELLER [22] ET AL. haben ebenfalls den Einfluss einer stoßartigen axialen Belastung auf das Tragverhalten eines Stabes mit Rechteckquerschnitt untersucht. Hierzu wird als Rechen-

verfahren die *Finite Element Methode* (FEM) sowie ein selbst entwickeltes Programm, welches auf der *Finiten Differenzen Methode* basiert, verwendet. Besonderes Augenmerk wird auf die Untersuchung des Einflusses der Vorverformung und der Stoßdauer gelegt. Im Rahmen dieser Studien wird jedoch festgestellt, dass für Strukturen, die eine große Vorverformung aufweisen, das Tragverhalten unter einer dynamischen Belastung geringer ist, als dasjenige, welches unter einer statischen Belastung mit gleicher Amplitude auftreten würde. Dasselbe Phänomen wird bei Stoßdauern festgestellt, die mindestens in der Größenordnung liegen, die der Periodendauer der niedrigsten Eigenfrequenz entsprechen. Zusätzlich zu den Studien an Stäben mit Rechteckquerschnitt betrachten WELLER ET AL. das Verhalten von quadratischen Platten unter einer identischen Anregungsform. Auch in diesem Fall wird das gleiche Aufnahmeverhalten von dynamischen Lasten gefunden.

Untersuchungen zum dynamischen Beulverhalten von Platten wurden ebenfalls von PETRY [17], [18] durchgeführt. Im Gegensatz zu WELLER beschränkt er seine Untersuchungen nicht nur auf metallische Werkstoffe, sondern dehnt diese auch auf das Verhalten von Faserverbundwerkstoffen aus. Um den hohen Berechnungsaufwand netzbasierter Verfahren wie z.B. den der *Finiten Element Methode* deutlich zu reduzieren, entwickelte PETRY Lösungsverfahren, die auf der *Galerkin*-Methode und dem *Ritzschen* Verfahren beruhen. Die Integration über die Zeitkoordinate erfolgte mit dem modifizierten *Newmark*-Algorithmus. Auch PETRY führt mehrere Parameterstudien durch. So betrachtet er nicht nur den Einfluss der Vorverformung und den der Stoßdauer auf die zu erwartende Strukturantwort, sondern untersucht, ebenfalls wie BREUER, den Einfluss verschiedener Stoßfunktionen. Wie bereits durch WELLER gezeigt, erhält auch PETRY in Abhängigkeit der gewählten Parameterkonfiguration eine im Vergleich zur Statik niedrigere dynamische Tragfähigkeit.

ZHANG ET AL. [24] beziehen sich in ihrer Arbeit unter anderem auch auf die von Petry [17] und führen diese durch eine Erweiterung auf stringerversteifte Platten fort. Im Detail untersuchen sie den Einfluss der Stoßdauer, der Vorverformung, der Plattengeometrie und der Anordnung der Stringer auf das dynamische Beulverhalten. Im Rahmen dieser Untersuchungen bestätigen auch ZHANG ET AL. die bisher gemachten Beobachtungen. Neu sind die Erkenntnisse bezüglich der Auswirkungen der Stringer auf das dynamische Beulverhalten von Platten. Hier stellt das Autorenteam fest, dass die dynamische Beullast mit zunehmender Höhe der Stringer ebenfalls ansteigt. Wird jedoch eine bestimmte Stringerhöhe überschritten, verändert sich die Beullast nicht mehr. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass bei einer Erhöhung der Stringeranzahl bei gleichzeitiger Beibehaltung der Stringergesamtmasse und bei äquidistanten Abständen die dynamische Beullast abnimmt.

Auf der fünften internationalen LS-DYNA Konferenz präsentierten TANOV ET AL. [20] die Berechnung einer stepförmig lateral belasteten Zylinderschale. In dem hier vorgestellten Aufsatz werden die Systemparameter wie Länge der Schale, Größe der Imperfektionen sowie Schichtfolge und Orientierung der Laminatlagen diskutiert. Wie ZHANG bereits in [24], wenden auch TANOV ET AL. das Stabilitätskriterium nach *Budiansky-Roth* an. Als weitere Alternative zur Bestimmung der Stabilitätsgrenze führen TANOV ET AL. noch das Phasenebenendiagramm ein. Im Ergebnis stellen die Autoren fest, dass die kritische dynamische Belastungsgrenze mit zunehmender Stoßdauer sich der statischen Lösung von oben her annähert, diese dann aber bei Überschreiten einer bestimmten Belastungsdauer unterschreitet. Darüber hinaus stellen sie fest, dass dieser Effekt auch bei zunehmender Vorverformung und bei Schalen mit geringen Wandstärken auftritt. Ebenso hat die Lagenorientierung einen Einfluss auf die dynamische Belastbarkeit.

In einer Veröffentlichung der DLR beschäftigen sich DEGENHARDT ET AL. [7] mit dem Verhalten von Schalen unter quasistatischer und dynamischer Belastung. Anhand eines *FE*-Modells werden zunächst für ein stringerversteiftes gekrümmtes Kohlefaserpanel die axialen Last-Verformungskurven unter quasistatischer Belastung ermittelt, um daraus Rückschlüsse auf Tragreserven zu ziehen. Die rechnerischen Ergebnisse stimmten sehr gut mit den durchgeführten Experimenten überein. Zudem wurde festgestellt, dass eine Überschätzung der Dämpfungseigenschaften zu einer zu hohen Tragreserve führt. Diese Untersuchungen werden im Folgenden auf Zylinderschalen aus Kohlefasern ausgedehnt. Die Berechnungen zeigen, dass für ein kritisches dynamisches Verhalten eine Kopplung zwischen den longitudinalen und transversalen Schwingungsmoden vorhanden sein muss. Inwieweit die axialen Schwingungen nun Auswirkungen auf das Gesamtverhalten haben, bedarf gemäß der Autoren noch weiterer genauerer Untersuchungen.

Ebenfalls mit Hilfe der *FEM* untersucht BISAGNI [3] das Verhalten von aus Kohlenfasern gewickelten Zylinderschalen unter einer Rechteckimpulsbelastung. Als Stabilitätsmaß wendet auch sie das Kriterium nach *Budiansky-Roth* an. Das Augenmerk ihrer Untersuchungen liegt, wie in einigen zuvor genannten Arbeiten, auf dem Einfluss der Stoßdauer und der Vorverformung. Auch sie weist nach, dass unter bestimmten Konstellationen eine Auslegung nach rein statischen Kriterien nicht ausreichend ist.

1.2.2 Die Finite Streifen Methode

Zum dreißigjährigen Bestehen der *Finiten Streifen Methode* (*FSM*) hat FRIEDRICH [9] eine umfassende Bibliographie verfasst, in der alle zu diesem Thema veröffentlichten Artikel, Bücher, Promotionen und Konferenzveröffentlichungen im Zeitraum von 1968 bis 1998 zusammengestellt sind.

Unter Berücksichtigung der bis 2005 veröffentlichten Literatur wird nun im Folgenden der Stand der Forschung an Hand der für diese Arbeit verwendeten Quellen, getrennt nach den Themengebieten lineare und nichtlinearen Statik sowie Dynamik, detaillierter beschrieben.

1.2.2.1 Literatur zur linearen Statik

Ursprünglich entstammt das Verfahren der *FSM* dem Bauingenieurwesen. Die Modellierung von Brückenbauwerken mit Hilfe der *Finiten Element Methode* (*FEM*) ist äußerst aufwändig und die Berechnung solcher Strukturen war in den sechziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts aufgrund der geringen Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit der Computer langwierig und kostenintensiv. So wurde nach einer Möglichkeit gesucht, die netzbasierte Charakteristik des Berechnungsverfahrens der *FEM* beizubehalten, den Diskretisierungsaufwand jedoch zu reduzieren. Darüber hinaus sollte ein hohes Maß an Zuverlässigkeit und an Genauigkeit der Lösung gewährleistet sein. Vor diesem Hintergrund veröffentlichte Y. K. CHEUNG [30] 1968 erstmals einen Artikel über das neue Berechnungsverfahren der *FSM* in geometrisch linearer Formulierung. Er stellt in dieser Arbeit zunächst ein Streifenelement vor, welches es erlaubt, die Durchbiegung einer gelenkig-gelenkig gelagerten Platten zu berechnen. Um den hohen Diskretisierungsaufwand der *FEM* zu eliminieren, teilte Y. K. CHEUNG die Platte in Querrichtung in einzelne prismatische Streifen auf, die sich in Längsrichtung über die

gesamte Länge der Plattenstruktur erstreckten. Als Ansatzfunktion für die Verschiebung wählte er in Streifenlängsrichtung den Lösungsansatz für einen beidseits gelenkig gelagerten *Euler-Bernoulli* Balken, da dieser Ansatz a priori die Lagerbedingung erfüllt. Die Verformung in Streifenquerrichtung wurde durch *Hermite* Polynomansätze approximiert. In Y. K. CHEUNG's nachfolgenden Arbeiten [31, 32, 33, 34] werden diese grundlegenden Ergebnisse auf weitere Randbedingungen für das Biegeproblem von Platten sowie auf die Berechnung von Scheiben ausgedehnt. Als Anwendungsfälle dienen dünnwandige Flächentragwerke aus dem Brückenbau.

M. S. CHEUNG [25, 26] begleitete mit seinen Arbeiten diese Entwicklung. Dabei konzentrierte sich M. S. CHEUNG zunächst auf die Analyse des ebenen Spannungsproblems sowie auf die der Plattenbiegung. Berechnungen an Kastenträgerbrücken, stringerversteiften Platten, Plattentragwerken mit profiliertem Querschnitt und an durch Streifen angenäherte eindimensional gekrümmten Schalenelementen runden seine Grundlagenarbeit ab.

Die bis dahin erarbeiteten theoretischen Grundlagen dieses Verfahrens wurden dann 1976 durch Y. K. CHEUNG [35] zusammengefasst und im selben Jahr erstmals als Buch veröffentlicht. Eine erweiterte und den aktuellen Stand der Forschung widerspiegelnde Neuerscheinung [36] folgte 1998 in Zusammenarbeit mit THAM, dreißig Jahre nach der Veröffentlichung des ersten Artikels zu diesem Thema.

In den oben genannten Veröffentlichungen wurden bisher nur Strukturen betrachtet, die an den Rändern gelagert waren. Bei Berechnungen von Platten oder Brückenbauwerken, die über Zwischenlager verfügen, erwiesen sich die bisher verwendeten Ansatzfunktionen des freischwingenden Balkens in Streifenlängsrichtung als nicht besonders geeignet, da die Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung zu langsam war. So entwickelte M. S. CHEUNG [26] neue Ansatzfunktionen, indem er den durchgehenden Streifen in Einzelsegmente aufteilte und die Zwischenlager durch Momentenpaare ersetzte. Für diese Konstellation löste er erneut die Bewegungsgleichung des freischwingenden Balkens und verwendete die so erhaltene Eigenfunktion als Formfunktion in Streifenlängsrichtung.

Nachdem die Grundlagen der *FSM* gelegt waren, war die weitere Entwicklung durch das Bestreben gekennzeichnet, die Genauigkeit der Ergebnisse zu verbessern. So konzentrierte man sich zunächst im Bereich der geometrisch linearen Formulierung auf die Entwicklung neuer komplexerer Streifenelemente [28, 38, 42, 43]. Darüber hinaus wurde die bisherige Theorie, die auf den *Kirchhoffschen* Annahmen basierte, durch die Berücksichtigung von Schubverformungen gemäß der Theorie von *Mindlin-Reissner* erweitert [29, 37]. Berechnungen zu Stabilitätsproblemen dünnwandiger Strukturen [39, 40] ergänzten das Anwendungsspektrum.

Als Vorschlag zur Weiterentwicklung der *FSM* unterbreitete M. S. CHEUNG bereits in [26] u.a. den Vorschlag, dieses Verfahren auch auf die Berechnung von in Längsrichtung nicht kontinuierlich verlaufende Strukturen zu erweitern. Obwohl bereits in [35] ein verzerrtes Viereckelement in isoparametrischer Formulierung eingeführt wurde, wurde diese Idee nochmals von LIN und RAOOF [41] aufgegriffen und eine Reihe von isoparametrischen Elementen mit zwei, drei und vier Ecken vorgestellt. Zudem entwickelten die Autoren ein Verfahren, das zwei benachbarte Streifenelemente unterschiedlicher Länge berücksichtigen kann.

Neben der Berechnung von größeren Strukturen und Bauwerken wurde das Verfahren auch auf Bauteilebene angewandt. So berechneten u.a POLYZOIS und GUILLORY [44] das Verhalten von kaltverformten Z-Profilen, die als Unterkonstruktion für eine Blechvertäfelung dienen.

1.2.2.2 Literatur zur nichtlinearen Statik

Solange die Verformungen keinen wesentlichen Einfluss auf das Gleichgewicht haben, können die Ergebnisse einer linearen Theorie als hinreichend genau betrachtet werden. Sobald jedoch aber die Verformungen einen erheblichen Einfluss auf das Gleichgewicht aufweisen, wie dies z.B. bei Stabilitätsproblemen der Fall ist, liefert eine lineare Theorie unzuverlässige und nicht korrekte Ergebnisse und es muss geometrisch nichtlinear gerechnet werden. Nachdem nun die Zuverlässigkeit der *FSM* im linearen Bereich nachgewiesen wurde, wurde dieses Verfahren vor dem oben genannten Hintergrund um die nichtlinearen Verformungsanteile erweitert. Da technisch relevante Problemstellungen, wie z.B. globales und lokales Beulen, das gegenseitige Beeinflussen dieser beiden Modi oder die Berücksichtigung von eingeprägten Vorverformungen, nur über die Anwendung nichtlinearer Ansätze berechnet werden können, liegt konsequenterweise der Schwerpunkt der Veröffentlichungen im Bereich der nichtlinearen Statik. Insbesondere Autoren wie SMITH in Zusammenarbeit mit SRIDHARAN oder wie M. S. CHEUNG, Y. K. CHEUNG, DAWE, und HANCOCK haben durch viele ihrer Veröffentlichungen oder durch die Mitwirkung an diesen, einen wesentlichen Beitrag zur Weiterentwicklung der nichtlinearen *FSM* geleistet.

Sechs Jahre nach der Einführung der *FSM* erschien die erste Veröffentlichung zu nichtlinearen Berechnungen mit Hilfe der *FSM*. So publizierten 1974 PLANK und WITTRICK [77] einen Artikel über das Beulverhalten von Profilen unter Druck-, Biege- und Schubbeanspruchung. Vier Jahre später, 1978, erweiterten SMITH und SRIDHARAN [81] die Arbeit von PLANK und WITTRICK auf die Möglichkeit, nun auch das Nachbeulverhalten von dünnwandigen Profilen zu analysieren. In der klassischen Betrachtungsweise wird dabei zunächst von der Vereinfachung ausgegangen, dass die Durchbiegung und die Normalspannung in Querrichtung entlang zweier sich treffender Profilkanten gleich Null ist. Dies führt in der Folge zu einer Entkopplung der w- und v-Verschiebung benachbarter Profilteile. Ist man jedoch an dem Einfluss der Profilkanten auf das Nachbeulverhalten interessiert, so muss die zuvor genannte Vereinfachung fallengelassen und eine Kompatibilität der Verformungen gefordert werden. Diese Problemstellung nahmen SRIDHARAN und SMITH in [84] zum Anlass, diese beiden Ansätze mit Hilfe der *FSM* umzusetzen. In weiteren Arbeiten vertiefte SRIDHARAN [85] selbst sowie in Zusammenarbeit mit den Koautoren BENITO [46, 47] und ALI [86] seine Forschung aus den frühen 1980ern auf diesem Gebiet. Neben der zentralen Thematik der gegenseitigen Beeinflussung von globalen und lokalen Versagensformen, stand vor allem die Fragestellung im Mittelpunkt, welchen Einfluss die in eine Struktur eingeprägten Vorverformungen auf das Versagensverhalten haben. Es wurde angenommen, dass die kritischen Lasten für den Fall, dass globales und lokales Versagen sehr eng zusammen liegen, kleiner sind als im umgekehrten Fall. Die Arbeiten konzentrierten sich im Wesentlichen auf das Verhalten von U-, T- und I-Profilen. Auf der Basis ihrer Forschungsergebnisse bestätigten SRIDHARAN ET AL. die o.g. These. Ferner erhielten sie das Ergebnis, dass der Auswirkungen der Vorverformung auf das Strukturversagen im Wesentlichen durch die globale Biegeverformung hervorgerufen werden und nicht durch die Anteile, die aus der Torsion herrühren.

Die Arbeiten [48, 63] von HANCOCK aus den Jahren 1979 und 1982 setzen ebenfalls auf diesem Problemkreis auf. Hierzu wurde durch ihn zunächst die nichtlineare Theorie um die Anteile der Vorverformung erweitert [63] und die bei SMITH und SRIDHARAN [81] verwendeten Ansatzfunktionen modifiziert [48]. In den Jahren 1983 und 1985 folgten dann zwei Arbeiten [64, 65], die sich speziell mit dem Einfluss von schlanken Stegen und Flanschen auf das Beulverhalten von I-Profilen unter Biegebelastung beschäftigten. Dabei kommt HANCOCK zu

dem Ergebnis, dass erst bei einem Verhältnis der Schlankheitsgrade von Steg zu Flansch größer 10,5 das Beulen des Steges dominiert. Darunter treten kombinierte Beulmodi auf.

Im Gegensatz zu den bisher genannten Veröffentlichungen konzentriert sich die in Zusammenarbeit mit RASMUSSEN [79] entstandene Arbeit auf U-Profile. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Integration einer real vermessenen Vorverformung in das *FSM*-Verfahren und deren Einfluss auf das Beulverhalten eines unter axialer Belastung stehenden Druckstabes.

Den bisher genannten Arbeiten lag die semi-analytische *FSM* zu Grunde. Nachteilig bei dieser Methode ist jedoch die schwierige Anpassung der auf trigonometrischen Funktionen basierenden Ansätze in Streifenlängsrichtung an beliebige Randbedingungen. Ferner gestaltet sich die Bestimmung der niedrigsten Beullast als sehr aufwändig, da für eine Kombination von Wellengliedern die Halbwellenlängen iterativ so bestimmt werden müssen, dass sie mit der Stablänge übereinstimmen. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, ersetzten S. C. FAN und Y. K. CHEUNG [54, 55, 61] die bisher in Streifenlängsrichtung verwendeten trigonometrischen Funktionen durch eine Linearkombination von lokalen B_3-Splines. HANCOCK ET AL. veröffentlichten daraufhin eine Reihe von Aufsätzen, in denen diese neue Art von Ansatzfunktionen zur Anwendung kam. So nutzten LAU und HANCOCK [74] dieses Verfahren zunächst zur Analyse von Profilen und stringerversteiften Platten, die unterschiedlichen axialen Druckbelastungen ausgesetzt sind. Neben der Anpassung der B_3-Spline-Ansätze an andere Randbedingungen als gelenkig-gelenkig, stehen in dieser Arbeit Konvergenzbetrachtungen des Verfahrens im Mittelpunkt.

Eine weitere Verallgemeinerung der B_3-Spline *FSM* stellen die von KWON und HANCOCK publizierten Arbeiten [70] und [71] dar. In ihnen wird die B_3-Spline *FSM* zur Bestimmung der Tragreserven im Nachbeulbereich angewandt. Von besonderer Bedeutung ist hier das verwandte Lösungsverfahren. Die Autoren adaptieren die von RICKS [119] erstmalig 1979 vorgestellte und von CRISFIELD [116, 117] 1981 und 1983 in modifizierter Form auf die *FEM* angewandte *Arc-Length*-Methode. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht nun darin, dass auch Last-Verformungskurven, die ein Maximum aufweisen, berechnet werden können, wodurch die Berechnung von Durchschlagproblemen auch mit Hilfe der *FSM* ermöglicht wurde. Eine weitere Variante stellen GIERLINSKI und SMITH [62] vor. Sie implementieren in die semi-analytische *FSM* einen von POWELL und SIMONS [118] entwickelten iterativen Lösungsalgorithmus, bei dem der Lösungspfad der Last-Verformungskurve weg- und nicht wie bei der *Arc-Length*-Methode weg- und kraftgesteuert berechnet wird. 1992 wandten KWON und HANCOCK [72] dann eine indirekte Form der *Arc-Length*-Methode mit Liniensuchverfahren und Verstärkungsfaktoren zur Beschleunigung des Konvergenzverhaltens an.

Eine weitere Arbeit, die sich näher mit Lösungsstrategien für nichtlineare Berechnungen beschäftigt, wurde von M. S. CHEUNG und LI [50] veröffentlicht. Sie modifizieren das Standard-*Newton-Raphson*-Verfahren derart, dass die im ersten Schritt berechnete Tangentensteifigkeitsmatrix für den Rest der Berechnungen beibehalten wird. Dies verringert auf der einen Seite den Rechenaufwand für die ansonsten notwendige ständige Neuberechnung dieser Matrix, auf der anderen Seite jedoch verschlechtert sich aber das Konvergenzverhalten, da nun mehr Iterationsschritte erforderlich werden. Darüber hinaus kann dieses Verfahren, im Gegensatz zur *Arc-Length*-Methode, keine Last-Verformungskurven erfassen, bei denen trotz sinkender Belastung die Verformungen noch ansteigen.

In [66] greifen HANCOCK ET AL. noch einmal die Thematik von globalen und lokalen Versagensarten von dünnwandigen Profilen auf und fassen die seit 1976 an der Universität von

Sydney erarbeiteten Forschungsergebnisse noch einmal zusammen.

Eine weitere Gruppe, die die Entwicklung der *FSM* weit vorangetrieben hat, war das Team um DAWE. In einer 1985 erschienen Arbeit [45] widmen sich AZIZIAN und DAWE zunächst der geometrisch nichtlinearen Analyse von rechteckigen, isotropen und lateral belasteten Platten. Während die zu diesem Zeitpunkt z.B. bereits von SMITH [81, 84] und HANCOCK [63, 65] veröffentlichten Arbeiten sich auf die klassische Plattentheorie abstützen, lassen DAWE ET AL. die Annahme der Schubstarrheit fallen und verwenden die *Mindlin-Reissner* Theorie. Darüber hinaus werden in Streifenquerrichtung Ansatzpolynome höherer Ordnung durch die Einführung zusätzlicher interner Knotenlinien entwickelt. So dient dann diese Arbeit zunächst als Studie zur Untersuchung der Genauigkeit und des Konvergenzverhaltens der neuen Ansätze. In einer darauf aufbauenden Veröffentlichung [56] werden die durch die numerische Integration der trigonometrischen Ansatzfunktionen auftretenenden Fehler in Kombination mit dem Polynomgrad der in Querrichtung verwendeten Ansatzfunktion näher untersucht. Diese gewonnenen Erkenntnisse werden dann 1992 in zwei aufeinander aufbauenden Arbeiten angewandt. Die erste Arbeit dieser beiden [57] beschäftigt sich mit der Untersuchung von Faserverbundplatten, die einer axialen Druckbelastung ausgesetzt sind. Für erste Untersuchungen stützen sich die Autoren zunächst auf die *Kirchhoffsche* Plattentheorie ab. Im Rahmen der theoretischen Ableitung werden an den Lasteinleitungsenden zwei Randbedingungen unterschieden. Im ersten Fall können sich diese Enden lateral verschieben, im zweiten Fall ist diese Verschiebung unterbunden. Hieraus gewinnen dann die Autoren unterschiedliche Ansatzfunktionen. Die sich anschließende numerische Studie analysiert dann umfangreich die Abhängigkeit der Rechenergebnisse von der Güte der gewählten Funktionen, der Anzahl der Streifenelemente und der Wellenglieder. Die zweite der beiden Arbeiten [58] beschäftigt sich mit dem Nachbeulverhalten im elastischen Bereich von stringerversteiften Faserverbundplatten. Im Gegensatz zu der ersten dieser beiden Arbeiten werden hier allerdings die Ergebnisse der Theorie nach *Kirchhoff* der von *Mindlin-Reissner* gegenübergestellt.

Ein weiterer Entwicklungsschritt lag in der Berücksichtigung von Vorverformungen. In [59] wird auf den zuvor genannten Veröffentlichungen aufgebaut und die Vorverformung durch entsprechende geometrische Ansätze bei der Formulierung der Verzerrungs-Verformungsbeziehungen als auch durch eine über den gesamten Streifen wirkende konstante transversale Flächenlast berücksichtigt. Obwohl beide Arten von Vorverformungen in der Praxis gemeinsam auftreten können, werden sie in [59] separat behandelt. Ein Jahr später, 1996, ließen dann das Autorenteam WANG und DAWE [87] die in den bisherigen Arbeiten über das Nachbeulverhalten getroffenen Annahmen fallen. Wurde bisher gefordert, dass z.B. Profilkanten sich auch unter Belastung nicht verformen und parallel bleiben und somit die v- und w-Verschiebungen bei der Bestimmung der Membrangrößen als entkoppelt betrachtet werden können, werden diese Annahmen nun fallengelassen. Hierdurch bedingt wird es nun möglich, das globale Verformungsverhalten axial belasteter Strukturen zu untersuchen. Bevor die Autoren sich erneut dem Nachbeulverhalten zuwandten, untersuchten sie noch das gestellte Problem unter Berücksichtigung großer Verformungen. Hierzu führten sie in Analogie zu KAKOL [69] neue Ansatzfunktionen in Längsrichtung ein, die an den lastaufnehmenden Enden einen biegeschlaffen Krafteinleitungsbeschlag widerspiegeln. Diese Funktionen beinhalten für die u-Verschiebung neben den trigonometrischen Anteilen auch einen linearen Anteil, mit dem Ziel, die Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung zu erhöhen.

In [60] stellt dann DAWE noch einmal die wichtigsten Grundlagen der semi-analytischen und der B_3-Spline *FSM* anhand von Beul- und Nachbeulberechnungen am Beispiel von Fa-

serverbundplatten zusammen.

Während sich die bisher diskutierten Aufsätze mit geometrischen Nichtlinearitäten beschäftigten, veröffentlichte M. S. CHEUNG u.a. auch Artikel [51, 53], die nichtlineares Materialverhalten berücksichtigen. Am Beispiel eines Balkens und einer an allen Seiten gelenkig gelagerten Platte konnte mit der *FSM* eine sehr gute Übereinstimmung mit den theoretischen Lösungen erzielt werden. Dabei wurde das Fließkriterium nach *von Mises* sowie die Fließtheorie nach *Prandtl-Reuss* angewendet. M. S. CHEUNG hat bei steigenden Lasten und zunehmender Plastizität eine starke Reduzierung der Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens festgestellt.

1992 widmeten M. S. CHEUNG ET AL. [52] einen Aufsatz dem Stabilitätsverhalten anisotroper Faserverbunde. Waren bis dahin die Untersuchungen auf schubverformbare Laminate mit symmetrischem Lagenaufbau beschränkt, erweiterte M. S. CHEUNG mit dieser Veröffentlichung die Analysen durch Einführung neuer Verformungsansätze auch auf Laminate mit asymmetrischem Lagenaufbau. Dabei berücksichtigte er die Schubverformungstheorie erster Ordnung und geometrisch nichtlineare Verformungs-Verzerrungsbeziehungen. Um jedoch die Kopplung zwischen den Verschiebungen in der Ebene bei asymmetrisch aufgebauten Laminaten zu berücksichtigen, definierte er zwei Membranfreiheitsgrade, die er einer zusätzlichen Knotenlinie in der Mitte des Streifenelementes zuordnete.

Ein Problem bei der Anwendung der Theorie von *Reissner* liegt in dem Auftreten einer künstlich hervorgerufenen Versteifung des Systems bei abnehmender Plattendicke (Shear-Locking). Diese Versteifung wird gemäß den Ausführungen von HO und THAM [67] durch die Trennung in translatorische und rotatorische Freiheitsgrade hervorgerufen, da es hierdurch bedingt zu einer Einführung von zusätzlichen Verschiebungstermen kommt. Die Anwendung unterschiedlicher numerische Integrationsmethoden oder die Einführung von Elementen höherer Ordnung konnten dieses Problem nicht vollständig beseitigen. Die o.g. Autoren lösten es, indem sie die Gesamtverformung in zwei Anteile aufspalteten. Dabei wird der erste Anteil durch die Biegung und der zweite durch den Schub hervorgerufen. Über die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wird dann eine Kopplung dieser beiden Verformungen erreicht. Im Ergebnis stellten die Autoren fest, dass dieses Verfahren zum Erfolg führte und die Ergebnisse bei Reduzierung der Plattendicke gegen die Lösung dünner Platten konvergierte.

Die Artikel von MAHENDRAN und MURRY [76] sowie von BRADFORD und AZHARI [49] beschäftigen sich beide mit der Bestimmung der Beullast von einfachen Platten. Während das erstgenannte Autorenteam rein gelenkig gelagerte Platten unter Schub- und biaxialer Druckbelastung betrachtet, wendet sich das zweite Autorenteam der Bestimmung der Beullasten von rein durch Druckkräfte belasteten und nicht gelenkig gelagerten Platten zu. Hierzu werden zwei Sätze von Ansatzfunktionen verwendet. Dies sind zum Einen die Funktionen, die die Lösung des transversal schwingenden Balkens in Abhängigkeit der Randbedingung beschreiben und zum Anderen ein Satz von Funktionen, der nur die rein geometrischen Randbedingungen a priori erfüllt. Obwohl es sich bei diesem Ansatz um die einfacheren handelt, besitzen sie dennoch die Eigenschaften der Orthogonalität, wodurch eine Entkopplung der Freiheitsgrade und damit verbunden, eine Reduzierung des Rechenaufwandes erreicht wird. Insgesamt haben die Autoren festgestellt, dass diese Funktionen zudem die genaueren Ergebnisse liefern.

Wie zuvor genannte Autoren, publizierten auch SHEIKH und MUKHOPADHYAY [82, 83] Arbeiten, in denen B_3-Spline-Funktionen zum Ansatz kommen. Der Schwerpunkt dieser Arbeiten ist die geometrisch nichtlineare isoparametrische Beschreibung von in der Ebene beliebig geformten stringerversteiften Plattenelementen. Eine weitere Besonderheit stellt die

Ableitung eines Stringerelementes dar. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass der Stringer im Rahmen der Diskretisierung an jeder beliebigen Stelle eingebracht werden kann und somit nicht an die Lage der Knotenlinien gebunden ist.

In den meisten bisher vorgestellten Untersuchungen zu Beul- und Nachbeulverhalten von Plattenstrukturen und Profilen wurde die äußere Belastung indirekt über einen definierten Verformungs- bzw. Verzerrungszustand vorgegebenen. Erst nachdem der Gleichgewichtszustand iterativ ermittelt worden ist, wurde über die auftretenden inneren Spannungen auf die wirkende äußere Last geschlossen. Diese Vorgehensweise bringt allerdings dann in der Berechnung Probleme mit sich, wenn die Strukturantwort aufgrund einer vorgegeben Membranbelastung bestimmt und der über die Bauteildicke auftretende Schubfluss mitberücksichtigt werden soll und dabei eine Schubverformungstheorie erster Ordnung verwendet wird. Diese nach *Mindlin-Reissner* benannte Theorie birgt nun den Nachteil in sich, dass die Schubverteilung über dem Querschnitt als linear angenommen wird und somit der Schubfluss an den Rändern ungleich Null ist. In der Regel wird dies mit der Einführung von Schubkorrekturfaktoren ausgeglichen. Um diese Problematiken zu lösen, haben LAM und ZOU in [73] ein inkrementelles Lastverfahren eingeführt, bei dem die Verformungen und Verzerrungen an den Streifenrändern als Unbekannte definiert werden. Im Lösungsprozess werden dann die unbekannten Verformungsgrößen iterativ so ermittelt, dass zum Einen die Gleichgewichtsbedingungen und zum Anderen die Lastvorgaben erfüllt werden. Die Schubproblematik wird durch ZOU [88] so gelöst, indem er die Schubverformung durch höherwertige Terme modelliert. Dadurch steigt allerdings die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knotenlinie von fünf auf sieben an.

Eine weitere Möglichkeit der Anwendung der *FSM* stellt die Berücksichtung einer elastischen Bettung dar. Diese wurde in [68] von HUANG und THAMBIRATNAM realisiert.

1.2.2.3 Literatur zur Dynamik

Ein weiteres Anwendungsgebiet der *FSM* ist die Berechnung des dynamischen Verhaltens von Strukturen. So wendete Y. K. CHEUNG [95] erstmalig dieses Verfahren auf die Berechnung von Eigenfrequenzen und Eigenmoden von an den Rändern unterschiedlich gelagerten Platten an. Diese Problematik wurde von CHAN und FOO [90] einige Jahre später erneut aufgegriffen und das Schwingungsverhalten von statisch vorbelasteten Platten untersucht. Dabei wurde nicht nur der Einfluss einer rein axialen Vorspannung berücksichtigt, sondern auch das Schwingungsverhalten unter einer durch Querkräfte verursachten statischen Vorbelastung.

In [113] beschreibt SMITH das Schwingungsverhalten einer an den Widerlagern gelenkig gelagerten Brücke, die durch querende Fahrzeuge zu Schwingungen angeregt wird. Im Gegensatz zu Y. K. CHEUNG [95] werden hier Dämpfungseffekte mit berücksichtigt. Die Auswertung der Werte von Größen, wie z.B. die der transversalen Biegung, der auftretenden Spannungen und der Beschleunigungen ergaben, dass diese im Allgemeinen deutlich größer waren, als die, die im Vorfeld mit Hilfe der Balkenmodellierung berechnet wurden. Artverwandte Untersuchungen wurden von FOSCHI ET AL. [104], FILIATRAULT ET AL. [102] und FOLZ ET AL. [103] durchgeführt. Sie untersuchten das dynamische Verhalten von stringerversteiften Holzfußböden unter erzwungener Anregung.

Während in den bisher beschriebenen Artikeln die lineare *FSM* zur Anwendung kam, wandte HOULSTON [106] diese Methode in der für die Plattenbiegung geometrisch nichtlinearen Formulierung unter Berücksichtigung eines elastisch-plastischen Materialverhaltens auf die

Untersuchung einer stringerversteiften Platte an, die einer explosionsartig freigesetzten Druckwelle ausgesetzt war. Zur Verifikation der Ergebnisse wurde zusätzlich eine *FEM*-Berechnung durchgeführt. Dabei konnte HOULSTON eine relativ gute Übereinstimmung der Ergebnisse in den Verformungsamplituden feststellen; die Verformungsverläufe über der Zeit unterschieden sich allerdings. So konnten manche Moden, die mittels der *FEM*-Berechnung erhalten wurden, nicht über die *FSM*-Methode erfasst werden.

Die theoretische Grundlage in den bisher beschriebenen Artikeln beruhte auf den Annahmen der klassischen Plattentheorie nach *Kirchhoff*. Durch die Vernachlässigung der Schubverformungen über der Plattendicke und durch die Anwendung der Normalenhypothese tritt jedoch eine künstliche Versteifung bei Platten ein, was zu höheren Eigenfrequenzen und Beulmoden führt. Während dieser Effekt bei dünnen Platten noch nicht sehr stark ins Gewicht fällt, gewinnt er aber um so mehr an Bedeutung, je größer das Verhältnis von Plattendicke zu charakteristischer Wellenlänge wird. Um dieser Problematik gerecht zu werden, wurde auch in der Dynamik die theoretische Formulierung der *FSM* um die Berücksichtigung der über die Plattendicke verteilten Schubflüsse erweitert. So veröffentlichte im Jahr 1978 u.a. DAWE [99] einen Aufsatz, in dem mittels der *Mindlin-Reissner* Theorie die Annahme der Schubstarrheit fallengelassen wird. Während diesen ersten Berechnungen noch isotropes Materialverhalten zu Grunde liegt, wendeten 1987 CRAIG und DAWE [98] die schubweiche Formulierung der *FSM* auf die Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Faserverbundplatten an. Gerade bei unidirektional laminierten Faserverbundwerkstoffen, so die Autoren in [98], ist die schubweiche Formulierung erforderlich, da die Schubsteifigkeit über der Plattendicke deutlich kleiner ist als die Dehnsteifigkeit und somit der bereits oben beschriebene Effekt zum Tragen kommt. Im Ergebnis stellten die beiden Autoren fest, dass bei den untersuchten Fällen einer stringerversteiften Platte und eines Kastenprofils der Einfluss der Schubsteifigkeit auf die Eigenfrequenzen von den jeweils betrachteten Schwingungsmoden abhängt. Handelt es sich dabei um globale Moden, ist der Einfluss eher gering. Handelt es sich jedoch um lokale Schwingungsmoden, hat die Berücksichtigung der Schubsteifigkeit einen deutlich höheren Einfluss auf die korrespondierende Eigenfrequenz.

In einem weiteren Entwicklungsschritt wurde die auf der *Mindlin-Reissner* Theorie basierende *FSM* auf die Berechnung von zylindrischen Faserverbundschalen angewandt. Eine Diskretisierungsvariante ist, die Schale über ihren Umfang in einzelne schmale Streifen aufzuteilen. In [111] bringen die Autoren MOHD und DAWE jedoch ein Superelement mit zwei zusätzlichen internen Knotenlinien zur Anwendung. Dieses basiert auf der erweiterten Schalentheorie nach *Koiter* und *Sanders* und berücksichtigt somit die Schubverzerrungen über dem Querschnitt. In einem zweiten Ansatz werden die Gleichungen durch die Annahme der *Kirchhoffschen* Normalenhypothese auf die Theorie dünner Schalen transformiert.

Die Arbeit [91] von CHEN und DAWE kann als Fortführung von [111] betrachtet werden. Während in [111] freie Schwingungen den Schwerpunkt bilden, handelt es sich in [91] um erzwungene Transversalschwingungen mit einer in Zeit und Raum frei wählbaren Anregung. Als Lösungsverfahren wenden die Autoren im Gegensatz zu den sonst üblichen *Newmark*-Algorithmen das Verfahren der Modenüberlagerung, wie bei BATHE [2] beschrieben, an. In [92] erweitern dann CHEN und DAWE die lineare Betrachtungsweise transienter Schwingungsvorgänge faserverstärkter Platten um nichtlineare Verformungsanteile und kehren im Rahmen des Lösungsalgorithmusses wieder zum *Newmark*-Verfahren zurück.

Eine weitere Ausbaustufe bei der Berücksichtigung von Schubverformungen repräsentieren die Aufsätze von M. S. CHEUNG und LI [93, 94]. In [93] wurde zunächst ein Element

entwickelt, welches über neue Ansatzfunktionen das statische und dynamische Verhalten von schubweichen Laminaten akkurat wiedergeben kann. Auf dieser Grundlage setzt dann der zweite Aufsatz [94] auf. Während in den bisher aufgeführten Artikeln die Annahme getroffen wurde, dass die Schubverformung linear über die Plattendicke verteilt ist und somit nur als Näherung bei dünnen Platten Gültigkeit besitzt, wird dieser Nachteil durch die Anwendung einer Schubverformungstheorie höherer Ordnung aufgehoben. Die Schubverteilung über den Querschnitt wird hier als kubisch angenommen. Hieraus lässt sich dann ein parabolischer Verlauf der Verzerrungen beschreiben, der gleichzeitig die Bedingung erfüllt, dass die Schubspannungen an der Oberfläche gleich Null sind. Die Gültigkeit der gewählten Ansätze wird im Folgenden dann durch die Autoren anhand der Bestimmung von Eigenfrequenzen und Beullasten am Beispiel einer dicken Faserverbundplatte nachgewiesen. WANG und LIN, die freie Schwingungen von laminierten Platten untersuchen, bilden in ihrer Arbeit [115] die Schubverformung über die Streifendicke nicht nur durch den linearen und kubischen Term ab, sondern verwenden im Gegensatz zu M. S. CHEUNG und LI zusätzlich auch den quadratischen Term.

Eine weitere Leichtbauweise stellen neben den Faserverbundlaminaten die Sandwichstrukturen dar. Auf diese wenden nun HU und WAUER in [107] die *FSM* an und nehmen eine Eigenfrequenzanalyse vor. Aufbauend auf dieser Arbeit veröffentlichte HU einen weiteren Artikel [108], in dem er das Schwingungsverhalten von symmetrisch aufgebauten zylindrischen Honigwabenpanelen beschreibt. Besonderes Augenmerk wird hier auf das Konvergenzverhalten der Lösung in Abhängigkeit des Diskretisierungsgrades und der Auflagerbedingungen bei der Berechnung höherer Eigenfrequenzen gelegt. Als wesentliches Ergebnis stellt HU fest, dass es Eigenfrequenzen gibt, deren Wert von der Anzahl der verwendeten Streifenelemente nicht beeinflusst wird. Er schlussfolgert, dass diese Moden Starrkörperverschiebungen und -verdrehungen einzelner Freiheitsgrade zuzuordnen sind. Zudem findet er Eigenmoden, die weder symmetrisch noch antimetrisch verlaufen, obwohl eine an allen Seiten gelenkige Lagerung verwendet wurde. Diese Eigenmoden führt er ursächlich auf die Diskretisierung zurück und bezeichnet diese als Schein- oder Pseudomoden.

ÖZAKÇA ET AL. verknüpfen in [112] die lineare *FSM* mit einem Optimierungsverfahren mit dem Ziel, entweder die niedrigste Eigenfrequenz zu maximieren oder das Volumen durch eine Veränderung der Querschnittsform oder der Wandstärken an die vorgegebenen Zielparameter anzupassen. Hierzu wird u.a. eine neue Elementfamilie entwickelt, die aus in der Ebene bogenförmig gekrümmten schubweichen Schalenelementen mit variabler Streifendicke besteht. Ein Jahr später publiziert dasselbe Autorenteam einen Aufsatz [105], in dem diese Thematik unter anderem auch auf räumlich gekrümmte Schalenelemente erweitert wird. Darüber hinaus wird dieses Optimierungsverfahren in [105] auch auf bogenförmig gestaltete Kastenträgerbrücken angewendet.

In den bisher in diesem Kapitel aufgeführten Artikeln wurde als Ansatzfunktion für die Streifenlängsrichtung stets die Lösung der Differentialgleichung eines schwingenden Balkens verwendet. Eine weitere Klasse von Ansatzfunktionen kommt nun in den Arbeiten [89], [96] und [109] zum Tragen. Hier rückt man von diesen klassischen Funktionen ab und verwendet B_3-Splines. Der Vorteil bei diesen Funktionen ist, dass diese an beliebig gestaltete Randbedingungen angepasst werden können. In den in den Jahren 1989 und 1990 veröffentlichten und aufeinander aufbauenden Arbeiten [96] und [109], entwickelten Y. K. CHEUNG ET AL. jeweils Schalenelemente, mit denen einfach und doppelt gekrümmte Strukturen auf ihr dynamisches Verhalten hin untersucht werden können. Als Fortführung dieser Arbeiten kann [89] gesehen werden. Hier führen AU und Y. K. CHEUNG zusätzlich die isoparametrische Formulierung ein

und wenden diese auf die Berechnung der Eigenfrequenzen von Kreisbögen, Zylinderschalen- und Kegelschalensegmente sowie auf flach gekrümmte Platten an. Im Vergleich mit der *FEM* und vorhandenen analytischen Lösungen kommen die Autoren zu dem Schluss, dass dieses Verfahren Lösungen von hinreichender Genauigkeit bei gleichzeitig geringerem Rechenaufwand im Vergleich zur *FEM* liefert. 1998 schließlich rundete Y. K. CHEUNG mit den Koautoren ZHU und IU diese Thematik mit der Veröffentlichung des Artikels [97] ab. In diesem wird die *FSM* unter Berücksichtigung von B_3-Spline Ansätzen auf das nichtlineare Schwingungsverhalten von vorgespannten Platten angewendet. Darüber hinaus berücksichtigen die Autoren viskose Dämpfung.

Auch TAN und DAWE [114] wenden B_3-Spline-Funktionen mit äquidistanten Stützstellen zur Beschreibung des Beul- und Schwingungsverhalten von prismatischen Schalen- und Plattenstrukturen auf Faserverbundbasis an. Das besondere Augenmerk liegt hier im Vergleich der Ergebnisse, die einerseits auf der linearen klassischen Plattentheorie nach *Kirchhoff-Love* und andererseits auf der von *Mindlin-Reissner*, ebenfalls in der linearen Formulierung, basieren. Um jedoch die Vielzahl der Freiheitsgrade zu minimieren, wenden die Autoren die sogenannte "Substructuring Technique" an. Bei diesem Verfahren werden die Freiheitsgrade interner Knotenlinien durch die der beiden äußeren, an den Streifenrändern liegenden Knotenlinien ausgedrückt (statische Kondensation). Auf dem nächsthöheren Level werden dann mehrere Streifen zu einem so genannten Superelement zusammengefasst. Die Struktur selbst wird dann durch mehrere dieser Superelemente beschrieben. Ein Problem bei der Verwendung von Splines mit äquidistanten Stützstellen ist jedoch, dass Veränderungen in der Plattendicke nicht beliebig berücksichtigt werden können. Werden allerdings die Stützstellen der Spline-Funktionen variabel gewählt, so können diese entsprechend den Unstetigkeitsstellen angepasst werden. DAWE und TAN demonstrieren dies in [100] anhand unterschiedlicher Beispiele.

In 2002 veröffentlichte DAWE [101] eine Arbeit, die einen kurzen Abriss des zu diesem Zeitpunkt gültigen Forschungsstandes bezüglich der Anwendung der *FSM* auf Faserverbundwerkstoffe unter Einbeziehung der B_3-Spline-Funktionen darstellt. Wiederum vergleicht DAWE die Ergebnisse der beiden o.g. vorherrschenden Theorien miteinander. Dabei stellt er die Beulwerte, das Nachbeulverhalten sowie die Eigenfrequenzen unterschiedlichster stringerversteifter Strukturen vor. Zusätzlich zu diesen Berechnungen geht DAWE auf zwei weitere wichtige Belastungsarten ein. Zum einen setzt er ein symmetrisch aufgebautes fünflagiges quadratisches Panel einer thermischen Belastung aus. Diese Belastung wird solange erhöht, bis die kritische Temperatur erreicht ist, bei der das Panel anfängt auszubeulen. Als zweite Belastungsart führt der Autor die transversale dynamische Belastung in Form eines Step-Impulses ein. Hierbei verwendet er die geometrisch nichtlineare Formulierung nach *Kármán* und zur Zeitintegration das implizite *Newmark*-Verfahren.

Neben der Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten wurde auch in der Dynamik das Strukturverhalten aufgrund von nichtlinearem Materialverhalten untersucht. Wie bereits im vorigen Kapitel über nichtlineare Statik beschrieben, veröffentlichte M. S. CHEUNG 1989 und 1999 Artikel [51, 53], die nichtlineares Materialverhalten unter statischer Belastung berücksichtigten. Während M. S. CHEUNG in diesen Arbeiten zusätzlich zu den elastischen Spannungs-Verzerrungsbeziehungen das Fließgesetz nach *Prandtl-Reuss* und isometrisches plastisches Verfestigungsverhalten ansetzte, verwenden KHALIL ET AL. [110] das Verfestigungsgesetz nach *Cowper-Symonds*, bei dem die Verfestigung von der Dehnrate abhängig ist. Als Fließkriterium wird ebenfalls das von *von Mises* implementiert.

1.3 Ziel und Gliederung der Arbeit

Wie aus der oben skizzierten Darstellung des Stands der Forschung über die Wirkung kurzzeitiger stoßartiger axialer Belastungen auf das strukturelle Tragverhalten entnommen werden kann, diskutieren die meisten Arbeiten das resultierende dynamische Verhalten von Platten- und Schalentragwerken. Die Aufsätze, die diese Problemstellung bei Profilen untersuchen, basieren auf der Anwendung der Balkentheorie und können damit die Auswirkungen einer Kopplung zwischen lokalen und globalen Effekten nicht berücksichtigen. Da jedoch im Leichtbau Profile nach wie vor verwendete Bauteile sind, soll nun mit dieser Arbeit untersucht werden, inwieweit Parameter wie zum Beispiel die Stoßdauer, die Vorverformung oder die geometrischen Abmessungen Auswirkungen auf das dynamische Stabilitätsverhalten haben, wenn lokale Effekte mit in die Betrachtung einbezogen werden.

Eine Rechenmethode, die sich zur Lösung dieser Problemstellung anbietet, ist die *Finite Element Methode*. Diese ist jedoch auf Grund des hohen Diskretisierungsgrades sehr rechenintensiv. Ein Verfahren, welches die Forderung nach hinreichender Genauigkeit aber dennoch überschaubarem Rechenaufwand erfüllt, ist die *Finite Streifen Methode*. Vor diesem Hintergrund wird nun in dieser Arbeit die semi-analytische *FSM* als Berechnungsverfahren ausgewählt und auf die oben beschriebene Problematik angewendet.

Nach einer kurzen Einführung in die *FSM* werden zunächst die Grundgleichungen der Mechanik in tensorieller Formulierung abgeleitet. Nach Einführung der nichtlinearen kinematischen Beziehungen erfolgt die Beschreibung der Gleichgewichtsbedingungen, des linear elastischen Materialgesetzes sowie des Prinzips von *d'Alembert* in der *Lagrangeschen* Fassung. Nach Festlegung der getroffenen Annahmen und Voraussetzungen für die Berechnung dünnwandiger Flächentragwerke (*Kirchhoffsche* Plattentheorie) werden die allgemeingültigen Grundgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums auf den in dieser Arbeit betrachteten Anwendungsfall übertragen. Nach der Berücksichtigung der Vorverformungen in den kinematischen Beziehungen erfolgt die Adaption des *Hookeschen* Materialgesetzes auf ein Platten-Scheibenelement. In dem sich daran anschließenden Kapitel werden dann die zur Beschreibung der Verschiebungsfelder verwendeten Ansatzfunktionen, getrennt nach Längs- und Querrichtung, für ein Streifenelement vorgestellt. Danach erfolgt die Ableitung der Systemmatrizen sowie die Vorstellung des *Newmark*-Verfahrens in nichtlinearer Formulierung, als das in dieser Arbeit verwendete Lösungsverfahren.

Nach der mathematischen Beschreibung der *FSM* wird diese zunächst auf ein einfacheres Beispiel angewendet. Dazu wird auf ein Profil mit Rechteckquerschnitt zurückgegriffen und durch ein Streifenelement approximiert. Ziel ist es, mit den daran durchgeführten Parameterstudien den Einfluss der Stoßzeit, Stoßform, Vorverformung und Randbedingung auf das dynamische Verhalten von Strukturen zu untersuchen. Diese Ergebnisse werden zur Absicherung des Verfahrens denen gegenübergestellt, die mit Hilfe der Lösung der Differentialgleichung eines vorverformten Balkenelementes gewonnen werden können. Sich daran anschließend wird die Anwendung des Verfahrens auf die Analyse von U-Profilen erweitert. Diese Profilart wurde dabei bewusst ausgewählt, da sie in Abhängigkeit des Schlankheitsgrades unter einer statischen axial wirkenden Druckbelastung ein komplexes Versagensverhalten, wie z.B. das Biegedrillknicken, aufweist.

2 Die Finite Streifen Methode

Optimale Ausnutzung der Festigkeitseigenschaften, minimale Masse oder geringe Herstellungskosten stellen in der heutigen Zeit wesentliche Auslegungsparameter im modernen Ingenieurswesen dar. Um diese Auslegungsziele jedoch realisieren zu können, stoßen analytische Berechnungsmethoden bei komplexen räumlichen Strukturen schnell an ihre Grenzen. Dies gilt insbesondere dann, wenn nichtlineares Verhalten berücksichtigt werden soll. Um derartige Strukturen jedoch berechnen zu können, wurden in der Vergangenheit netzbasierte Näherungsverfahren entwickelt, deren bekanntester Vertreter die *Finite Element Methode* (*FEM*) darstellt.

Zu dieser Gruppe der netzbasierten Berechnungsverfahren und als Sonderform der *FEM* zählt ebenfalls die *Finite Streifen Methode* (*FSM*). Der wesentliche Unterschied zur *FEM* liegt hierbei in der Diskretisierung einer Struktur und in den gewählten Ansatzfunktionen.

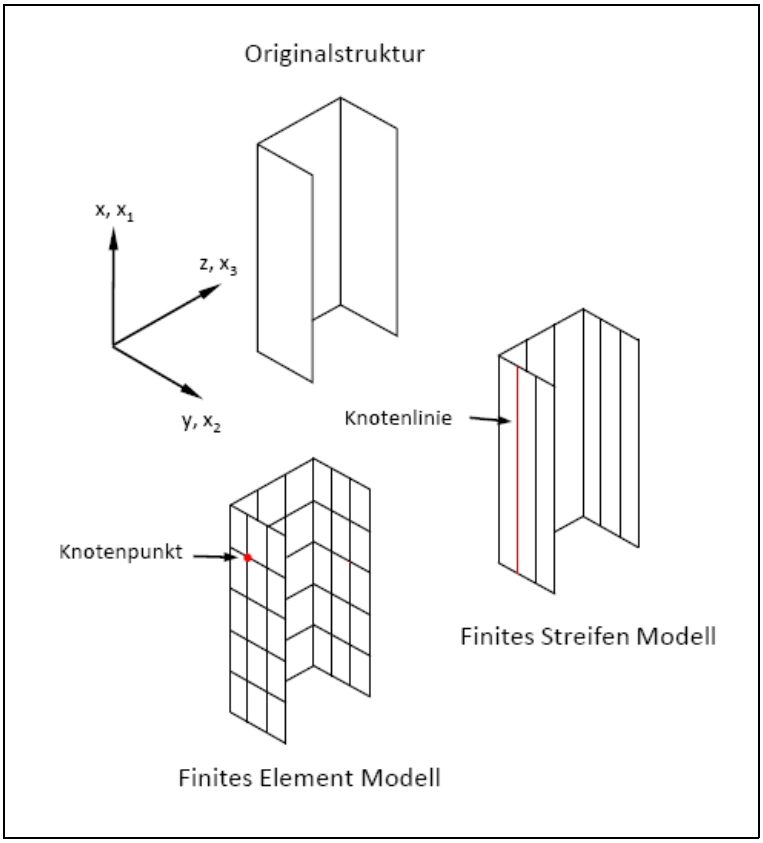

Bild 1: Diskretisierung einer Struktur mit Hilfe der *Finiten Element Methode* und der *Finiten Streifen Methode*

Während bei der *FEM* die Unterteilung einer Struktur in Längs- und Quer- bzw. Umfangsrichtung stattfindet, wird bei der *FSM* nur eine Aufteilung in Quer- bzw. in Umfangsrichtung vorgenommen. Die Unterteilung in Längsrichtung entfällt bei der *FSM*, da die Länge eines Streifenelementes typischerweise der Länge der Struktur entspricht, und durch eine geeignete Wahl der Ansatzfunktion in Streifenlängsrichtung mindestens die wesentlichen Randbedingungen erfüllt werden. In der *FSM* wird hierfür sowohl auf Reihenansätze trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen zurückgegriffen, als auch auf B_3-Spline Ansätze. Basierend auf dieser Elementgeometrie findet somit eine Reduzierung von einem zweidimensionalen auf ein eindimensionales Problem statt. Dieses Vorgehen spiegelt letztlich die Philosophie der Vorgehensweise innerhalb der *Kantorovich*-Methode wider, bei der durch die Wahl einer in einer Richtung die Randbedingungen erfüllenden Ansatzfunktion, eine partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche überführt werden kann. Werden nun bei der *FSM* die Ansatzfunktionen in Streifenquerrichtung betrachtet, werden für diese Polynomansätze gewählt. Die den Knotenlinien zugeordneten Parameter beschreiben dabei die Freiheitsgrade und werden durch die Lösung des Differentialgleichungssystems bestimmt. Damit kann die *FSM* vom Grundgedanken her auch als eine Anwendung der *Rayleigh-Ritz* Methode verstanden werden.

Durch die oben beschriebene Wahl der Ansatzsatzfunktionen verfügt die *FSM* über besonders vorteilhafte Eigenschaften. So wird durch die Unterteilung der Struktur in nur einer Richtung ein kleineres Gleichungssystem als zum Beispiel bei der *FEM* erhalten. In der Folge führt dies ebenfalls zu einer geringeren Anzahl an Eingabeparametern und das Programmieren eines Netzgenerators ist somit nicht zwingend erforderlich.

Im Weiteren zeichnen sich insbesondere abwickelbare Strukturen durch Gleichungssysteme mit sehr geringer Bandbreite aus. Auf diese lassen sich die numerischen Algorithmen für Bandmatrixstrukturen besonders gut anwenden. Dabei liegt der Vorteil gegenüber größeren Matrizensystemen weniger in der Zeitersparnis als vielmehr in der zu erzielenden numerischen Stabilität des Rechenverfahrens.

Zudem lassen sich in der Dynamik, insbesondere durch die Eigenschaften der trigonometrischen und hyperbolischen Ansatzfunktionen in Streifenlängsrichtung, bereits mit einer geringen Anzahl von Wellengliedern hinreichend genaue Ergebnisse erzielen. Dabei entwickelt dieses Berechnungsverfahren seine besondere Stärke bei einer gelenkig-gelenkig gelagerten Struktur in der linearen Formulierung. Innerhalb dieser Problemstellung liegt die Wahl der Sinusfunktion als Ansatzfunktion in Längsrichtung nahe. Durch die Orthogonalitätseigenschaft dieser Funktion wird eine Entkopplung der einzelnen Wellenglieder erreicht, wodurch die Lösung des Gleichungssystems für jedes Wellenglied getrennt durchgeführt werden kann. Die Gesamtlösung berechnet sich dann durch die Superposition der Einzellösungen. Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft können insbesondere vor dem Hintergrund, dass mit jedem zusätzlichen Wellenglied die Berechnungsdauer quadratisch ansteigt, sehr kurze CPU-Zeiten erzielt werden.

In den folgenden Kapiteln werden nun für die Anwendung der *FSM* die notwendigen Bestimmungsgleichungen zusammengestellt. Dabei soll die Berechnung von vorverformten räumlichen Strukturen mit einem geometrisch nichtlinearen Verformungsverhalten Berücksichtigung finden. Im ersten Schritt werden mit Hilfe der Kontinuumsmechanik die mechanischen Grundgleichungen abgeleitet und die Bewegungsgleichung aufgestellt. Im zweiten Schritt werden dann die Grundgleichungen auf Scheiben-Platten-Probleme angewendet, die Ansatzfunktionen eingeführt und das zu lösende Gleichungssystem aufgestellt.

2.1 Die Grundgleichungen der Mechanik

Die Gleichgewichtsbedingungen, die kinematischen Beziehungen und das Stoffgesetz bilden die drei Grundgleichungssysteme, mit deren Hilfe die Bewegungsgleichung abgeleitet werden soll. An dieser Stelle erfolgt nun eine kurze Darstellung dieser Gleichungen anhand von kontinuumsmechanischen Betrachtungen. Dabei orientiert sich die hier gewählte Beschreibung an der Form, wie sie z.B. in der Literatur bei ALTENBACH ET AL. [1], ESCHENAUER ET AL. [8], HAUPT [10], MARSDEN ET AL. [16] oder bei HOLZAPFEL [12] zu finden ist.

2.1.1 Die nichtlinearen kinematischen Beziehungen

Für die Beschreibung der nichtlinearen kinematischen Beziehungen stellen zwei differentiell benachbarte Körperpunkte ${}^0\boldsymbol{P}$ und ${}^0\boldsymbol{Q}$ in der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ die Ausgangssituation dar. In dieser Konfiguration ist der Körper unverformt und spannungsfrei. Wirkt nun eine äußere Last auf den Körper ein, wird hierdurch eine Formänderung hervorgerufen. Dabei verschieben sich die Punkte ${}^0\boldsymbol{P}$ und ${}^0\boldsymbol{Q}$ der Referenzkonfiguration und nehmen durch Streckung und Drehung die Momentankonfiguration ${}^t\boldsymbol{P}$ und ${}^t\boldsymbol{Q}$ zum Zeitpunkt t ein.

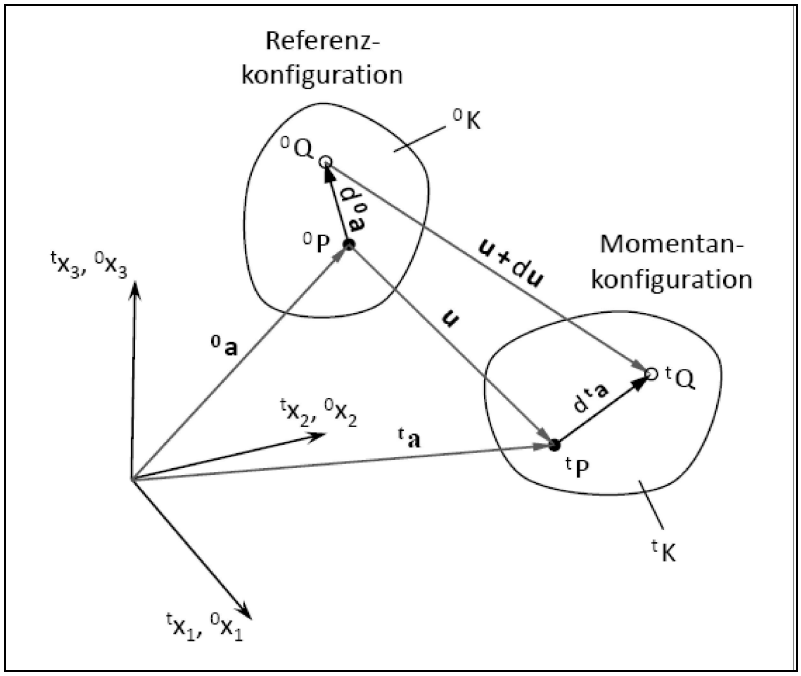

Bild 2: Übergang eines Körpers K von der Referenz- in die Momentankonfiguration

Die daraus resultierende Lagenänderung von ${}^0\boldsymbol{P}$ nach ${}^t\boldsymbol{P}$ lässt sich somit durch die Differenz der beiden Ortsvektoren ${}^t\boldsymbol{a}$ und ${}^0\boldsymbol{a}$ mit der Gleichung

$$\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{a} - {}^0\boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

beschreiben bzw. mit Hilfe der entsprechenden Ortskoordinaten in der Form

$$u_i = {}^t x_i - {}^0 x_i . \tag{2.2}$$

Um nicht nur die Lageänderung, sondern auch das Maß der Deformation bestimmen zu können, werden in der Referenzkonfiguration und der deformierten Momentankonfiguration die in Bild 2 dargestellten Linienelemente $\overline{{}^0P\,{}^0Q}$ und $\overline{{}^tP\,{}^tQ}$ betrachtet, die durch die Vektoren $d\,{}^0\boldsymbol{a}$ und $d\,{}^t\boldsymbol{a}$ repräsentiert werden. Dabei sind die Ortskoordinaten der Punkte ${}^0P$, ${}^0Q$, ${}^tP$ und ${}^tQ$ folgendermaßen festgelegt:

Punkt ${}^0P$: ${}^0x_1,\ {}^0x_2,\ {}^0x_3$
Punkt ${}^0Q$: ${}^0x_1 + d\,{}^0x_1,\ {}^0x_2 + d\,{}^0x_2,\ {}^0x_3 + d\,{}^0x_3$
Punkt ${}^tP$: ${}^tx_1,\ {}^tx_2,\ {}^tx_3$ **oder** ${}^0x_1 + u_1,\ {}^0x_2 + u_2,\ {}^0x_3 + u_3$
Punkt ${}^tQ$: ${}^tx_1 + d\,{}^tx_1,\ {}^tx_2 + d\,{}^tx_2,\ {}^tx_3 + d\,{}^tx_3$ **oder**
${}^0x_1 + d\,{}^0x_1 + u_1 + du_1,\ {}^0x_2 + d\,{}^0x_2 + u_2 + du_2,\ {}^0x_3 + d\,{}^0x_3 + u_3 + du_3$. (2.3)

Durch Einführung der in der Kontinuumsmechanik bevorzugten *Lagrangeschen* Betrachtungsweise, wird nun die Lage des Körpers in der Momentankonfiguration durch die Koordinaten der Referenzkonfiguration ausgedrückt. Das heißt, die Komponenten des Ortsvektors ${}^t\boldsymbol{a}$ werden in Abhängigkeit der Referenzkoordinaten angegeben.

$${}^t\boldsymbol{a} = {}^t\boldsymbol{a}\,({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \quad \text{bzw.} \quad {}^tx_i = {}^tx_i\,({}^0x_j). \tag{2.4}$$

Diese Transformation kann über die Ableitung des Ortsvektors ${}^t\boldsymbol{a}$ nach den Ortskoordinaten ${}^0x_j$ erreicht werden und führt zu der Beziehung

$$d\,{}^t\boldsymbol{a} = \frac{\partial\,{}^t\boldsymbol{a}}{\partial\,{}^0x_j}\,d\,{}^0x_j\,. \tag{2.5}$$

Der Ausdruck $\dfrac{\partial\,{}^t\boldsymbol{a}}{\partial\,{}^0x_j}$ beinhaltet die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe und wird auch als materieller Deformationsgradient $\bar{\boldsymbol{F}}$ bezeichnet. Damit kann Gleichung (2.5) in Matrixschreibweise auch als

$$d\,{}^t\boldsymbol{a} = \bar{\boldsymbol{F}}\,d\,{}^0\boldsymbol{a} \tag{2.6}$$

dargestellt werden.

Da der materielle Deformationsgradient jedoch auch Starrkörperbewegungen abbildet $(\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{I})$, ist er als Verzerrungsmaß nicht geeignet. Um die Starrkörperbewegungen zu eliminieren und um gleichzeitig große Verformungen berücksichtigen zu können, wird auf die Betrachtung der Längenquadrate $(d\,{}^ts)^2$ und $(d\,{}^0s)^2$ der Linienelemente $\overline{{}^tP\,{}^tQ}$ und $\overline{{}^0P\,{}^0Q}$ zurückgegriffen.

Wendet man die in Gleichung (2.3) dargestellten Ortskoordinaten auf die oben genannten Längenquadrate an, können diese in der Form

$$(d\,{}^0s)^2 = d\,{}^0x_1^2 + d\,{}^0x_2^2 + d\,{}^0x_3^2 = d\,{}^0x_i\; d\,{}^0x_i = d\,{}^0\boldsymbol{x}^T\; d\,{}^0\boldsymbol{x}$$
$$(d\,{}^ts)^2 = d\,{}^tx_1^2 + d\,{}^tx_2^2 + d\,{}^tx_3^2 = d\,{}^tx_i\; d\,{}^tx_i = d\,{}^t\boldsymbol{x}^T\; d\,{}^t\boldsymbol{x}, \tag{2.7}$$

dargestellt werden, wobei sich im Weiteren die Differenz der Längenquadrate zu

$$(d\,{}^ts)^2 - (d\,{}^0s)^2 = d\,{}^tx_i\; d\,{}^tx_i - d\,{}^0x_i\; d\,{}^0x_i = d\,{}^t\boldsymbol{x}^T\; d\,{}^t\boldsymbol{x} - d\,{}^0\boldsymbol{x}^T\; d\,{}^0\boldsymbol{x} \tag{2.8}$$

ergibt.

Im nächsten Schritt wird $d\,{}^tx_i$ als Funktion des Verschiebungsvektors $d\,{}^0x_i + du_i$ eingeführt und die einzelnen Komponenten in matrizieller Schreibweise geschrieben

$$d\,{}^t\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} d\,{}^tx_1 \\ d\,{}^tx_2 \\ d\,{}^tx_3 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial\,{}^0x_1}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial\,{}^0x_1}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial\,{}^0x_1}{\partial\,{}^0x_3} \\ \frac{\partial\,{}^0x_2}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial\,{}^0x_2}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial\,{}^0x_2}{\partial\,{}^0x_3} \\ \frac{\partial\,{}^0x_3}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial\,{}^0x_3}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial\,{}^0x_3}{\partial\,{}^0x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial\,{}^0x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial\,{}^0x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial\,{}^0x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial\,{}^0x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial\,{}^0x_3} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} d\,{}^0x_1 \\ d\,{}^0x_2 \\ d\,{}^0x_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.9}$$

In Kurzform stellt sich Gleichung (2.9) auch in der nachfolgend angegebenen Form dar

$$d\,{}^t\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})\; d\,{}^0\boldsymbol{x}. \tag{2.10}$$

Dabei repräsentiert $\boldsymbol{J}$ einen Tensor zweiter Stufe und ist gleichbedeutend mit dem Verschiebungsgradienten. Im Vergleich mit Beziehung (2.6) kann der materielle Deformationsgradient so auch in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten ausgedrückt werden

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}. \tag{2.11}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (2.10) in (2.8) ergibt sich schließlich die Differenz der Längenquadrate zu

$$\begin{aligned} (d\,{}^ts)^2 - (d\,{}^0s)^2 &= d\,{}^0\boldsymbol{x}^T \left[(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J})^T (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}) \right] d\,{}^0\boldsymbol{x} - d\,{}^0\boldsymbol{x}^T\; d\,{}^0\boldsymbol{x} \\ &= d\,{}^0\boldsymbol{x}^T \left[\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^T + \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} \right] d\,{}^0\boldsymbol{x} \end{aligned}, \tag{2.12}$$

wobei der nichtlineare *Lagrangesche* Verzerrungstensor als

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^T + \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} \right] \tag{2.13}$$

definiert ist und sich mit Hilfe der Indexschreibweise auch in der gebräuchlicheren Form

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_{i,\,j} + u_{j,\,i} + u_{k,\,i}\, u_{k,\,j} \right] \tag{2.14}$$

darstellen lässt.

2.1.2 Der Spannungszustand und die Gleichgewichtsbedingungen

Bevor auf die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Volumenelement eingegangen wird, soll zunächst an dieser Stelle der Spannungszustand für ein dreidimensionales Kontinuum näher betrachtet werden. Ziel ist es, den für die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen benötigten *Chauchyschen* Spannungstensor zu bestimmen.

Der Ausgangspunkt für die Beschreibung des Spannungszustandes eines beliebig geformten und durch äußere Kräfte belasteten Körpers ist zunächst seine Gleichgewichtslage.

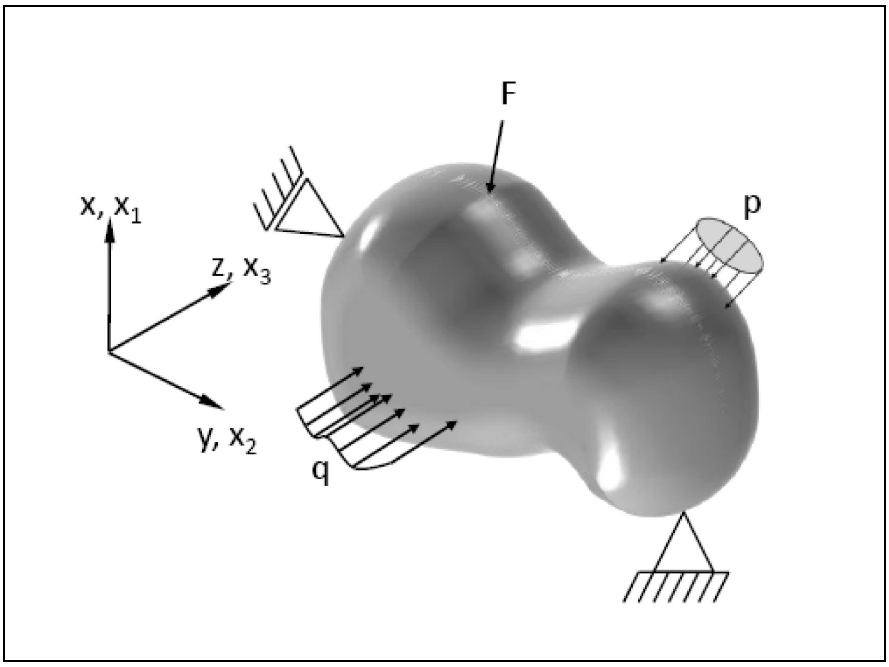

Bild 3: Körper K unter äußerer Belastung

Durch die äußere Belastung wird der Körper verformt, wodurch innere Kräfte hervorgerufen werden, die den Verformungen entgegenwirken. Schneidet man den sich nun in der Momentankonfiguration befindlichen Körper und betrachtet die auf einer infinitesimal kleinen Fläche wirkende resultierende Kraft, die ihrerseits mit der zweiten Schnitthälfte im Gleichgewicht stehen muss, lässt sich die daraus resultierende Spannung wie folgt definieren

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dA}. \tag{2.15}$$

Der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ hängt dabei von der Orientierung des Schnittes im Raum ab und wird durch den Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ beschrieben. Somit lässt sich der Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ in eine Normalspannung und zwei Schubspannungen, die auf der Schnittfläche wirken, zerlegen.

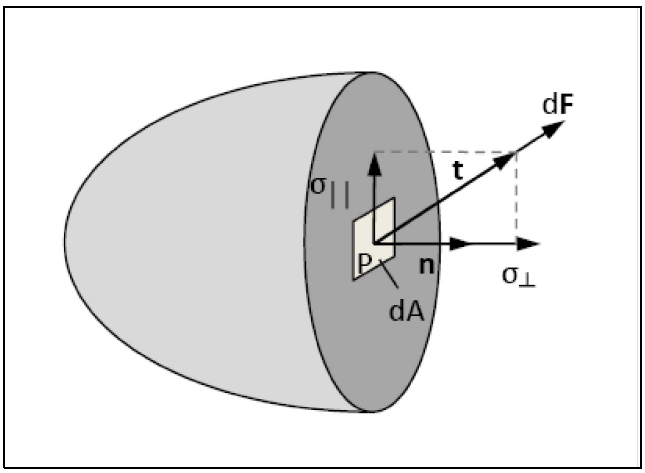

Bild 4: Schnitt durch den Körper K mit Schnittkraftvektor und vereinfachter Darstellung der Komponenten des Spannungsvektors

Wird nun ein infinitesimal kleines Volumenelement betrachtet und trägt man an die jeweiligen senkrecht aufeinander stehenden Schnittflächen die Spannungen an, so ergibt sich der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bei gleichzeitiger Einführung der Indexnotation zu

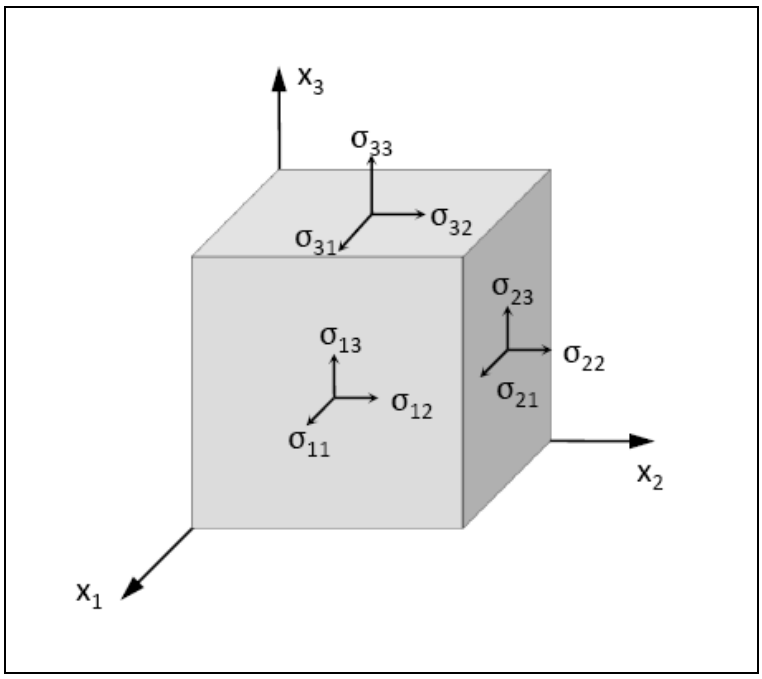

Bild 5: Infinitesimales Volumenelement mit den Komponenten des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \left[\sigma_{ij}\right]. \tag{2.16}$$

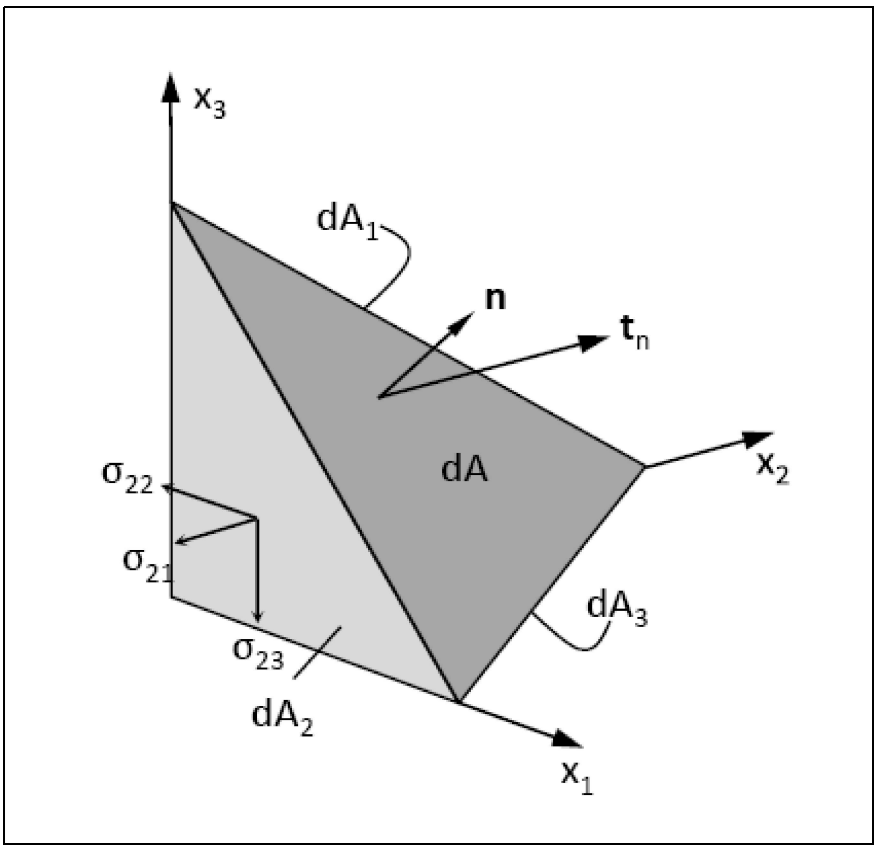

Bild 6: Gleichgewicht an einem infinitesimalen Tetraederelement

Die Gleichgewichtsbedingungen an einem infinitesimalen Tetraederelement, dessen Fläche dA eine durch $\boldsymbol{n}$ beliebige Orientierung im Raum besitzt, liefern dann die nach *Cauchy* benannten Beziehungen

$$t_i = \sigma_{ji}\, n_j \,. \tag{2.17}$$

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors kann Gleichung (2.17) auch in der Form $t_i = \sigma_{ij}\, n_j$ dargestellt werden.

Zur Betrachtung des Kräftegleichgewichtes wird nun ein infinitesimal kleines Volumenelement dV mit der Masse $dm = \rho\, dV$ betrachtet, welches sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch den Raum bewegt. Damit sich nun der Körper K im Gleichgewicht befindet, muss die Impulsbilanz erfüllt sein. Das heißt, die Summe aller auf ihn einwirkenden äußeren Kräfte muss gleich der zeitlichen Veränderung des Impulses sein. Unter Berücksichtigung von Oberflächen-, Volumen- und Massenkräfte lautet diese Forderung somit

$$\int_A t_i \, dA + \int_V f_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, v_i \, dV. \tag{2.18}$$

Mit Hilfe der *Chauchyschen* Formel (2.17) wird (2.18) zunächst in die Form

$$\int_A \sigma_{ji} n_j \, dA + \int_V f_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, v_i \, dV. \tag{2.19}$$

überführt. Zur Transformation des Oberflächenintegrals in ein Volumenintegral, wird der *Gaußsche* Integralsatz angewendet, wodurch die Gleichgewichtsbeziehung (2.19) in die Form

$$\int_V \sigma_{ji,j} \, dV + \int_V f_i \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, v_i \, dV \tag{2.20}$$

übergeht und zusammengefasst lautet:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + f_i - \rho \, \dot{v}_i) \, dV = 0. \tag{2.21}$$

Diese Gleichung bezieht sich in der hier gewählten Darstellung auf die Momentankonfiguration und ist nur dann gültig, wenn sich der Integrand identisch zu Null ergibt. Durch Transformation kann Gleichung (2.21) auch mit Bezug auf die Referenzkonfiguration angegeben werden.

2.1.3 Das Materialgesetz

Im Kapitel 2.1.1 wurde der *Lagrangesche* Verzerrungstensor für die Beschreibung der nichtlinearen kinematischen Beziehungen eines dreidimensionalen Kontinuums abgeleitet. Diese Formulierung erlaubt es, das geometrische Verhalten eines Körpers auch unter der Berücksichtigung großer Verschiebungen und Drehungen zu beschreiben. Die geometrische Formulierung allein berücksichtigt allerdings nicht das werkstofftechnische Verhalten, da nicht nur kleine, sondern auch große geometrische Verformungen zu kleinen Verzerrungen führen können. Um jedoch das Verhalten eines belasteten Körpers eindeutig beschreiben zu können, ist somit das materielle Verhalten mit in die Betrachtung einzubeziehen. Dadurch gelingt es, den mathematischen Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand und dem Formänderungszustand zu formulieren.

Im Rahmen dieser Arbeit findet eine Beschränkung auf metallische Werkstoffe statt. Des Weiteren werden Temperatureinflüsse und Einflüsse auf das Materialverhalten, die aus der Belastungsgeschwindigkeit resultieren, nicht berücksichtigt. Darüber hinaus wird im Be- als auch im Entlastungsfall der gleiche Spannungspfad vorausgesetzt.

Liegen zusätzlich zu diesen Voraussetzungen kleine Verzerrungen vor, kann der verwendete Werkstoff über ein linear-elastisches Materialverhalten, dem *Hookeschen* Gesetz, model-

liert werden. So wird der mathematische Zusammenhang zwischen den einzelnen Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors über die Komponenten des Elastizitätstensors in der Form

$$^t\sigma_{ij} = {}^tD_{ijkl} \; {}^t\varepsilon_{kl} \tag{2.22}$$

hergestellt. Für den isotropen dreidimensionalen Spannungszustand sind die einzelnen Komponenten des Elastizitätstensors unter Berücksichtigung der *Laméschen* Konstanten λ und μ sowie des Kroneckersymbols δ_{ij} folgendermaßen definiert:

$$^tD_{ijkl} = \lambda \, \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \text{ mit}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \; , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.23}$$

Dabei repräsentieren die Größen E und ν jeweils den Elastizitätsmodul sowie die Querkontraktionszahl. μ ist identisch mit dem Gleitmodul G.

Wie bereits erwähnt, sind die bisher angegebenen Gleichungen für ein dreidimensionales Kontinuum gültig. Werden jedoch Bauelemente betrachtet, deren Wanddicke im Vergleich zu den übrigen geometrischen Abmessungen sehr gering ist, so können diese Grundgleichungen auf ein zweidimensionales Kontinuum überführt werden. Für das Stoffgesetz geschieht dies in Kapitel 2.2.3, in welchem ebenfalls die Annahmen für einen ebenen Spannungszustand einfließen.

2.1.4 Das Prinzip von d'Alembert

Grundlage der folgenden Betrachtung ist ein sich unter der Einwirkung von äußeren Kräften im Gleichgewicht befindlicher Körper. Zusätzlich zu dem aktuellen Spannungs- und Verformungszustand wird nun ein mit den Auflagerbedingungen kompatibles virtuelles Verschiebungsfeld $\delta \boldsymbol{u}$ eingeprägt. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen besagt nun, dass die durch die äußeren Kräfte an den virtuellen Verschiebungen geleistete Arbeit gleich der Arbeit ist, die durch die Spannungen an den virtuellen Verzerrungen geleistet wird. Das heißt, es gilt folgende Beziehung:

$$\delta W_i = \delta W_a + \delta W_T \tag{2.24}$$

Ausgangspunkt für diese Beziehung sind die Gleichgewichtsbedingungen gemäß Gleichung (2.21). Eingesetzt in Gleichung (2.24), multipliziert mit den virtuellen Verschiebungen und über das Volumen integriert, lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen auch als Gleichgewicht der geleisteten Arbeiten in folgender Form darstellen:

$$\int_V (\sigma_{ji,\,j} + f_i - \rho \, \dot{v}_i) \, \delta u_i \; dV = 0 \tag{2.25}$$

Um Gleichung (2.25) nun in die gebräuchlichere Form gemäß Ausdruck (2.24) zu

überführen, wird der Term $\int_V \sigma_{ji,j}\ \delta u_i\ dV$ durch die Beziehung

$$\int_V \sigma_{ji,j}\ \delta u_i\ dV = \int_V (\sigma_{ji}\ \delta u_i)_{,j}\ dV - \int_V \sigma_{ji}\ \delta u_{i,j}\ dV \tag{2.26}$$

substituiert, woraus sich Gleichung (2.27) ergibt

$$\int_V \sigma_{ji}\ \delta u_{i,j}\ dV = \int_V (\sigma_{ji}\ \delta u_i)_{,j}\ dV + \int_V f_i\, \delta u_i\, dV - \int_V \rho\, \ddot{u}_i\, \delta u_i\, dV \tag{2.27}$$

Durch Anwendung des *Gaußschen* Integralsatzes auf den ersten Term der rechten Seite wird das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt. Unter Berücksichtigung der Beziehung von *Chauchy* gemäß Gleichung (2.17) ergibt sich dieser Term dann zu

$$\int_V (\sigma_{ji}\ \delta u_i)_{,j}\ dV = \int_A \sigma_{ji}\, n_j\, \delta u_i\, dA = \int_A t_i\, \delta u_i\, dA\,. \tag{2.28}$$

Wird weiterhin die Symmetrie des Spannungstensors $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$ berücksichtigt sowie die Beziehung $\sigma_{ij}\, \delta u_{i,j} = \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}$ für die linke Seite von Gleichung (2.27) in Ansatz gebracht, lässt sich das Prinzip von *d'Alembert* in der *Lagrangeschen* Fassung auch in der gebräuchlicheren Schreibweise

$$\int_V \rho\, \ddot{u}_i\, \delta u_i\, dV + \int_V \sigma_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, dV = \int_A t_i\, \delta u_i\, dA + \int_V f_i\, \delta u_i\, dV \tag{2.29}$$

formulieren.

2.2 Die Anwendung auf vorverformte räumliche Strukturen

Wie bereits in Kapitel 1.3 dargestellt, soll in dieser Arbeit das Verhalten von axial belasteten und vorverformten Leichtbauprofilen untersucht werden. Im Gegensatz zur Balkentheorie werden hier die Profile als gefaltete Plattenstrukturen betrachtet, wodurch gleichzeitig Membran- und Biegegrößen zu berücksichtigen sind. Somit liegt ein gekoppeltes Platten-Scheiben-Problem vor, für das in den nächsten Kapiteln ein entsprechendes ebenes Schalenelement entwickelt wird.

2.2.1 Annahmen und Voraussetzungen

In den vorherigen Kapiteln wurden die mechanischen Grundgleichungen für ein allgemeines dreidimensionales Kontinuum abgeleitet. In Abhängigkeit der vorhandenen Bauteil-

geometrie und des verwendeten Werkstoffes können jedoch im Rahmen der Berechnung vereinfachende Annahmen getroffen werden, sodass diese Gleichungen auf die eines zweidimensionalen Kontinuums überführt werden können. Ausgehend von der Grundannahme, dass es sich um dünnwandige Flächentragwerke handelt, können nun folgende Annahmen getroffen werden:

1. Die Wanddicke h ist klein im Vergleich zu den übrigen geometrischen Abmessungen $(h \ll a;\ h \ll b)$.
2. Die Änderung der Abstände übereinander liegender Punkte auf einer Normalen zur Plattenmittelfläche kann vernachlässigt werden $(\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \approx 0)$.
3. Die Spannungen $\sigma_{i,3}$ in einem Schnitt $z = const$ sind sehr klein und können im Vergleich zu den Spannungen $\sigma_{\alpha,\beta};\ \alpha, \beta = 1, 2$ vernachlässigt werden.
4. Fasern, die vor der Verformung senkrecht auf der Mittelfläche stehen, stehen auch nach der Deformation senkrecht dazu. Für die Schubverzerrungen gilt $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ aber $\gamma_{xy} \neq 0$ (schubstarre Platte nach *Kirchhoff)*.
5. Der verwendete Werkstoff besitzt ein linear-elastisches Materialverhalten. Der Werkstoff sei homogen und isotrop *(Hookesches* Materialgesetz).
6. Die Struktur besitzt eine eingeprägte Vorverformung $w^0(x,y)$ und/oder $v^0(x,y)$.
7. Die vorverformte unbelastete Struktur ist spannungsfrei.
8. Im Falle einer dynamischen Belastung wird die Massenträgheit in Längsrichtung vernachlässigt, da die Ausbreitung der Stoßwelle als unendlich schnell angenommen wird. Die Stoßdauer T_S wird als klein im Vergleich zur Periodendauer T_B der ersten Biegeschwingung aber als wesentlich größer als die Periodendauer T_L der ersten Longitudinalschwingung vorausgesetzt.
9. Die Schnittkräfte werden am positiven Schnittufer in positiver Koordinatenrichtung als positiv definiert. Die Schnittmomente sind positiv definiert, wenn sie am positiven Schnittufer positive Spannungen an Punkten mit positiver Koordinate erzeugen.

2.2.2 Die Berücksichtung der Vorverformung in der Kinematik

Ausgehend von den oben beschriebenen Hypothesen wird nun für die Transformation der nichtlinearen kinematischen Beziehungen auf den zweidimensionalen Fall ein Ausschnitt aus einem ebenen Schalenelement mit der konstanten Wanddicke h betrachtet. Der gewählte Punkt ${}^0P$ in der Referenzkonfiguration befindet sich nun in einem Abstand z von der Mittelfläche.

Da in das ebene Schalenelement Vorverformungen eingeprägt sind, müssen diese zusätzlich in dem Verschiebungsvektor berücksichtigt werden. Damit setzt sich die auf die Mittelfläche bezogene Gesamtverformung $\tilde{u}$ nun aus einer elastischen Komponente u und einer Vorverformungskomponente u^0 zusammen.

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{0} \tag{2.30}$$

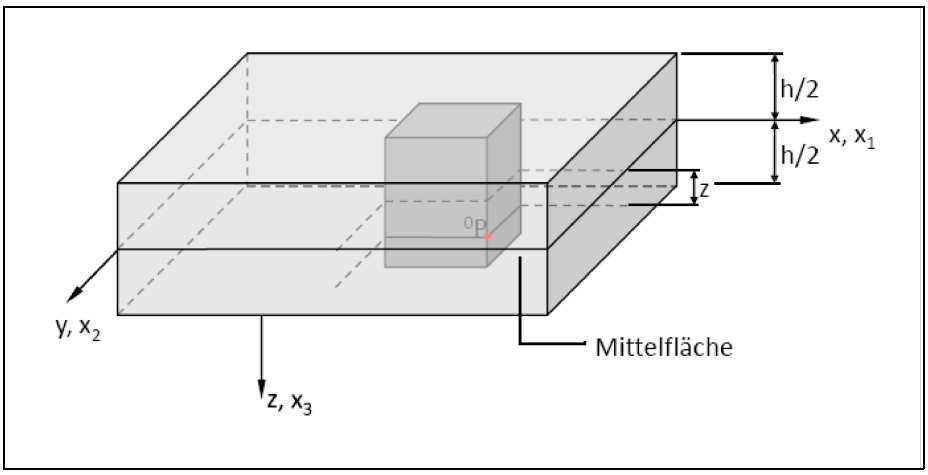

Bild 7: Plattenausschnitt mit Punkt P in der Referenzkonfiguration im Abstand z von der Mittelfläche

Für die weitere Betrachtung der Deformationsgeometrie wird noch zusätzlich der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_i = \{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}\}$ eingeführt. Dieser repräsentiert die Verschiebungen im Abstand z zur Mittelfläche.

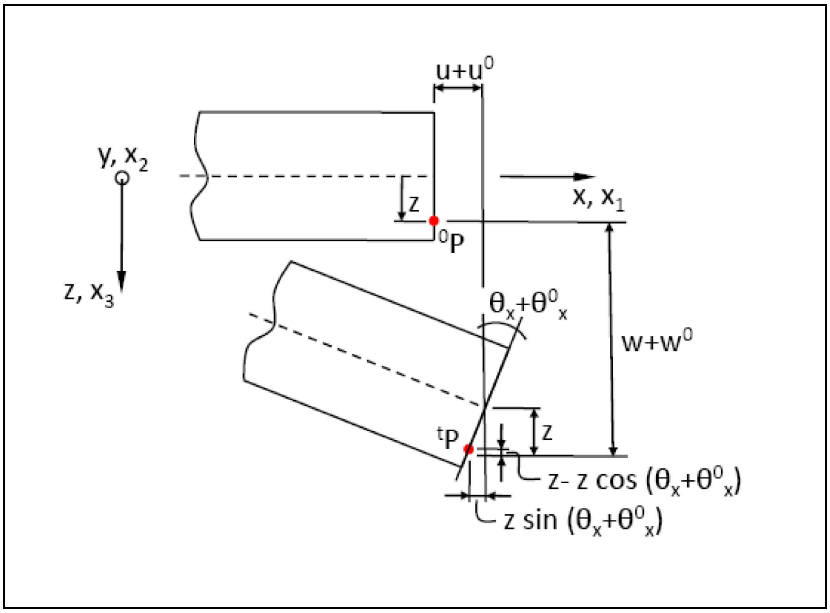

Bild 8: Plattengeometrie im verformten Zustand unter Berücksichtigung der Vorverformung und der Annahme der Schubstarrheit

Wie aus der in Bild 8 dargestellten Deformationsgeometrie entnommen werden kann, sind bei der Betrachtung eines Partikels außerhalb der Mittelfläche die Verschiebungen noch um die aus der Plattenbiegung und Vorverformung resultierenden Anteile zu ergänzen. So ergibt sich für die $\tilde{U}$-Verschiebung zunächst die Beziehung

$$\tilde{U} = u + u^0 - z \sin(\theta_x + \theta_x^0) \quad . \tag{2.31}$$

Werden nun kleine Winkel vorausgesetzt, so dass näherungsweise $\cos\alpha;\ \cos\alpha_0 \approx 1$ gilt, kann Gleichung (2.31) unter Anwendung des Additionstheorems $\sin(\alpha + \alpha_0) = \sin\alpha \cos\alpha_0 + \cos\alpha \sin\alpha_0$ in der Form

$$\tilde{U} = u + u^0 + z \sin\theta_x - z \sin\theta_x^0 \tag{2.32 a}$$

geschrieben werden. Für die $\tilde{V}$-Verformung gilt Gleichung (2.32 a) sinngemäß und ergibt

$$\tilde{V} = v + v^0 - z \sin\theta_y - z \sin\theta_y^0 \quad . \tag{2.32 b}$$

Für die Verformung $\tilde{W}$ kann aus Bild 8 die Beziehung

$$\tilde{W} = w + w^0 + z \cos(\theta_x + \theta_x^0) - z \tag{2.32 c}$$

abgelesen werden, die sich für kleine Winkel in $\tilde{W} = w + w^0$ vereinfacht. Unter Einbeziehung der *Kirchhoffschen* Normalenhypothese lässt sich nun der Gleichungssatz (2.32 a-c) auch in folgender Form wiedergeben

$$\tilde{U}_\alpha = (u_\alpha + u_\alpha^0) - z(w_{,\alpha} + w_{,\alpha}^0) \ , \quad U_3 = w \quad . \tag{2.33}$$

Im nächsten Schritt werden nun diese Beziehungen mit Gleichung (2.14) verknüpft. Da definitionsgemäß durch die Vorverformung in der Struktur keine Verzerrungen hervorgerufen werden sollen, sind die aus der Vorverformung resultierenden Verzerrungen $E_{\alpha\beta}^0$ von dem Gesamtverzerrungstensor zu subtrahieren. Damit ergibt sich auf der Grundlage der physikalischen Hypothese $|\sigma_{i3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}|$ der *Lagrangesche* Verzerrungstensor $\tilde{E}_{\alpha\beta}$ zu

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}^0 \quad . \tag{2.34}$$

Unter Einbindung der Beziehungen (2.33) und nach kurzer Zwischenrechnung geht dieser in die nachfolgend dargestellte Form über, wobei die Größe $\kappa_{\alpha\beta} = -u_{3,\alpha} u_{3,\beta}$ den Tensor der Krümmungen wiedergibt.

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{k,\alpha} u_{k,\beta} + u_{k,\beta}^0 u_{k,\alpha} + u_{k,\alpha}^0 u_{k,\beta}\right] + z\,\kappa_{\alpha\beta} \tag{2.35}$$

Zur besseren Veranschaulichung ist für das betrachtete ebene Schalenelement eine in den Ingenieursgrößen ausgedrückte Version des Verzerrungs- und Verkrümmungstensors im Anhang A zusammengestellt.

2.2.3 Die Spannungs - Verzerrungsmatrix

In Kapitel 2.1.3 wurde das *Hookesche* Materialgesetz für ein dreidimensionales isotropes Kontinuum abgeleitet. Es soll nun an dieser Stelle unter Berücksichtigung der Annahmen für den ebenen Spannungszustand auf ein Platten-Scheibenelement adaptiert werden, um daraus die Steifigkeiten für ein ebenes Schalenelement zu ermitteln.

Basierend auf der bereits eingeführten physikalischen Hypothese $|\sigma_{i3}| \ll |\sigma_{\alpha\beta}|$, der Grundannahme für den ebenen Spannungszustand, können die Spannungen σ_{i3} näherungsweise gleich Null gesetzt und somit aus den Materialgleichungen gestrichen werden. Basierend auf dieser Annahme ergeben sich die Verzerrungen $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23}$ zu Null und ε_{33} nimmt aufgrund Gleichung (2.23) den Wert

$$\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu+1}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \tag{2.36}$$

an. Eingesetzt in Gleichung (2.22) lässt sich dann die Materialmatrix für den ebenen Spannungszustand als

$$\bar{\boldsymbol{D}} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

formulieren. Über die Schnittlastdefinition

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}\, dz \quad \text{und} \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta}\, z\, dz \quad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{2.38}$$

können dann die einzelnen Komponenten der Spannungs-Verzerrungs-Matrix für das betrachtete ebene Schalenelement durch Integration ermittelt werden. Für die Membran- und Biegeanteile lassen sich somit die Steifigkeiten über die Beziehungen

$$\boldsymbol{D}^p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\boldsymbol{D}}\, dz = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{D}^b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\boldsymbol{D}}\, z dz = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

berechnen. Die Überlagerung der Membransteifigkeiten mit den Plattenbiegesteifigkeiten führt

schließlich auf die Spannungs-Verzerrungs-Matrix $\boldsymbol{D}$ für ein ebenes Schalenelement und kann wie folgt beschrieben werden:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^p & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^b \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

2.3 Das Verschiebungsfeld

Kernelement der *FSM* ist die Formulierung der Ansatzfunktionen zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes. Im Vergleich zu der *FEM*, bei der die Verschiebungen rein durch Polynomansätze abgebildet werden, greift die *FSM* auf diese Funktionen nur zur Beschreibung der Verformung in Querrichtung zurück. Für die Formulierung der Verformungen in Elementlängsrichtung wird hingegen auf Funktionen zurückgegriffen, mit denen die Randbedingungen der Auflager berücksichtigt werden können. Daraus ergibt sich der Vorteil, dass eine Diskretisierung in Längsrichtung nicht mehr erforderlich ist, was in der Folge zu deutlich kleineren Gleichungssystemen führt.

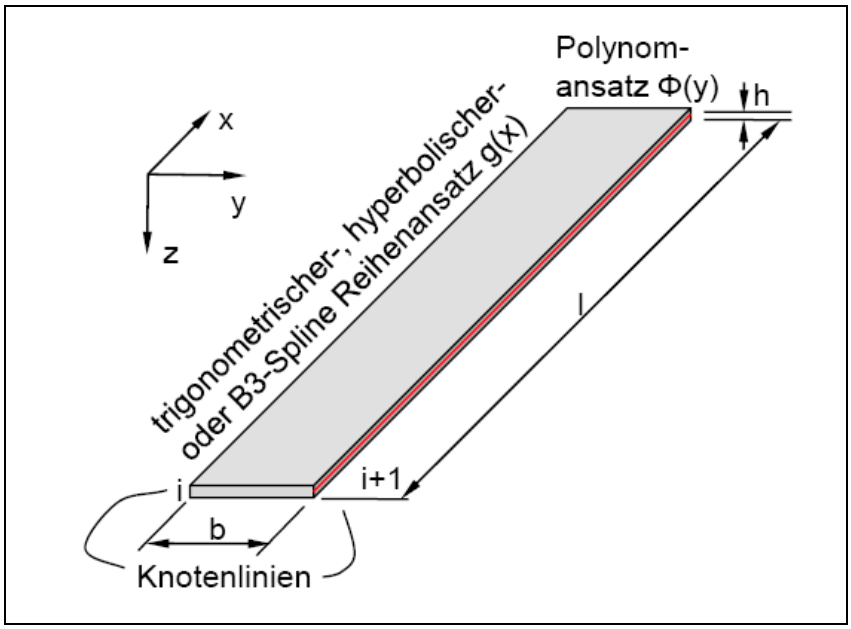

Bild 9: Prinzipielle Darstellung eines Finiten Streifen Elementes

Somit wird die Verformung eines Streifenelementes durch eine Ansatzfunktion abgebildet, die sich aus dem Produkt eines Reihenansatzes in x-Richtung und eines Polynomansatzes in y-Richtung zusammensetzt. Der Polynomansatz muss dabei so gewählt werden, dass die Anzahl der Freiheitsgrade die Anzahl der zu bestimmenden freien Parameter widerspiegeln. Somit kann das vollständige auf die Mittelfläche bezogene allgemeine Verschiebungsfeld $f(x,y)$ mit den entsprechenden Ansatzfunktionen für u, v und w in den korrespondierenden

Raumrichtungen x, y und z wie folgt formuliert werden:

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=1}^{k_{max}} g_k^u(x)\ \Phi_k^u(y)\ , \\ v(x,y) &= \sum_{m=1}^{m_{max}} g_m^v(x)\ \Phi_m^v(y)\ , \\ w(x,y) &= \sum_{n=1}^{n_{max}} g_n^w(x)\ \Phi_n^w(y)\ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

2.3.1 Der Reihenansatz zur Beschreibung der Biegeverformung

Für die Beschreibung der Plattenbiegung müssen die verwendeten Ansatzfunktionen folgende Eigenschaften besitzen:

- die geometrischen Randbedingungen müssen erfüllt sein,
- die Funktion muss entsprechend der Koordinate differenzierbar sein und
- die Funktion sollte eine Lösung mit hoher Konvergenzgeschwindigkeit erzeugen, d.h. die Lösung sollte sich mit nur wenigen Ansatzgliedern schnell stabilisieren.

Eine Funktionenklasse, die diese Voraussetzungen erfüllt, wird von Y. K. CHEUNG z.B. in [35] und [36] vorgeschlagen. Sie ergibt sich aus der Lösung der Differentialgleichung des transversal schwingenden Balkens mit kontinuierlicher Massenverteilung

$$\frac{\partial^4 g^w(x)}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI}\frac{\partial^2 g^w(x)}{\partial t^2} = 0\ , \tag{2.43}$$

welche nach Einführung des Produktansatzes nach *Bernoulli* für den ortsabhängigen Teil die allgemeine Lösung

$$g_n^w(x) = C_1 \sin\left(\frac{\bar{\mu}x}{l}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\bar{\mu}x}{l}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\bar{\mu}x}{l}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\bar{\mu}x}{l}\right) \tag{2.44}$$

besitzt. Durch die Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 bis C_4 kann die Lösung an die gewünschte Randbedingung angepasst werden. Die Größe l gibt die Streifenlänge an und der Parameter $\bar{\mu}$ ergibt sich aus der Randbedingung. Für die in dieser Arbeit berücksichtigten Lagerbedingungen lauten die Eigenfunktionen mit den dazugehörigen Koeffizienten und den Wurzeln der charakteristischen Gleichungen folgendermaßen:

a) <u>gelenkig - gelenkig</u>

$$g_n^w(\xi) = \sin(\bar{\mu}_n \xi), \quad \xi = \frac{x}{l},$$
$$\bar{\mu}_n = n\pi, \tag{2.45}$$
$$n = 1, 2, ..., n_{\max} ,$$

b) <u>fest - fest</u>

$$g_n^w(\xi) = \sin(\bar{\mu}_n \xi) - \sinh(\bar{\mu}_n \xi) - \alpha_n [\cos(\bar{\mu}_n \xi) - \cosh(\bar{\mu}_n \xi)], \quad \xi = \frac{x}{l},$$
$$\bar{\mu}_n = 4{,}7300;\ 7{,}8532;\ 10{,}9956;\ ....;\ \frac{(2n+1)}{2}\pi, \quad n = 4, 5, 6, ..., n_{\max} , \tag{2.46}$$
$$\alpha_n = \frac{\sin\bar{\mu}_n - \sinh\bar{\mu}_n}{\cos\bar{\mu}_n - \cosh\bar{\mu}_n} ,$$

c) <u>gelenkig - fest</u>

$$g_n^w(\xi) = \sin(\bar{\mu}_n \xi) - \alpha_n \sinh(\bar{\mu}_n \xi), \quad \xi = \frac{x}{l},$$
$$\bar{\mu}_n = 3{,}9266;\ 7{,}0685;\ 10{,}2102;\ ....;\ \frac{(4n+1)}{4}\pi, \quad n = 4, 5, 6, ..., n_{\max} , \tag{2.47}$$
$$\alpha_n = \frac{\sin\bar{\mu}_n}{\sinh\bar{\mu}_n} ,$$

Diese hier dargestellten Ansatzfunktionen können uneingeschränkt sowohl in der Dynamik als auch in der Statik angewendet werden.

2.3.2 Der Reihenansatz zur Beschreibung der Membranverformung

Für die Beschreibung der Verschiebungen in der x-y-Ebene wurde eine Vielzahl von Funktionen angewendet und untersucht. Unter der Annahme, dass sich die Enden einer Struktur unter axialer Belastung in Längsrichtung frei verschieben können, schlägt u.a. Y. K. CHEUNG in [32] - [34] und [35] die Verwendung eines Cosinus-Ansatzes für die u-Verschiebung vor. Für die Ableitung der v-Verschiebungen geht Y. K. CHEUNG von der Beziehung aus, dass für kleine Auslenkungen der Zusammenhang zwischen einer translatorischen und axialen Verformung über die Beziehung

$$u \sim \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.48}$$

ausgedrückt werden kann. Diesem Ansatz folgend, ergibt sich somit für die v-Verschiebung eine Sinus-Funktion.

Da der Funktionensatz

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \cos(k\pi \frac{x}{a})\ \Phi_k^u(y)\ ,$$
$$v(x,y) = \sum_{m=1}^{m_{max}} \sin(m\pi \frac{x}{a})\ \Phi_m^v(y) \tag{2.49}$$

den Eigenformen entspricht, könnten sie bei der Betrachtung dynamischer Vorgänge uneingeschränkt verwendet werden. Bei WANG und DAWE werden die Eigenschaften dieser Funktionen in [87] näher betrachtet. Dabei erweist sich aber bei Problemstellungen mit großen Verformungen der Cosinus-Ansatz als nicht besonders geeignet, da bei dessen Verwendung die Lösung eine zu geringe Konvergenzgeschwindigkeit besitzt. Das heißt, es werden zu viele Wellenglieder benötigt, bis sich die Lösung stabilisiert. Die Ursache hierfür liegt in der Annahme der freien Verschiebbarkeit der Ränder in Längsrichtung begründet. An den Stellen $x = 0, l$ muss die Beziehung $N_x = 0$ erfüllt sein. WANG und DAWE führen nun in [87] aus, dass die oben genannte Bedingung an den Rändern nicht erfüllt wird, da der in den Verzerrungen auftretende Term $\partial u/\partial x$ an der Stelle $x = 0, l$ stets den Wert Null annimmt. Um die daraus resultierende geringe Konvergenzgeschwindigkeit der Lösung zu überwinden, schlagen die Autoren die Verwendung der Funktion

$$u = (\frac{l}{2} - x)\ \Phi_0^u(y) + \sum_{k}^{k_{max}} \sin(\frac{k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y); \quad k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \tag{2.50}$$

vor. Um die oben beschriebene Problematik zu umgehen, verwenden auch Autoren wie z.B. MAEDA ET AL. [75] oder KAKOL [69] in ihren Arbeiten ebenfalls eine modifizierte Ansatzfunktion für die Berechnung der u-Verschiebung. Sie beziehen einen linearen Term in ihre Betrachtungen mit ein und schlagen folgende Funktion vor:

$$u = (1 - \frac{2x}{l})\ \Phi_0^u(y) + \sum_{k}^{k_{max}} \sin(\frac{k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y); \quad k = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ . \tag{2.51}$$

Y. K. CHEUNG hingegen kombiniert in [35] den linearen Anteil mit einer Cosinus-Funktion und erhält den Ausdruck

$$u = (1 - \frac{2x}{l})\ \Phi_0^u(y) + \sum_{k}^{k_{max}} \cos\frac{(k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y); \quad k = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ . \tag{2.52}$$

Auch die Auswahl der Ansatzfunktion zur Beschreibung der v-Verschiebung in Längsrichtung bedarf einer genaueren Betrachtung. So ist neben der bereits von Y. K. CHEUNG in [35] vorgeschlagen Sinus-Funktion auch die Cosinus-Funktion gebräuchlich und wird z.B. von SMITH und SRIDHARAN in [81] und [84] oder von DAWE ET AL. in [57] oder [59] genutzt. So verwenden DAWE ET AL. in [57] oder [59] beide Varianten, um unterschiedliche Randbedingun-

gen mit Hilfe der v-Verschiebung zu modellieren. Der von ihm beschriebene Problem-Typ A verwendet die Cosinus-Funktion. Da diese Funktion an den Stellen $x = 0, l$ zu einer v-Verschiebung $v = 0$ führt und für die Schubspannung τ_{xy} den Wert $\tau_{xy} = 0$ liefert, entspricht diese Formulierung einer Einspannung, bei der sich der obere und untere Rand lateral frei verschieben kann. Physikalisch betrachtet kann dies einer in einer Prüfmaschine reibungsfreien Einspannung gleichgesetzt werden. Im Problem-Typ B hingegen verwenden DAWE ET AL. die Sinus-Funktion. Da die v-Verschiebung bei Verwendung dieser Funktion an den Auflagern den Wert $v = 0$ annimmt und für die Schubspannungen $\tau_{xy} \neq 0$ gilt, repräsentiert diese Art der Modellierung eine reibungsbehaftete Einspannung.

SMITH und SRIDHARAN in [81] und [84] sowie RAGON, noch einmal zusammenfassend in [78], weisen zusätzlich auf einen weiteren Umstand hin. Sie beschreiben, dass die Auswahl der Ansatzfunktion ebenfalls entscheidend für die Kompatibilität der Verschiebungen an den benachbarten Knotenlinien bei zusammengesetzten räumlichen Strukturen ist. Wird so z.B. für die v-Verschiebung die Cosinus-Funktion gewählt, um so z.B. frei verschiebbare Ränder zu modellieren, die aber bezüglich der Durchbiegung als gelenkig angenommen werden, ist durch die funktionsbedingte unterschiedliche Auswahl der Wellenglieder die geforderte Kompatibilität an den benachbarten Streifenelementen entlang den Kanten nicht mehr gegeben.

Somit empfiehlt es sich, für die v- und w-Verschiebung im Rahmen globaler Verformungsbetrachtungen die Sinus-Funktion zu verwenden. Sind jedoch nur lokale Effekte von Interesse, wie z.B. bei der Untersuchung des lokalen Beulverhaltens, kann die oben beschriebene Inkompatibilität an den Kanten vernachlässigt werden. Aufgrund der erhöhten Steifigkeit an den Kanten sind die resultierenden lokalen Membran- und Biegeverformungen sehr klein. Unter diesen Voraussetzungen kann die Annahme getroffen werden, dass die w-Verschiebung an den Kanten gleich Null ist und dass für die Normalspannung in transversaler Richtung die Bedingung $\sigma_y = 0$ entlang der Kanten gegeben ist. Bedingt durch diese Annahmen tritt nun eine Entkopplung zwischen den Größen v und w auf, was wiederum zu einer Vereinfachung des zu lösenden Gleichungssystems führt.

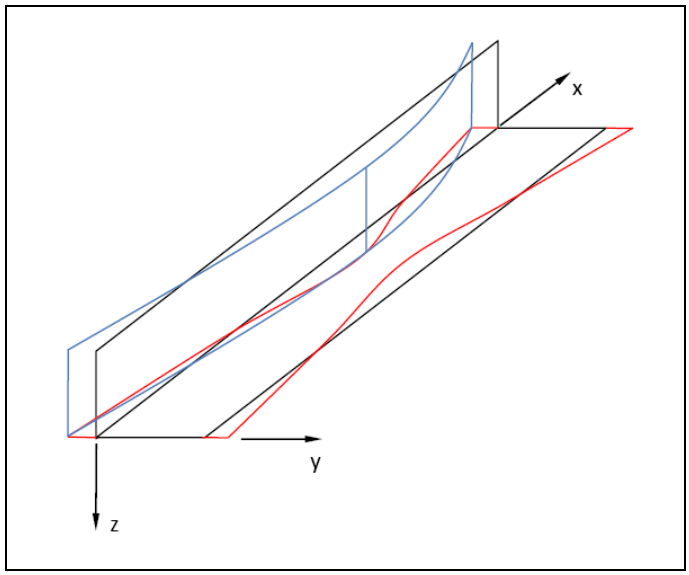

Bild 10: Globale Inkompatibilität benachbarter Knotenlinien bei räumlichen Strukturen

Da in dieser Arbeit die Untersuchung von räumlichen Strukturen sowie deren globales Verhalten im Vordergrund steht, wird die Kompatibilität an den Kanten vorausgesetzt und somit die oben genannten vereinfachenden Annahmen fallengelassen. Zu den so erhaltenen genaueren Ergebnissen bietet diese Vorgehensweise noch zusätzlich den Vorteil, dass sie im Nachbeulbereich nicht nur auf niedrige Lasten beschränkt ist, sondern auch für höhere Lasten angewendet werden kann, so RAGON in [78] .

Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit sind die oben beschriebenen Ansatzfunktionen noch einmal in Anhang B zusammengestellt.

2.3.3 Der Polynomansatz

In Kapitel 2.3 wurde bereits einleitend beschrieben, dass die Verschiebungen in transversaler Richtung durch die Polynomansätze $\Phi(y)$ approximiert werden. Dabei ist der Ansatz so zu wählen, dass die zu bestimmenden freien Parameter der Ansatzfunktion mit den Freiheitsgraden, die den Knotenlinien zugeordnet sind, übereinstimmen.

Um die Genauigkeit zu erhöhen, gibt es zwei Möglichkeiten. Eine besteht darin, die Diskretisierung in Umfangsrichtung zu verfeinern, d.h. die Anzahl der Elemente wird erhöht. Im Rahmen der zweiten Möglichkeit behält man die Elementanzahl bei, dafür versieht man aber die Streifenelemente mit internen Knotenlinien. KHONG sowie DAWE und LAM haben diese Vorgehensweise in [40] sowie in [57] näher untersucht und festgestellt, dass bei gleichbleibender Genauigkeitsforderung der Rechenaufwand durch die Verwendung höherwertiger Polynomansätze verringert werden kann.

Eine Übersicht über zwei mögliche Elemente und deren Freiheitsgrade ist in Bild 11 einmal dargestellt.

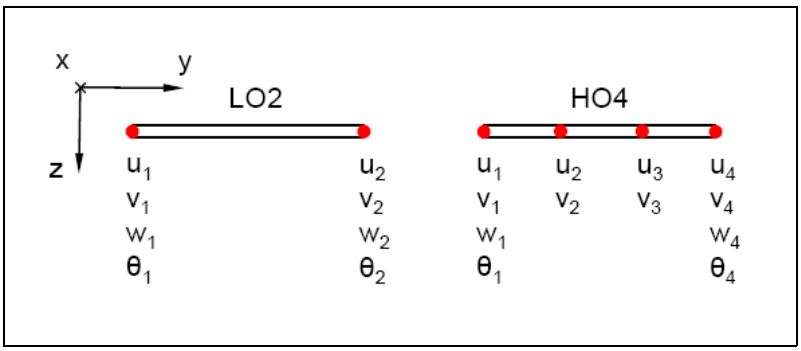

Bild 11: LO2 und HO4 Element und deren Freiheitsgrade

Für die Beschreibung der Biegeverformung in transversaler Richtung wird für die in Bild 11 gezeigten Elemente ein Polynomansatz dritter Ordnung, wie er bereits bei Y. K. CHEUNG in [35] vorgeschlagen wurde, verwendet.

Der Ansatz für das *Hermite* Polynom $\Phi_n^w(y)$ lässt sich allgemein in der Form

$$\Phi_n^w(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \tag{2.53}$$

darstellen. Bezogen auf die beiden Freiheitsgrade w und $\theta_y = \partial w / \partial y$ pro Knotenlinie, erhält man vier Bestimmungsgleichungen für die zu bestimmenden Parameter a_i .

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 0 & 1 & 2y_1 & 3y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 0 & 1 & 2y_2 & 3y_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & -\frac{2}{b} & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} \\ \frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & -\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \tag{2.55}$$

Werden für die Koordinaten y_1 und y_2 die entsprechenden Werte 0 und b eingesetzt und nach den freien Parametern a_i aufgelöst, lassen sich diese über Gleichung (2.55) bestimmen. Nach Einsetzen der Werte a_i aus Gleichung (2.55) in (2.53) ergibt sich $\Phi_n^w(y)$ zu

$$\Phi_n^w(y) = \begin{Bmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{b^2} & -\frac{2}{b} & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} \\ \frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & -\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}_n \quad . \tag{2.56}$$

Mit Hilfe der Abkürzung $\eta = y/b$ und den Formfunktionen

$$\begin{aligned} C_1^w &= 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 \ , \\ C_1^{\theta_y} &= y(1 - 2\eta + \eta^2) \ , \\ C_2^w &= 3\eta^2 - 2\eta^3 \ , \\ C_2^{\theta_y} &= y(\eta^2 - \eta) \end{aligned} \tag{2.57}$$

kann Gleichung (2.56) damit auch in der Kurzform als

$$\Phi_n^w(y) = C_1^w w_{1,n} + C_1^{\theta_y} \theta_{y1,n} + C_2^w w_{2,n} + C_2^{\theta_y} \theta_{y2,n} = \boldsymbol{C}^w \boldsymbol{d}_n^w \tag{2.58}$$

wiedergegeben werden, woraus sich die Gesamtverschiebung w durch die Gleichung

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{n_{max}} g_n^w(x)\ \Phi_n^w(y) = \sum_{n=1}^{n_{max}} \boldsymbol{C}^w g_n^w(x)\, \boldsymbol{d}_n^w = \boldsymbol{N}^w \boldsymbol{d}_n^w \tag{2.59}$$

darstellen lässt. In Gleichung (2.59) repräsentiert die Matrix $\boldsymbol{N}^w$ die Formfunktionsmatrix und der Vektor $\boldsymbol{d}_n^w$ bildet die mit der w-Verschiebung zusammenhängenden Freiheitsgrade ab.

Die Bestimmung der Polynomansätze für die Membranverschiebungen $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ lassen sich analog ableiten. Somit sind für das in Bild 11 dargestellte LO2-Element die Formfunktionen mit Hilfe der oben eingeführten Abkürzung η als

$$\begin{aligned} C_1^u &= 1-\eta, \quad C_2^u = \eta \\ C_1^v &= 1-\eta, \quad C_2^v = \eta \end{aligned} \tag{2.60}$$

definiert. Für das in Bild 11 dargestellte HO4-Element mit den zwei internen Knotenlinien lauten die Formfunktionen

$$\begin{aligned} C_1^u &= 1 - \frac{11}{2}\eta + 9\eta^2 - \frac{9}{2}\eta^3 \\ C_2^u &= 9\eta - \frac{45}{2}\eta^2 + \frac{27}{2}\eta^3 \\ C_3^u &= -\frac{9}{2}\eta + 18\eta^2 - \frac{27}{2}\eta^3 \\ C_4^u &= \eta - \frac{9}{2}\eta^2 + \frac{9}{2}\eta^3 \ . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Die Formfunktionen für die v-Verschiebung ergeben sich identisch zu denen von $\boldsymbol{u}$. Damit lässt sich das Gesamtverschiebungsfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ in allgemeiner Darstellung auch als

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \tag{2.62}$$

angeben. Die Formfunktionsmatrix $\boldsymbol{N}$ für ein LO2 Streifenelement ist in ihrer Gänze noch einmal in Anhang C abgebildet.

2.4 Die Systemmatrizen

Um den Übergang auf die in der *FSM* übliche Formulierung zu vollziehen, wird an dieser Stelle auf die mit Gleichung (2.29) dargestellte *Eulersche* Bewegungsdifferentialgleichung in matrizieller Schreibweise zurückgegriffen

$$\int_V \rho\, \ddot{\boldsymbol{u}}\, \delta \boldsymbol{u}\, dV + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV = \int_A \boldsymbol{t}\, \delta \boldsymbol{u}\, dA + \int_V \boldsymbol{f}\, \delta \boldsymbol{u}\, dV. \tag{2.63}$$

Wird Gleichung (2.62) auf Gleichung (2.63) angewendet, kann diese in Abhängigkeit der Freiheitsgrade ausgedrückt werden. Die in Gleichung (2.63) noch auftretenden Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ lassen sich dann durch entsprechendes Differenzieren der Formfunktionsmatrix nach den Koordinatenrichtungen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ berechnen. Mit der sich daraus ergebenden Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\boldsymbol{B}$ kann der nichtlineare Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ in Abhängigkeit der Freiheitsgrade $\boldsymbol{d}$ in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{d} = [\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d}^0)]\, \boldsymbol{d} \tag{2.64}$$

ausgedrückt werden. Der in (2.63) beinhaltete Term $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ berechnet sich dann unter Anwendung der Kettenregel zu

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d}^0)]\, \delta\boldsymbol{d} + \frac{\partial \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}}\, \boldsymbol{d}\, \delta\boldsymbol{d} \quad . \tag{2.65}$$

Wird noch zusätzlich die Beziehung $\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d})$ berücksichtigt, geht Gleichung (2.65) in die vereinfachte Form

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{B}_L + \boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{d}^0)]\, \delta\boldsymbol{d} = \bar{\boldsymbol{B}}\, \delta\boldsymbol{d} \tag{2.66}$$

über. Eine detaillierte Ableitung der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\boldsymbol{B}$ und deren variierten Form kann [35] und [70] entnommen werden.

Zusätzlich wird der Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$ durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D} \tag{2.67}$$

beschrieben. Nach Substitution der Gleichungen (2.62), (2.66) und (2.67) geht die *Eulersche* Differentialgleichung schließlich in die Form

$$\int_V \rho\, \delta\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \ddot{\boldsymbol{d}}\, dV + \int_V \delta\boldsymbol{d}^T \bar{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{d}\, dV = \int_A \delta\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t}\, dA + \int_V \delta\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{f}\, dV \tag{2.68}$$

über.

Zusätzlich zu Oberflächen- und Volumenkräfte können auch Einzelkräfte über die Beziehung $\sum_i^{i_{\max}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{F}_i(t)$ berücksichtigt werden. Mit den zusammengefassten Termen für die Massenmatrix, die Sekantensteifigkeitsmatrix und für den Lastvektor

$$\boldsymbol{M} = \int_V \rho \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \, dV \tag{2.69}$$

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}) = \int_V \bar{\boldsymbol{B}}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \, dV \tag{2.70}$$

$$\boldsymbol{F}(t) = \int_A \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} \, dA + \int_V \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{f} \, dV + \sum_i^{i_{max}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{F}_i(t) \quad , \tag{2.71}$$

ergibt sich schließlich die Bewegungsdifferentialgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{d})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F}(t) \tag{2.72}$$

in ihrer klassischen Form.

Die Komponenten der hier eingeführten Matrizen können für ein LO2-Element den Anhängen C bis G entnommen werden.

2.5 Das Lösungsverfahren für die Zeitintegration

Innerhalb der linearen Dynamik werden mögliche Lösungsverfahren in die beiden Hauptgruppen direkte Integration und Modenüberlagerung aufgeteilt. Darüber hinaus wird bei den direkten Verfahren noch zusätzlich zwischen expliziten und impliziten Integrationsmethoden unterschieden.

Hauptunterschied zwischen den expliziten und implizite Lösungsverfahren ist der Zeitpunkt, zu dem dieser auf die Bewegungsgleichung angewendet wird. So wird bei expliziten Verfahren die Differentialgleichung zum Zeitpunkt t betrachtet. Das bedeutet, dass bei der Anwendung des zentralen Differenzenoperators die Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch die Formulierung der Differentialgleichung zum Zeitpunkt t erfolgt, was einer einfachen zeitlichen Fortschreibung entspricht. Von Nachteil bei dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass das Zeitinkrement Δt stets kleiner sein muss als ein bestimmtes kritisches Inkrement Δt_{krit}. Andernfalls droht die Lösung instabil zu werden. Als ein Maß für das kritische Zeitinkrement werden von KHALIL ET AL. in [110] die Beziehung $\Delta t_{krit} \leq \frac{2}{\omega_{max}}$ angegeben, wobei ω_{max} die größte auftretende Eigenkreisfrequenz angibt.

Somit handelt es sich hinsichtlich des Zeitinkrementes bei der expliziten Integrationsmethode nur um ein bedingt stabiles Verfahren.

Bei den impliziten Verfahren hingegen, wird dieser Nachteil vermieden. Im Gegensatz zu der expliziten Vorgehensweise wird bei der impliziten Integrationsmethode die Bewegungsdifferentialgleichung zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ angewendet. Hierdurch tritt im Gegensatz zu der zentralen Differenzenmethode im weiteren Vorgehen die Steifigkeitsmatrix als Vorfaktor der gesuchten Verschiebungen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ auf. Folglich muss bei der Wahl des Zeitinkrementes Δt kein kritischer Zeitschritt Δt_{krit} berücksichtigt werden, wodurch die Wahl größere Zeitschritte ermöglicht wird.

In Bild 12 sind die einzelnen Gruppen mit den dazugehörigen Lösungsverfahren zusammengestellt. Die dazugehörigen Algorithmen sind in [2] ausführlich beschrieben.

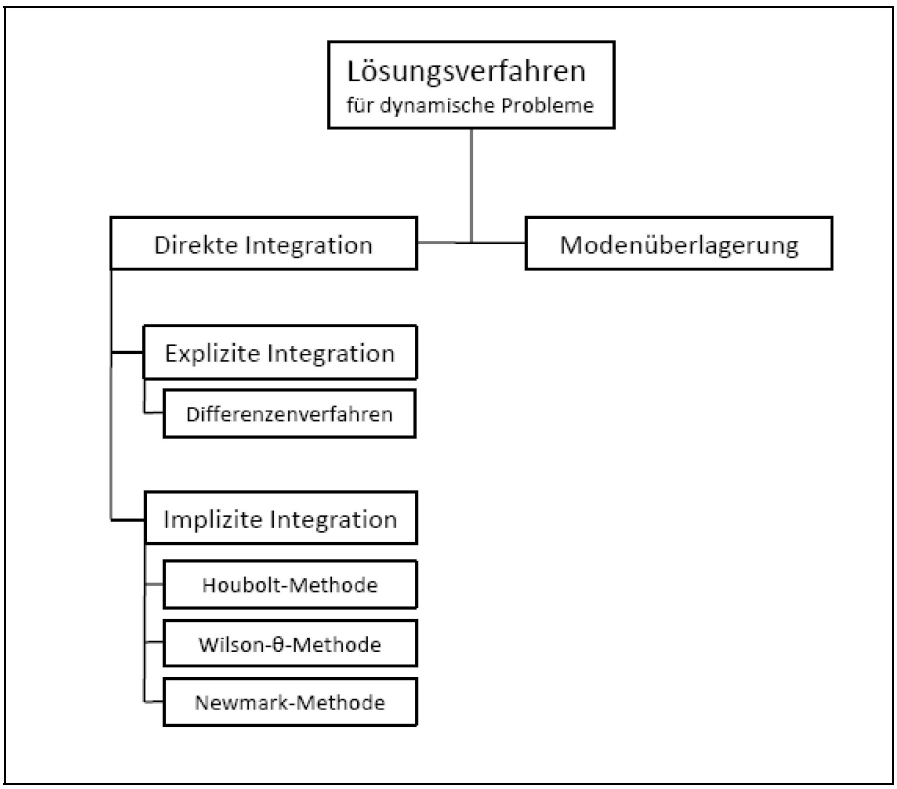

Bild 12: Unterteilung der Lösungsverfahren für dynamische Problemstellungen

2.5.1 Lösungsverfahren für lineare dynamische Probleme

Charakteristisch für die in dieser Arbeit behandelte Problematik ist der im Vergleich zur Periodendauer kurzzeitige Stoßvorgang. Zudem wird die Struktur durch die axiale Krafteinwirkung in einer Richtung belastet, in der im Vergleich zu einer rein transversalen Belastung die höheren Steifigkeiten auftreten. Auf Grund der oben kurz dargestellten Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Zeitintegrationsmethoden, ist ein explizites Integrationsverfahren bei der hier vorliegenden Problemstellung nicht vorteilhaft. Auf Grundlage der in [2] angestellten Überlegungen, wird damit auf das *Newmark*-Verfahren und folglich auf eine implizite Lösungsstrategie zurückgegriffen.

Die Basis für die gewählte implizite Zeitintegration bildet eine modifizierte *Taylor*-Reihenentwicklung, mit deren Hilfe sich die Verformungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ wie folgt formulieren lassen:

$$\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{d}^{t} + \dot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t^{2} + \beta\dddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t^{3} \tag{2.73}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\boldsymbol{d}}^{t} + \ddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t + \gamma\dddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t^{2} \quad . \tag{2.74}$$

Mit der Annahme, dass in dem betrachteten Zeitinkrement Δt eine konstante Beschleunigung vorliegt, kann der Term $\dddot{\boldsymbol{d}}^{t}$ durch die Beziehung

$$\dddot{\boldsymbol{d}}^{t} = \frac{d\ddot{\boldsymbol{d}}}{dt} \approx \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t} - \ddot{\boldsymbol{d}}^{t}}{\Delta t} \tag{2.75}$$

ausgedrückt werden. Wird Gleichung (2.75) in (2.74) und (2.73) substituiert, lauten die Beziehungen für die Verformungen und Geschwindigkeiten

$$\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{d}^{t} + \dot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t + (\frac{1}{2} - \beta)\ddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t^{2} + \beta\ddot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t}\Delta t^{2} \tag{2.76}$$

$$\dot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\boldsymbol{d}}^{t} + (1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{d}}^{t}\Delta t + \gamma\ddot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t}\Delta t \quad . \tag{2.77}$$

Bei der Wahl der Parameter $\beta = 0{,}25$ und $\gamma = 0{,}5$ ist das Verfahren unbedingt stabil. Damit entspricht dies der Methode der konstanten mittleren Beschleunigung [2] und die Geschwindigkeiten lassen sich mittels

$$\dot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t} = \dot{\boldsymbol{d}}^{t} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\boldsymbol{d}}^{t} + \ddot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t}) \tag{2.78}$$

bestimmen. Im Folgenden wird Gleichung (2.78) nach $\ddot{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t}$ aufgelöst und die Beschleunigungen aus Gleichung (2.76) eliminiert. Damit ergeben sich die Verformungen zu

$$\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{d}^{t} + \frac{\Delta t}{2}(\dot{\boldsymbol{d}}^{t} + \dot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t}) \quad . \tag{2.79}$$

Nach Umstellung der Gleichung (2.79) in Bezug auf die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t}$, kann diese mit Gleichung (2.78) gleichgesetzt werden. Die sich daraus ergebende Beziehung wird nach der Beschleunigung $\ddot{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t}$ aufgelöst und mit Hilfe der linearen Bewegungsdifferentialgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{d}}^{t+\Delta t} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{F}(t)^{t+\Delta t} \tag{2.80}$$

kann dann die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Verformungen $\boldsymbol{u}^{t+\Delta t}$ als

$$\left(\frac{4}{\Delta t^{2}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{F}(t)^{t+\Delta t} + \boldsymbol{M}\left(\frac{4}{\Delta t^{2}}\boldsymbol{d}^{t} + \frac{4}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^{t} + \ddot{\boldsymbol{d}}^{t}\right) \tag{2.81}$$

aufgestellt werden. Der Term $\left(\frac{4}{\Delta t^{2}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)$ gibt dabei die effektive Steifigkeitsmatrix $\hat{\boldsymbol{K}}$ wieder.

2.5.2 Das Newmark-Verfahren in nichtlinearer Formulierung

Eine Konsequenz, die aus der Stabilität des *Newmark*-Verfahrens herrührt, ist die Möglichkeit, größere Zeitinkremente in der Zeitintegration zu verwenden, als dies bei der Anwendung des zentralen Differenzenoperators möglich wäre. Bei nichtlinearen Problemstellungen führt dies allerdings dazu, dass innerhalb eines Zeitschrittes die Lösung iterativ ermittelt werden muss. Hierzu bietet sich zum Beispiel das *Newton-Raphson*-Verfahren an.

Ausgangspunkt ist Gleichung (2.81) mit der nun nichtlinearen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}^{\Delta t+t})$. Durch Anwendung einer *Taylor*-Reihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t}$ kann Gleichung (2.81) linearisiert werden. Dabei gibt der Index $\boldsymbol{k}$ den jeweiligen Iterationsschritt an. Wird die *Taylor*-Reihenentwicklung

$$f(\boldsymbol{d}_k^{\Delta t+t}) = f(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t}) + \frac{\partial f(\boldsymbol{d}^{\Delta t+t})}{\partial \boldsymbol{d}^{\Delta t+t}}\Big|_{\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t}} \Delta \boldsymbol{d}_k^{\Delta t+t} = \boldsymbol{0} \tag{2.82}$$

auf die Gleichung

$$f(\boldsymbol{d}) \equiv \left(\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{d}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{d}^t + \frac{4}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^t + \ddot{\boldsymbol{d}}^t\right) - \boldsymbol{F}(t)^{t+\Delta t} = \boldsymbol{0} \tag{2.83}$$

angewendet, ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung und Auflösen der Gleichung (2.83) nach dem Verformungszuwachs $\Delta\boldsymbol{d}_k^{\Delta t+t}$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t})\right)\Delta\boldsymbol{d}_k^{\Delta t+t} = \\ &\boldsymbol{F}(t)^{t+\Delta t} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t})\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{M}\left(\frac{4}{\Delta t^2}\left(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{d}^t\right) - \frac{4}{\Delta t}\dot{\boldsymbol{d}}^t + \ddot{\boldsymbol{d}}^t\right) .\end{aligned} \tag{2.84}$$

In Gleichung (2.84) repräsentiert der Term $\left(\frac{4}{\Delta t^2}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}_T(d_{k-1}^{\Delta t+t})\right)$ die effektive Tangentensteifigkeitsmatrix $\hat{\boldsymbol{K}}_T(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t})$, deren Komponente $\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t})$ in Anhang I noch detailliert abgeleitet wird. Der Ausdruck $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t})\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}$ gibt die internen Knotenlinienkräfte $\boldsymbol{R}_{k-1}^{t+\Delta t}$ an.

3 Implementierung der Finiten Streifen Methode

3.1 Beschreibung der Berechnungsmöglichkeiten

Das bisher in dieser Arbeit theoretisch beschriebene Verfahren der *Finiten Streifen Methode* wurde mit Hilfe eines FORTRAN-Compilers zur Anwendung auf einem PC umgesetzt. Ziel dieses Kapitels ist es nun, kurz die Berechnungsmöglichkeiten aufzuzeigen, die im Rahmen der Programmierung implementiert wurden.

Das entwickelte Programm ist in der Lage, für eine statische und dynamische Belastung in der linearen als auch geometrisch nichtlinearen Formulierung eine Verformungs- und Spannungsberechnung durchzuführen. Dabei kann die Belastung in transversaler Richtung als Flächen- oder Einzellast und in axialer Richtung als an den Rändern wirkende Linienlast eingeleitet werden. Darüber hinaus ist es möglich, das Programm zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenformen heranzuziehen.

Das Materialverhalten kann isotrop oder orthotrop gewählt werden, wobei Dämpfung und Materialnichtlinearitäten nicht berücksichtigt wurden.

Für die Berechnung der geometrisch nichtlinearen Strukturantwort unter einer statischen Last wurde die *Arc-Length*-Methode als auch das *Newton-Raphson*-Verfahren als Lösungsalgorithmus implementiert. Die aus einer solchen statischen Berechnung erhaltenen Verschiebungsgrößen können zudem als Anfangswerte im Rahmen einer dynamisch nichtlinearen Berechnung mit statischer Vorlast herangezogen werden. Zur Lösung des nichtlinearen dynamischen Problems wurde das *Newmark*-Verfahren programmiert.

Als Randbedingungen kann zwischen einer gelenkig-gelenkigen, gelenkig-festen und fest-festen Lagerung gewählt werden.

Für den dynamischen Lastfall wurden die Last-Zeitverläufe Step, Dreieck, Sinus und $\sin^2$ berücksichtigt.

Die programmierten Elementmatrizen entsprechen denen für ein LO2-Element (Bild 11), wobei die Möglichkeit weitere Elemente zu implementieren, programmtechnisch vorbereitet ist.

Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Berechnung von U-Profilen unter kurzzeitiger axialer Stoßbelastung liegt, wurde der Überlagerungsalgorithmus der Elementmatrizen für in Längsrichtung kontinuierlich verlaufende und abwickelbare Profile ausgelegt.

Der Postprozessor zur Darstellung der Verschiebungen als räumliches Bild wurde mit Hilfe von MATHEMATICA und EXCEL realisiert.

3.2 Organisation des Computerprogramms

3.2.1 Programmablauf

Die Grundlage des Programms bildet zunächst die Dateneingabe. Nach Auswahl des anzuwendenden Elementes und deren Anzahl (maximal 9 Streifen) erfolgt in einem ersten Schritt die Eingabe der Streifengeometrie. Hier werden zunächst die Knotenlinien der Streifen entsprechend ihrer Lage in Bezug auf ein frei wählbares globales Koordinatensystem festgelegt und in einer Tabelle abgespeichert. In einem weiteren Schritt werden dann die Geometriedaten wie z.B. die Streifenlänge und -dicke streifenbezogen eingegeben und in einem File gespeichert. Dasselbe trifft für die Materialdaten zu. Zur Vervollständigung der Dateneingabe werden noch die Anzahl sowie die die zu berücksichtigenden Wellenglieder für die Ansatzfunktion in Längsrichtung als auch die Amplitude der Vorverformung abgespeichert. Bevor nun das Gesamtgleichungssystem in den globalen Koordinaten aufgestellt werden kann, erfolgt noch die Berechnung der Winkelgrößen für die benötigte Transformationsmatrix unter Zuhilfenahme der zuvor abgelegten Profilkoordinaten.

Die Einzelelemente der Elementmatrizen wurden in Bezug auf die Multiplikation und Integration der Polynomansätze analytisch mit Hilfe des Softwarepaketes MATHEMATICA berechnet. Die Anteile, die sich aus der Multiplikation und Integration der trigonometrischen oder hyperbolischen Ansatzfunktionen in Streifenlängsrichtung ergeben, werden numerisch in Abhängigkeit der Wellenglieder und Randbedingung ermittelt und in einem Feld abgelegt.

Nach der Festlegung der Rahmenbedingungen werden nun als Erstes für die Bestimmung des Zeitschrittes, welcher im *Newmark*-Verfahren benötigt wird, die Eigenwerte und Eigenformen berechnet und über eine ebenfalls parallel laufende numerische Berechnung mittels der Balkentheorie abgesichert. Zusätzlich hierzu besteht noch die Möglichkeit, den Zeitschritt manuell einzugeben.

Um auch Strukturen unter einer statischen Vorlast berechnen zu können, wurde an dieser Stelle im Programmablauf die Festlegung des statischen Lastvektors sowie das *Newton-Raphson*-Verfahren und die *Arc-Length*-Methode implementiert. Die aus dieser Berechnung resultierenden Werten für die Freiheitsgrade können nun für die Bestimmung der Verformungen und Spannungen im statischen Lastfall herangezogen werden und/oder als Eingangsbedingungen für eine sich anschließende dynamische Berechnung unter statischer Vorlast.

In dem sich daran anschließenden Programmteil wird nun die eigentliche Berechnung des dynamischen Lastfalles durchgeführt. Bevor der *Newmark*-Algorithmus gestartet wird, erfolgt zuerst die Eingabe der axialen und/oder transversalen dynamischen Lastamplitude, die Anzahl der Lastschritte als Vielfaches der niedrigsten im statischen Fall auftretenden Versagenslast sowie der Verlauf der Stoßfunktion.

Innerhalb der *Newmark*-Lösungsroutine werden nach Erfüllen des Konvergenzkriteriums die Verformungen in jedem Zeitschritt berechnet und in einer Datei abgespeichert. Als Konvergenzkriterium wird dabei der Quotient aus der Maximalnorm des inkrementellen Verschiebungszuwachses und der *Euklidschen* Norm des Verschiebungsvektors verwendet.

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{d}\|_{\max}}{\|\boldsymbol{d}\|_e} < \varepsilon \text{ mit } \|\boldsymbol{d}\|_e = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2} \tag{3.1}$$

Dabei gilt die Konvergenz als erfüllt, wenn ε einen Wert von $\varepsilon < 10^{-4}$ annimmt. Da aufgrund der Problemstellung der Schwerpunkt auf dem Zeitpunkt liegt, zu dem die maximalen Verformungen erreicht werden, wird als Abbruchkriterium innerhalb eines Lastschrittes das Kriterium

$$t \geq \frac{T_s}{2} \quad \wedge \quad \left\{ (\sqrt{u^2+v^2+w^2})_{t+\Delta t} < (\sqrt{u^2+v^2+w^2})_t \right\} \tag{3.2}$$

gewählt. Nachdem die Berechnung einer Laststufe abgeschlossen ist, werden die dann vorliegenden Dehnungen und Spannungen ausgewertet.

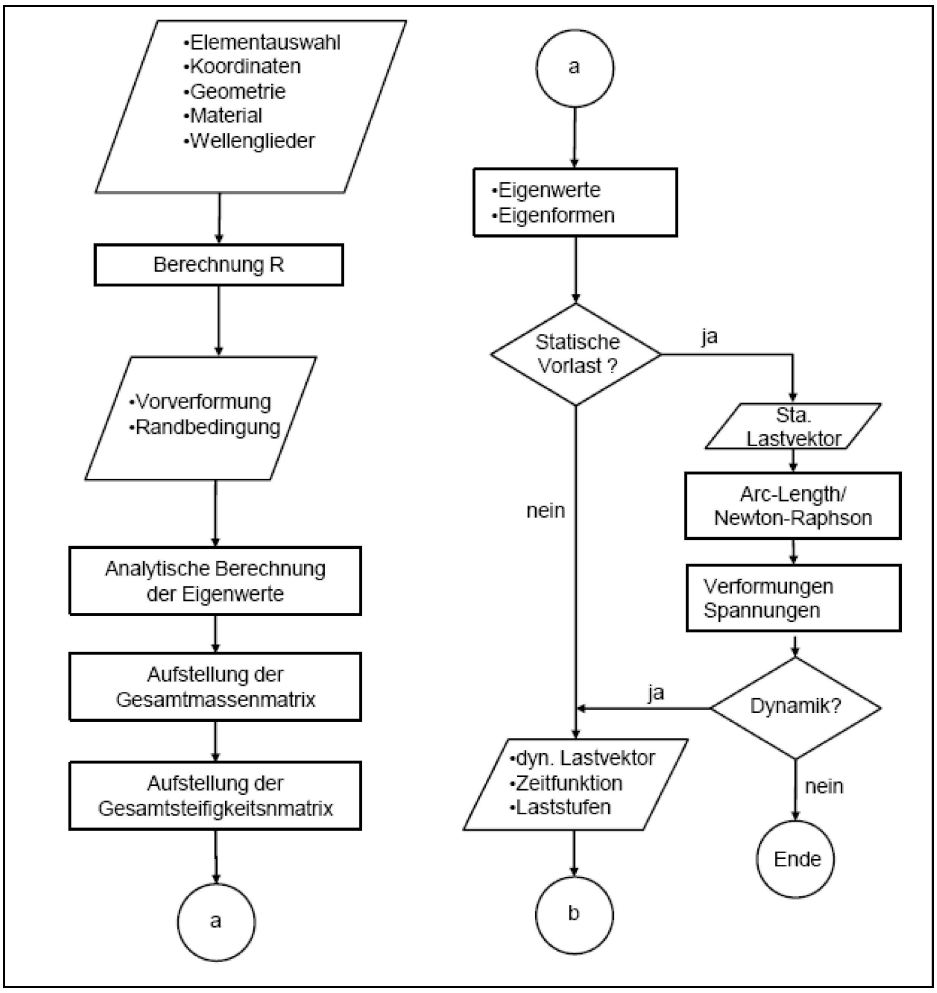

Bild 13a: Schematische Darstellung des Programmablaufs

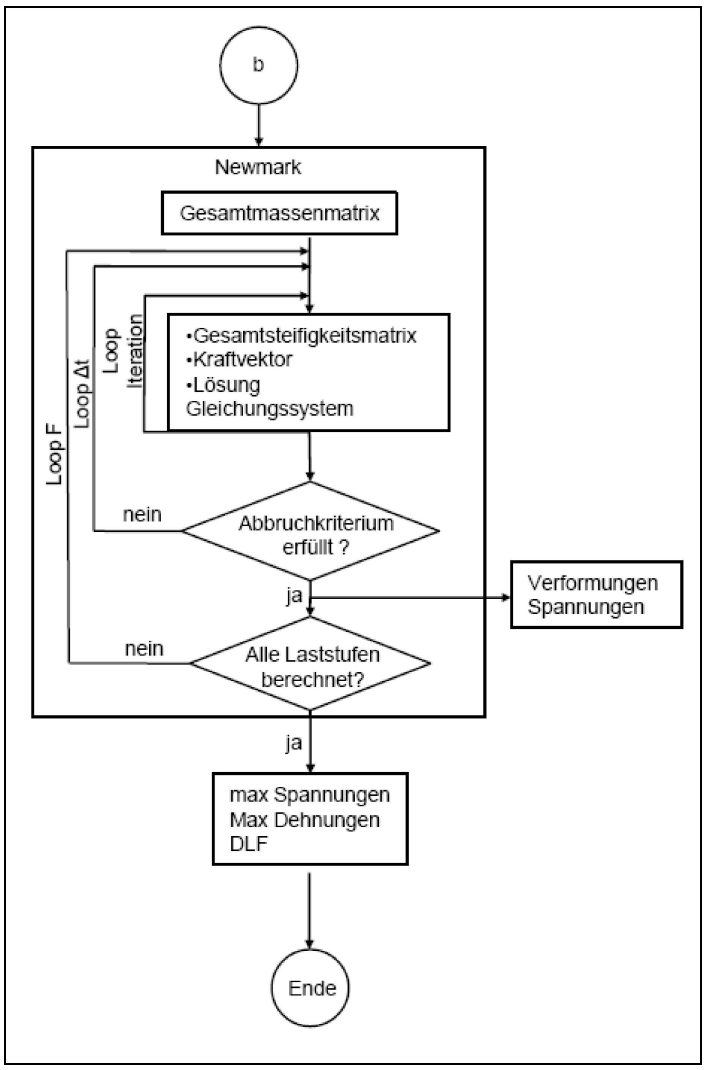

Bild 13b: Schematische Darstellung des Programmablaufs - Fortsetzung

Das Gesamtprogramm ist beendet, wenn die Anzahl der zuvor eingegebenen Belastungsstufen erreicht wurde.

3.2.2 Aufbau der Strukturmatrizen

Wie bereits eingangs beschrieben, müssen die in einem lokalen Koordinatensystem aufgestellten Strukturmatrizen für die Berechnung dreidimensionaler Strukturen in ein globales Koordinatensystem transformiert werden.

Ausgangspunkt hierfür ist die in Bild 14 abzulesende Beziehung

$$\boldsymbol{d}_{global} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{d}_{lokal}. \tag{3.3}$$

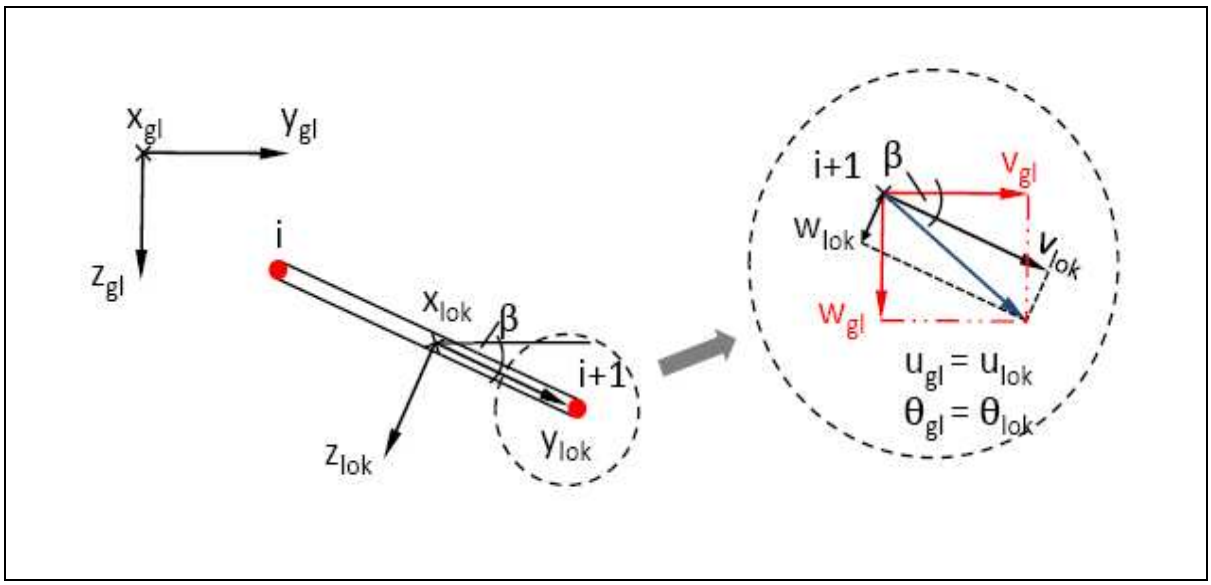

Bild 14: Koordinatentransformation

Wird diese Beziehung ebenfalls auf die Abbildung des Kraftvektors angewandt und in Gleichung (2.72) eingesetzt, ergeben sich nach Umstellung der Gleichung folgende Ausdrücke für die globale Steifigkeits- und Massenmatrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{global} &= \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{M}_{lokal}\,\boldsymbol{R}^T \\ \boldsymbol{K}(\boldsymbol{d})_{global} &= \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d})_{lokal}\,\boldsymbol{R}^T, \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei die Transformationsmatrix einer Knotenlinie wie folgt definiert ist:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Bei der Zusammenstellung der Steifigkeitsmatrizen ist noch zu beachten, dass diese im nichtlinearen Fall von den Verschiebungen abhängen. Da das Gleichungssystem nun aber im globalen Koordinatensystem gelöst wird, müssen die Freiheitsgrade der Knotenlinien in das lokale System zurücktransformiert, dann die so erhaltenen Werte in die lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen eingesetzt und abschießend erneut in das globale System transformiert werden.

Der Gruppierungsprozess der so vorliegenden globalen Elementsteifigkeitsmatrizen kann so nach dem mit Bild 15 dargestellten Schema durchgeführt werden.

	Knoten-linie	i			i+1 = j			j+1
Knoten-linie	Wellen-glied	1...	m n	...r	1...	m n	...r	
i	1...							
	m n		$[K_{11}]_{mn}(i)$			$[K_{12}]_{mn}(i+1)$		
	...r							
i+1=j	1...							
	m n		$[K_{21}]_{mn}(i)$			$[K_{22}]_{mn}(i+1)$ + $[K_{11}]_{mn}(j)$		
	...r							
j+1								

Bild 15: Schematische Darstellung der Gruppierung der einzelnen Anteile der Elementmatrizen

Die in Bild 15 verwendete Nomenklatur ist in Gleichung (3.6) beispielhaft für eine beliebige Wellengliedkombination $\boldsymbol{mn}$ angegeben. Dabei spiegeln die Vektoren $\boldsymbol{d}_i$ und $\boldsymbol{d}_{i+1}$ die Freiheitsgrade an den Knotenlinien $\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{i}+\mathbf{1}$ wider.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{i,i} & \boldsymbol{K}_{i,i+1} \\ \boldsymbol{K}_{i+1,i} & \boldsymbol{K}_{i+1,i+1} \end{bmatrix}_{mn} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_{i+1} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{F}_{i+1} \end{Bmatrix}_m \tag{3.6}$$

Für abwickelbare Strukturen ergibt sich damit ein Gleichungssystem mit Bandmatrizenstruktur, wie in Bild 16 veranschaulicht.

1	1	1	1						
1	1	1	1						
1	1	1/2	1/2	2	2				
1	1	1/2	1/2	2	2				
		2	2	2/3	2/3	3	3		
		2	2	2/3	2/3	3	3		
				3	3	3/4	3/4	4	4
				3	3	3/4	3/4	4	4
						4	4	4	4
						4	4	4	4

Bild 16: Struktur der Gesamtmatrix

4 Anwendung der Finiten Streifen Methode

Nachdem die *Finite Streifen Methode* theoretisch abgeleitet und deren Implementierung als Computerprogramm beschrieben wurde, wird sie im Folgenden auf Leichtbaustrukturen, die einer axialen kurzzeitigen Stoßbelastung unterliegen, angewendet.

So wird zunächst an einem einfachen Stab mit Rechteckquerschnitt eine kurze Studie durchgeführt, um den Einfluss der gewählten Parameter auf das Strukturverhalten zu untersuchen. Gleichzeitig wird die Lösung der *FSM* mit der verglichen, die sich aus der Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung eines vorverformten Stabes unter axialer Belastung ergibt.

Um im Weiteren eine Aussage über die dynamische Stabilität treffen zu können, wird der Begriff des dynamischen Lastfaktors eingeführt. Danach erfolgt die Anwendung auf U-Profile.

4.1 Die Strukturantwort eines Stabes unter axialer Stoßbelastung

Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel dargestellt, soll das entwickelte Verfahren zunächst auf eine einfache Struktur angewendet werden. Hierzu wird ein Stab mit Rechteckquerschnitt gewählt, der durch ein Streifenelement approximiert wird und die in Bild 17 angegebenen geometrischen Abmessungen und Materialeigenschaften besitzt.

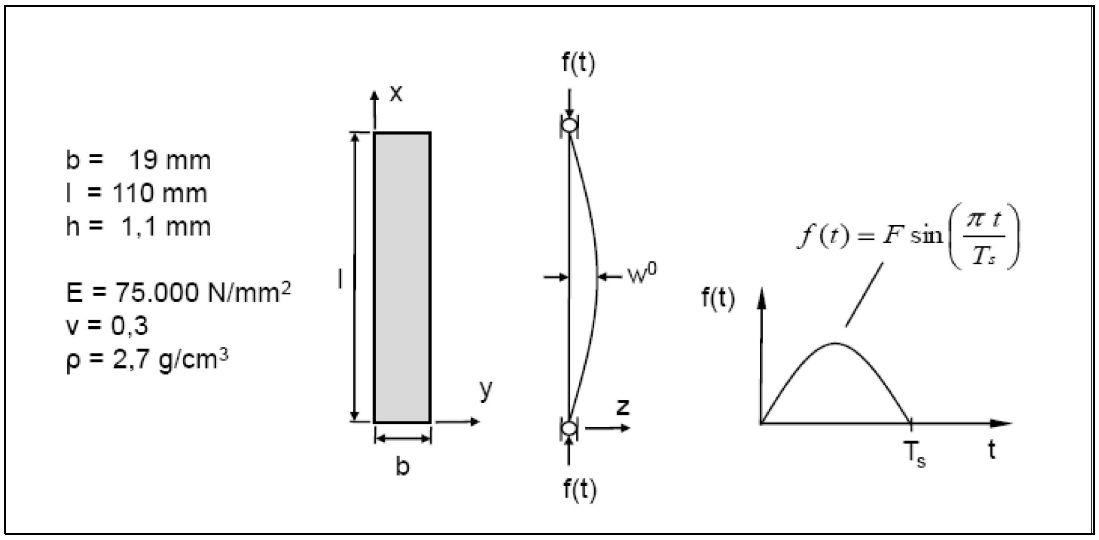

Bild 17: Der vorverformte Druckstab

Zunächst sei dieser Stab beidseits gelenkig gelagert. Um diese Randbedingung zu modellieren, wird für die Ansatzfunktion der u-Koordinate in Längsrichtung Gleichung (2.51) verwendet und für die v- und w-Verschiebungen in den entsprechenden Koordinatenrichtungen y und z jeweils ein Sinus-Ansatz. Darüber hinaus wird die Vorverformung mit einer Sinushalbwelle abgebildet. Weiterhin wird der Stab einer sinusförmigen Stoßbelastung der Art

$$f_{\sin}(t) = \begin{cases} F_{\sin} \sin \dfrac{t\pi}{T_s} & 0 \le t \le T_s \\ 0 & t > T_s \end{cases} \tag{4.1}$$

ausgesetzt, deren Stoßdauer T_s der Hälfte der Periodendauer der niedrigsten transversalen Biegeschwingung entspricht.

In dieser Konfiguration wird nun eine Dauerschwingung betrachtet und das Ergebnis dem gegenübergestellt, welches sich aus der Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung eines Balkens mit Vorverformung gemäß Gleichung (4.2) ergibt.

$$\frac{\rho\left[A\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 + I_y\right]}{w^0}\ddot{w}(t) + \frac{\left[EI_y\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - F(t)\right]}{w^0} w(t) = F(t) \tag{4.2}$$

Da der zweite Term, welcher die Steifigkeit des Systems beschreibt, nur für äußere Lasten, die unterhalb der statischen Kicklast liegen, einen Wert größer Null ergibt, wird, um eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der *FSM* zu erreichen, in diesem Berechnungsbeispiel die Stoßbelastung mit $F/F_{krit} = 0{,}8$ festgelegt. Dabei gibt die Größe F_{krit} die *Euler*-Last an.

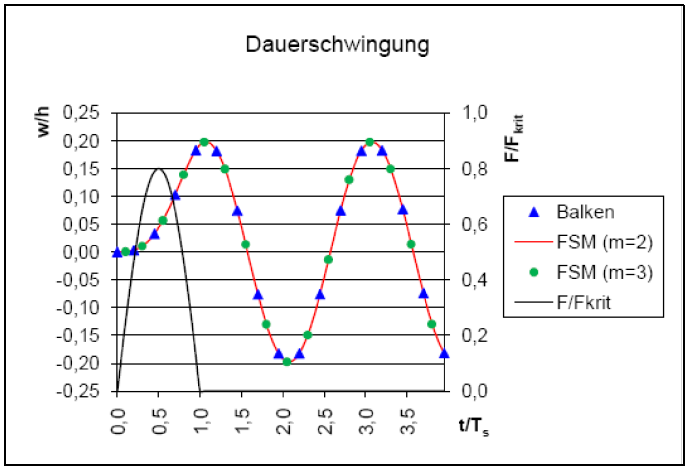

Bild 18: Vergleich der *FSM* mit der Balkentheorie bei $F/F_{krit} = 0{,}8$; $w^0/h = 0{,}1$ und $T_s/T_p = 0{,}5$

Wie Bild 18 entnommen werden kann, ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der *FSM*-Lösung mit der Lösung der Balkentheorie. Dabei wurden bei der *FSM*-Lösung für die

Ansatzfunktion in Längsrichtung zunächst zwei Wellenglieder verwendet. Eine Überprüfung ergab, dass durch eine Erhöhung der Anzahl der Wellenglieder auf drei, keine Steigerung der Lösungsgüte mehr erreicht werden konnte. Die prozentuale Abweichung zwischen den beiden *FSM*-Lösungen liegt im Promille-Bereich; die Abweichung gegenüber der Balkentheorie liegt dagegen bei durchschnittlich 0,4%.

4.2 Die Variation der Stoßparameter

Im Folgenden werden die Parameter T_s/T_p, w^0/h, die Stoßform sowie die Randbedingung variiert und deren Auswirkung auf die Strukturantwort betrachtet. Diesen Berechnungen wird der in Bild 17 dargestellte Stab zu Grunde gelegt. Als Bezugslast dient die *Euler*-Last. Für die Spannungsauswertung wird das Kriterium gemäß der Vergleichsspannung nach *von Mises* herangezogen und an der Randfaser ausgewertet.

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \tag{4.3}$$

Da die hier abgeleitete Theorie einerseits große Verformungen zulässt, anderseits aber nur für kleine Verzerrungen gilt, wird als Bezugsspannung die Grenze festgelegt, ab der eine bleibende Verformung auftritt. Für den hier vorliegenden Stab wird als Grenzbelastung $\sigma_{0,2} = 100\,N/mm^2$ gewählt. Sofern die Stoßform nicht variiert wird, wird der vorliegende Stab mit dem in Gleichung (4.1) beschriebenen sinusförmigen Kraftverlauf belastet.

4.2.1 Einfluss der Stoßstauer auf das Strukturverhalten

Zunächst sei der Stab mit einer eingeprägten Vorverformung von $w^0/h = 0{,}1$ einer äußeren Belastung der Amplitude $F/F_{krit} = 1{,}0$ ausgesetzt und es wird das Antwort-Zeitverhalten bei unterschiedlichen Stoßdauern betrachtet.

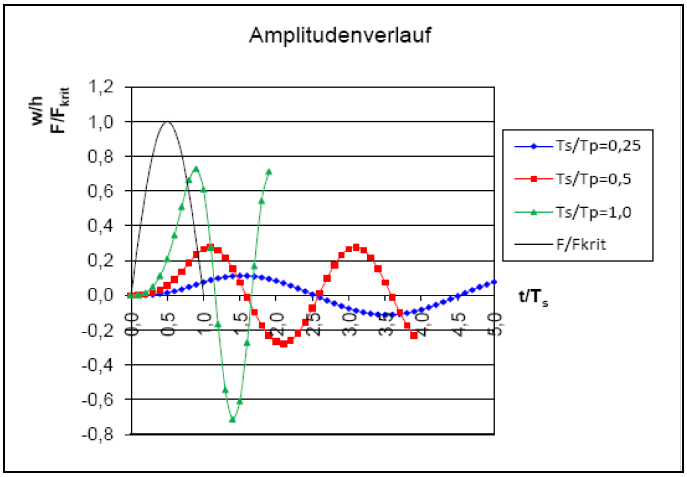

Bild 19: Amplitudenverlauf in Abhängigkeit der Stoßdauer

Dabei kann festgestellt werden, dass mit zunehmender Belastungsdauer die Amplituden der Verformungen ansteigen, wohingegen sich die Zeitdauer des Einschwingvorganges sich der Stoßdauer selbst annähert.

Das bedeutet, dass bei längeren Stoßdauern die Struktur zunehmend dem Belastungs-Zeitverlauf folgt, und der Einfluss der Massenträgheit sich verringert. Werden nun die maximalen Amplituden über der Belastung aufgetragen, wird dieser Effekt weiter verdeutlicht. Mit zunehmender Stoßdauer strebt die Strukturantwort gegen die statischen Lösung $T_s/T_p = \infty$.

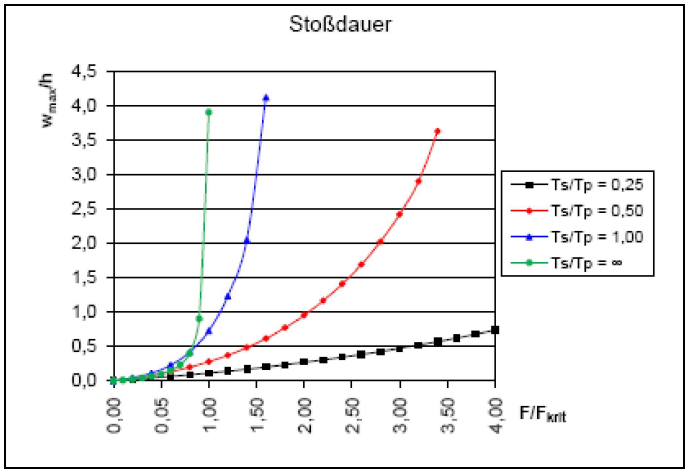

Bild 20a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßdauer bei $w^0/h=0,1$

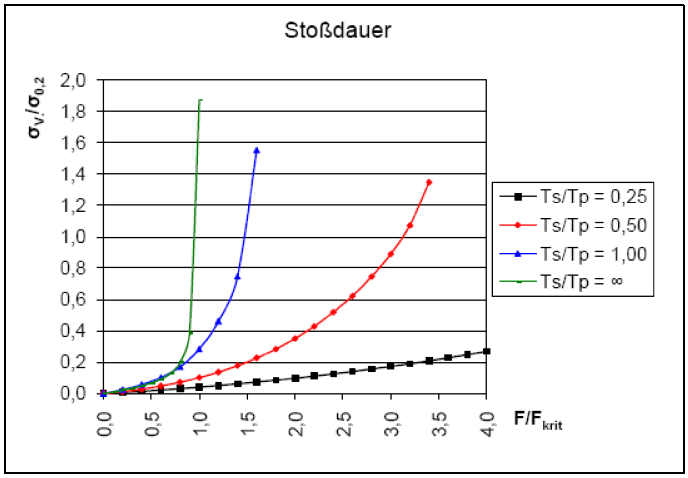

Bild 20b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßdauer bei $w^0/h = 0,1$

Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass mit kürzer werdender Stoßdauer der Stab mit höheren Lasten beaufschlagt werden kann, bevor das gewählte Belastungskriterium erreicht wird. Dieses Verhalten einer Struktur findet man ebenfalls am Beispiel eines Stabes bei WELLER ET. AL. [22] und BREUER [4] und am Beispiel einer Platte bei PETRY [17, 18] beschrieben.

4.2.2 Einfluss der Vorverformung auf das Strukturverhalten

Als weiterer Parameter kann der Einfluss der Vorverformung auf das Verhalten des Stabes untersucht werden. Hierzu wird ebenfalls der bereits in Bild 17 dargestellte Stab verwendet. Der Stoß entspricht der Form gemäß Gleichung (4.1) und die Stoßdauer wird mit $T_s/T_p = 0{,}5$ konstant gehalten.

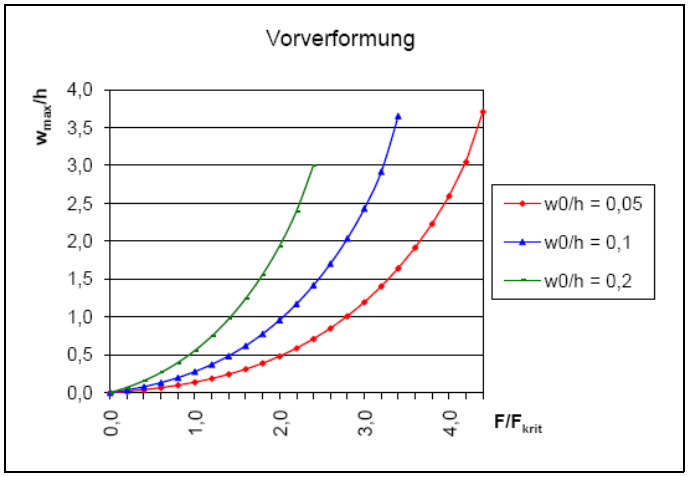

Bild 21a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Vorverformung bei $T_s/T_p = 0{,}5$

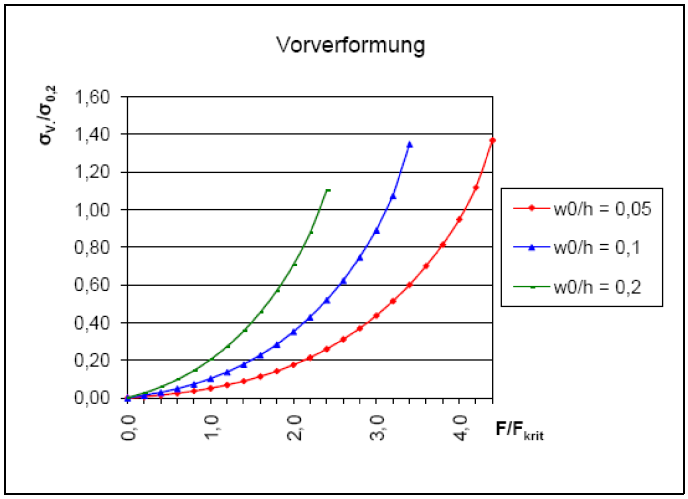

Bild 21b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Vorverformung bei $T_s/T_p = 0{,}5$

Auch hier kann ein Einfluss auf das Strukturverhalten in Analogie zu PETRY [17, 18] der Art festgestellt werden, dass mit zunehmender Vorverformungsamplitude die Kurven steiler verlaufen und somit eine Struktur mit geringerer Imperfektion im dynamischen Fall einer höheren äußeren Belastung ausgesetzt werden kann, bis die Belastungsgrenze erreicht wird. Letztendlich spiegelt somit die *FSM* auch hier das zu erwartende Ergebnis wider.

Wird der zeitliche Verlauf der Verformung in Abhängigkeit der Vorverformung betrachtet, stellt PETRY weiter fest, dass “die dynamische Strukturantwort umso stärker der statischen Antwort nachhinkt, je geringer die Anfangsverschiebung ausgeprägt ist.” Wie Bild 22 jedoch zu entnehmen ist, kann dieses Verhalten am Beispiel des Stabes hier nicht festgestellt werden. Hier variiert zwar die Amplitudenhöhe in Abhängigkeit der Vorverformung, das Maximum wird aber zeitgleich erreicht.

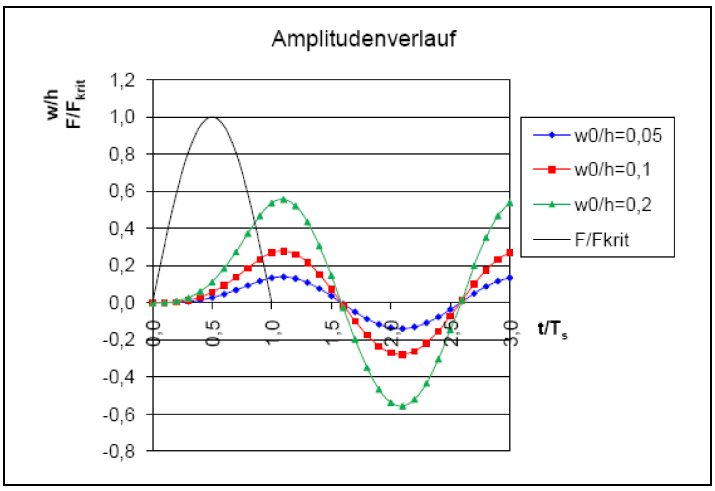

Bild 22: Amplitudenverlauf in Abhängigkeit der Vorverformung

4.2.3 Einfluss der Stoßform auf das Strukturverhalten

Als dritter Einflussparameter kann die Auswirkung der Stoßform auf das Antwortverhalten des Stabes untersucht werden. So werden als Kraftverläufe neben dem bereits vorgestellten Sinus-Stoß ein Step-, Dreicks- und $\sin^2$-Stoß verwendet, deren Verläufe in den Gleichungen (4.4a-c) angegeben sind.

$$f_{step}(t) = \begin{cases} F_{step} & 0 \le t \le T_s \\ 0 & t > T_s \end{cases}, \tag{4.4a}$$

$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 2F_{\Delta}\dfrac{t}{T_s} & 0 \le t \le \dfrac{T_s}{2} \\ 2F_{\Delta}(1-\dfrac{t}{T_s}) & \dfrac{T_s}{2} < t \le T_s \\ 0 & t > T_s \end{cases} \tag{4.4b}$$

$$f_{\sin^2}(t) = \begin{cases} F_{\sin^2} \sin^2 \dfrac{t\pi}{T_s} & 0 \le t \le T_s \\ 0 & t > T_s \end{cases} \tag{4.4c}$$

Weiterhin wird die Stoßdauer so bestimmt, dass jeder Stoß den gleichen Impuls (Kraftstoß)

$$I = \int_0^{T_s} f(t)\, dt \tag{4.5}$$

auf den Stab ausübt. Wird hierzu der Kraftstoß eines sinusförmigen Kraftverlaufes als Bezugsgröße eingeführt, ergeben sich für die Stoßdauern folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} T_{s,\,step} &= \frac{2}{\pi}\, T_{s,\,\sin} \\ T_{s,\,\Delta} &= \frac{4}{\pi}\, T_{s,\,\sin} \\ T_{s,\,\sin^2} &= \frac{4}{\pi}\, T_{s,\,\sin} \quad . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Als Vorverformung wurde $w^0/h = 0{,}1$ gewählt und als Bezugstoßdauer $T_{s,\,\sin} = 0{,}5\, T_p$.

Wie aus den Bildern 23a und 23b entnommen werden kann, hat die Stoßform im unteren Lastbereich so gut wie keine Auswirkungen auf die dynamische Belastbarkeit des Stabes. Erst ab einer Belastungsamplitude von ca. $F/F_{krit} = 1{,}6$ ergeben sich Unterschiede im Verlauf. Während der Step-Stoß den flacheren Kurvenverlauf abweist, ergibt sich für den Dreiecksstoß der steilste Verlauf. Der Sinus- und $\sin^2$-Stoß verlaufen zwischen den beiden oben genannten Kurven und sind näherungsweise deckungsgleich.

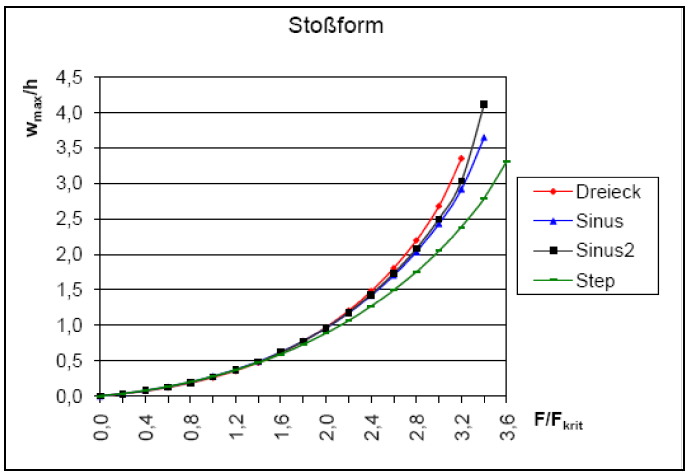

Bild 23a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0{,}1$ und identischem Kraftstoß

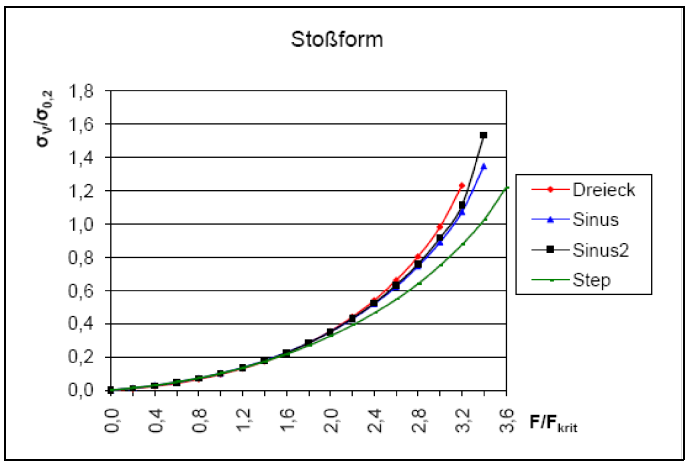

Bild 23b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0{,}1$ und identischem Kraftstoß

Wird nun die Stoßdauer konstant gelassen und nur die Stoßform verändert, ergibt sich für die Kraftstöße der Zusammenhang $I_{step} > I_{\sin} > I_{\sin^2} = I_{\Delta}$. In dieser Konfiguration stellt der Step-Stoß die härteste Belastungsart dar, wohingegen der $\sin^2$-Stoß den flachesten Verlauf aufweist.

Obwohl der aufgebrachte Impuls des $\sin^2$-Stoßes identisch mit dem des Dreiecksstoßes ist, wirkt sich der "sanfter" verlaufenden Kraftverlauf beim $\sin^2$-Stoßes erst bei höheren Lasten durch einen flacheren Kurvenverlauf aus.

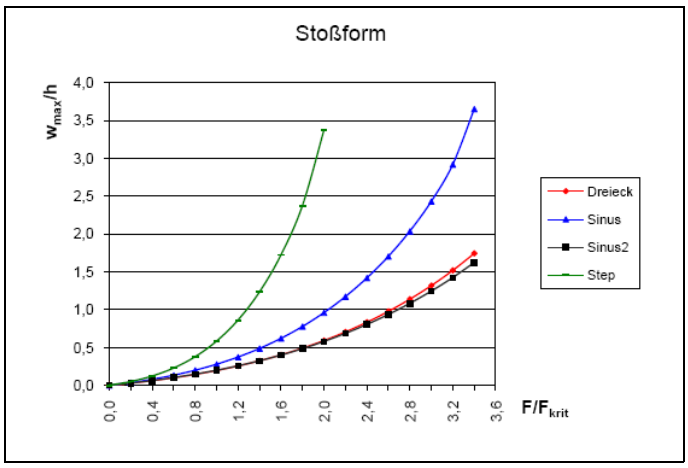

Bild 24: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Stoßform bei $w^0/h = 0{,}1$ und identischer Stoßdauer

4.2.4 Einfluss der Randbedingung auf das Strukturverhalten

Zusätzlich zu der Lagerungsart gelenkig-gelenkig, wurden noch die beiden Randbedingungen fest-fest und gelenkig-fest realisiert. Für die berechneten Beispiele liegen wiederum eine Vorverformung von $w^0/h = 0{,}1$ und eine Belastungsdauer von $T_s = 0{,}5\,T_p$ zu Grunde. Die Stoßform ist sinusförmig abgebildet. Die so erhaltenen Ergebnisse sind in den Bildern 25a und 25b zusammengefasst.

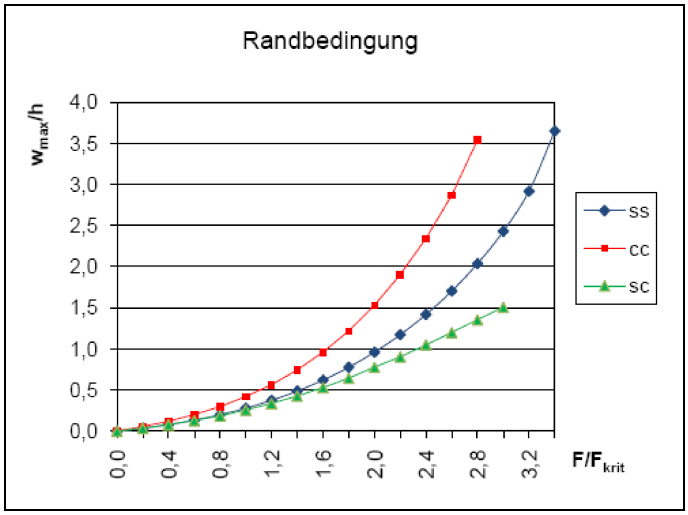

Bild 25a: Maximale Verformung in Abhängigkeit der Randbedingung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $T_s/T_p = 0{,}5$

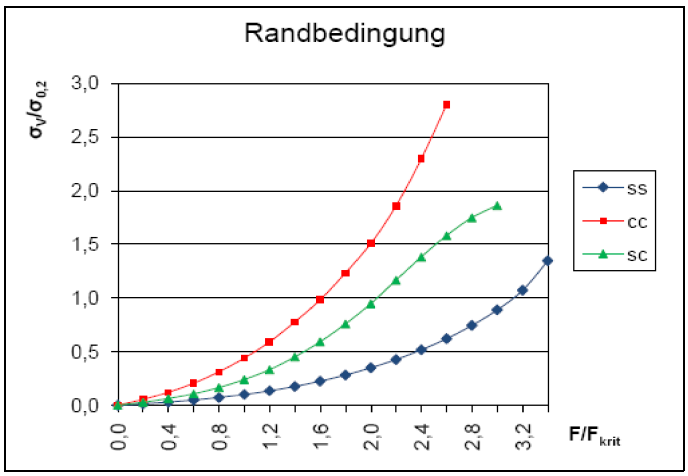

Bild 25b: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Randbedingung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $T_s/T_p = 0{,}5$

Im Gegensatz zu der Randbedingung gelenkig-gelenkig, bei der bereits mit zwei Wellengliedern eine stabile Lösung erzielt werden konnte, sind bei der Lagerungsart fest-fest mindestens drei und bei gelenkig-fest mindestens vier Wellenglieder zu berücksichtigen.

Werden für die Randbedingung fest-fest die Ergebnisse mit denen verglichen, die WELLER ET. AL. in [22] veröffentlicht haben, wird festgestellt, dass sich im Lastbereich bis zum Zweifachen der statischen Knicklast eine sehr gute Übereinstimmung mit den hier vorliegenden Ergebnissen ergibt. Mit zunehmender Laststeigerung ergibt sich jedoch eine geringe Abweichung der *FSM*-Ergebnisse zu höheren Werten hin. Der Grund für die hier vorliegende Differenz liegt darin begründet, dass im Gegensatz zu der hier vorliegenden Theorie in [22] zusätzlich Dämpfungsterme für die longitudinale und transversale Bewegungsrichtung berücksichtigt wurden, um den Energieverlust während der Strukturantwort näherungsweise zu erfassen.

Weiterhin kann in [22] bei hohen Lasten eine Abflachung der Last-Verformungskurven beobachtet werden. Dieser Effekt kann unter den in dieser Arbeit getroffenen Annahmen und Voraussetzungen ebenfalls nicht erfasst werden, da dieser gemäß den Berechnungen von WELLER erst bei dem Fünffachen der statischen Versagenslast auftritt und die dabei vorherrschenden Verschiebungen über das Dreißigfache der Wandstärke betragen.

Bei der Randbedingung gelenkig-fest kann der oben beschriebene Last-Verformungsverlauf ebenfalls beobachtet werden, tritt hier aber bereits bei wesentlich geringeren Lasten auf.

Insgesamt kann bei der Variation der Randbedingung festgestellt werden, dass je steifer die Auflager ausgeführt sind, sich die zulässige äußere Belastung zu kleineren Lastenverhältnissen hin verschiebt.

4.3 Einführung des Dynamischen Lastfaktors

Wie an Hand der zuvor durchgeführten Parameterstudien verdeutlicht wurde, kann der untersuchte Stab im Vergleich zur Statik eine höhere äußere Belastung aufnehmen. Die Frage, die sich hier nun stellt, ist die Definition eines Kriteriums, an Hand dessen beurteilt werden kann, ab welcher äußeren Belastung der Zustand einer Struktur im dynamischen Fall als kritisch bewertet werden kann.

In der Statik können Aussagen über die Stabilität eines Systems über Energie- und Gleichgewichtsmethoden getroffen werden. Während mit der Gleichgewichtsmethode nur der kritische Wert (Verzweigungspunkt) ermittelt werden kann, können über die Energiemethoden zusätzlich Informationen über die Eigenschaft der Stabilität getroffen werden. Ausgangspunkt hierfür ist die Variation des Gesamtpotentials. Aus der Bedingung $\delta\Pi = 0$ können die Stabilitätswerte ermittelt werden, was im mathematischem Sinne der Lösung eines Eigenwertproblems entspricht. Aus den Bedingungen $\delta^2\Pi < 0$, $\delta^2\Pi = 0$ oder $\delta^2\Pi > 0$ kann dann bestimmt werden, ob das Verhalten stabil, invariant oder instabil ist.

Für perfekte Strukturen liegt damit ein Verzweigungsproblem vor. Werden nun Imperfektionen mit in die Betrachtungen einbezogen, geht das Verzweigungsproblem in ein Spannungsproblem über. Dies bedeutet z.B. für einen axial gedrückten Stab, dass sich die Last-Verformungskurve asymptotisch von unten an die Lösung des axial gedrückten perfekten Stabes annähert.

In der Dynamik treten diese Eigenschaften so nicht auf, da hier keine Gleichgewichtslage im statischen Sinne existiert. Damit muss ein anderes Kriterium herangezogen werden, um festzustellen, ab wann man im dynamischen Sinne von Instabilität sprechen kann.

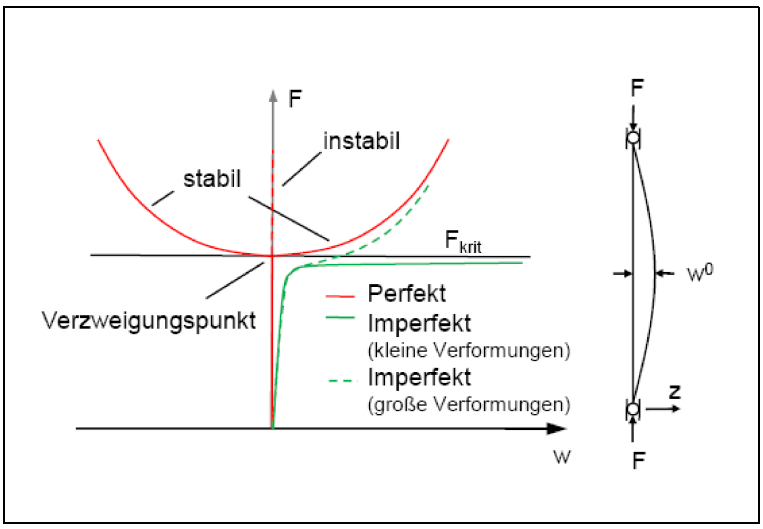

Bild 26: Statisches Stabilitätsverhalten eines Druckstabes

Einen wesentlichen Beitrag hierzu lieferten BUDIANSKY und ROTH mit ihrer Forschung über das achsensymmetrische dynamische Beulverhalten von fest eingespannten und flach gekrümmten Kugelkalotten [6] sowie BUDIANSKY und HUTCHINSON [5]. Im Ergebnis tragen die Autoren jeweils die Verschiebung in Abhängigkeit der Last auf. Als Maß für die dynamische Stabilität wird nun graphisch die Mitte des Bereiches ermittelt, in dem der sprunghafte Verformungsanstieg stattfindet. Wird der so ermittelte dynamische kritische Belastungswert auf die entsprechende statische Versagenslast bezogen, ergibt sich der *dynamische Lastfaktor* (DLF) bei dieser Vorgehensweise zu

$$DLF = \frac{F_{krit,\,dyn}}{F_{krit,\,stat}}. \tag{4.7}$$

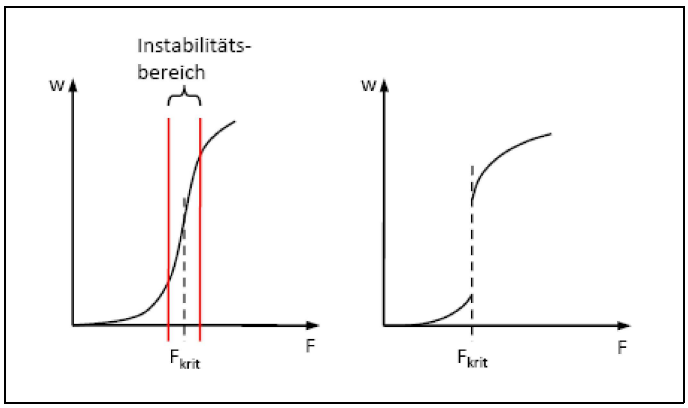

Bild 27: Stabilitätskriterium nach BUDIANSKY

Angewendet auf Zylinderschalen unter axialer Stoßbelastung benutzen HUYAN und SIMITSES in [13] ebenfalls das oben beschriebene Stabilitätskriterium. Als zusätzliche Möglichkeit der Stabilitätsbestimmung führen die Autoren zwei weitere Verfahren an, ohne diese jedoch

anzuwenden. Eine der angeführten Möglichkeiten beschreibt einen Energieansatz, bei dem die Gesamtenergie in einem System unter einer äußeren dynamischen Belastung bestimmt wird und diese in ihrer Phasenebene aufgetragen wird. Ergibt sich hierbei eine geschlossene Kurve, gilt das System als stabil. Die kritische Last bei diesem Verfahren ist dann erreicht, wenn sich keine geschlossene Kurve mehr ergibt. Die zweite beschriebene Möglichkeit beruht ebenfalls auf einer Energiebetrachtung. Hier wird die potentielle Energie für mehrere Laststufen über den generalisierten Koordinaten aufgetragen. Instabilität ist dann gegeben, wenn die potentielle Energie stark ansteigt.

In [19] beschreiben SINGER ET. AL. die *Southwell*-Methode. Der Ursprung dieses Verfahrens lag darin motiviert, dass für reale Stäbe mit einer eingeprägten Imperfektion über Versuche die statische Knicklast bestimmt werden sollte, ohne dabei den Stab zu zerstören. Ausgehend von der Differentialgleichung eines gelenkig-gelenkig gelagerten und vorverformten Druckstabes leitete SOUTHWELL die Beziehung

$$w = F_{krit}\frac{w}{F} - w^0 \tag{4.8}$$

ab. Die Größe F_{krit} gibt dabei die *Euler*-Last an. Wird nun der Quotient w/F über w aufgetragen (*Southwell*-Plot), ergibt sich eine Gerade, deren Kehrwert der Steigung die Knicklast angibt.

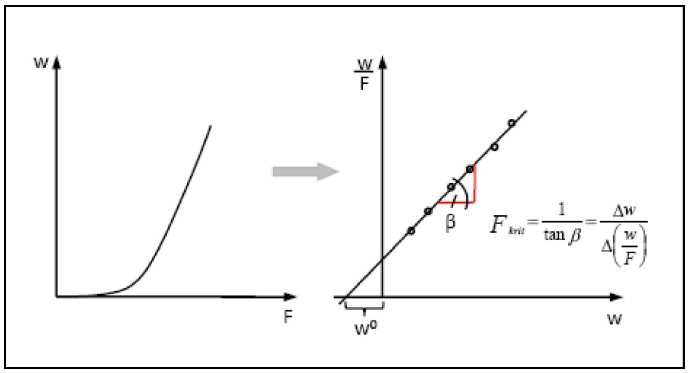

Bild 28: Stabilitätskriterium nach SOUTHWELL

WELLER ET. AL. [22] haben dieses Kriterium modifiziert und auf dynamische Vorgänge von Stäben und Platten übertragen. Sie geben es in der Form

$$\frac{w}{F} = \frac{w + w^0}{F_{krit} + \bar{a}\,w} \tag{4.9}$$

an, wobei der Wert $\bar{a}$ ebenfalls dem Kehrwert der Steigung des Kurvenverlaufes entspricht und über eine Kurvenanpassung ermittelt wird. Der Schnittpunkt der Tangente in diesem Punkt mit der x-Achse, auf der die Kraft abgetragen ist, liefert dann den kritischen dynamischen Lastfaktor. Dies wird am Beispiel des Druckstabes aus Bild 17 in Bild 29 noch einmal graphisch verdeutlicht.

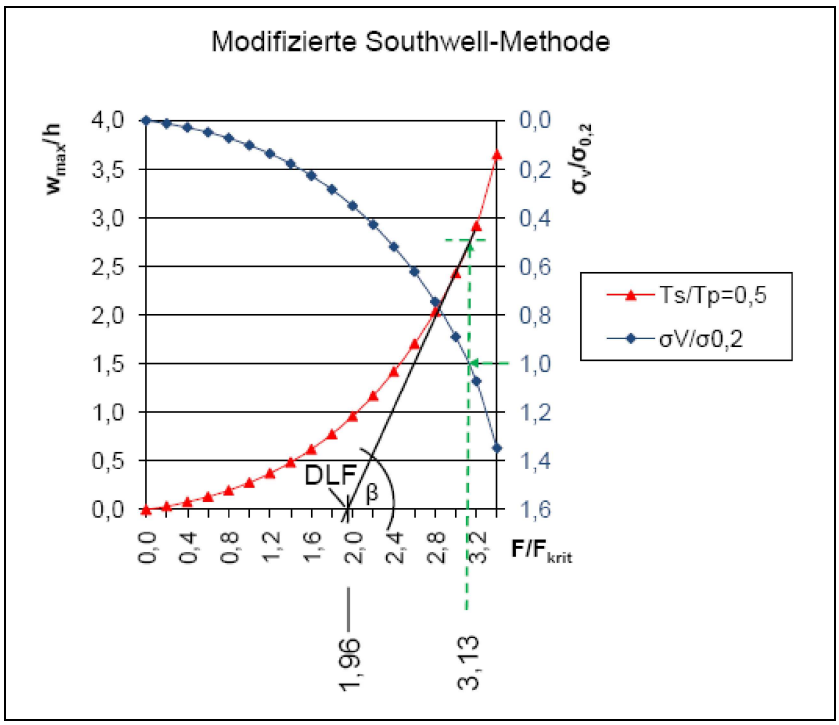

Bild 29: Stabilitätskriterium nach WELLER

Da die Randbedingung des hier behandelten Problems von der in [22] abweicht und sich der darin abgebildete fast linear ansteigende Kurvenverlauf nicht im Gültigkeitsbereich der hier angewendeten Theorie befindet, erfolgt hier die Darstellung der modifizierten *Southwell*-Methode bei dem Lastverhältnis, bei dem das Spannungsverhältnis $\sigma_V / \sigma_{0,2} = 1$ beträgt.

Wie nun in Bild 29 verdeutlicht wird, ergibt sich nach Anwendung dieses Stabilitätskriteriums im vorliegenden Fall ein dynamischer Lastfaktor von $DLF = 1{,}96$.

Dieses Verfahren existiert auch in seiner klassischen Form für die Plattenanwendungen. Da es aber gemäß SINGER ET. AL. [19] nur verwertbare Ergebnisse für den Fall liefert, in dem die Verformungen und Vorverformungen signifikant kleiner sind als die Wandstärke, wird dieses Verfahren hier nicht weiter betrachtet, da die in [19] geforderten geometrischen Grenzen hier nicht eingehalten werden.

Diese bisher beschriebenen Verfahren beruhen alle, mit Ausnahme der Energiemethode im Phasenraum, auf der graphischen Auswertung der Verformungen. Ein Spannungskriterium wird hierbei nicht berücksichtigt. Wie allerdings aus Bild 29 ersichtlich ist, verfügt der dort behandelte Stab noch über weitere Tragreserven, da die an der Stelle $DLF = 1{,}96$ vorliegende Spannung noch unterhalb der hier gewählten Bezugsspannung liegt.

In Analogie zu PETRY [17] wird im Weiteren dieser Arbeit deshalb die dynamische Stabilität anhand eines Spannungskriteriums definiert.

So gilt in diesem Fall die dynamische Stabilitätsgrenze als dann erreicht, wenn die äußere Belastung einen Spannungswert von $\sigma_V / \sigma_{0,2} = 1$ hervorruft.

4.4 Die dynamische Stabilität von U-Profilen

4.4.1 Profilauswahl

Nach Anwendung der *FSM* auf einen Druckstab mit einfachem Querschnitt und der Einführung eines dynamischen Stabilitätskriteriums, wird nun das Verhalten von U-Profilen betrachtet. Diese Profilart zeichnet sich insbesondere unter axialer Lasteinwirkung durch komplexe Versagensmöglichkeiten aus. In Abhängigkeit des Verhältnisses b/a und des Parameters a^2/hl können entweder die Versagensformen Biegeknicken, Biegedrillknicken oder Beulen auftreten. Dabei geben die Größen b die Flanschbreite, a die Steghöhe, h die Wandstärke und l die Profillänge an.

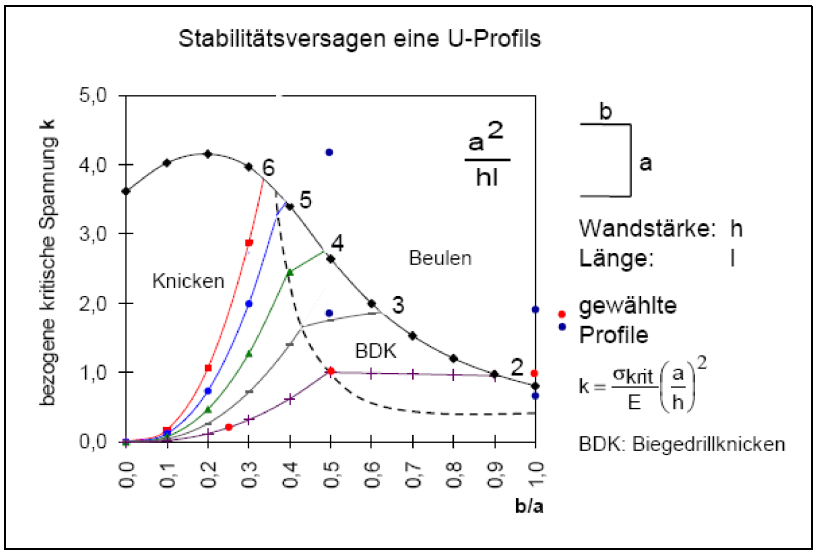

Bild 30: Stabilitätsversagen eines U-Profils

In Bild 30 sind die Versagensmöglichkeiten in Abhängigkeit der oben genannten Parameter zusammengestellt. Dabei repräsentiert der Bereich unterhalb der gestrichelten Linie die Versagensart Biegeknicken und das Gebiet zwischen der gestrichelten und durchgezogenen Line das Biegedrillknicken. Oberhalb der durchgezogenen mit Raute gekennzeichneten Linie liegt Beulen vor.

Die nun untersuchten Profile sind mit roten und blauen Punkten in obigem Diagramm gekennzeichnet. Bei den rot gekennzeichneten Profilen wird die Stablänge konstant gehalten und nur das Verhältnis b/a variiert. An ihnen wird das dynamische Stabilitätsverhalten näher untersucht. An den blau gekennzeichneten Profilen wurden von HERTEL statische Belastungsversuche durchgeführt und u.a. in [11] veröffentlicht. Diese werden abschließend zum Vergleich mit den mit der *FSM* berechneten dynamischen Versagensformen herangezogen.

Die Zusammenstellung der Geometrieparameter oben genannter Profile kann Bild 31 entnommen werden. Alle Längenangaben sind in Millimetern angegeben.

Profil	Typ	a	b	h	l	b/a	a^2/hl	λ
1	1	20	5	1	200	0,25	2	138
2	2	20	10	1	200	0,5	2	62
3	3	20	20	1	200	1,0	2	30
4	--	40	20	1	516	0,5	3,1	80
5	--	40	20	1	322	0,5	5	50
6	--	30	30	1	500	1,0	1,8	50
7	--	30	30	1	300	1,0	3	30

Bild 31: Profilauswahl

Diese U-Profile werden einem sinusförmigen Stoß unterzogen und sind an den jeweiligen Enden gelenkig-gelenkig gelagert, mit an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ in Längsrichtung frei verschiebbaren Rändern. Eine Wölbbehinderung findet nicht statt. Darüber hinaus besitzen die Profile eine eingeprägte Vorverformung. Diese den Berechnungen zugrunde liegende Konfiguration ist nachfolgend noch einmal zusammengefasst dargestellt.

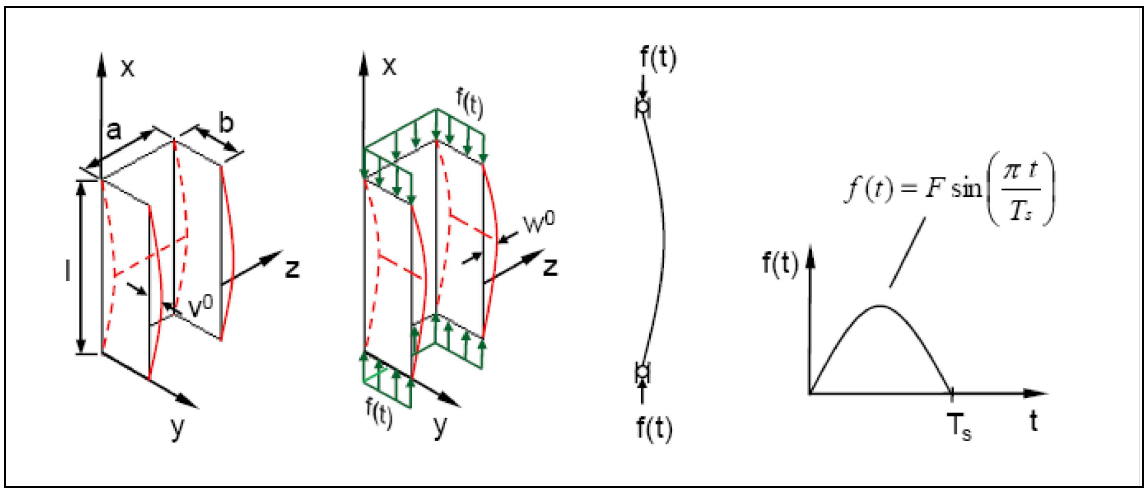

Bild 32: Konfiguration der U-Profile

4.4.2 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 1

Das U-Profil mit einem Verhältnis Flanschbreite/Steghöhe von $b/a = 0{,}25$ mit einer Vorverformung $v^0/h = 0{,}1$ wird zunächst unterschiedlichen Stoßdauern ausgesetzt. Da auf der Grundlage von Bild 30 für das vorliegende Profil die niedrigste Versagensart das Biegeknicken darstellt, wird als Bezugslast die dazugehörige *Euler*-Last verwendet.

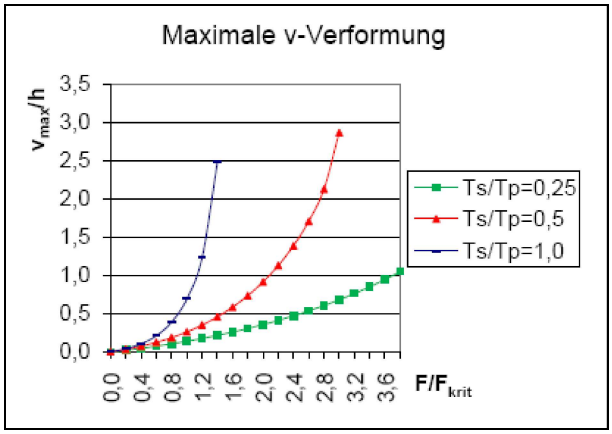

Bild 33: Maximale v-Verschiebung in Abhängigkeit der Stoßdauer

Wie bei dem zuvor berechneten Druckstab, stellt sich auch hier dasselbe Last-Verformungsverhalten ein, d.h. mit zunehmender Länge der Stoßdauer nimmt die Steigung der Verläufe der maximalen Verformungsamplituden zu. In Bild 33 ist die charakteristische Verformung dargestellt. Werden die korrespondierenden lateralen Verschiebungen betrachtet, stellt man fest, dass diese drei Zehnerpotenzen kleiner sind als die dargestellten v-Verformungen.

Die aus dem Verformungszustand berechneten Vergleichsspannungen in der Mittelebene im Verhältnis zu einer Bezugsspannung von $\sigma_{0,2} = 100\,N/mm^2$ ergeben die in Bild 34 dargestellten Verläufe.

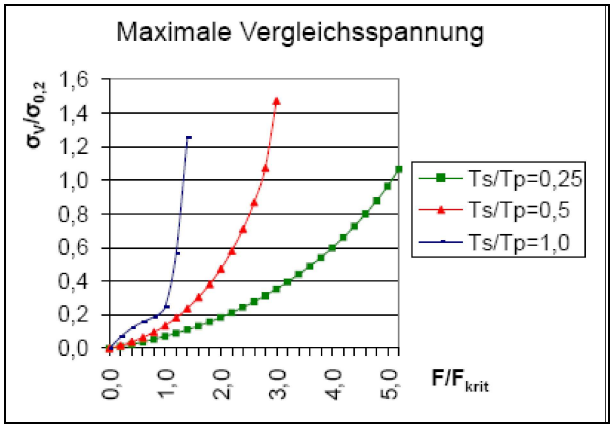

Bild 34: Maximale Vergleichsspannung in Abhängigkeit der Stoßdauer

Bei der Stoßdauer $T_s / T_p = 1{,}0$ kann im Kurvenverlauf eine Abweichung im Vergleich zu den beiden anderen dargestellten Kurven festgestellt werden. Wie aus den für die beiden Laststufen $F/F_{krit} = 0{,}6$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$ erstellten Konturplots der Vergleichsspannung entnommen werden kann, wird diese Abweichung durch eine Umlagerung der maximal auftretenden Spannungen vom Steg in die Flansche hervorgerufen. Dabei kennzeichnen die rot gefärbten Flächen Gebiete hoher Spannungen.

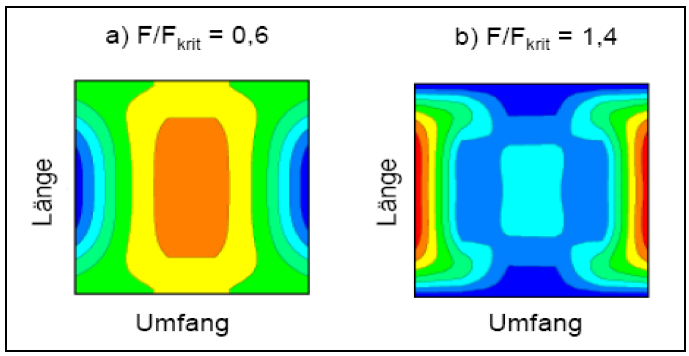

Bild 35: Qualitative Darstellung der Spannungsumlagerung vom Steg in die Flansche

Diese Umlagerung der Spannung wird durch das Knicken hervorgerufene Verdrehen des Querschnittes an den Rändern verursacht. Während bei einem Lastverhältnis von $F/F_{krit} = 0{,}6$ die dem Verdrehen überlagerte Stauchung in Längsrichtung noch dominiert, kehrt sich dieses Verhältnis mit zunehmender Laststeigerung um. Trägt man die u-Verschiebung über dem Umfang auf, kann dieser Sachverhalt verdeutlicht werden.

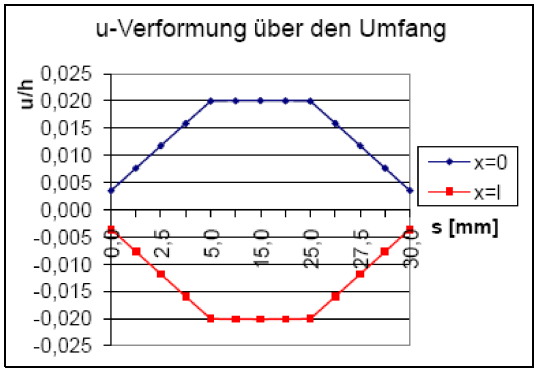

Bild 36a: u-Verformung über dem Umfang bei $F/F_{krit} = 0{,}6$

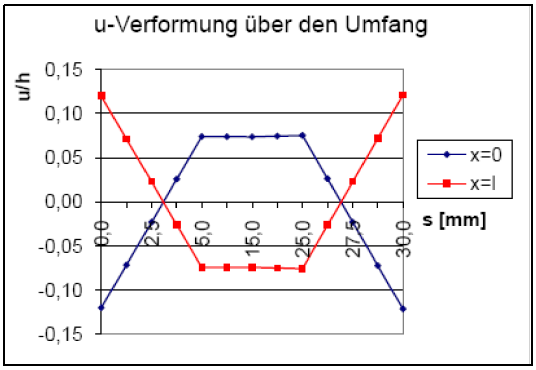

Bild 36b: u-Verformung über dem Umfang bei $F/F_{krit} = 1{,}4$

Die u-Verformungen in Abhängigkeit der Umfangskoordinate der beiden anderen Stoßdauern verlaufen in Analogie zu Bild 36b.

Da sich ansonsten für diese Profilklasse das Strukturverhalten einheitlich darstellt, ist stellvertretend am Beispiel der Stoßdauer $T_s / T_p = 0{,}5$, einer Vorverformung von $v^0/h = 0{,}1$ und einer Belastung von $F/F_{krit} = 3$ der gesamte Verformungszustand zur besseren Veranschau-

lichung nachfolgend als 3D-Graphik dargestellt.

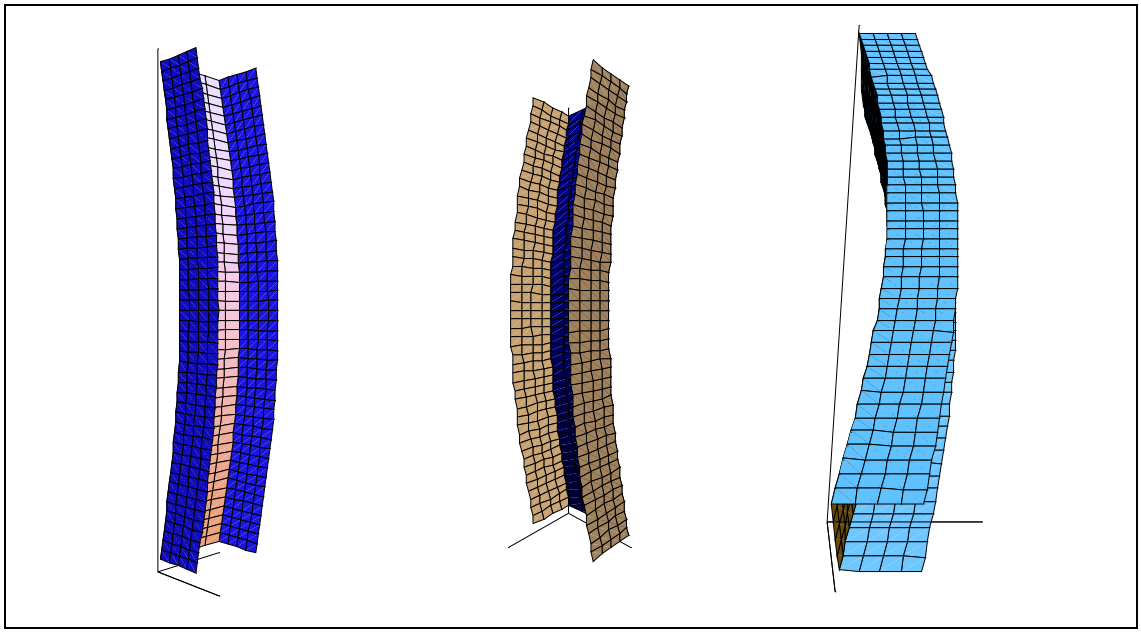

Bild 37: Einfluss der Vorverformung v^0 auf den Verformungszustand eines U-Profils mit $b/a = 0{,}25$; $T_s/T_p = 0{,}5$; $v^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 3{,}0$

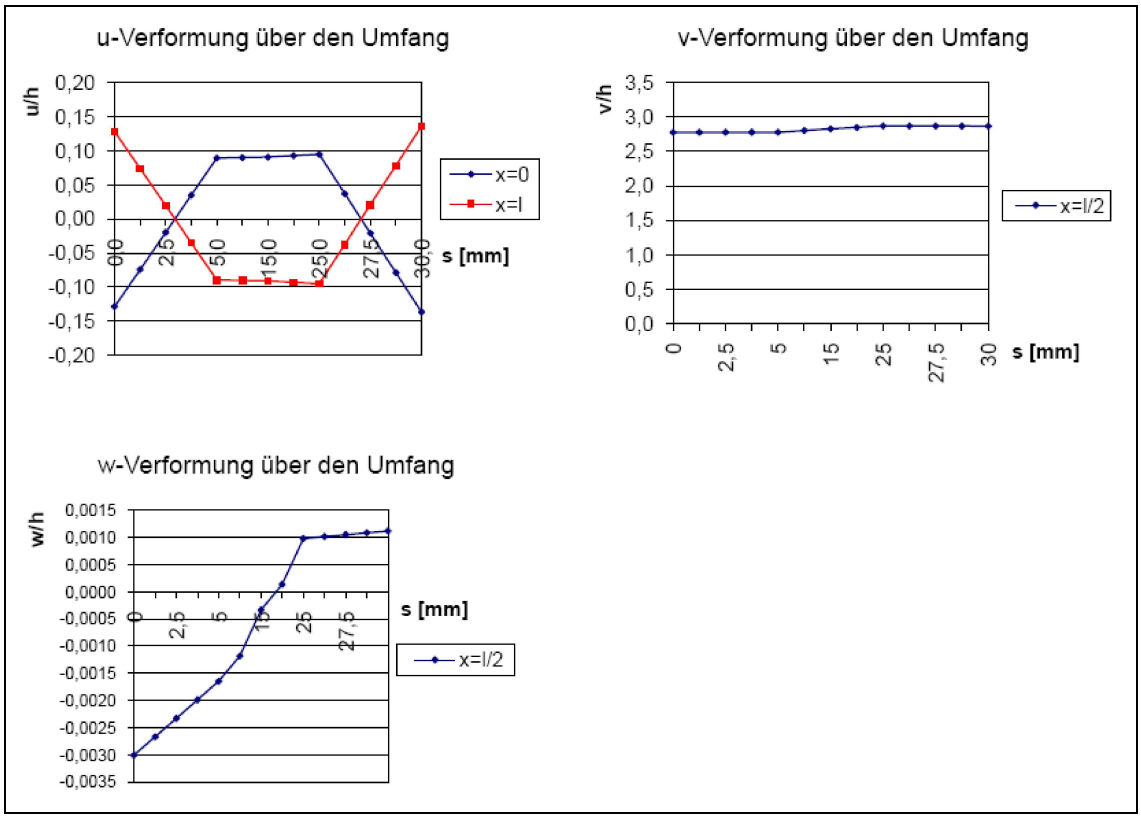

Bild 38: Verformungen über dem Umfang für das Profil aus Bild 37

Wird die Vorverformungsamplitude variiert, stellt sich ein analoges Strukturverhalten wie bei dem in Kapitel 4.1 und 4.2 vorgestellten Druckstab ein. So verlaufen auch hier die Kurvenverläufe der charakteristischen Verformung sowie die der Vergleichspannung mit zunehmender Imperfektion immer steiler.

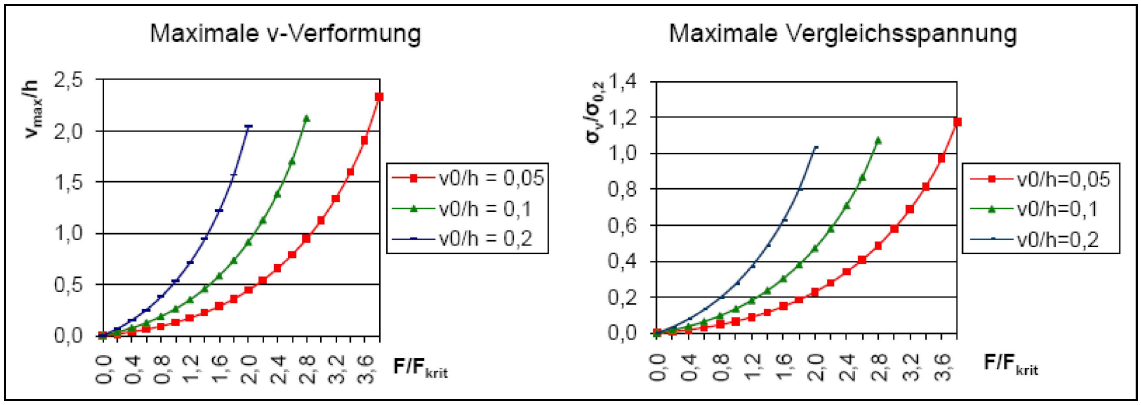

Bild 39: Strukturverhalten aufgrund der Variation der Vorverformung bei $T_s/T_p = 0{,}5$

Wird nun das in Kapitel 4.3 eingeführte dynamische Stabilitätskriterium $\boldsymbol{DLF} = \sigma_v/\sigma_{0,2}$ angewandt, ergibt sich für die dynamischen Lastfaktoren in Abhängigkeit der Stoßzeit der in Bild 40 dargestellte Zusammenhang.

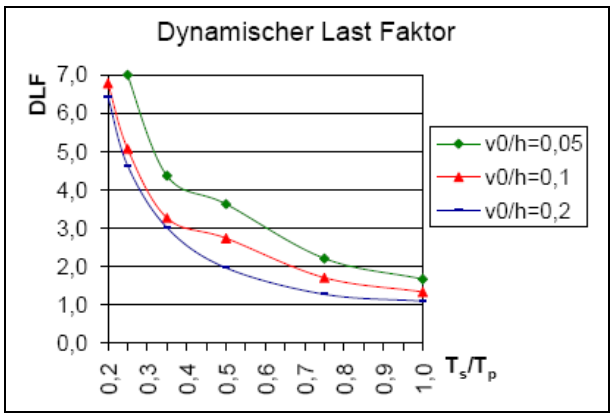

Bild 40: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer für unterschiedliche Vorverformungen

In der bisherigen Betrachtung wurde der Einfluss der Vorverformung v^0 berücksichtigt. Es konnte dabei u.a. festgestellt werden, dass aufgrund der Richtung der Vorverformung der Einfluss des Biegedrillknickens sehr gering ist und dass das Profil auch unter dynamischer Last durch Biegeknicken versagt. Wird allerdings eine Vorverformung w^0 berücksichtigt, wird die Versagensart Biegedrillknicken hervorgerufen.

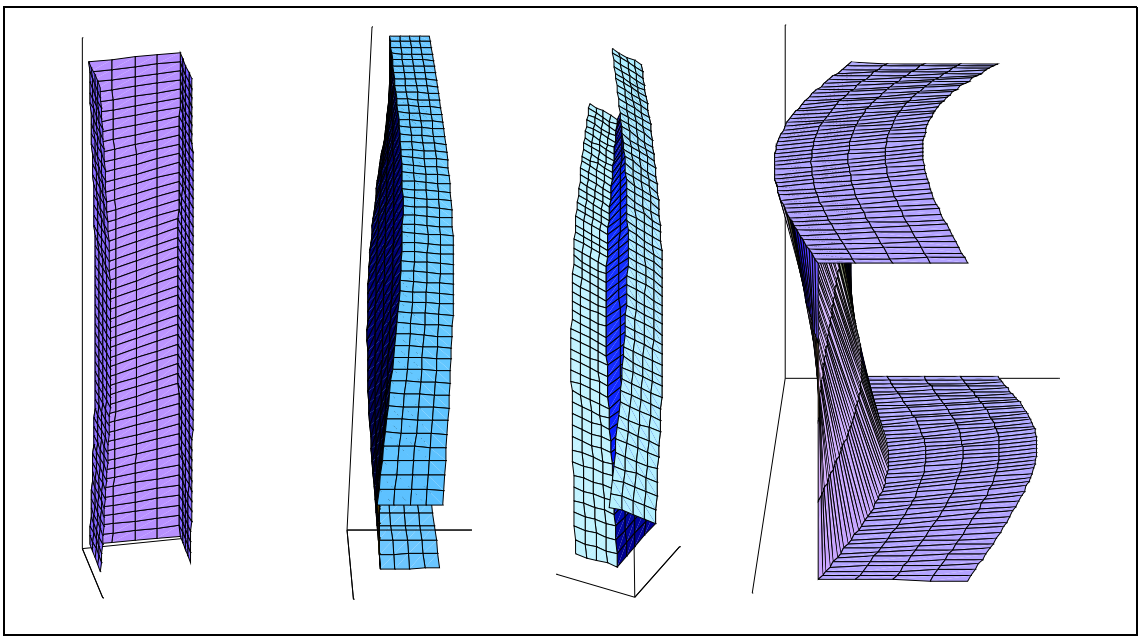

Bild 41: Einfluss der Vorverformung w^0 auf den Verformungszustand eines U-Profils mit $b/a = 0{,}25$; $T_s/T_p = 0{,}5$; $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 3{,}8$

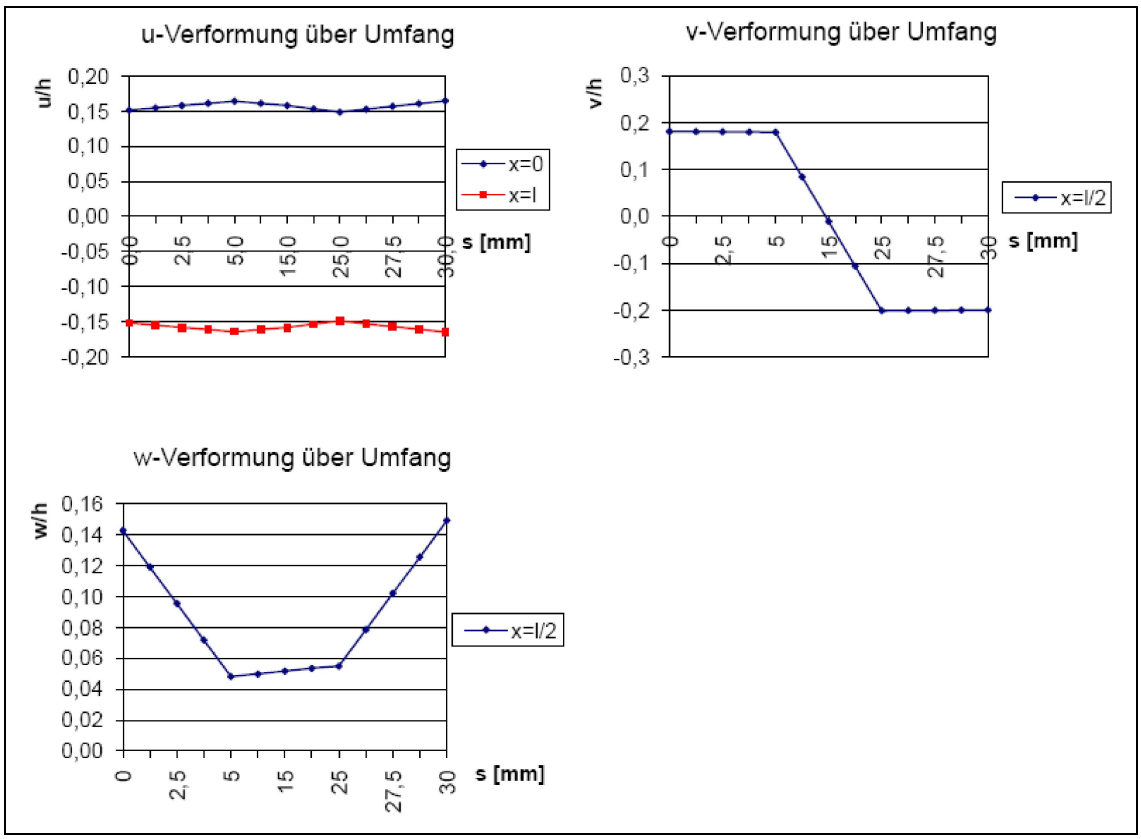

Bild 42: Verformungen über dem Umfang für das Profil aus Bild 41

4.4.3 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 2

Wie auch im Beispiel zuvor, wird dem nun betrachtete U-Profil mit einem Verhältnis Flanschbreite/Steghöhe von $b/a = 0{,}5$ eine sinusförmige Vorverformung der Amplitude $v^0/h = 0{,}1$ eingeprägt und zunächst unterschiedlichen Stoßdauern ausgesetzt. Da unter statischer Last dieses U-Profil auf Biegedrillknicken versagt, dient diese Größe als Bezugslast. Als Bezugsspannung wurde $\sigma_{0,2} = 200\ N/mm^2$ festgelegt. Der dynamische Lastfaktor wird als $DLF = \sigma_v / \sigma_{0,2}$ definiert.

Werden die für die unterschiedlichen Stoßdauern sich ergebenden dynamischen Lastfaktoren nun aus den Spannungsplots ermittelt, lässt sich auch hier der zu erwartende Zusammenhang abbilden. So fällt der DLF zunächst stark ab und konvergiert mit zunehmender Stoßdauer gegen die statische Bezugslast.

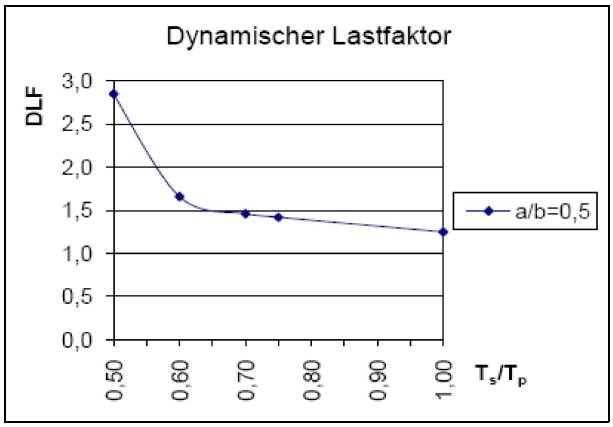

Bild 43: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer

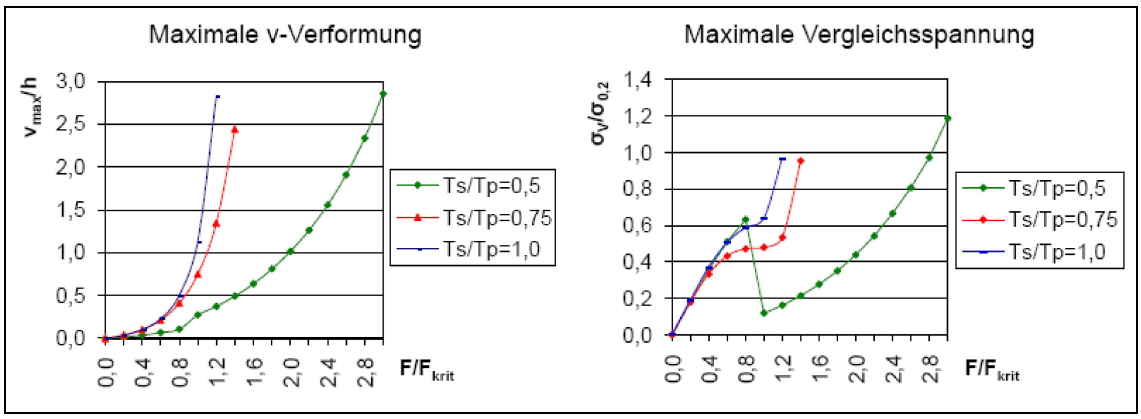

Bild 44: Einfluss der Stoßdauer bei einem U-Profil mit b/a = 0,5

Wie aus Bild 44 zu entnehmen ist, ergeben sich für die Verformungen mit Ausnahme des Verlaufes für die Stoßdauer $T_s / T_p = 0{,}5$ kontinuierliche Verläufe, die mit zunehmender Belastung ansteigen. Der Sprung in der Verformungsantwort des Verlaufes für $T_s / T_p = 0{,}5$

macht sich ebenfalls in einem Spannungssprung bemerkbar und wird anschließend noch detaillierter erläutert. Die Spannungsverläufe hingegen ähneln denen eines statisch belasteten imperfekten Druckstabes. Nach einer zunächst progressiv verlaufenden Spannungszunahme schließt sich ein degressiver Verlauf an, bevor dieser erneut mit zunehmender Last ansteigt. Weiterhin kann festgestellt werden, dass dieser Effekt sich mit zunehmender Stoßstauer verringert. Die Ursache für diese Verläufe liegt darin begründet, dass mit zunehmender Last das U-Profil vom Zustand der Stauchung in den des Biegedrillknickens übergeht, wobei aufgrund der Vorverformungsrichtung das Biegeknicken dominiert. Dies wird besonders bei der Stoßdauer $T_s / T_p = 0{,}5$ deutlich, da hier dass Verdrehen des Querschnittes an den Profilenden sprunghaft auftritt. Eine detaillierte Darstellung dieser Verformungsverläufe erfolgt nun im Rahmen der Ergebnisdarstellung des Einflusses der Vorverformung.

In Bild 45 sind zunächst die maximal auftretenden Verformungen für unterschiedliche Vorverformungen bei einer Stoßdauer von $T_s / T_p = 0{,}5$ zusammengestellt.

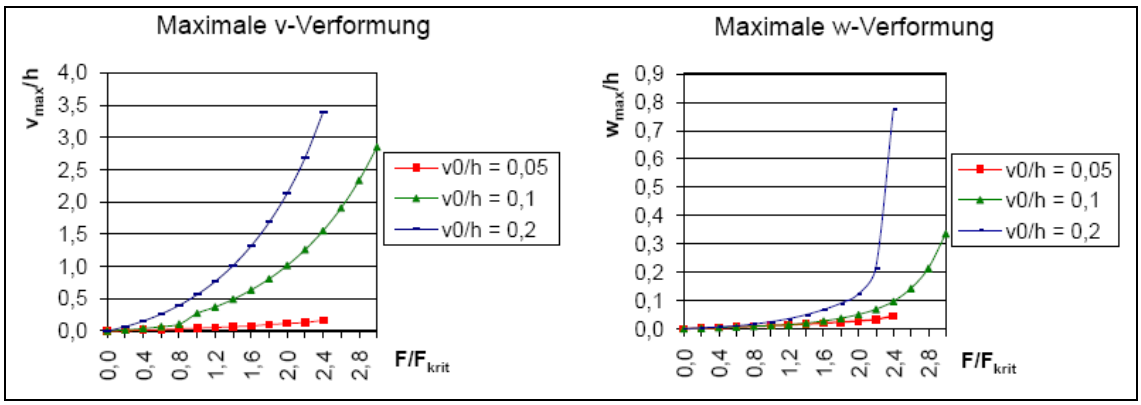

Bild 45: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Vorverformungen v^0

Zusätzlich zu dem bereits in der Variation der Stoßdauer vorgestellten Verformungsverlauf für $v^0/h = 0{,}1$ sind noch die Verläufe für $v^0/h = 0{,}05$ und $v^0/h = 0{,}2$ angegeben. Jede dieser hier vorgestellten Vorverformungen spiegelt ein anderes Verformungsverhalten wider. So bildet der Kurvenverlauf für die hier kleinste Vorverformung einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Vergleichsspannung und Belastung ab, wohingegen die größte hier gewählte Vorverformung ein monoton steigendes nichtlineares Verhalten zeigt. Der Kurvenverlauf für $v^0/h = 0{,}1$ hingegen beinhaltet beide Elemente.

Wie bereits zuvor erwähnt, liegt die Ursache hierfür im Wechsel des Verformungsverhaltens mit zunehmender Last begründet. Dies soll nun nachfolgend anhand der Verformungsverläufe, die über der Umfangskoordinate dargestellt sind, erläutert werden.

Betrachtet man zunächst die jeweils an den Einspannungen vorliegenden u-Verschiebungen, so bilden diese für die Vorverformung $v^0/h = 0{,}05$ einen nahezu konstanten Verlauf ohne Vorzeichenwechsel über dem Querschnitt ab. Bei der Vorverformung $v^0/h = 0{,}1$ hingegen verschieben sich an der Einspannung die Vorderkanten der Flansche und der Steg in entgegengesetzter Richtung, sodass ein Vorzeichenwechsel in der Verschiebung über dem Querschnitt auftritt.

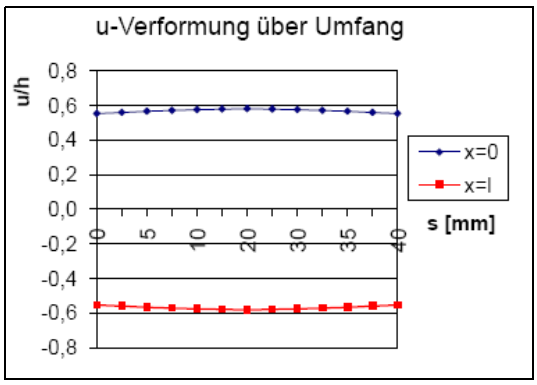

Bild 46a: u-Verformung bei $v^0/h = 0{,}05$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$

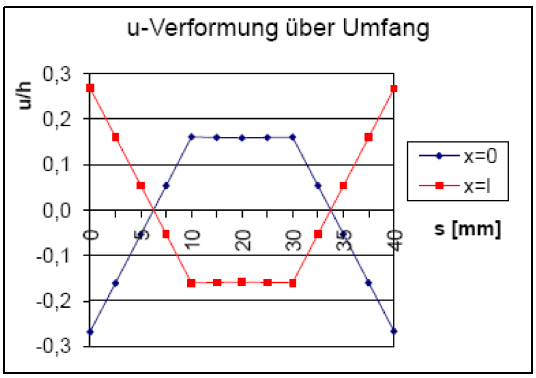

Bild 46b: u-Verformung bei $v^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 3{,}0$

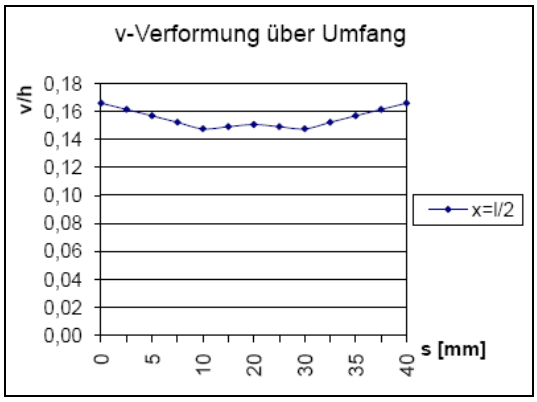

Bild 47a: v-Verformung bei $v^0/h = 0{,}05$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$

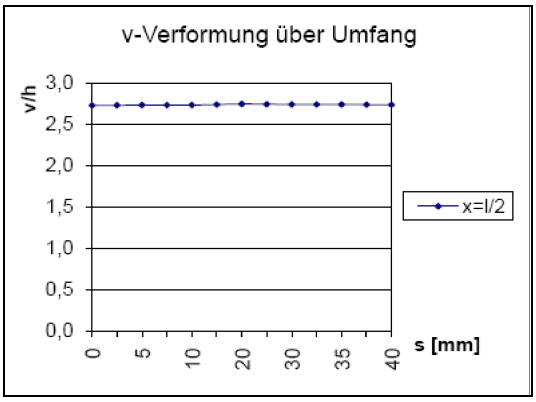

Bild 47b: v-Verformung bei $v^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 3{,}0$

Werden bei der hier vorliegenden Konfigurationen nun die v-Verformungen miteinander verglichen, so liegt die Größenordnung bei $\boldsymbol{v^0/h = 0{,}1}$ und $\boldsymbol{v^0/h = 0{,}2}$ um eine Zehnerpotenz höher als die in Bild 47a dargestellte Verschiebung. Die Bilder 48a und 48b verdeutlichen abschließend den, wenn auch nur schwach ausgeprägten Charakter des Biegedrillknickens.

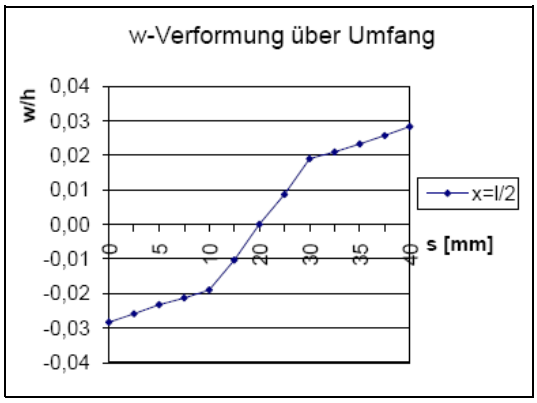

Bild 48a: w-Verformung bei $v^0/h = 0{,}05$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$

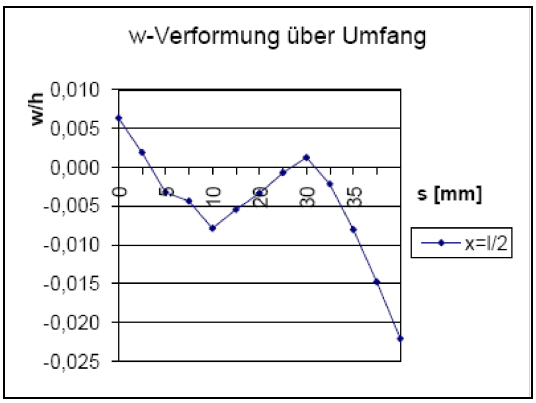

Bild 48b: w-Verformung bei $v^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 3{,}0$

Der Unterschied, der hier dargestellten Verformungszustände sei nun noch einmal durch dreidimensionale Darstellungen verdeutlicht.

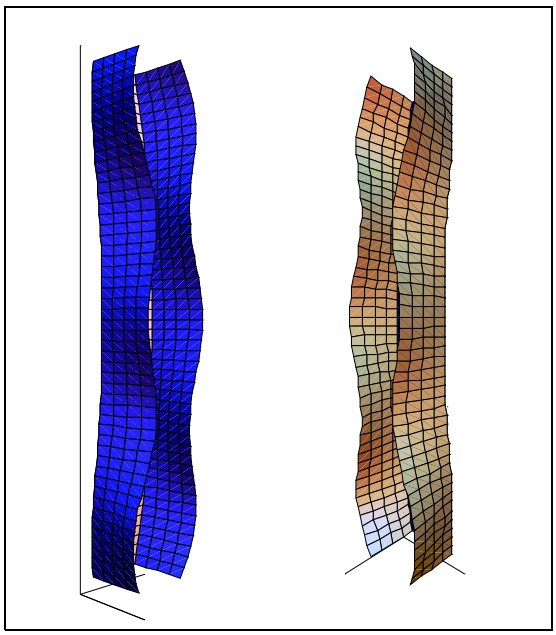

Bild 49a: Verformungszustand bei v^0/h = 0,05 und F/F_{krit} = 1,4

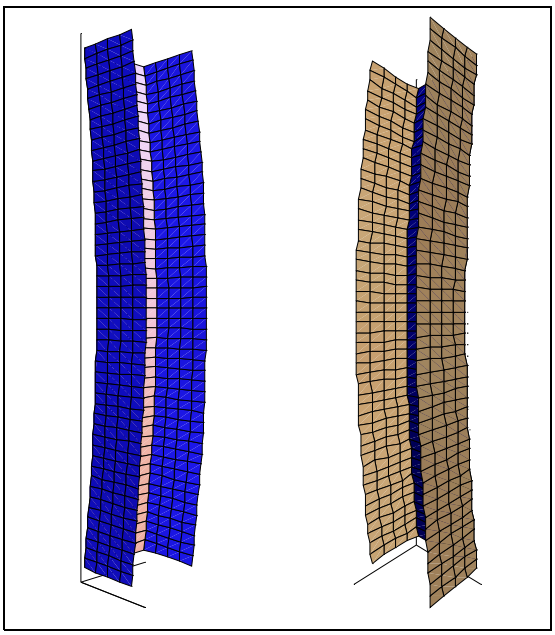

Bild 49b: Verformungszustand bei v^0/h = 0,1 und F/F_{krit} = 3,0

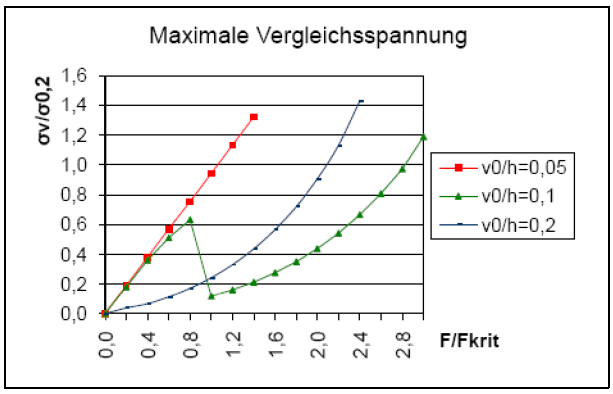

Bild 50: Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Vorverformungen

Wie im Rahmen der Verformungsanalyse festgestellt wurde, können unterschiedliche Vorverformungen unterschiedliche Verformungszustände hervorrufen. Ein Grenzfall bildet dabei das hier betrachtete U-Profil unter einer Stoßdauer von $T_s / T_p = 0{,}5$ und einer Vorverformung von $v^0/h = 0{,}1$. Wie bereits eingangs erwähnt, tritt bei dieser Konstellation unter einer Belastung von $F/F_{krit} = 0{,}8$ eine Unstetigkeitsstelle in dem Verlauf der maximalen v-Verschiebung auf. Diese Unstetigkeitsstelle in der v-Verformung wirkt sich nun der Gestalt auf den Verlauf der maximalen Vergleichsspannung aus, dass durch den oben beschriebenen Wechsel des Verformungszustandes von Stauchung in Biegedrillknicken das Vergleichs-

spannungsniveau zunächst absinkt und ab einem Belastungsniveau von $F/F_{krit} = 1{,}0$ erneut nichtlinear zu steigen beginnt. Betrachtet man nun die Verteilung der Vergleichsspannung im Profil, so schlägt sich die durch das Biegdrillknicken hervorgerufene Straffung der Flansche in einer Umlagerung der maximalen Spannungen vom Steg in die Flansche nieder.

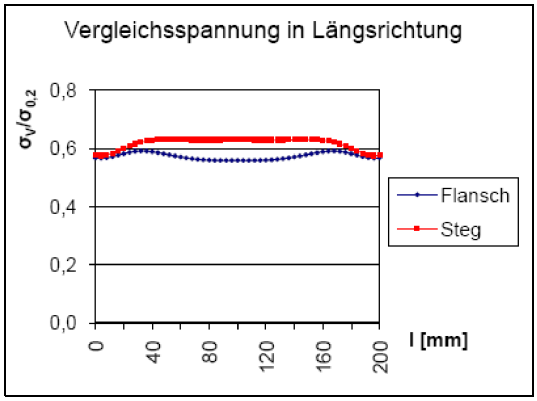

Bild 51a: Vergleichsspannung bei $F/F_{krit} = 0{,}8$

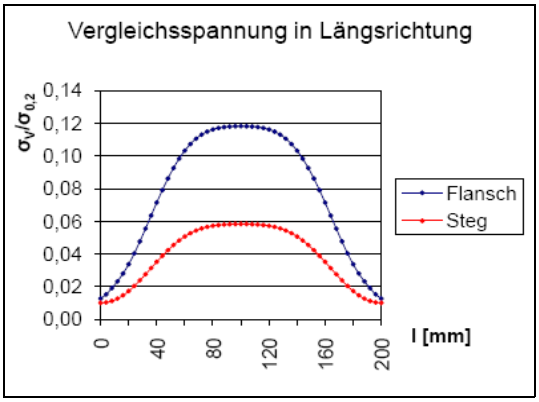

Bild 51b: Vergleichsspannung bei $F/F_{krit} = 1{,}0$

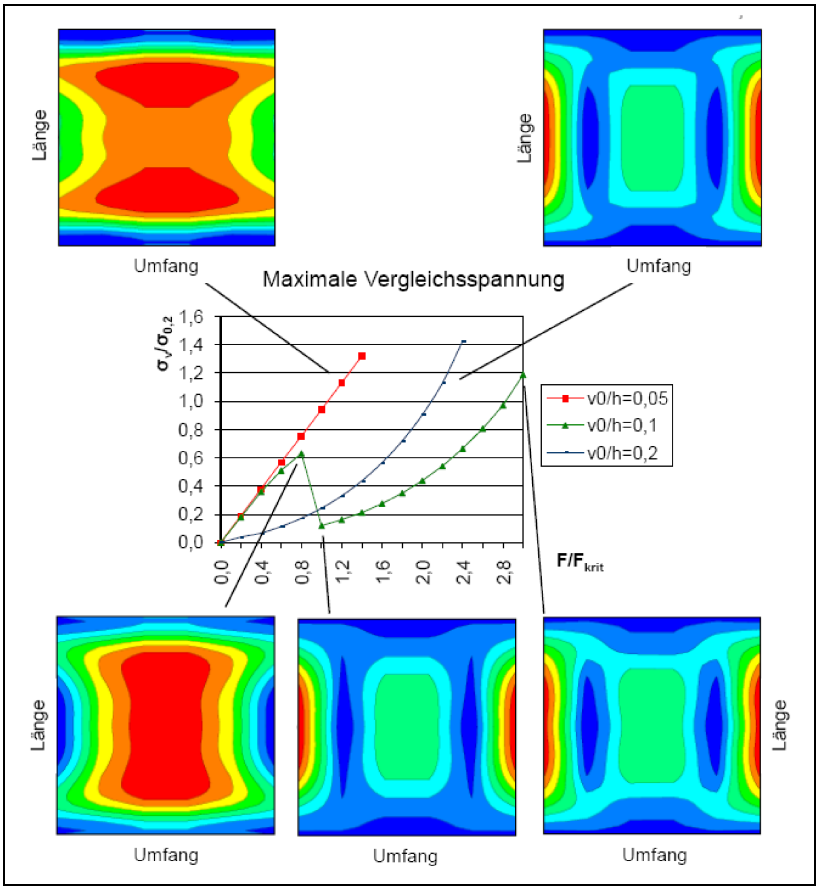

Bild 52: Qualitative Spannungsverteilung bei unterschiedlichen Laststufen und Vorverformungen

Zusätzlich zum Einfluss der Vorverformung v^0 wurde das Verhalten dieses U-Profils unter einer eingeprägten Imperfektion w^0 in globaler z-Richtung untersucht. Die dabei einwirkende Stoßdauer beträgt $T_s / T_p = 0{,}5$. Wie den nachfolgenden Bildern zu entnehmen ist, treten in Analogie zu den bereits zuvor beschriebenen Effekten erneut Verformungsverhalten auf, die abhängig von der Belastung und der gewählten Vorverformung sind. Insbesondere bei einer Vorverformung von $w^0/h = 0{,}1$ tritt das bereits in [11] von HERTEL beschriebene Verhalten erneut auf, dass unter zunehmender Belastung das Profil von einer Verformungsart in eine andere überspringt, was in Bild 53 wiederum durch die Unstetigkeitsstelle im Kurvenverlauf charakterisiert wird.

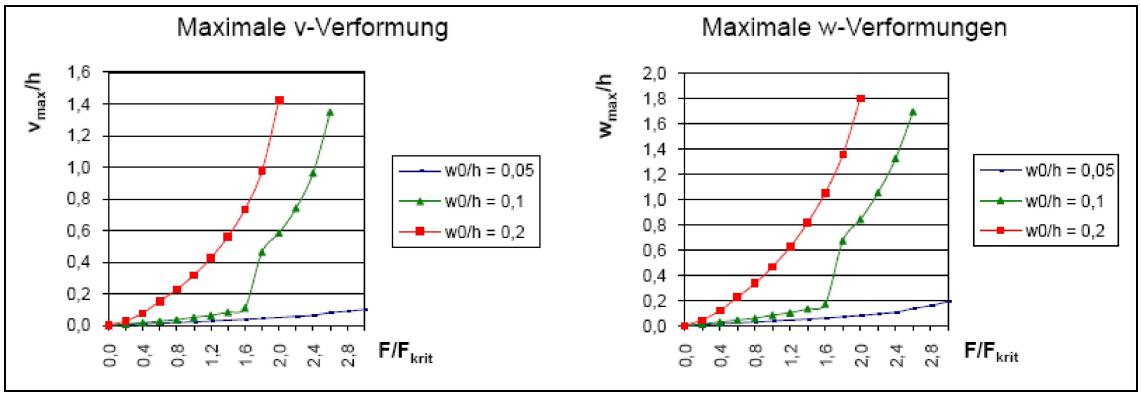

Bild 53: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Vorverformungen w^0/h

Im Vergleich zu der zuvor diskutierten Vorverformung v^0 liegen die maximalen Verschiebungen v und w hier in der gleichen Größenordnung, woraus sich, wie in den Bildern 54a bis 57b verdeutlicht, der Biegedrillcharakter der Verformung unterstrichen wird. Betrachtet man nun die Unstetigkeitsstelle im Kurvenverlauf der Vorverformung $w^0/h = 0{,}1$ näher, wird deutlich, dass bei der Laststufe $F/F_{krit} = 1{,}6$ die Verformung im Wesentlichen durch die Verkürzung an den Profilende bestimmt wird, welcher eine leichte Verwölbung des Querschnittes überlagert ist. Wird nun die Last auf $F/F_{krit} = 1{,}8$ gesteigert, wird die Verformung in Längsrichtung nur noch durch die Verwölbung des Querschnittes beschrieben.

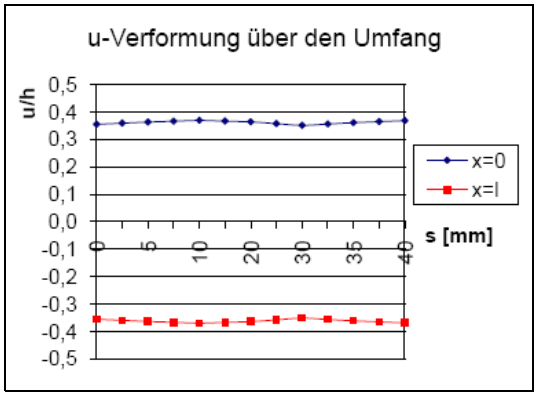

Bild 54a: u-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}6$

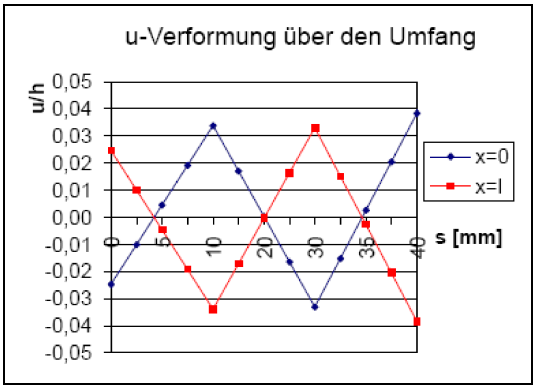

Bild 54b: u-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}8$

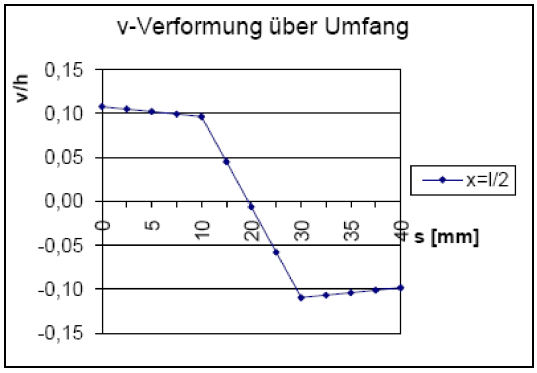

Bild 55a: v-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}6$

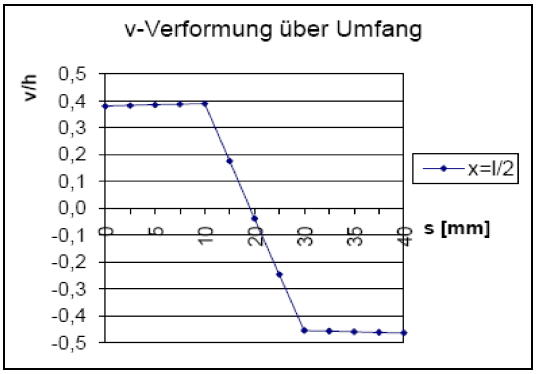

Bild 55b: v-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ $F/F_{krit} = 1{,}8$

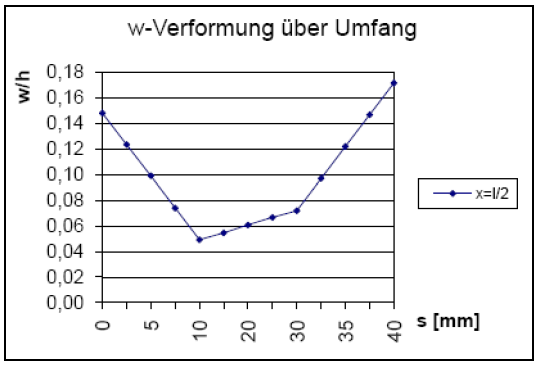

Bild 56a: w-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}6$

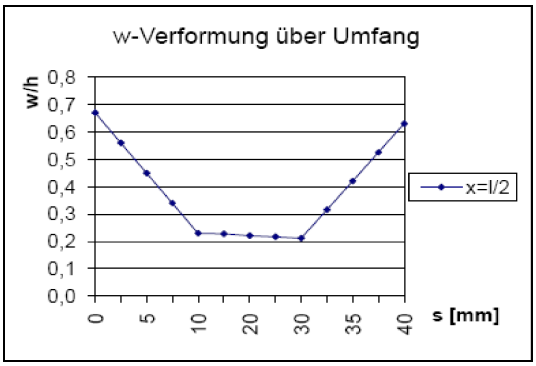

Bild 56b: w-Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}8$

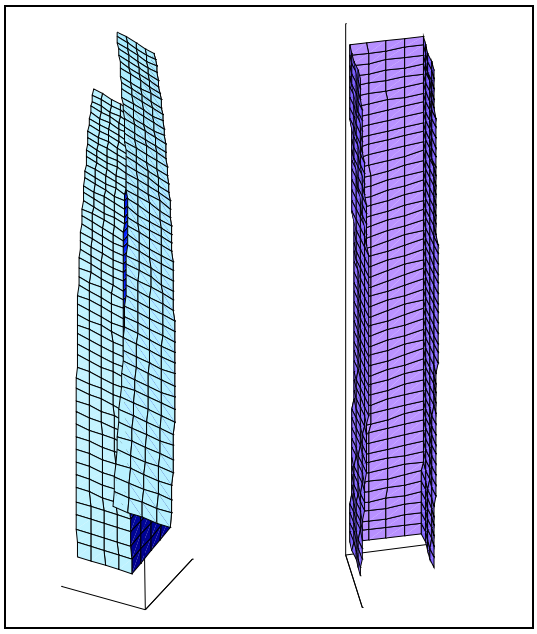

Bild 57a: Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}6$

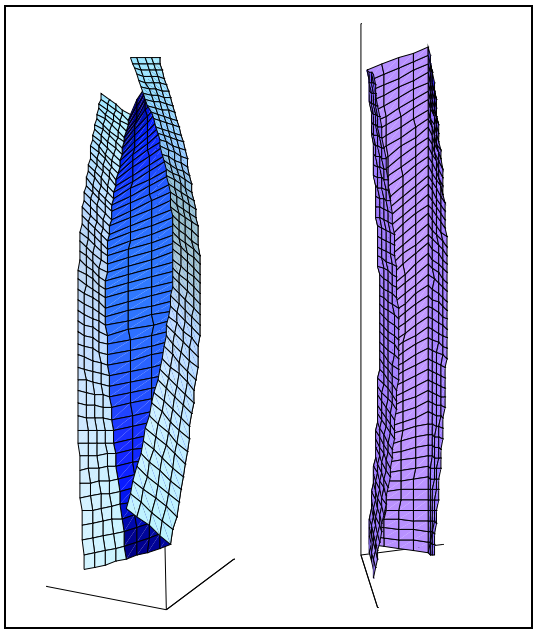

Bild 57b: Verformung bei $w^0/h = 0{,}1$ und $F/F_{krit} = 1{,}8$

Abschließend werden noch die qualitativen Spannungsverläufe an ausgewählten Stellen für dieses Profil angegeben. Dabei kann dem Plot wiederum die gleiche Systematik wie bei der zuvor dargestellten Auswertung einer eingeprägten v-Vorverformung entnommen werden.

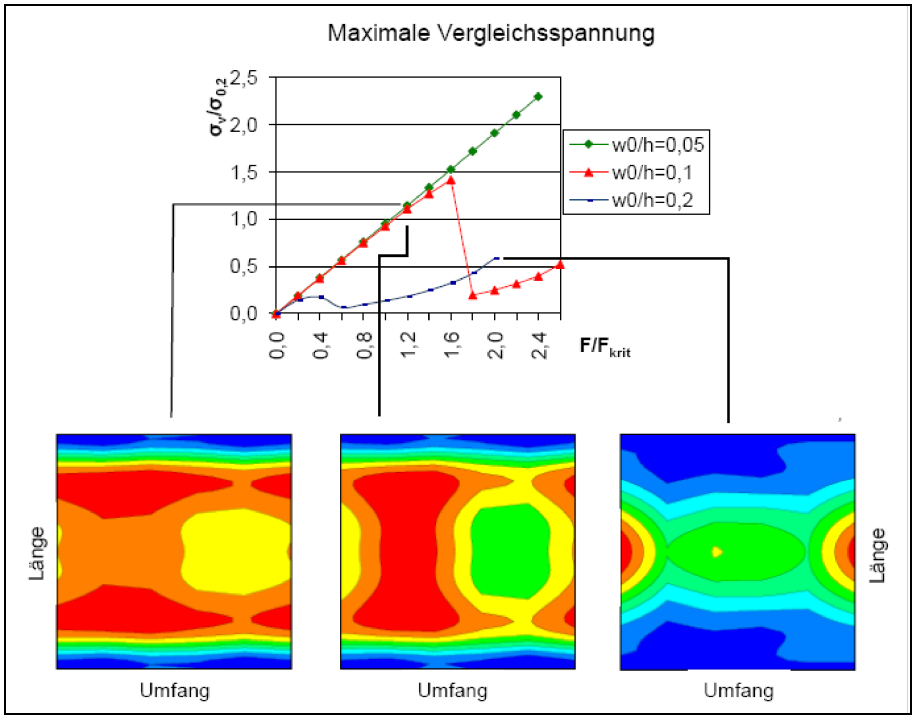

Bild 58: Qualitative Verteilung der Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Laststufen und Vorverformungen

So ergibt sich im Rahmen dieser Theorie für kleine Vorverformungen ein nahezu linear ansteigender Spannungsverlauf, da das Verformungsbild überwiegend durch die Verkürzung in Längsrichtung ohne nennenswerte Verwölbung des Querschnitts geprägt wird, was wiederum ein Beulen der Flansche nach sich zieht.

Für größere Vorverformungen, wie z.B. bei $w^0/h = 0{,}1$, ergibt sich zunächst ein ähnlicher Spannungsverlauf. Wie aus der oben ausgeführten Verformungsanalyse entnommen werden kann, ist die Verformung bei niedrigen Lasten durch eine Verkürzung des Profils gekennzeichnet. Durch die größere Vorverformung allerdings wird in dieser Konstellation das Biegedrillknicken bereits stärker hervorgerufen, was in einer Straffung der Flansche mündet.

Beim Überschreiten einer bestimmten Last, hier $F/F_{krit} = 1{,}6$, kehren sich die Verhältnisse um. An Stelle einer Verkürzung mit einer durch das Biegedrillknicken hervorgerufenen kleinen überlagerten Verwölbung wird gleich das Biegedrillknicken inklusive der damit verbundenen Querschnittsverwölbung hervorgerufen. Da der Krafteinleitungsbeschlag, wie in Kapitel 4.4.1 beschrieben, in Längsrichtung als biegeschlaff angenommen wird und somit der Verwölbung keinen Widerstand entgegensetzt, tritt auf Grund der geringeren Verformung in Längsrichtung nun auch eine geringere Vergleichsspannung auf als dies im Zustand der Stauchung der Fall ist.

Wird nun die Vorverformung weiter erhöht und damit das durch die Axialkraft hervorgerufene Biegemoment, verkleinert sich der Bereich, in dem das Profil gestaucht wird weiter und das Profil geht bereits bei niedrigeren Lasten in das Biegedrillknicken über. Der sich daraus ergebende Spannungssprung verläuft wesentlich flacher und ist danach durch einen nichtlinear ansteigenden Verlauf gekennzeichnet.

4.4.4 Parameterstudien am Beispiel eines U-Profils vom Typ 3

In den bisherigen Kapiteln wurden Profile betrachtet, die bei einer axialen statischen Belastung entweder primär durch Knicken oder Biegedrillknicken versagen. Wird bei diesen bereits angesprochenen Profilen die Länge beibehalten, aber das Verhältnis von Flanschbreite/Steghöhe auf $b/a = 1$ erhöht, erhält man ein Profil, dessen Primärversagen nach Bild 30 das Beulen darstellt. Als Bezugslast wird auch in diesem Fall die Last herangezogen, bei der die Primärveragensform auftritt. Die Vorverformung ist ebenfalls halbsinusförmig gewählt und als Bezugsspannung dient $\sigma_{0,2} = 200\ N/mm^2$ mit der bereits beschriebenen spannungsbezogenen Definition des *Dynamischen Lastfaktors*. Der bisherigen Systematik folgend, werden nun für diese Profile zunächst die maximal auftretenden Verformungen und die daraus resultierenden Spannungen für unterschiedliche Stoßdauern aber konstanter Vorverformung beschrieben, um danach bei einer exemplarisch ausgewählten Stoßdauer eine detaillierte Betrachtung vorzunehmen.

In der vorliegenden Theorie wurde vereinfachend angenommen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stoßwelle unendlich groß ist und die Belastung sofort über die gesamte Stablänge wirkt. Nach der in BREUER [4] wiedergegebenen Diskussion kann die Massenträgheit in Stablängsrichtung dann vernachlässigt werden, wenn für die Stoßdauer die Beziehung $T_s \gg 2l/c$ gilt. Dabei geben die Größen l und c jeweils die Stablänge und die Schallgeschwindigkeit in Metallen an (z.B. $c_{Alu} \approx 5000\ m/s$). Auf Grund der bei diesem Profil vorliegenden Größenverhältnisse können die in den vorherigen Beispielen verwendeten sehr kurzen Stoßdauern nicht mehr gewählt werden, da ansonsten die Stoßdauer in der Größenordnung der Periodendauer der niedrigsten Longitudinalschwingung liegt und die Theorie auf Grund der getroffenen Annahmen ihre Gültigkeit verlieren würde. Somit muss bei diesem Profiltyp auf längere Stoßdauern zurückgegriffen werden.

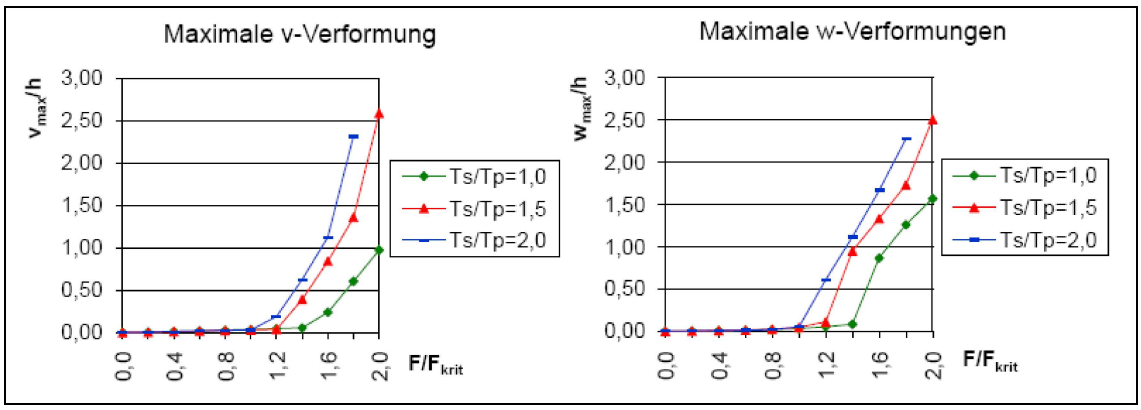

Bild 59: Maximal auftretende Verformungen für unterschiedliche Stoßdauern T_s/T_p

Wie nun aus Bild 59 entnommen werden kann, treten zunächst mit steigender Last nur sehr geringe und näherungsweise linear verlaufende Verformungsänderungen auf. Erst bei einer Last, die in der Größenordnung der Beullast liegt, ändert sich der Kurvenverlauf und geht in ein nichtlineares Verhalten über. Werden nun den Verformungen die korrespondierenden Vergleichsspannungen gegenübergestellt, kann genau an denselben Stellen, an denen sich der Verlauf der maximalen Verformung im oben beschriebenen Sinne ändert, auch eine Änderung des Vergleichsspannungsverlaufes festgestellt werden.

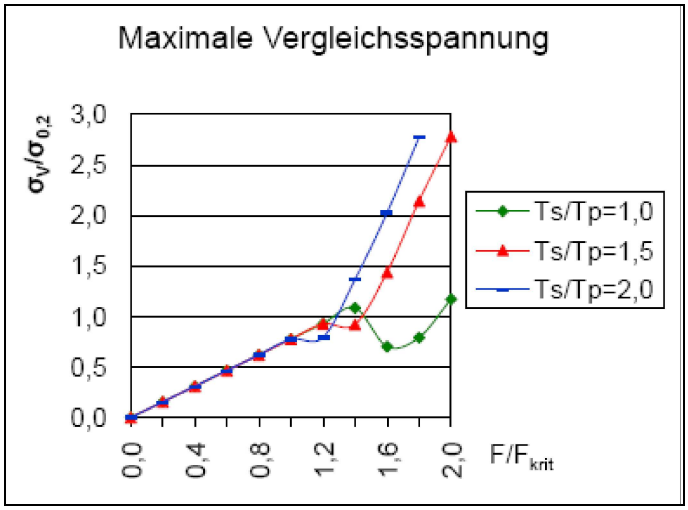

Bild 60: Maximale Vergleichsspannung bei unterschiedlichen Stoßdauern

So verschiebt sich das auftretende “Knie” mit zunehmender Stoßdauer in Richtung niedrigerer Lasten, verbunden mit einer gleichzeitigen Abnahme dessen Ausprägungsgrades.

Eine Analyse der Längsverformungen ergibt, dass unterhalb der Bezugslast das Profil nur gestaucht wird, wohingegen bei Lasten oberhalb der Beullast die Verkürzung selbst abnimmt, der Einfluss des Verdrehens des Querschnittes aber deutlich an Einfluss gewinnt.

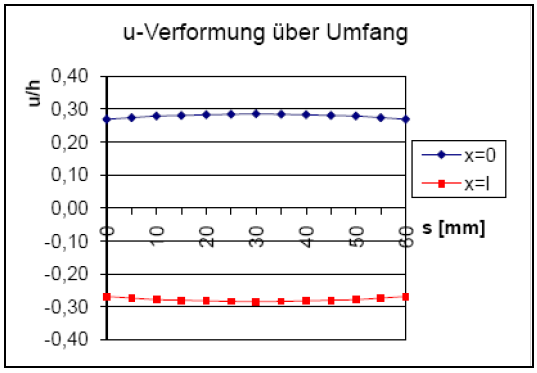

Bild 61a: u-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 1,4

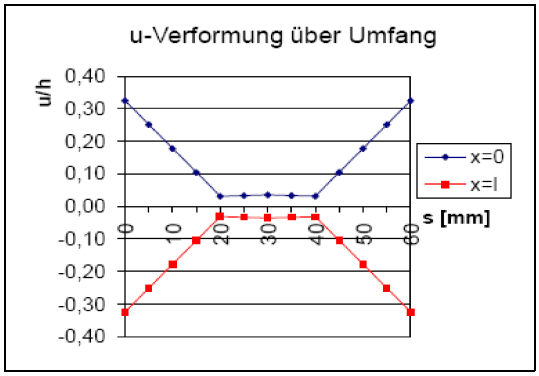

Bild 61b: u-Verformung bei T_s/T_p = 1,0 und F/F_{krit} = 2,0

Dieses Querschnittverhalten wirkt sich ebenfalls auf die v- und w-Verschiebungen aus. Während diese Verformungen bei dem Lastverhältnis $F/F_{krit} = 1{,}4$ noch sehr klein sind und sich in der Größenordnung eines Hundertstels der Wandstärke bewegen, nimmt deren Größe mit einer Laststeigerung auf $F/F_{krit} = 2{,}0$ um eine Zehnerpotenz zu. Weiterhin kann festgestellt werden, dass auf Grund der durch das Beulen hervorgerufenen reduzierten mittragenden Breite der Flansche der neue Profilschwerpunkt sich hinter den Krafteinleitungspunkt verschiebt und das Profil nun entgegen der Richtung der eingeprägten Vorverformung zu knicken beginnt.

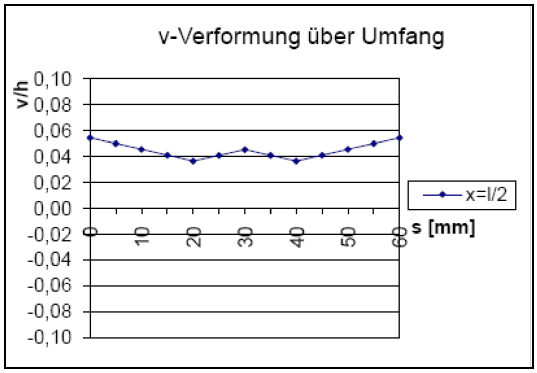

Bild 62a: v-Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$

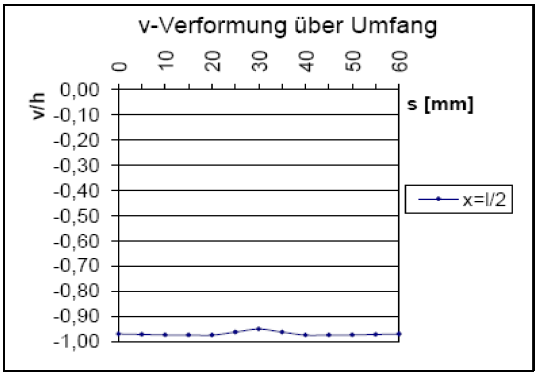

Bild 62b: v-Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$ und $F/F_{krit} = 2{,}0$

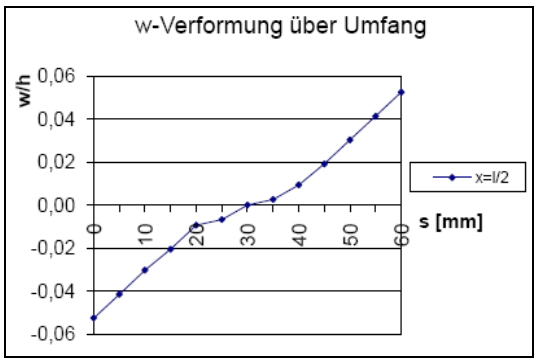

Bild 63a: w-Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$ und $F/F_{krit} = 1{,}4$

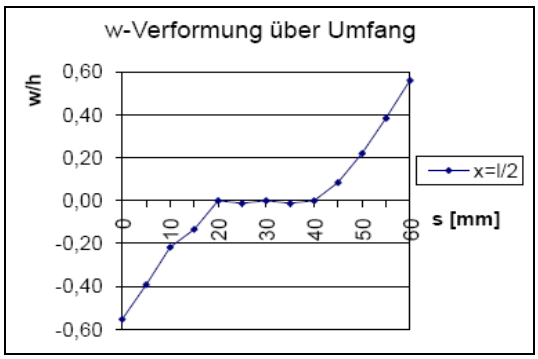

Bild 63b: w-Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$ und $F/F_{krit} = 2{,}0$

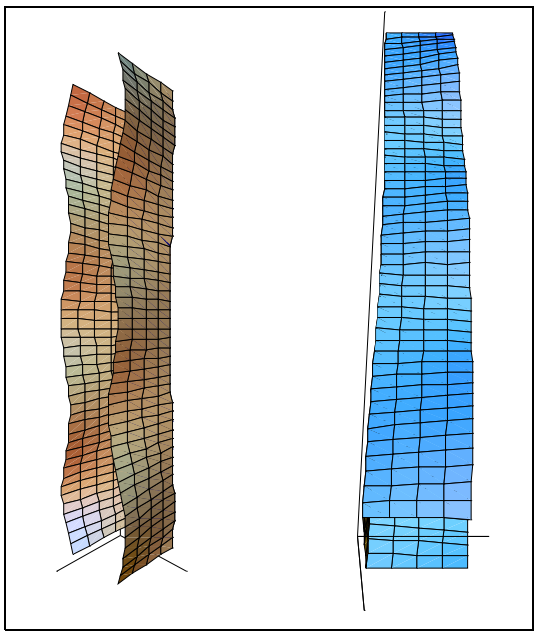

Bild 64a: Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$; $F/F_{krit} = 1{,}0$ und $v^0/h = 0{,}1$

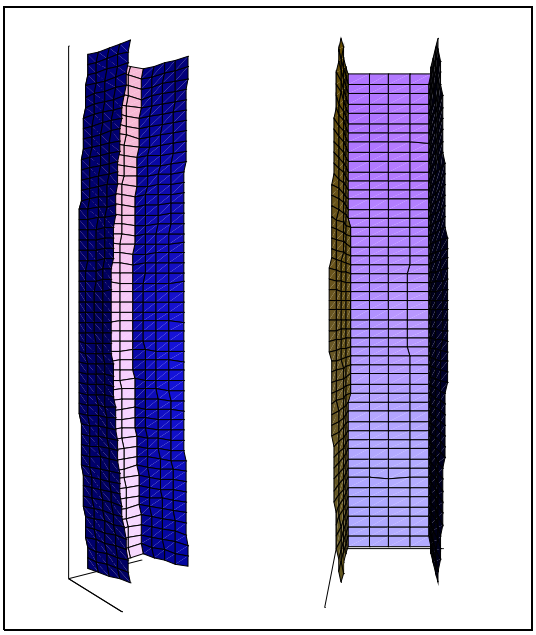

Bild 64b: Verformung bei $T_s/T_p = 1{,}0$; $F/F_{krit} = 1{,}8$ und $v^0/h = 0{,}1$

Den Ausführungen von HERTEL [11] folgend, tritt bei Profilen dieser Klasse und einem Schlankheitsgrad von $\lambda = 30$ bei Lasterhöhung nach anfänglichem reinen Beulen beider Flansche ein zusätzlicher Zustand des Biegedrillknickens auf, welcher von sekundärem Beulen überlagert ist und durch die Biegedruckspannungen hervorgerufen wird. Wie nun aus dem Vergleich der Bilder 64 a und 64 b zu entnehmen ist, tritt auch in diesem Fall zunächst reines Beulen auf. Da diesem Profil jedoch zunächst eine v-Vorverformung eingeprägt ist, wird durch diese bei Laststeigerung Knicken ausgelöst, bei dem die beiden Flansche sich mit einer Halbwelle nach außen verformen.

Wird dem Profil jedoch eine w-Vorverformung eingeprägt, geht es bei höheren Lasten in den Zustand des Biegedrillknickens über. In den mit Bild 65a und 65b dargestellten Verformungsplots ist diese Situation dargestellt. Obwohl bei niedrigen Lasten rechnerisch auch eine Verdrillung des Profils festzustellen ist, liegt die Größenordnung der v-Verschiebung im Vergleich zu der w-Verformung jedoch um eine Zehnerpotenz niedriger und ist um zwei Zehnerpotenzen kleiner als die Wandstärke des Profils. Somit dominiert die w-Verformung und in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von HERTEL stellt dies den Zustand des Beulens dar. Bei höheren Lasten, wie hier am Beispiel von $F/F_{krit} = 1{,}8$ dargestellt, liegen die v- als auch die w-Verformungen in der gleichen Größenordnung und bilden somit den Zustand des Biegedrillknickens ab.

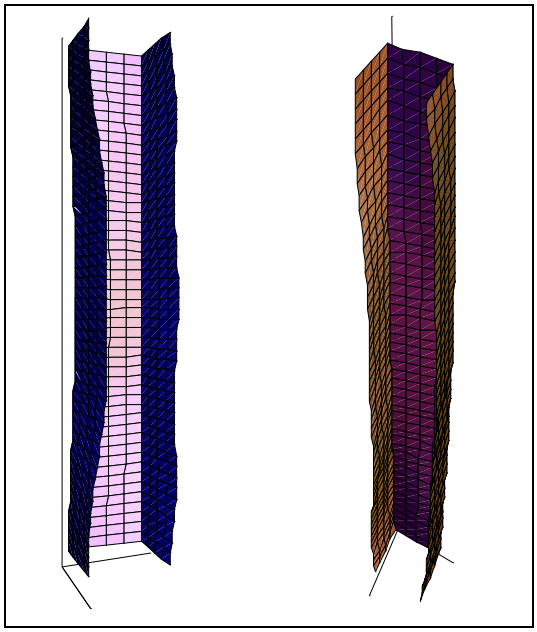

Bild 65a: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,0 und w^0/h = 0,1

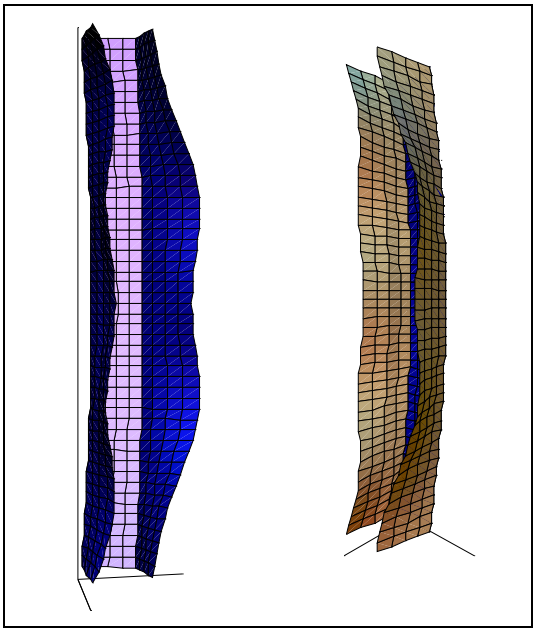

Bild 65b: Verformung bei T_s/T_p = 1,0; F/F_{krit} = 1,8 und w^0/h = 0,1

Nach erfolgter Diskussion der Verformungszustände soll an dieser Stelle abschließend noch der Verlauf des dynamischen Lastfaktors betrachtet werden. Wird das in Kapitel 4.3 definierte Spannungskriterium auf die in Bild 59 dargestellten maximalen Vergleichsspannungsverläufe in Abhängigkeit der Stoßdauer angewendet, ergibt sich eine zu den bisherigen Verläufen abweichende Form.

Durch die hier gewählte Belastungsgrenze $\sigma_{0,2} = 200\,N/mm^2$ treten bei der Stoßdauer $T_s/T_p = 1{,}0$ zwei Zustände auf. Zuerst wird die Belastungsgrenze durch das Beulen der Flansche erreicht (DLF 1). Durch geringfügige weitere Laststeigerung geht das Profil jedoch, wie oben beschrieben, in den Zustand des Biegeknickens über. Dadurch wird eine Spannungsreduzierung hervorgerufen und erst nach weiterer Laststeigerung wird die festgelegte Belastungsgrenze erneut erreicht (DLF 2). Da die Belastungsgrenze des Profils bei längeren Stoßdauern erst im Zustand des Knickens erreicht wird und damit bei höheren Lasten, besitzt der DLF-Verlauf in diesem Fall ein Maximum. Berücksichtigt man jedoch zusätzlich noch das zweite Erreichen der definierten Belastungsgrenze bei der Stoßdauer $T_s/T_p = 1{,}0$, ergibt sich die bereits aus Kapitel 4.4.2 und Kapitel 4.4.3 bekannte Verlaufsform.

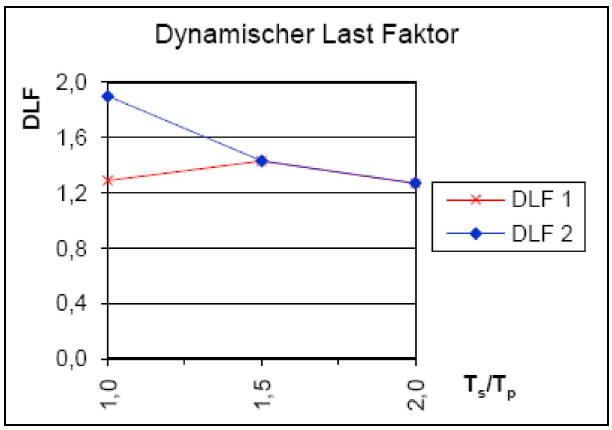

Bild 66: Dynamischer Lastfaktor in Abhängigkeit der Stoßdauer

5 Vergleich der dynamischen und statischen Versagensformen

Nachdem bisher an Profilen unterschiedlicher Schlankheitsgrade und verschiedener Verhältnisse von Flanschhöhe zu Stegbreite der Einfluss verschiedener Stoßdauern und Vorverformungen untersucht wurden, sollen nun abschließend die dynamischen Verformungszustände beispielhaft mit denen der Statik verglichen werden. Als Bezug dienen dazu die von HERTEL in [11] beschriebenen Versuche und die dazugehörigen Bilder.

Im Rahmen der dynamischen Berechnung werden die Profile mit Lastamplituden zwischen $F/F_{krit} = 1{,}0$ und $F/F_{krit} = 3{,}0$ und einer mit Stoßdauer von $T_s/T_p = 1{,}0$ belastet, um mögliche auftretenden Verformungsänderungen bei Laststeigerung zu erfassen.

Weil davon ausgegangen werden kann, dass fertigungsbedingt die in [11] beschriebenen Profile ebenfalls eine Imperfektion besitzen, über welche allerdings keine Informationen vorliegen, werden deshalb näherungsweise die Berechnungen mit einer halbsinusförmigen Vorverformung der Größe $v^0/h = 0{,}1$ und $w^0/h = 0{,}1$ durchgeführt.

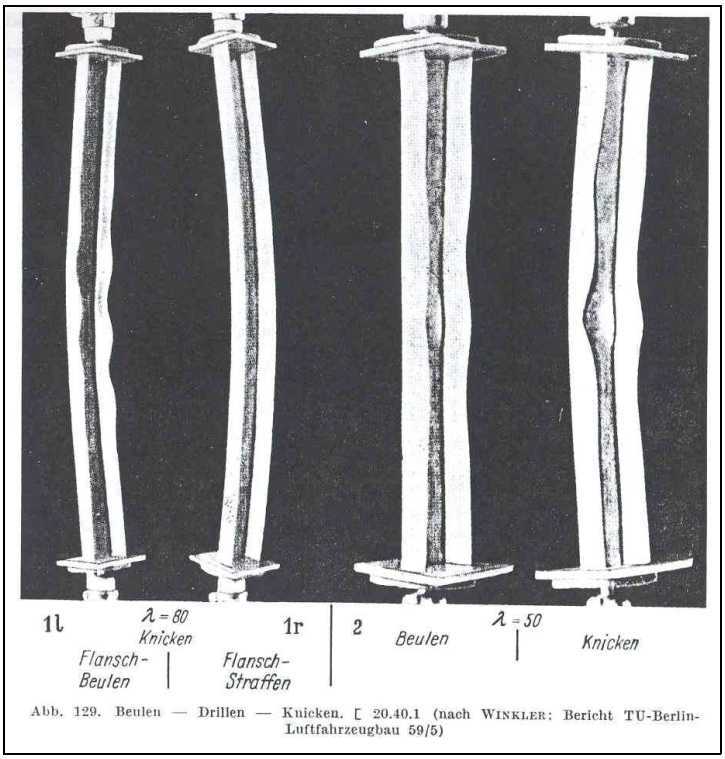

Bild 67: Versagen von U-Profilen mit unterschiedlichem Schlankheitsgrad λ unter statischer Belastung nach HERTEL [11]

Als erstes wird das Profil aus Bild 67 betrachtet, dessen Schlankheitsgrad $\lambda = 80$ und das Verhältnis von Flanschhöhe zu Stegbreite $b/a = 0{,}5$ beträgt. Unter Berücksichtigung der in Bild 31 angegebenen geometrischen Verhältnisse versagt dieses Profil rechnerisch auf Biegedrillknicken. Wie aus [11] zu entnehmen ist, tritt im Versuch jedoch Knicken um die Stabquerachse auf, wobei je nach Richtung, die Flansche entweder gestrafft werden oder ausbeulen.

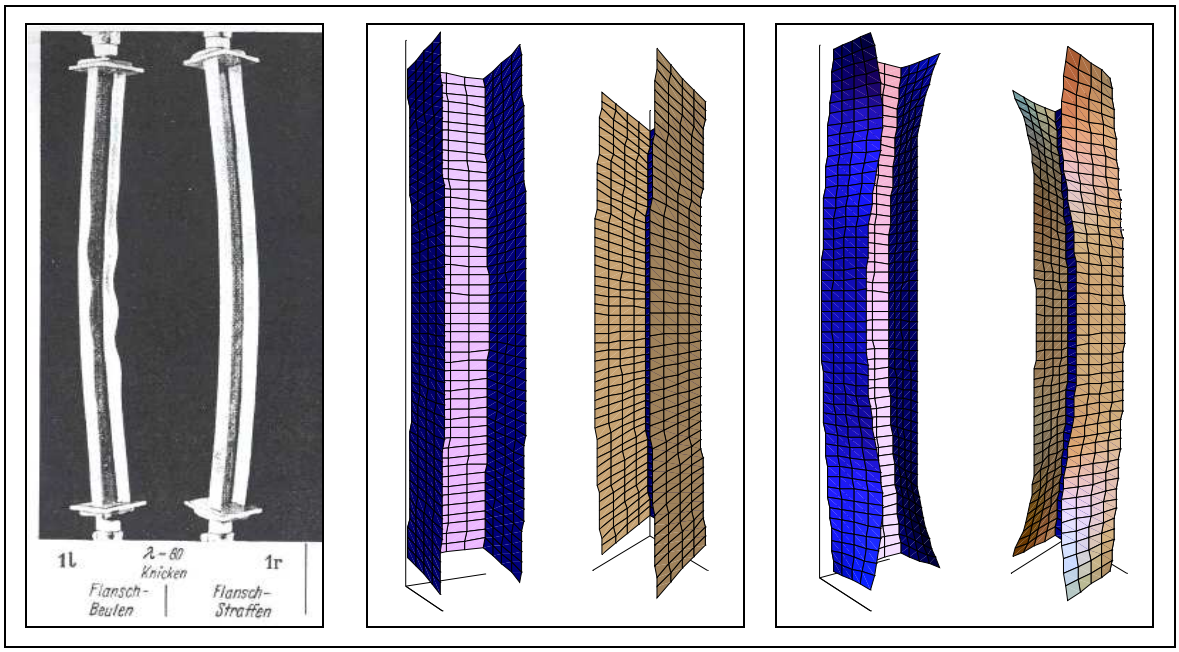

Bild 68: Profil 1; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 0,5 und Schlankheitsgrad λ = 80 (re) sowie Verformungszustände aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,6 und v^0/h = 0,1 (Mi) sowie v^0/h = -0,1 (re); T_s/T_p = 1,0

Der in Bild 68 links dargestellte Verformungszustand tritt ebenfalls unter dynamischer Belastung auf. Obwohl das Profil, wie bereits oben ausgeführt, rechnerisch auf Biegedrillknicken versagt, wird durch die eingeprägte Vorverformung jedoch Knicken um die Profilquerachse hervorgerufen. Der Zustand des Flanschbeulens konnte mit Hilfe der *FSM* nur durch die Eingabe einer Vorverformung in negativer y-Richtung (in die Bildebene hinein) erzwungen werden.

Das zweite von HERTEL betrachtete Profil besitzt ebenfalls ein Verhältnis der Flanschhöhe zu Stegbreite von $b/a = 0{,}5$, aber einen Schlankheitsgrad von $\lambda = 50$. HERTEL führt dazu aus, dass bei diesem Profil zunächst Beulen auftritt und dass mit weiterer Laststeigerung der Stab in ein Biegeknicken übergeht. Die Berechnung der primären Versagenslast mit Hilfe der Balkentheorie ergibt, wie auch im Beispiel zuvor, ein Versagen auf Biegedrillknicken. In der Berechnung mit Hilfe der *FSM* wurde das Profil zunächst mit einer Last von $F/F_{krit} = 1{,}0$ beaufschlagt. Dabei konnte beobachtet werden, dass das Profil gestaucht wird und ein Verdrehen des Querschnittes nicht auftritt. Die elastische Verformung in Richtung der Vorverformung ist minimal, wobei die Größenordnung ungefähr ein Zehntel der des Beulens beträgt. Bei den Flanschen tritt Beulen auf, wobei sich diese zusätzlich noch nach außen drehen. Hierdurch bedingt wird der Steg nach innen gewölbt. Mit zunehmender Erhöhung der Last, z.B. auf $F/F_{krit} = 3{,}0$, tritt ein leichtes Verdrehen des Querschnittes um die Querachse nach vorne auf und

die Ausprägung des Beulzustandes vergrößert sich. In Bild 69 sind diese Ergebnisse noch einmal zusammengefasst und den Versuchsbildern gegenübergestellt.

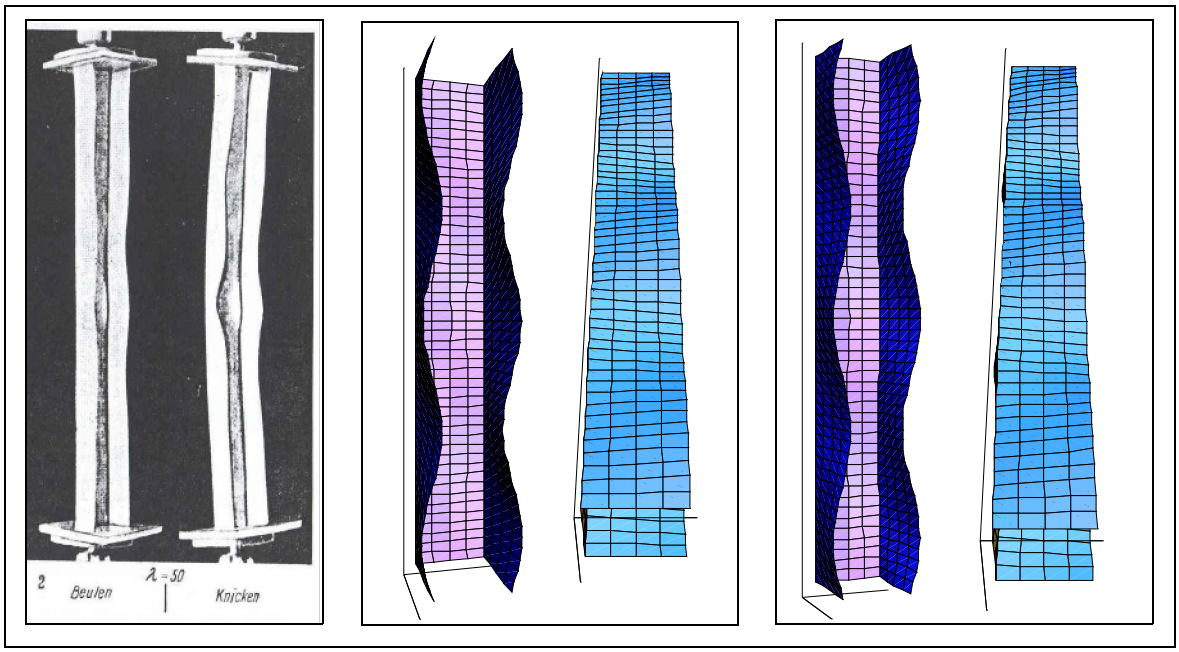

Bild 69: Profil 2; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 0,5 und Schlankheitsgrad λ = 50 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,0 (Mi) und F/F_{krit} = 3,0 (li); v^0/h = 0,1; T_s/T_p = 1,0

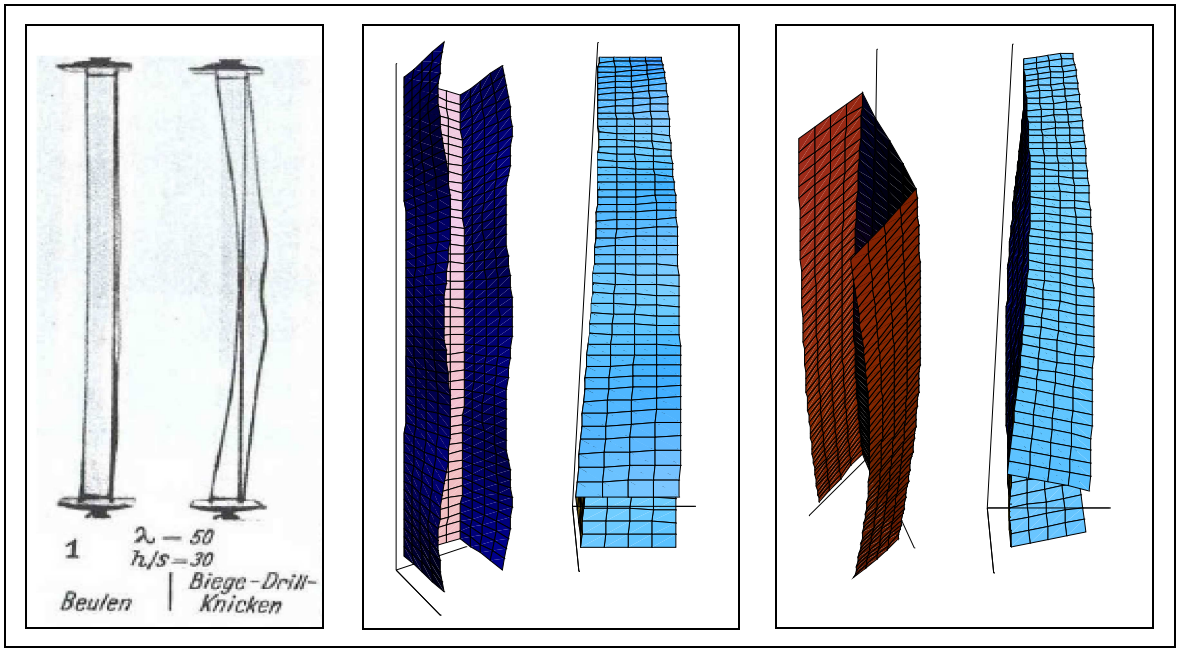

Bild 70: Profil 3; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 50 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 1,0 und v^0/h = 0,1(Mi) sowie w^0/h=0,1(re); T_s/T_p = 1,0

In [11] werden zusätzlich zu den in Bild 68 und Bild 69 betrachteten Profilen auch Profile mit sehr hohen Flanschen $b/a = 1$ untersucht. Die primäre Versagenslast für den in Bild 70 dargestellten Stab ist zunächst durch das Biegedrillknicken definiert. Bei dem angegebenen Schlankheitsgrad tritt jedoch bei näherungsweise derselben Last gleichzeitig Beulen auf. Der reine Beulzustand lässt sich mit Hilfe der hier zu Grunde liegenden Berechnung nur in Verbindung mit einer v-Vorverformung erreichen. So wird der Stab zunächst gestaucht, ohne dass der Querschnitt sich verdreht. Wird dem Stab allerdings eine w-Verformung eingeprägt und ebenfalls mit der Last $F/F_{krit} = 1{,}0$ beaufschlagt, stellt sich der in Bild 70 dargestellte Biegedrillzustand ein. Da es sich bei der im Rahmen der Berechnung gewählten Einspannung um einen senkrecht zur Ebene biegeschaffen und in der Ebene schubstarren Krafteinleitungsbeschlag handelt, tritt in dem vorliegenden Fall ein Verwölben des Querschnittes auf. Im Vergleich zur Versuchsanordnung kann jedoch in der unterschiedlichen Wahl der Krafteinleitung der Grund dafür gesehen werden, dass das Beulen des rechten Flansches nur mit einer Halbsinuswelle ($m = 1$) auftritt, wohingegen in der Versuchsanordnung ein Beulen mit $m = 5$ zu beobachten ist.

Abschließend wird nun noch ein Profil mit einem Schlankheitsgrad von $\lambda = 30$ untersucht. Unter Berücksichtigung der in Bild 31 angegebenen Geometrie stellt das Beulen das Primärversagen dieses Profils dar. Versuchstechnisch wurde in [11] festgestellt, dass dieses Profil wie berechnet zunächst beult, dann aber bei weiterer Laststeigerung in den Zustand des Biegedrillknickens übergeht, dem ein sekundäres Beulen der Flansche überlagert ist.

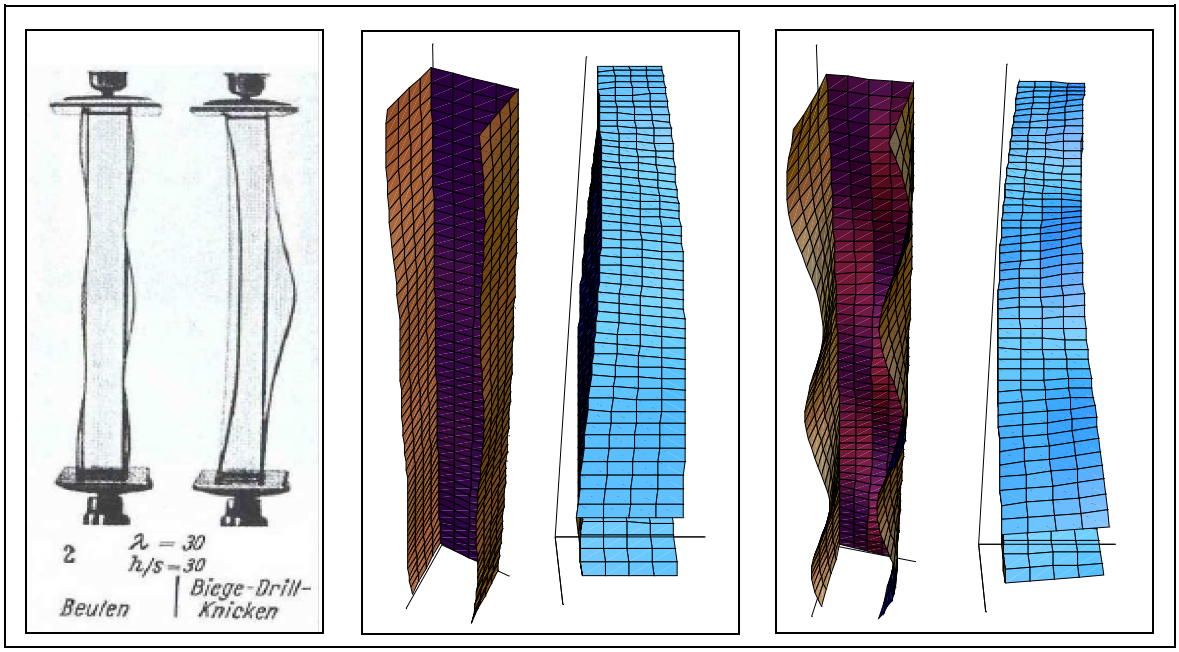

Bild 71: Profil 4; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 30 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit $F/F_{krit} = 1{,}0$ (Mi) und $F/F_{krit} = 3{,}0$ (li); $w^0/h = 0{,}1$; $T_s/T_p = 1{,}0$

Wie in Bild 71 Mitte dargestellt, wird bei einer eingeprägten w-Vorverformung sofort der Biegedrillzustand hervorgerufen, welchem ein Beulen überlagert ist, das sich mit zunehmender Last verstärkt (Bild 71 rechts). Zusätzlich zu diesen beiden Verformungsanteilen wird ein Beulen des Steges und ein Kippen des Querschnittes abgebildet.

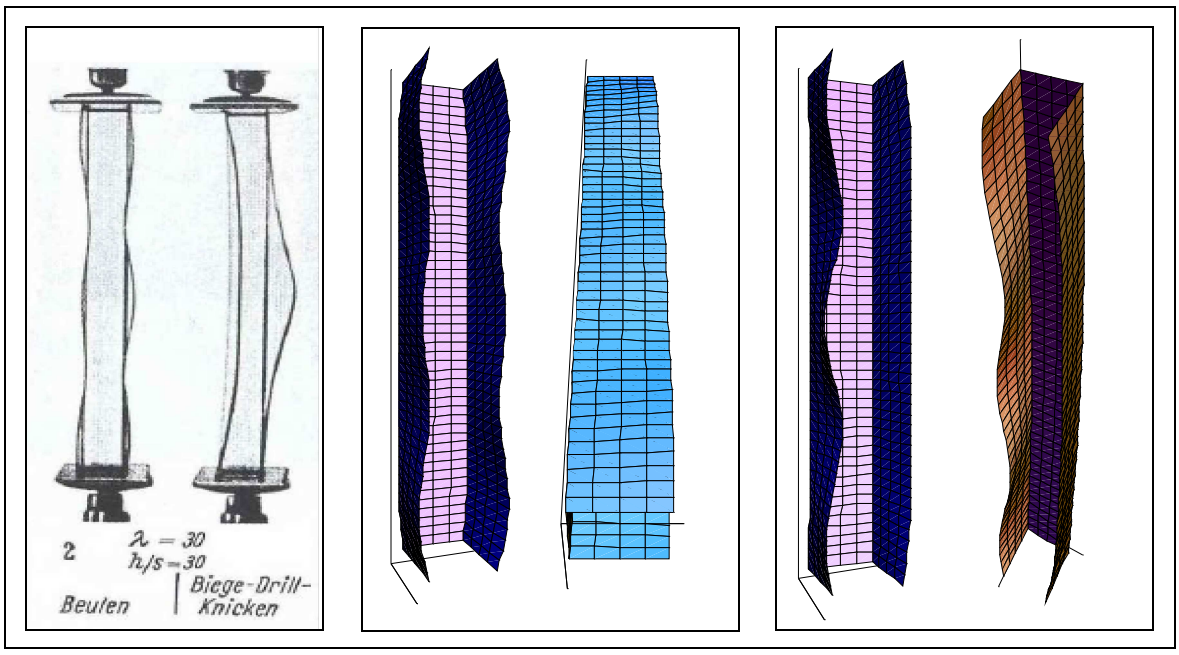

Bild 72: Profil 4; statisches Versagen eines U-Profils mit b/a = 1,0 und Schlankheitsgrad λ = 30 (re) sowie Verformungen aufgrund dynamischer Belastung mit F/F_{krit} = 3,0 und w^0/h = 0,1 (Mi) sowie w^0/h = 0,2 (re); T_s/T_p = 1,0

Der in [11] beschriebe primäre Beulzustand kann hier allerdings nur durch eine v-Vorverformung erzeugt werden (Bild 72 Mitte).

Außerdem beeinflusst nicht nur die Richtung, sondern auch die Größenordnung der Vorverformung das Ergebnis. So kann z.B. durch eine Erhöhung der w-Vorverformung von $w^0/h = 0{,}1$ auf $w^0/h = 0{,}2$ der oben abgebildete Zustand des Biegedrillknickens (Bild 72 rechts) deutlich besser dem des Versuchsergebnisses angenähert werden (siehe auch Bild 65a und 65b).

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die hier vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Untersuchung von U-Profilen, welche einer kurzzeitigen stoßartigen axialen Belastung ausgesetzt wurden und der Einfluss lokaler Versagensformen mit Berücksichtigung fand.

Der Ausgangspunkt und die Motivation für diese Fragestellung lag in der Beobachtung begründet, dass sich die meisten Arbeiten in Bezug auf die obige Fragestellung auf die Untersuchung von Platten- und Schalentragwerken beschränken. Die Aufsätze jedoch, die sich mit dem Verhalten von Profilen unter einer kurzzeitigen axialen Stoßbelastung befassen, greifen auf die Balkentheorie zurück und können dadurch bedingt die Einflüsse von lokalen Effekten auf das dynamische Stabilitätsverhalten nicht mit berücksichtigen.

Um diese Einflüsse jedoch auch bei Profilen mit einbeziehen zu können, musste in der Berechnung auf ein netzbasiertes Verfahren zurückgegriffen werden. So wurde als Berechnungsmethode die semi-analytische Formulierung der *Finiten Streifen Methode* gewählt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise gegenüber der *Finiten Element Methode* liegt nun darin, dass die gewählten Ansatzfunktionen in Strukturlängsrichtung die geometrischen Randbedingungen an den gegenüberliegenden Auflagern erfüllen und somit nur eine Diskretisierung in Umfangsrichtung der Struktur erforderlich ist. Hierdurch ergibt sich ein wesentlicher Vorteil gegenüber der *FEM*. Die zu lösenden Matrizensysteme fallen deutlich kleiner aus und die Berechnungszeiten werden kürzer. In Bezug auf die Balkentheorie besteht die Möglichkeit, neben den globalen Versagensarten, wie Biegeknicken und Biegedrillknicken, nun auch lokales Beulen der Flansche und des Steges mit abzubilden.

Die Formulierung der hier angewandten semi-analytischen *FSM* basiert auf der *Kármánnschen* Plattentheorie unter Berücksichtigung der *von Kirchhoffschen* Annahmen. Sie erfolgte in der geometrisch nichtlinearen Beschreibung und unter der Einbeziehung von Vorverformungen. Das Materialgesetz wurde als linear-elastisch angenommen und in seiner iso- und orthotropen Ausprägung berücksichtigt. Zur Lösung des sich ergebenden Differentialgleichungssystems wurde das nichtlineare *Newmark*-Verfahren verwendet, da es sich in Bezug auf die Wahl des Zeitschrittes um ein unbedingt stabiles Verfahren handelt und darüber hinaus die Genauigkeit der Amplitudenantwort nicht durch numerische Dämpfung beeinflusst wird.

Um nun das Strukturverhalten auswerten zu können und um eine im Vergleich zur statischen Lösung auftretende Überhöhung der Strukturantwort beschreiben zu können, wurde der Begriff des *Dynamischen Lastfaktors* (DLF) eingeführt. Dieser basiert in dieser Arbeit auf einem Spannungskriterium. So gilt die Struktur hier als dynamisch instabil, wenn der Quotient aus der berechneten maximalen Vergleichsspannung bezogen auf die Spannung $\sigma_{0,2}$ des verwendeten Materials den Wert 1 überschreitet. Der sich daraus ergebende Belastungswert stellt dann die dazugehörige kritische Last dar. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass z.B. im Vergleich zur *Southwell*-Methode oder zum *Budiansky-Roth*-Kriterium weitere Tragreserven der

Struktur berücksichtigt werden können.

Im Rahmen der Parameterstudien wurde zunächst an einem einfachen Flachstreifen der Einfluss der Stoßdauer, der Vorverformung, der Stoßform sowie der von unterschiedlichen Randbedingungen untersucht. Hierbei wurde festgestellt, dass bei längeren Stoßdauern die Strukturantwort zunehmend dem Belastungs-Zeitverlauf folgt und der Einfluss der Massenträgheit sich verringert; d.h., mit zunehmender Stoßdauer strebt hier die Strukturantwort gegen die statische Lösung.

Bei der Betrachtung des Einflusses der Vorverformung wurde beobachtet, dass mit zunehmender Vorverformungsamplitude die Kurvenverläufe in einem $w_{max}/h - F/F_{krit}$ -Diagramm steiler verlaufen, und somit eine Struktur mit geringerer Imperfektion im dynamischen Fall bis zum Erreichen des Stabilitätskriteriums höher belastet werden kann.

Im Rahmen der Analyse der Auswirkungen der Stoßform konnte festgestellt werden, dass bei jeweils gleichem Energieinhalt bei einem Dreiecksstoß eine geringere Lastaufnahmemöglichkeit der Struktur vorliegt, wohingegen bei einem stepförmigen Stoß ein einfaches Streifenprofil höher belastet werden kann. Wird demgegenüber allerdings die Stoßdauer konstant gehalten, verändert sich das Tragverhalten. Hier spiegelt nun der stepförmige Stoß die Stoßform wider, die die geringste Belastungsamplitude zulässt. Dem gegenüber steht der $\sin^2$-Stoß, der in diesem Fall den größten DLF-Faktor aufweist.

Bei dem Einfluss der Randbedingungen konnte festgestellt werden, dass je steifer diese ausgeführt sind, sich die zulässige äußere Belastung zu kleineren Lastverhältnissen hin verschiebt. Insgesamt betrachtet konnten so zunächst die bereits in der Literatur veröffentlichten grundsätzlichen Verhaltensweisen von Strukturen mit Hilfe der *FSM* nachvollzogen werden.

In der Anwendung auf U-Profile bestätigten sich die an dem einfachen Modell festgestellten Verhaltensweisen. So nimmt auch hier die dynamische Belastbarkeit mit zunehmender Stoßdauer zunächst stark ab und konvergiert dann langsam gegen die statische Versagenslast. Dabei erfolgt die größte Reduzierung der Lastaufnahmemöglichkeit noch bei Stoßdauern, die unterhalb der Periodendauer der ersten transversalen Biegeschwingung liegen. Wird zudem noch die Vorverformung vergrößert, reduziert dies die Belastbarkeit der Struktur zusätzlich.

Darüber hinaus konnte eine Abhängigkeit des Verhältnisses von Flanschhöhe zu Stegbreite b/a auf die Strukturantwort festgestellt werden. So liegt der dynamische Lastfaktor um so höher, je kleiner dieses Verhältnis ist. Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin begründet, dass mit größer werdendem Verhältnis b/a die kritische Spannung bereits durch lokales Beulen hervorgerufen wird, welches im Vergleich zu den globalen Versagensformen bei wesentlich kleineren Lastverhältnissen auftritt.

Darüber hinaus konnte beobachtet werden, dass Profile mit mittlerem und niedrigem Schlankheitsgrad zusätzlich zu dem bisherigen Verhalten eine Abhängigkeit des Verformungszustandes von der Belastungsamplitude aufweisen. Es wurde dabei festgestellt, dass bei Lastamplituden bis in die Größenordnung der statischen Versagenslast das Strukturverhalten durch ein Stauchen des Profils charakterisiert wird, wohingegen bei höheren Lasten die Querschnitte der Profile sich beginnen zu verdrehen. Hierdurch hervorgerufen nimmt das Profil nun einen energetisch günstigeren Zustand ein, wodurch eine weitere Laststeigerung bis zum Erreichen des Stabilitätskriteriums erzielt werden konnte. Mit dieser Änderung im Verformungsverhalten war gleichzeitig eine Umlagerung der maximal auftretenden Vergleichsspannungen vom Flansch in die Stege verbunden.

Weiterhin konnte eine Beeinflussung der Verformungszustände und der daraus resultierenden Spannungen durch die Richtung der eingeprägten Vorverformung beobachtet werden. So treten bevorzugt bei eingeprägten Vorverformungen in Flanschrichtung Biegeknicken und bei Vorverformungen in Stegrichtung Biegedrillknicken auf. Beiden globalen Versagensformen kann in Abhängigkeit des Verhältnisses Flanschhöhe/Stegbreite sekundäres lokales Beulen überlagert sein. Bei den Profilen mit kleinem Schlankheitsgrad trat primär Beulen auf, dem gemäß der oben beschriebenen Abhängigkeit ein sekundäres Biegeknicken oder Biegedrillknicken überlagert ist.

Eine abschließende Betrachtung der Verläufe der dynamischen Lastfaktoren führte zu dem Ergebnis, dass ein Unterschreiten der kritischen statischen Last im Vergleich zu den von PETRY [17] an Platten durchgeführten Untersuchungen hier nicht festgestellt werden konnte. Die Abnahme des dynamischen Lastfaktors erfolgt vielmehr als asymptotische Annäherung von oben an die statische Lösung. Dies entspricht jedoch der bereits von BREUER in [4] beschriebenen Feststellung.

Nach den erfolgten grundsätzlichen Untersuchungen an ausgewählten U-Profilen, wurde abschließend noch ein Vergleich mit den von HERTEL in [11] beschriebenen Verformungsbildern, die auf statischen Versuchen beruhen, durchgeführt. Obwohl keine Erkenntnisse über die in den Versuchsprofilen eingeprägten Vorverformungen vorlagen und bei HERTEL der Krafteinleitungsquerschnitt auf Grund der realisierten Einspannung eher als wölbbehindert angenommen werden kann, wurde dennoch eine relativ gute Übereinstimmung mit den von HERTEL experimentell ermittelten Verformungszuständen festgestellt. Im Ergebnis konnte hier somit gefolgert werden, dass sich das grundsätzliche Verformungsverhalten von U-Profilen, die einer Schlankheitsgradklasse zugeordnet werden können, im dynamischen und statischen Fall gleicht.

Insgesamt hat sich die hier verwendete semi-analytische *Finite Streifen Methode* auch in der Anwendung auf kurzzeitig axial belastete Strukturen als wirkungsvolles Hilfsmittel erwiesen. Im Rahmen der Weiterentwicklung dieses Verfahrens können die hier verwendeten Ansatzfunktionen in Streifenquerrichtung durch höherwertigere Ansätze ersetzt werden. Aufgrund der damit verbundenen größeren Anzahl an Freiheitsgraden führt dies einerseits zu größeren Elementmatrizen, der Rechenaufwand kann dafür aber über einen geringeren Diskretisierungsaufwand kompensiert werden. Weiterhin wäre die Implementierung eines B3-Spline Ansatzes anstelle der trigonometrischen Ansatzfunktionen in Streifenlängsrichtung denkbar. Von Vorteil hierbei ist eine höhere Flexibilität in der Definition möglicher Randbedingungen und die Möglichkeit der exakten numerischen Integration der Polynome mittels der *Gauss*-Quadratur . In einem weiteren Schritt könnten Superelemente, wie sie bereits in der Literaturübersicht dargestellt wurden, entwickelt und auf stringerversteifte Platten oder Schalen unter axialer Stoßbelastung angewendet werden. Zudem wäre die Erweiterung des hier vorgestellten Verfahrens um die Anteile der *Mindlin-Reissner*-Theorie unter Berücksichtigung der in [93] und [94] angegebenen Ansätze zur korrekten Abbildung der Schubspannungen über der Wandstärke denkbar sowie die Einführung eines nichtlinearen Materialsverhaltens. Ein weiterer Fortschritt in der Betrachtung von U-Profilen unter der hier vorliegenden Fragestellung könnte die Berücksichtigung von Faserverbundwerkstoffen und deren Beschreibung unter Temperatur- und Feuchteeinflüssen darstellen.

Literaturverzeichnis

Grundlagenliteratur

[1] ALTENBACH, J., H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart: Teubner-Verlag, 1994.

[2] BATHE, K. J. *Finite-Element-Methoden*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[3] BISAGNI, C. "Dynamic Buckling of Fiber Composite Shells under Impulsive Axial Compression." *Thin-Walled Structures* Vol. 43 (2005): 499-514.

[4] BREUER, O. "Beitrag zur Berechnung der dynamischen Stabilität von Leichtbauprofilen unter stoßartiger Axialbelastung." Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 1992.

[5] BUDIANSKY, B., J. W. HUTCHINSON, "Dynamic Buckling of Imperfection-Sensitive Structure.", In *Applied Mechanics: Proceedings of the 11th International Congress of Applied Mechanics, Munich (Germany) 1964*, herausgegeben von H. GÖRTLER und P. SORGER, 636-651. Berlin: Springer-Verlag, 1966.

[6] BUDIANSKI, B., R. S. ROTH. "Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Sperical Shells." In *NASA Technical Note D-1510: Collected Papers on Instability of Shell Structures*, herausgegeben von NASA Langley Research Center, 597-606. Hampton, VA: Langley Station, 1962.

[7] DEGENHARDT, R., H. KLEIN, A. KLING, H. TEMMEN, R. ZIMMERMANN. "Buckling and Postbuckling Analysis of Shells under Quasi-Static and Dynamic Loads." DLR Institute of Structural Mechanics. Braunschweig: Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 2002. http://www.dlr.de/fa/publikationen/2002/02_degenhardt.pdf.

[8] ESCHENAUER, H., N. OLHOFF, W. SCHNELL. *Applied Structural Mechanics: Fundamentals of Elasticity, Loadbearing Structures, Structural Optimization.* Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[9] FRIEDRICH, R. "Finite Strip Method: 30 Years, A Bibliography (1968-1998)." *Engineering Computations* Vol. 17, No. 1 (2000): 92-111.

[10] HAUPT, P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[11] HERTEL, H. *Leichtbau*, Berlin: Springer-Verlag, 1960.

[12] HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering.* Chichester: John Wiley & Sons, 2005.

[13] HUYAN, X., G. J. SIMITSES. “Dynamic Buckling of Imperfect Shells Under Axial Compression and Bending Moment.” *AIAA Journal*, Vol.35, No. 8 (1997): 1404-1411.

[14] KONING, C., J. TAUB. “Stoßartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei beidseits gelenkiger Lagerung.” *Luftfahrtforschung* Band 10, Nr. 2 (1933): 55-64.

[15] LOUGHLAN, J., J. RHODES. ”Interaction Buckling of Lipped Channel Columns.” In *Stability Problems in Engineering Structures and Components*, herausgegeben von T. H. RICHARDS und P. STANLEY, 179-198. London: Applied Science Publishers Ltd, 1978.

[16] MARSDEN, J. E., T. J. R. HUGHES. *Mathematical Foundation of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1994.

[17] PETRY, D. *Theoretische, numerische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Beulverhalten von Rechteckplatten*. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften Reihe 18, Nr. 277. Düsseldorf: VDI-Verlag, 2002.

[18] PETRY, D., G. FAHLBUSCH. “Dynamic Buckling of Thin Isotropic Plates Subjected to In-Plane Impact.” *Thin-Walled Structures* 38, (2000): 267-283.

[19] SINGER, J. J. ARBOCZ, T. WELLER. *Buckling Experiments, Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Vol. 1: Basic Concepts, Columns, Beams and Plates*. Chichester: John-Wiley & Sons, 1998.

[20] TANOV, R., A. TABIEI. “Static and Dynamic Buckling of Laminated Composite Shells.” *5th International LS-DYNA Users Conference*, 21.-22. Sept. 1998, Southfield, MI, USA. http://www.ase.uc.edu/~rtanov/Laminate_Buckling.pdf (accessed 02. Januar 2006).

[21] TAUB, J. “Stoßartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich.” *Luftfahrtforschung* Band 10, Nr. 2 (1933): 65-85.

[22] WELLER, T., H. ABRAMOVICH, Y. RONITH. “Dynamic Buckling Of Beams And Plates Subjected To Axial Impact.” *Computer & Structures* Vol.32, No. 3/4 (1989): 835 - 851.

[23] WIEDEMANN, J. *Leichtbau Band 1: Elemente*, Berlin: Springer Verlag, 1986.

[24] ZHANG, T., T. LIU, Y. ZHAO, J. LUO. “Nonlinear Dynamic Buckling of Stiffened Plates under In-Plane Impact Load.” *Journal of Zhejiang University SCIENCE* Vol. 5, Nr. 5 (2004): 609-617.

Lineare Statik

[25] CHEUNG, M. S. “Finite Strip Method and its Application to Slab and Girder Bridges.” Thesis, University of Calgary, 1969.

[26] CHEUNG, M. S. “Finite Strip Analysis of Structures.” PhD diss., University of Calgary, 1971.

[27] CHEUNG, M. S., W. LI. "Finite Strip Analysis of Continuous Structures." *Canadian. Journal of Civil Engineering* Vol. 15 (1988): 424-429.

[28] CHEUNG, M. S., W. LI. "Finite Strip Method Combined with other Numerical Methods for the Analysis of Plates." *Computers & Structures* Vol. 45, No. 1 (1992): 1-7.

[29] CHEUNG, M. S., G. AKHRAS, W. LI. "Progressive Failure Analysis of Composite Plates by the Finite Strip Method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 124 (1995): 49-61.

[30] CHEUNG, Y. K. "The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with two Opposite Simply Supported Ends." *The Institution of Civil Engineering* Vol. 40 (1968): 1-7.

[31] CHEUNG, Y. K. "Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs." *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE,* Vol. 94 (1968): 1365 - 1378.

[32] CHEUNG, Y. K. "Folded Plate Structures by Finite Strip Method." *Journal of the Structural Division, ASCE,* (1969): 2963 - 2979.

[33] CHEUNG, Y. K. "Analysis of Orthotropic Prismatic Folded Plates." *Proceedings IASS-Symposium of Folded Plates and Prismatic Structures*. Wien 1970.

[34] CHEUNG, Y. K. "Analysis of Box Girder Bridges by the Finite Strip Method." In *Concrete Bridge Design*, 357-378. Detroit: American Concrete Institute (ACI) Publications SP-26, 1971.

[35] CHEUNG, Y. K. *Finite Strip Method in Structural Analysis.* Oxford: Pergamon Press, 1976.

[36] CHEUNG, Y. K., L. G. THAM. *Finite Strip Method.* Boca Raton: CRC Press, 1998.

[37] CHULYA, A., R. L. MULLEN. "Assumed Strain Distributions for a Finite Strip Plate Bending Element Using Mindlin-Reissner Plate Theory." *Computers & Structures* Vol. 33, No. 2 (1989): 513-521.

[38] DEY, S. S., S. K. MALHOTRA. "Higher Order Finite Strip Analysis for Curved Bridge Decks." *Computers & Structures* Vol. 30, No. 6 (1988): 1359-1366.

[39] KHONG, P. W. "The Comparison of Lower Order And Higher Order Finite Strip Analysis in the Stability Probelms of Thin-Walled Structures." *Computers & Structures* Vol. 36, No. 1 (1990): 109-118.

[40] KHONG, P. W., J. RHODES, K. H. HOON. "Addition of New Features into the Finite Strip Formulation." *Computers & Structures* Vol. 41, No. 2 (1991): 355-362.

[41] LIN, Z., M. RAOOF. "Isoparametric Finite Strip Element." *Computers & Structures* Vol. 53, No. 4 (1994): 1015-1022.

[42] MALEKI, S. "Higher Order (HO3) Plane-Stress Finite Strip Program." *Computers & Structures* Vol. 60, No. 2 (1996): 315-327.

[43] MALEKI, S. “Higher Order (HO2) Plane-Stress Finite Strip Program.” *Computers & Structures* Vol. 60, No. 2 (1996): 329-336.

[44] POLYZOIS, D., L. J. GUILLORY. “Finite Strip Method for Analysis of Cold-Formed Purlins.” *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 117, No. 1 (1991): 184-204.

Nichtlineare Statik

[45] AZIZIAN, Z. G., D. J. DAWE. “Geometrically Nonlinear Analysis of Rectangular Mindlin Plates Using the Finite Strip Method.” *Computers & Structures* Vol. 21, No. 3 (1985): 423-436.

[46] BENITO, R., S. SRIDHARAN. “Mode Interaction in Thin-Walled Structural Members.” *Journal of Structural Mechanics* Vol. 12, No. 4 (1984-85): 517-542.

[47] BENITO, R., S. SRIDHARAN. “Interactive Buckling Analysis with Finite Strips.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 21 (1985): 145-161.

[48] BRADFORT, M. A., G. J. HANCOCK. “Interaction of Local and Lateral Buckling in Beams.” Research Report No. R 408, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, 1982.

[49] BRADFORT, M. A., M. AZHARI. “Buckling of Plates with Different End Conditions using the Finite Strip Method.” *Computer & Structures* Vol. 56, No. 1 (1995): 75-83.

[50] CHEUNG, M. S., W. LI. “A Modified Finite Strip Method for Geometrically Nonlinear Analysis of Plates.” *Computers & Structures* Vol. 33, No. 4 (1989): 1031-1035.

[51] CHEUNG, M. S., S. F. NG. “Finite Strip Analysis of Plates with Material Nonlinearity.” *Computers & Structures* Vol. 33, No. 1 (1989): 289-294.

[52] CHEUNG, M. S., G. AKHRAS, W. LI. “Stability Analysis of Anisotropic Laminated Composite Plates by Finite Strip Method.” *Computer & Structures* Vol. 49, No. 6 (1993): 963-967.

[53] CHEUNG, M. S., G. AKHRAS, W. LI. “A Finite Strip Method for Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures under Pure Bending.” *Strutural Engineering and Mechanics* Vol. 8, No. 3 (1999): 233-242.

[54] CHEUNG Y. K., S. C. FAN. “Static Analysis of Right Box Girder Bridges by Spline Finite Strip Method.” *Proc. Institution of Civil Engineering* PT2, Vol. 75(1983): 311-323.

[55] FAN S. C., Y. K. CHEUNG. “Analysis of Shallow Shells by Spline Finite Strip Method.” *Engineering Structures* Vol. 5 (1983): 255-262.

[56] DAWE, D.J., Z. G. AZIZIAN. “The Performance of Mindlin Plate Finite Strips in Geometrically Nonlinear Analysis.” *Computers & Structures* Vol. 23, No. 1 (1986): 1-14.

[57] DAWE, D. J., S. S. E. LAM. “Nonlinear Finite Strip Analysis of Rectangular Laminates under End Shortening, Using Classical Plate Theory.” *International Journal for Numerical Methods in Egineering* Vol. 35 (1992): 1087-1110.

[58] DAWE, D. J., S. S. E. LAM, Z. G. AZIZIAN . “Finite Strip Post-Local-Buckling Analysis of Composite Prismatic Plate Structures.” *Computers & Structures* Vol. 48, No. 6 (1993): 1011-1023.

[59] DAWE, D. J., S. WANG, S. S. E. LAM. “Finite Strip Analysis of Imperfect Laminated Plates under End Shortening and Normal Pressure.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 38 (1995): 4193-4205.

[60] DAWE, D. J. “Finite Strip Buckling and Postbuckling Analysis.” In *Buckling and Postbuckling of Composite Plates* herausgegeben von G. J. TURVEY und I. H. MARSHALL, 108-153. London: Chapman & Hall, 1995.

[61] FAN S. C. “Spline Finite Strip in Structural Analysis.” PhD Thesis, University of Hong Kong, 1982.

[62] GIERLINSKI, J. T., T. R. G. SMITH. “The Geometric Non-Linear Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strips.” Thin-Walled Structures Vol. 2 (1984): 27-50.

[63] HANCOCK, G. J. “Nonlinear Analysis of Thin Sections in Compression.” Research Report No. R 355, University of Sydney, School of Civil Engineering, 1979.

[64] HANCOCK, G. J. “Nonlinear Analysis of Thin-Walled I-Sections in Bending.” Research Report No. R 355, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, 1983.

[65] HANCOCK, G. J. “Nonlinear Analysis of Thin-Walled I-Sections in Bending.” In *Aspects of the Analysis of Plate Structures*, veröffentlicht von D. J. DAWE ET AL., 251-268. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[66] HANCOCK, G. J., A. J. DAVIDS, P. W. KEY, S. C. W. LAU, K. J. R. RASMUSSEN. “Recent Developments in the Buckling and Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structural Members.” *Thin-Walled Structures* 0263-8231 (1990): 309-338.

[67] HO, D. L. G. THAM. “Analysis of Plates by Finite Strip Method.” *Computer & Structures* Vol. 52, No. 6 (1994): 1283-1291.

[68] HUANG, M.-H., D. P. THAMBIRATNAM. “Analysis of Plate Resting on Elastic Supports and Elastic Foundation by Finite Strip Method.” *Computer & Structures* Vol. 79 (2001): 2547-2557.

[69] KAKOL, W. “Stability Analysis of Stiffened Plates by Finite Strips.” *Thin-Walled Structures* Vol. 10 (1990): 277-297.

[70] KWON, Y.B., G. J. HANCOCK. “A Nonlinear Elastic Spline Finite Strip Analysis for Thin-Walled Sections.”Research Report No. R607, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, 1989.

[71] KWON, Y.B., G. J. HANCOCK. “A Nonlinear Elastic Spline Finite Strip Analysis for Thin-Walled Sections.” Thin-Walled Structures Vol. 12, No. 4 (1991): 295-319.

[72] KWON, Y.B., G. J. HANCOCK. “Post-Buckling Analysis of Thin-Walled Channel Sections undergoing Local and Distortional Buckling.” Research Report No. R650, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, 1992.

[73] LAM, S. S. E., G. P. ZOU. “Load Increment Procedure for Post-Buckling Analysis of Laminated Plates under In-Plane Loads by Finite Strip Method.” *International Journal for numerical methods in Engineering* Vol. 49 (2000): 797-810.

[74] LAU, S.C.W., G. J. HANCOCK. “Buckling of Thin Flat-Walled Structures by a Spline Finite Strip Method.” Thin-Walled Structures Vol. 4 (1986): 269-294.

[75] MAEDA, Y., M. HAYASHI, K. MORI. “Finite Displacement Analysis of Thin Plates by Finite Strip Methods.” *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers* Vol. 316, No. 12 (1981): 23-36.

[76] MAHENDRAN, M., N. W. MURRAY. “Elastic Buckling Analysis of Ideal Thin-Walled Structures Under Combined Loading Using a Finite Strip Method.” *Thin-Walled Structures* Vol. 4 (1986): 329- 362.

[77] PLANK, R. J., W. H. WITTRICK. “Buckling under combined Loading of Thin, Flat-Walled Structures by a Complex Finite Strip Method.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 8, No. 2 (1974): 323-339.

[78] RAGON, S. A. “Development of a Global/Local Approach and a Geometrically Non-linear Local Panel Analysis for Structural Design.” Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.

[79] RASMUSSEN, K. J. R., G. J. HANCOCK. “Geometric Imperfections in Plated Structures Subject to Interaction between Buckling Modes.” Research Report No. R 541, University of Sydney, School of Civil and Mining Engineering, 1987.

[80] SCHÖPPACH, A. *Eine Untersuchung zum gleichzeitigen Knicken und Beulen dünnwandiger prismatischer Stäbe mit Hilfe der Methode der finiten Streifen*. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften Reihe 1, Nr. 97. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1983.

[81] SMITH, T. R. G., S. SRIDHARAN. “A Finite Strip Method for the Post-Locally-Buckled Analysis of Plate Structures.” *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 20, No. 12 (1978): 833-842.

[82] SHEIKH, A. H., M. MUKHOPADHYAY. “Free Vibration Analysis of Stiffened Plates with Arbitrary Planform by the General Spline Finite Strip Method.” *Journal of Sound and Vibration* Vol. 162, No. 1 (1993): 147-164.

[83] SHEIKH, A. H., M. MUKHOPADHYAY. “Geometric Nonlinear Analysis of Stiffned Plates by Spline Finite Strip Method.” *Computer & Structures* Vol. 76 (2000): 765-785.

[84] SRIDHARAN, S.; T. R. G. SMITH. "Postbuckling Analyses with Finite Strips." *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE,* Vol. 107, No. EM5 (1981): 869-888.

[85] SRIDHARAN, S. "Doubly Symmetric Interactive Buckling of Plate Structures." *International Journal of Solids and Structures* Vol. 19, No. 7 (1983): 625-641.

[86] SRIDHARAN, S., M. A. ALI. "An Improved Interactive Buckling Analysis of Thin-Walled Columns Having Doubly Symmetric Sections." *International Journal of Solids and Structures* Vol. 22, No. 4 (1986): 429-443.

[87] WANG, S., D. J. DAWE. "Finite Strip Large Deflection and Post-Overall-Buckling Analysis of Diaphragm-Supported Plate Structures." *Computers & Structures* Vol. 61, No. 1 (1996): 155-170.

[88] ZOU, G., P. QIAO. "Higher Order Finite Strip Method for Postbuckling Analysis of Imperfect Composite Plates." Journal of Engineering Mechanics, ASCE Vol. 128 No. 9 (2002): 1008-1015.

Dynamik

[89] AU, F. T. K., Y. K. CHEUNG. "Free Vibration and Stability Analysis of Shells by the Isoparametric Spline Finite Strip Method." *Thin-Walled Structures* Vol. 24 (1996): 53-82.

[90] CHAN, H. C., O. FOO. "Vibration of Rectangular Plates Subjected to In-Plane Forces by the Finite Strip Method." *Journal of Sound and Vibration* Vol. 64, No. 4 (1979): 583-588.

[91] CHEN, J., D. J. DAWE. "Linear Transient Analysis of Rectangular Laminated Plates by Finite Strip-Mode Superposition Method." *Composite Structures* Vol. 35 (1996): 213-228.

[92] CHEN, J., D. J. DAWE, S. WANG. "Nonlinear Transient Analysis of Rectangular Composite Laminated Plates." *Composite Structures* Vol. 49 (2000): 129-139.

[93] CHEUNG, M. S., W. LI. "Static and Vibration Analysis of Anisotropic Composite Laminates by Finite Strip Method." *International Journal of Solids and Structures* Vol. 30., No. 22 (1993): 3129-3137.

[94] CHEUNG, M. S. "Vibration and Stability Analysis of Thick Anisotropic Composite Plates by Finite Strip Method." *Structural Engineering and Mechanics* Vol. 3, No. 1 (1995): 49-60.

[95] CHEUNG, Y. K., M. S. CHEUNG. "Flexural Vibrations of Rectangular and Other Polygonal Plates." *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* Vol. 97, No. EM2 (1971): 391-411.

[96] CHEUNG, Y. K., W. Y. LI, L. G. THAM. "Free Vibration Analysis of Singly Curved Shell by Spline Finite Strip Method." *Journal of Sound and Vibration* Vol. 128, No. 3 (1989): 411-422.

[97] CHEUNG, Y. K., D. S. ZHU, V. P. IU. “Nonlinear Vibration of Thin Plates with Initial Stress by Spline Finite Strip Method.” *Thin-Walled Structures* Vol. 32 (1998): 275-287.

[98] CRAIG, T. J., D. J. DAWE. “Vibration of Shear-Deformable Laminated Plate Structures by the Finite Strip Method.” *Computers & Structures* Vol. 27, No. 1 (1987): 61-72.

[99] DAWE, D. J. “Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates.” *Journal of Sound and Vibration* Vol. 59 (1978): 441-452.

[100] DAWE, D. J., D. TAN. “Finite Strip Buckling and Free Vibration Analysis of Stepped Rectangular Composite Laminated Plates.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 46 (1999): 1313-1334.

[101] DAWE, D. J. “Use of the Finite Strip Method in Predicting the Behaviour of Composite Laminated Structures.” *Composite Structures* Vol. 57 (2002): 11-36.

[102] FILIATRAULT, A., R. O. FOSCHI. “Finite-Strip Free-Vibration Analysis of Wood Floors.” Journal of Structural Engineering Vol. 116, No. 8 (1990): 2127-2142.

[103] FOLZ, B., R. O. FOSCHI. “Coupled Vibrational Response of Floor Systems with Occupants.” *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 117, No. 4 (1991): 872-892.

[104] FOSCHI, R. O., A. GUPTA. “Reliability of Floors under Impact Vibrations.” *Canadian Journal of Civil Engineering* Vol. 14 (1987): 683-689.

[105] HINTON, E., M. ÖZAKÇA, N. V. R. RAO. “Free Vibration Analysis and Shape Optimization of Variable Thickness Plates, Prismatic Folded Plates and Curved Shells, Part 1: Finite Strip Formulation.” *Journal of Sound and Vibration* Vol. 181, No. 4 (1995): 553-566.

[106] HOULSTON, R. “Finite Strip Analysis of Plates and Stiffened Panels Subjected to Air-Blast Loads.” *Computers & Structures* Vol. 32, No. 3/4 (1989): 647-659.

[107] HU, X. J. WAUER. “Vibration Analysis of Stiffened Cylindrical Structures with Addition of Disconnected Honeycomb Panels.” *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* Vol. 73 (1993): 398-400.

[108] HU, X. “Free Vibration Analysis of Symmetrical Cylindrical Honeycomb Panels byUsing the Finite Strip Method.” *Journal of Vibration and Control* Vol. 3 (1997): 19-32.

[109] LI, W. Y., G. THAM, Y. K. CHEUNG, S. C. FAN. “Free Vibration Analysis of Doubly Curved Shells by Spline Finite Strip Method.” *Journal of Sound and Vibration* Vol. 140 No. 1 (1990): 39-53.

[110] KHALIL, M. R., M. D. OLSON, D. L. ANDERSON. “Nonlinear Dynamic Analysis of Stiffened Plates.” *Computers & Structures* Vol. 29, No. 6 (1988): 929-941.

[111] MOHD, S., D. J. DAWE. “Finite Strip Vibration Analysis of Composite Prismatic Shell Structures with Diaphragm Ends.” *Computers & Structures* Vol. 49, No. 5 (1993): 753-765.

[112] ÖZAKÇA, M., E. HINTON, N. V. R. RAO. “Free Vibration Analysis and Shape Optimization of Prismatic Folded Plates and Shells with Circular Curved Planform.” *International Journal for Numeric Methods in Engineering* Vol. 37, (1994): 1713-1739.

[113] SMITH, J. W. “Finite Strip Analysis of the Dynamic Response of Beam and Slab Highway Bridges.” *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* Vol. 1 (1973): 357-370.

[114] TAN, D., D. J. DAWE. “General Spline Strip Analysis for Buckling and Vibration of Prismatic Composite Laminated Plate and Shell Structures.” *Composites Part B* Vol. 29B (1998): 377-389.

[115] WANG, W. J., K. LIN. “Free Vibration of Laminated Plates Using a Finite Strip Method Based on a Higher-Order Plate Theory.” *Computer & Structures* Vol. 53, No. 6 (1994): 1281-1289.

Numerische Lösungsverfahren

[116] CRISFIELD, M. A. “A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through".” *Computers & Structures* Vol. 13 (1981): 55-62.

[117] CRISFIELD, M. A. “An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 19 (1983): 1269-1289.

[118] POWELL, G., J. SIMONS. “Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures.” International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 17 (1981): 1455-1467.

[119] RICKS, E. “An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems.” *International Journal of Solids and Structures* Vol. 15 (1979): 524-551.

Anhang A Die Verzerrungs - Verkrümmungsmatrix

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & \dfrac{\partial w_0}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial u_0}{\partial y} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y} & \dfrac{\partial w_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y} & \dfrac{\partial w_0}{\partial y} & \dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}
$$

Anhang B Übersicht über mögliche Verformungsansätze

Y. K. CHEUNG:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{k}^{k_{max}} \cos\left(k\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_k^u(y)\ , \quad k = 1,3,5,\ldots \\
v(x,y) &= \sum_{m}^{m_{max}} \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_m^v(y)\ , \quad m = 1,3,5,\ldots \\
w(x,y) &= \sum_{n}^{n_{max}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_n^w(y)\ , \quad n = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Y. K. CHEUNG:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \left(1 - \frac{2x}{l}\right)\ \Phi_0^u(y) + \sum_{k}^{k_{max}} \cos\frac{(k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y)\ , \quad k = 1,3,5,\ldots \\
v(x,y) &= 1\cdot\Phi_0^v(y) + \sum_{m}^{m_{max}} \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_m^v(y)\ , \quad m = 1,3,5,\ldots \\
w(x,y) &= \sum_{n}^{n_{max}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_n^w(y)\ , \quad n = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

D. J. DAWE ET AL.:

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \left(\frac{l}{2} - x\right)\ \Phi_0^u(y) + \sum_{k}^{k_{max}} \sin\frac{(k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y)\ , \quad k = 2,4,6,\ldots \\
v(x,y) &= \sum_{m}^{m_{max}} \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_m^v(y)\ , \quad m = 1,3,5,\ldots \quad \textit{für}\ \tau_{xy} \neq 0 \\
v(x,y) &= \sum_{m}^{m_{max}} \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_m^v(y)\ , \quad m = 0,2,4,\ldots \quad \textit{für}\ \tau_{xy} = 0 \\
w(x,y) &= \sum_{n}^{n_{max}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right)\ \Phi_n^w(y)\ , \quad n = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= (1 - \frac{2x}{l})\ \Phi_0^u(y) + \sum_k^{k_{max}} \sin\frac{(k\pi x}{l})\ \Phi_k^u(y)\ , \quad k = 2,4,6,\ldots \\
v(x,y) &= 1\cdot\Phi_0^v(y) + \sum_m^{m_{max}} \sin(m\pi\frac{x}{a})\ \Phi_m^v(y)\ , \quad m = 1,3,5,\ldots \\
w(x,y) &= 1\cdot\Phi_0^w(y) + \sum_n^{n_{max}} \sin(n\pi\frac{x}{a})\ \Phi_n^w(y)\ , \quad n = 1,3,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Anhang C Die Formfunktionsmatrix

$$\boldsymbol{N_m} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & 0 & N_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & 0 & N_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} & 0 & 0 & N_{37} & N_{38} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = (1 - \eta)\, g_m^u$$

$$N_{15} = \eta\, g_m^u$$

$$N_{22} = (1 - \eta)\, g_m^v$$

$$N_{26} = \eta\, g_m^v$$

$$N_{33} = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\, g_m^w$$

$$N_{34} = y\,(1 - 2\eta + \eta^2)\, g_m^w$$

$$N_{37} = (3\eta^2 - 2\eta^3)\, g_m^w$$

$$N_{38} = y\,(\eta^2 - \eta)\, g_m^w$$

Anhang D Die lineare Verzerrungs - Verschiebungsmatrix

$$\boldsymbol{B}_{L_m} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & B_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & 0 & 0 & B_{35} & B_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & B_{47} & B_{48} \\ 0 & 0 & B_{53} & B_{54} & 0 & 0 & B_{57} & B_{58} \\ 0 & 0 & B_{63} & B_{64} & 0 & 0 & B_{67} & B_{68} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = (1 - \eta)\, g'^{u}_{m}$$

$$B_{15} = \eta\, g'^{u}_{m}$$

$$B_{22} = -\frac{1}{b}\, g^{v}_{m}$$

$$B_{26} = \frac{1}{b}\, g^{v}_{m}$$

$$B_{31} = -\frac{1}{b}\, g^{u}_{m}$$

$$B_{32} = (1 - \eta)\, g'^{v}_{m}$$

$$B_{35} = \frac{1}{b}\, g^{u}_{m}$$

$$B_{36} = \eta\, g'^{vv}_{m}$$

$$B_{43} = -(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\, g''^{w}_{m}$$

$$B_{44} = -y(1 - 2\eta + \eta^2)\, g''^{w}_{m}$$

$$B_{47} = -(3\eta^2 - 2\eta^3)\, g''^{w}_{m}$$

$$B_{48} = -y(\eta^2 - \eta)\, g''^{w}_{m}$$

$$B_{53} = -\frac{6}{b^2}(-1 + 2\eta)\, g^{w}_{m}$$

$$B_{54} = -\frac{2}{b}(-2 + 3\eta)\, g^{w}_{m}$$

$$B_{57} = -\frac{6}{b^2}(1 - 2\eta)\, g^{w}_{m}$$

$$B_{58} = -\frac{2}{b}(3\eta - 1)\, g^{w}_{m}$$

$$B_{63} = -\frac{12}{b}(-\eta + \eta^2)\, g'^{w}_{m}$$

$$B_{64} = -2(1 - 4\eta + 3\eta^2)\, g'^{w}_{m}$$

$$B_{67} = -\frac{12}{b}(\eta - \eta^2)\, g'^{w}_{m}$$

$$B_{68} = -2(3\eta^2 - 2\eta)\, g'^{w}_{m}$$

Anhang E Die nichtlineare Verzerrungs - Verschiebungsmatrix

$$\boldsymbol{B}_{N_m} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}\,(1 - \eta)\,g'^{u}_{m} \qquad B_{21} = \frac{\partial u}{\partial y}\,(-\frac{1}{b})\,g^{u}_{m}$$

$$B_{12} = \frac{\partial v}{\partial x}\,(1 - \eta)\,g'^{v}_{m} \qquad B_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}\,(-\frac{1}{b})\,g^{v}_{m}$$

$$B_{13} = \frac{\partial w}{\partial x}\,(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\,g'^{w}_{m} \qquad B_{23} = \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{6}{b}(\eta^2 - \eta)\,g^{w}_{m}$$

$$B_{14} = \frac{\partial w}{\partial x}\,y(1 - 2\eta + \eta^2)\,g'^{w}_{m} \qquad B_{24} = \frac{\partial w}{\partial y}\,(1 - 4\eta + 3\eta^2)\,g^{w}_{m}$$

$$B_{15} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\eta\,g'^{u}_{m} \qquad B_{25} = \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{1}{b}\,g^{u}_{m}$$

$$B_{16} = \frac{\partial v}{\partial x}\,\eta\,g'^{v}_{m} \qquad B_{26} = \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{1}{b}\,g^{v}_{m}$$

$$B_{17} = \frac{\partial w}{\partial x}\,(3\eta^2 - 2\eta^3)\,g'^{w}_{m} \qquad B_{27} = \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{6}{b}(\eta - \eta^2)\,g^{w}_{m}$$

$$B_{18} = \frac{\partial w}{\partial x}\,y(\eta^2 - \eta)\,g'^{w}_{m} \qquad B_{28} = \frac{\partial w}{\partial y}\,(3\eta^2 - 2\eta)\,g^{w}_{m}$$

$$B_{31} = \frac{\partial u}{\partial y}(1-\eta)g'^{u}_{m} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{b}\right)g^{u}_{m}$$

$$B_{32} = \frac{\partial v}{\partial y}(1-\eta)g'^{v}_{m} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{1}{b}\right)g^{v}_{m}$$

$$B_{33} = \frac{\partial w}{\partial y}(1-3\eta^2+2\eta^3)g'^{w}_{m} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{6}{b}(\eta^2-\eta)g^{w}_{m}$$

$$B_{34} = \frac{\partial w}{\partial y}y(1-2\eta+\eta^2)g'^{w}_{m} + \frac{\partial w}{\partial x}(1-4\eta+3\eta^2)g^{w}_{m}$$

$$B_{35} = \frac{\partial u}{\partial y}\eta g'^{u}_{m} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{b}g^{u}_{m}$$

$$B_{36} = \frac{\partial v}{\partial y}\eta g'^{v}_{m} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{b}g^{v}_{m}$$

$$B_{37} = \frac{\partial w}{\partial y}(3\eta^2-2\eta^3)g'^{w}_{m} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{6}{b}(\eta-\eta^2)g^{w}_{m}$$

$$B_{38} = \frac{\partial w}{\partial y}y(\eta^2-\eta)g'^{w}_{m} + \frac{\partial w}{\partial x}(3\eta^2-2\eta)g^{w}_{m}$$

Anhang F Die lineare Steifigkeitsmatrix

Die lineare Elementsteifigkeitsmatrix kann mittels folgender Notation durch Untermatrizen dargestellt werden:

$$\boldsymbol{K}_{L_{mn}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{K}_2 \\ sym. & \boldsymbol{K}_3 \end{bmatrix}_{mn}$$

Mit den Untermatrizen

$$\boldsymbol{K}_{1_{mn}} = \frac{1}{420b^3} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 140b^4\, D_x^p\, I_1 \\ +\, 420b^2\, D_{xy}^p\, I_2 \end{matrix} & \begin{matrix} -\, 210b^3\, D_1^p\, I_3 \\ -\, 210b^3\, D_{xy}^p\, I_4 \end{matrix} & 0 & 0 \\ & \begin{matrix} 420b^2\, D_y^p\, I_7 \\ +\, 140b^4\, D_{xy}^p\, I_8 \end{matrix} & 0 & 0 \\ & & \begin{matrix} 5040\, D_y^b\, I_7 \\ -\, 504b^2\, D_1^b\, I_9 \\ -\, 504b^2\, D_1^b\, I_{10} \\ +\, 156b^4\, D_x^b\, I_{11} \\ +\, 2016b^2\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} & \begin{matrix} 2520b\, D_y^b\, I_7 \\ -\, 462b^3\, D_1^b\, I_9 \\ -\, 42b^3\, D_1^b\, I_{10} \\ +\, 22b^5\, D_x^b\, I_{11} \\ +\, 168b^3\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} \\ sym. & & & \begin{matrix} 1680b^2\, D_y^b\, I_7 \\ -\, 56b^4\, D_1^b\, I_9 \\ -\, 56b^4\, D_1^b\, I_{10} \\ +\, 4b^6\, D_x^b\, I_{11} \\ +\, 224b^4\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{K}_{2_{mn}} = \frac{1}{420b^3}
\begin{bmatrix}
\begin{matrix} 70b^4\, D_x^p\, I_1 \\ -\,420b^2\, D_{xy}^p\, I_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 210b^3\, D_1^p\, I_3 \\ -\,210b^3\, D_{xy}^p\, I_4 \end{matrix} & 0 & 0 \\
\begin{matrix} -\,210b^3\, D_1^p\, I_4 \\ +\,210b^3\, D_{xy}^p\, I_6 \end{matrix} & \begin{matrix} -\,420b^2\, D_y^p\, I_7 \\ +\,70b^4\, D_{xy}^p\, I_8 \end{matrix} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} -\,5040\, D_y^b\, I_7 \\ +\,504b^2\, D_1^b\, I_9 \\ +\,504b^2\, D_1^b\, I_{10} \\ +\,54b^4\, D_x^b\, I_{11} \\ -\,2016b^2\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} & \begin{matrix} 2520b\, D_y^b\, I_7 \\ -\,42b^3\, D_1^b\, I_9 \\ -\,42b^3\, D_1^b\, I_{10} \\ -\,13b^5\, D_x^b\, I_{11} \\ +\,168b^3\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} \\
0 & 0 & \begin{matrix} 2520b\, D_y^b\, I_7 \\ +\,42b^3\, D_1^b\, I_9 \\ +\,42b^3\, D_1^b\, I_{10} \\ +\,13b^5\, D_x^b\, I_{11} \\ -\,168b^3\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} & \begin{matrix} 840b^2\, D_y^b\, I_7 \\ +\,14b^4\, D_1^b\, I_9 \\ +\,14b^4\, D_1^b\, I_{10} \\ -\,3b^6\, D_x^b\, I_{11} \\ -\,56b^4\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{K}_{3_{mn}} = \frac{1}{420b^3}
\begin{bmatrix}
\begin{matrix} 140b^4\, D_x^p\, I_1 \\ +\,420b^2\, D_{xy}^p\, I_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 210b^3\, D_1^p\, I_3 \\ +\,210b^3\, D_{xy}^p\, I_4 \end{matrix} & 0 & 0 \\
 & \begin{matrix} +\,420b^2\, D_y^p\, I_7 \\ +\,140b^4\, D_{xy}^p\, I_8 \end{matrix} & 0 & 0 \\
 & & \begin{matrix} 5040\, D_y^b\, I_7 \\ -\,504b^2\, D_1^b\, I_9 \\ -\,504b^2\, D_1^b\, I_{10} \\ +\,156b^4\, D_x^b\, I_{11} \\ +\,2016b^2\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} & \begin{matrix} -\,2520b\, D_y^b\, I_7 \\ +\,462b^3\, D_1^b\, I_9 \\ +\,42b^3\, D_1^b\, I_{10} \\ -\,22b^5\, D_x^b\, I_{11} \\ -\,168b^3\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix} \\
sym. & & & \begin{matrix} 1680b^2\, D_y^b\, I_7 \\ -\,56b^4\, D_1^b\, I_9 \\ -\,56b^4\, D_1^b\, I_{10} \\ +\,4b^6\, D_x^b\, I_{11} \\ +\,224b^4\, D_{xy}^b\, I_8 \end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

Die hier verwendeten Integralabkürzungen $\boldsymbol{I}_1 - \boldsymbol{I}_{11}$ sind in Anhang A8 zusammengestellt

Anhang G Die Massenmatrix

$$
M_{mn} = \rho\, h \begin{bmatrix}
\frac{b}{3} I_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{6} I_2 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{b}{3} I_7 & 0 & 0 & 0 & \frac{b}{6} I_7 & 0 & 0 \\
 & & \frac{13b}{35} I_7 & \frac{11b^2}{210} I_7 & 0 & 0 & \frac{9b}{70} I_7 & \frac{-13b^2}{420} I_7 \\
 & & & \frac{b^3}{105} I_7 & 0 & 0 & \frac{13b^2}{420} I_7 & \frac{-3b^3}{420} I_7 \\
 & & & & \frac{b}{3} I_2 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \frac{b}{3} I_7 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \frac{13b}{35} I_7 & \frac{-11b^2}{210} I_7 \\
sym. & & & & & & & \frac{b^3}{105} I_7
\end{bmatrix}
$$

Anhang H Integralzusammenstellung für die linearen Matrizen

$$I_1 = \int_0^a g'^u_m \, g'^u_n \, dx \quad ;$$

$$I_2 = \int_0^a g^u_m \, g^u_n \, dx \quad ;$$

$$I_3 = \int_0^a g'^u_m \, g^v_n \, dx \quad ;$$

$$I_4 = \int_0^a g^u_m \, g'^v_n \, dx \quad ;$$

$$I_5 = \int_0^a g^v_m \, g'^u_n \, dx \quad ;$$

$$I_6 = \int_0^a g'^v_m \, g^u_n \, dx \quad ;$$

$$I_7 = \int_0^a g^v_m \, g^v_n \, dx \quad ;$$

$$I_8 = \int_0^a g'^v_m \, g'^v_n \, dx \quad ;$$

$$I_9 = \int_0^a g''^w_m \, g^w_n \, dx \quad ;$$

$$I_{10} = \int_0^a g^w_m \, g'^w_n \, dx \quad ;$$

$$I_{11} = \int_0^a g''^w_m \, g''^w_n \, dx \quad .$$

Anhang I Die Ableitung der Tangentensteifigkeitsmatrix

In Kapitel 2.4 wurde die nichtlineare Bewegungsgleichung mit Hilfe der zuvor abgeleiteten Systemmatrizen aufgestellt. Als Lösungsvorschrift wurde das *Newmark*-Verfahren ausgewählt und in Kapitel 2.5.2 vorgestellt. Durch die implizite Vorgehensweise erlaubt dieses Verfahren die Wahl größerer Zeitinkremente. Dies hat jedoch zur Folge, dass in jedem Zeitschritt die Lösung iterativ ermittelt werden muss. Kernelement des nichtlinearen Lösungsverfahrens ist dabei die Linearisierung der Bewegungsgleichung. Dies wird dadurch erreicht, dass Gleichung (2.83)

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}) \equiv \left(\frac{4}{\Delta t^2} \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \right) \boldsymbol{d}^{\,t+\Delta t} - \boldsymbol{M} \left(\frac{4}{\Delta t^2} \boldsymbol{d}^{\,t} + \frac{4}{\Delta t} \dot{\boldsymbol{d}}^{\,t} + \ddot{\boldsymbol{d}}^{\,t} \right) - \boldsymbol{F}(t)^{\,t+\Delta t} = \boldsymbol{0} \tag{I.1}$$

in eine *Taylor*-Reihe um den Punkt $\boldsymbol{u}_{k-1}^{\Delta t+t}$ entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen wird.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}}^{\Delta t+t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k-1}}^{\Delta t+t}) + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d}^{\,\Delta t+t})}{\partial \boldsymbol{d}^{\,\Delta t+t}} \Big|_{\boldsymbol{d}_{k-1}^{\Delta t+t}} \Delta \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}}^{\Delta t+t} = \boldsymbol{0} \tag{I.2}$$

Im Rahmen der Berechnung des zweiten Summanden der *Taylor*-Reihe ergibt sich ein Ausdruck der Form

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \left(\boldsymbol{K}\, \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t} \right), \tag{I.3}$$

der die Tangentensteifigkeitsmatrix definiert und durch Rückwärtseinsetzen der Gleichungen (2.68) und (2.71) in die Form

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \int_V \bar{\boldsymbol{B}}^{\,T} \boldsymbol{\sigma}\, dV \tag{I.4}$$

überführt werden kann. Nach Auswertung der Ableitung spaltet sich Gleichung (I.4) in zwei Anteile auf

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \int_V \bar{\boldsymbol{B}}^{\,T} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}}\, dV + \int_V \frac{\partial \bar{\boldsymbol{B}}^{\,T}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\sigma}\, dV = \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}), \tag{I.5}$$

wobei der zweite Term die von der Spannung abhängige geometrische Steifigkeitsmatrix abbildet.

Zunächst wird jedoch der erste Summand aus Gleichung (I.5) bestimmt. Hierzu wird die darin enthaltene Spannung durch Gleichung (2.67) ausgedrückt und der Gesamtausdruck differenziert. Nach Ausmultiplizieren und Sortieren der Einzelkomponenten, lässt sich der erste Summand mit Gleichung (I.6) ausdrücken. Dabei sind alle Größen, die mit dem Index N versehen sind, nichtlinear und hängen von den Verformungen ab.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \boldsymbol{K}_L + \boldsymbol{K}_N = \\
&\int_V \boldsymbol{B}_L^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_L\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_L^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N\, dV + \\
&\int_V \boldsymbol{B}_L^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N^0\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_N^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_L\, dV + \\
&\int_V \boldsymbol{B}_N^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_N^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N^0\, dV + \\
&\int_V \boldsymbol{B}_N^{0\,T} \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_L\, dV + \int_V \boldsymbol{B}_N^{0^T} \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N\, dV + \\
&\int_V \boldsymbol{B}_N^{0^T} \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}_N^0\, dV
\end{aligned}
\tag{I.6}
$$

Wie bereits oben ausgeführt, gibt der zweite Summand in (I.5) die geometrische Steifigkeitsmatrix an. Bei hinreichend kleiner Diskretisierung in der *FEM* können die Spannungen innerhalb eines Elementes als konstant angenommen werden. Bei der *FSM* hingegen kann diese Annahme auf Grund der Elementgröße nicht mehr getroffen werden. So macht es diese Tatsache erforderlich, die Spannungen ebenfalls in Abhängigkeit der Verformungen bzw. durch die Freiheitsgrade der Knotenlinien zu beschreiben. Die Formulierung der geometrischen Steifigkeitsmatrix geschieht nun der Art, dass diese durch geeignete Umformungen ebenfalls in eine Darstellungsform analog Gleichung (I.6) gebracht werden kann. Um dies zu erreichen, wird die nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $\boldsymbol{B}_N$ in ein Produkt zweier Matrizen zerlegt.

$$
\boldsymbol{B}_N = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{G} \tag{I.7}
$$

Die darin enthaltenen Ausdrücke sind dabei wie folgt definiert:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}
\end{bmatrix}
\tag{I.8}
$$

und

$$\boldsymbol{G} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial x} \; \frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial x} \; \frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x} \; \frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial y} \; \frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial y} \; \frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial y} \right]^T \tag{I.9}$$

Werden die Gleichungen (I.8) und (I.9) nun in den zweiten Summanden von Gleichung (I.5) eingesetzt, ergibt sich der in Beziehung (I.10) beschriebene Zusammenhang.

$$\boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \int_V \frac{\partial \bar{\boldsymbol{B}}^T}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\sigma}\, dV = \boldsymbol{G}^T \frac{\partial \boldsymbol{A}^T}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\sigma}\, dV \tag{I.10}$$

Durch die Einführung der mit den Spannungskomponenten besetzen Matrix $\boldsymbol{S}$ und des mit den Ableitungen der Verformungsansätzen besetzten Vektors $\boldsymbol{\Phi}$ kann gezeigt werden, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}^T}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \tag{I.11}$$

Dabei ist die Matrix $\boldsymbol{S}$ als

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{I.12}$$

definiert und der Vektor $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}}$ berechnet sich zu

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T = \boldsymbol{G} \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial \boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}} \; . \tag{I.13}$$

Werden nun diese dargestellten Zusammenhänge in (I.11) eingesetzt, lautet die geometrische Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{K}_{\sigma}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \int_{V} \boldsymbol{G}^{T}\ \boldsymbol{S}\ \boldsymbol{G}\, dV. \tag{I.14}$$

Die Matrix $\boldsymbol{G}$ ist in Anhang J angegeben. Die gesamte Tangentensteifigkeitsmatrix setzt sich somit aus drei Termen zusammen und lässt sich mittels (I.15) berechnen.

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) = \boldsymbol{K}_{L} + \boldsymbol{K}_{N}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) + \boldsymbol{K}_{\sigma}(\boldsymbol{d}_{k-1}^{t+\Delta t}) \tag{I.15}$$

Anhang J Die Matrix G

$$G_m = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 & G_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 & 0 & 0 & G_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} & G_{34} & 0 & 0 & G_{37} & G_{38} \\ G_{41} & 0 & 0 & 0 & G_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{52} & 0 & 0 & 0 & G_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{63} & G_{64} & 0 & 0 & G_{67} & G_{68} \end{bmatrix}$$

$$G_{11} = (1 - \eta)\, g'^{u}_{m}$$

$$G_{15} = \eta\, g'^{u}_{m}$$

$$G_{22} = (1 - \eta)\, g'^{v}_{m}$$

$$G_{26} = \eta\, g'^{v}_{m}$$

$$G_{33} = (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3)\, g'^{w}_{m}$$

$$G_{34} = y\,(1 - 2\eta + \eta^2)\, g'^{w}_{m}$$

$$G_{37} = (3\eta^2 - 2\eta^3)\, g'^{w}_{m}$$

$$G_{38} = y\,(\eta^2 - \eta)\, g'^{w}_{m}$$

$$G_{41} = -\frac{1}{b}\, g^{u}_{m}$$

$$G_{45} = \frac{1}{b}\, g^{u}_{m}$$

$$G_{52} = -\frac{1}{b}\, g^{v}_{m}$$

$$G_{56} = \frac{1}{b}\, g^{v}_{m}$$

$$G_{63} = \frac{6}{b}(\eta^2 - \eta)\, g^{w}_{m}$$

$$G_{64} = (1 - 4\eta + 3\eta^2)\, g^{w}_{m}$$

$$G_{67} = \frac{6}{b}(\eta - \eta^2)\, g^{w}_{m}$$

$$G_{68} = (3\eta^2 - 2\eta)\, g^{w}_{m}$$

Curriculum Vitae

EKKEHARD STEMMER
geb. am 21. August 1963 in Überlingen/Bodensee

08/1970 - 07/1974	*Bismarck-Grundschule* Stuttgart/Feuerbach
08/1974 - 07/1980	*Friedrich-Abel-Gymnasium* Vaihingen/Enz
08/1980 - 07/1983	*Technisches Gymnasium* Bietigheim/Bissingen
07/1983 - 09/1984	*Eintritt in die Bundeswehr, Ausbildung zum Offizier der Luftwaffe* Roth, Fürstenfeldbruck, Memmingen
10/1984 - 12/1987	*Studium der Luft- und Raumfahrtechnik* Universität der Bundeswehr München
01/1987 - 09/1990	*Technischer Offizier* Jagdbombergeschwader 33, Cochem
10/1990 - 03/1995	*Wissenschaftlicher Mitarbeiter* Universität der Bundeswehr München, Institut für Leichtbau
12/1994 - 03/1995	*Ausbildung zum Stabsoffizier* Führungsakademie, Hamburg
04/1995 - 11/1996	*Inspektionschef* Technische Schule der Luftwaffe 3, Faßberg
12/1996 - 11/1998	*Staffelchef* Jagdbombergeschwader 38 “Friesland”, Schortens
12/1998 - 09/2001	*Dezernent Neue Waffensysteme TIGER/NH 90* Luftwaffenamt, Köln
10/2001 - 06/2004	*S3 Stabsoffizier und stv. Kommandeur Technische Gruppe* Jagdbombergeschwader 32, Lechfeld
06/2004 - 06/2005	*Studium National Security Affairs* U.S. Naval Postgraduate School, Monterey, California
07/2005 - 06/2007	*Leiter Studentenfachbereich A* Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg
seit 07/2007	*Kommandeur Technische Gruppe* Fliegerisches Ausbildungszentrum der Luftwaffe, Holloman AFB, New Mexico